



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, _____ 26 MARZO 2021 _____

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

____ JUAN CAMILO SALAS DIAZ _____, con C.C. No. ____ 1075.286.053 _____,

_____, con C.C. No. _____,

_____, con C.C. No. _____,

_____, con C.C. No. _____,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o _____

Titulado LOCALIZACIÓN ESPACIAL Y FASE DE FOTONES EMITIDOS POR UNA CAVIDAD MULTIMODO

presentado y aprobado en el año ____ 2021 _____ como requisito para optar al título de

____ DE FISICO _____;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS**



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: JUAN CAMILO SALAS DIAZ

:

Firma: *Juan Camilo Salas* _

:

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Localización Espacial y Fase de Fotones Emitidos por una Cavidad Multimodo

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Salas díaz	Juan camilo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Rasero Causil	Diego Alejandro

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Físico

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Programa de Física

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2021 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 36

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_x___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros___

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Lector de PDF

MATERIAL ANEXO: Sin Anexos

PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>		
1. campo cuantizado	quantized field	6.	_____
2. cavidad	cavity	7.	_____
3. óptica	optics	8.	_____
4. cuántica	quantum	9.	_____
5. sistema	system	10.	_____

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este Trabajo de Grado se calcularon propiedades de localización espacial y de fase de fotones emitidos espontáneamente por átomos confinados en una cavidad óptica multimodo. El modelo propuesto es totalmente cuántico: el átomo es considerado como un sistema de dos niveles y el campo de cavidad esta cuantizado.

Aunque el estado de los fotones no puede representarse a través de funciones de onda en el espacio de posiciones, se puede hacer una descripción de sus propiedades espaciales en términos del valor esperado del operador de campo eléctrico, que si esta espacialmente Localizado y se propaga a la velocidad de la luz. Adicionalmente, las propiedades de fase se estudiaron a través de los valores esperados de intensidad proponiendo que los fotones interfieren consigo mismos después de reflejarse en las paredes de la cavidad.



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this Degree Project, spatial and phase location properties of photons spontaneously emitted by atoms confined in a multimode optical cavity were calculated. The proposed model is totally quantum: the atom is considered as a two-level system and the cavity field is quantized.

Although the state of the photons cannot be represented through wave functions in the space of positions, a description of their spatial properties can be made in terms of the expected value of the electric field operator, which if it is spatially located and propagates to The speed of light. Additionally, the phase properties were studied through the expected intensity values, proposing that the photons interfere with themselves after reflecting off the cavity walls.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

CÓDIGO	AP-BIB-FO-07	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	4 de 4
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: Daniel Suescun Díaz

Firma: *Daniel Suescun D*

Nombre Jurado: Miguel Cristancho Fierro

Firma: 

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA



**Localización Espacial y Fase de Fotones Emitidos por
un Átomo Confinado en una Cavidad Multimodo**

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Desarrollado por: Juan Camilo Salas Diaz

Código: 20131118710

Firma: *juan camilo salas*

Director: Diego Alejandro Rasero Causil

Firma: *diego rasero*

Área: Óptica Cuántica

Neiva-Huila
11 de febrero de 2021

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a la Fundación Centro de Investigación en Ciencias y Recursos Geo-Agroambientales (CENIGAA), a mis maestros de Física de la Universidad Surcolombiana quiénes han sido un apoyo importante dentro de mi formación académica y profesional, a mi madre y a mi esposa que me enseñaron a ser un hombre, y a la física que me enseñó a ser libre.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por guiarme en mi camino y por permitirme concluir con mi objetivo.

A mi madre y a mi abuela que a través de su amor, paciencia, buenos valores me ayudaron a encontrar el camino que hoy me trajo hasta aquí.

A mi padre por enseñarme el sentido de continuar por el objetivo sin importar la adversidad.

A mi esposa por ser el apoyo incondicional en mi vida, que con su amor y respaldo, me ayuda alcanzar mis objetivos.

Al Magister en hidrosistemas Jorge Ivan Chavarro Diaz que por medio de su confianza y a quien le debo su apoyo incondicional el cual me ha facilitado los caminos para seguir adelante sin dudar de mis capacidades.

A mi director de Trabajo de Grado, Diego Alejandro Rasero Causil, por enseñarme con dedicación y paciencia a lo largo de mi carrera áreas en áreas como Teoría Electromagnética, Mecánica Cuántica I, Mecánica Cuántica II, Óptica Cuántica y Física de Estado Sólido.

A mi maestro y en esta oportunidad Jurado el PhD. Daniel Suescún Diaz, por sus tantos concejos en clase de computacional, software, física matemática I, y su impecable clase de física nuclear en donde aprendí que los físicos tenemos la mayor autoridad para hablar de energía.

A mi maestro el PhD. Hernando Gonzales Sierra quien fue el primero en recibirme como estudiante de física y darme las herramientas fundamentales y necesarias para poder culminar con el objetivo.

A mi maestro el Dr. Francis Armando Segovia Chaves por mostrarme que el trabajo duro y consiente al final siempre trae recompensa, por guiarme y ayudarme a sacar lo mejor de mí en las diferentes áreas como Física matemática I, II y Física Estadística.

A mi maestro y amigo el Magister Carlos Cuellar, Por tener siempre un espacio para mis ideas y ser alguien incondicional para muchos compañeros de Física.

RESUMEN

En este Trabajo de Grado se calcularon propiedades de localización espacial y de fase de fotones emitidos espontáneamente por átomos confinados en una cavidad óptica multimodo. El modelo propuesto es totalmente cuántico: el átomo es considerado como un sistema de dos niveles y el campo de cavidad está cuantizado.

Aunque el estado de los fotones no puede representarse a través de funciones de onda en el espacio de posiciones, se puede hacer una descripción de sus propiedades espaciales en términos del valor esperado del operador de campo eléctrico, que si está espacialmente localizado y se propaga a la velocidad de la luz. Adicionalmente, las propiedades de fase se estudiaron a través de los valores esperados de intensidad proponiendo que los fotones *interfieren consigo mismos* después de reflejarse en las paredes de la cavidad.

Estas reflexiones están descritas en el capítulo de resultados en donde se evidencian el comportamiento de las mismas y el patrón de onda que exhiben, como también las visualizaciones del valor esperado del cuadrado del operador campo eléctrico en función de la posición estas representación se hicieron para un numero de modos igual a 299 y para un solo modo, aunque la mejor visualización y exhibición de propiedades físicas se notan para el primer caso respectivamente, en el segundo caso será una analogía del modelo de Jaynes - Cummings el cual es un modelo teórico en óptica cuántica en el que se describe el sistema de un átomo de dos niveles que interactúa con un modo cuantizado de una cavidad óptica, con o sin presencia de luz. Como se menciona a lo largo del documento, con ello se realizan así un variedad de representaciones graficas en donde se varían los tiempo del sistema en estudio, simultaneo a esto también mostramos la relación entre la amplitud del estado excitado y sin fotón en función del tiempo, puesto que el estado del sistema evoluciona hacia una combinación lineal de los estados base.

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
2. OBJETIVOS	4
2.1. OBJETIVOS	4
2.1.1. Objetivo General	4
2.1.2. Objetivos Específicos	4
3. JUSTIFICACIÓN	5
4. MÉTODOS TEÓRICOS DE SOLUCIÓN	7
4.1. Física del Sistema: Hamiltoniano, Estados y Operadores	7
4.1.1. Aspectos Generales	7
4.1.2. Hamiltoniano del Campo	8
4.1.3. Operador Campo Eléctrico	8
4.1.4. Hamiltoniano del Átomo	10
4.1.5. Hamiltoniano de Interacción	10
4.1.6. Hamiltoniano Total	12
4.1.7. Cálculo de Observables	12
4.2. Campo Mononodo y Sistema de Dos Niveles	15
4.2.1. Hamiltoniano	15
4.2.2. Valores y Estados Propios	16
4.2.3. Evolución Temporal del Estado	17
4.2.4. Valor Esperado del Número de Fotones	18
4.2.5. Valor Esperado del Cuadrado del Campo Eléctrico	18
5. RESULTADOS	20
6. CONCLUSIONES	27

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

A finales del siglo XIX la física se encontraba en un punto en la que se pensaba tener una respuesta al porqué de los acontecimientos y a la descripción del mundo que nos rodea. Esto fue en parte provocado por la corriente de pensamiento positivista que empezó a tomar fuerza en aquella época.

Los físicos, centrados en los resultados más relevantes de Principia Mathematica de Newton y el electromagnetismo de Maxwell, sumado a los avances de la mecánica y termodinámica estadística se encontraban estudiando y desarrollando los fenómenos más desafiantes para su época. Pero en el camino aparecieron varios problemas, uno en especial era el cálculo de la intensidad de radiación a una longitud de onda dada proveniente de una cavidad caliente. En 1879 el físico austriaco Josef Stefan encontró experimentalmente que la potencia total emitida por unidad de área a todas las frecuencias por un cuerpo sólido era proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Luego, cinco años después, Boltzmann dedujo la ley de Stefan a partir de la combinación de la termodinámica y las ecuaciones de Maxwell. Fue otro punto importante para la confirmación de las leyes de Maxwell. Veinte años después de que el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff empezara la búsqueda de la fórmula de la función universal, Wilhelm Wien propuso una forma general para el comportamiento correcto de la longitud de onda con la temperatura. Era la Ley del desplazamiento de Wien, poco tiempo después se demuestra que aquella ley fracasa en algunas regiones.

Max Planck sabía que la ley de Wien coincidía bastante bien con los datos a altas frecuencias y, de hecho, había estado trabajando arduamente durante varios años en la deducción de la ley exponencial de Wien a partir de los principios de la mecánica estadística y de las leyes de Maxwell. En octubre de 1900, al interpolar entre el límite de las dos formas (la ley exponencial de Wien y la densidad de energía proporcional a la temperatura), encontró de inmediato una fórmula general. Esto implicaba mucho más que una manipulación matemática inteligente [ANB18].

En una reunión de la Sociedad Alemana de Física, el 14 de diciembre de 1900, Planck presentó un trabajo titulado " *La teoría de la ley de distribución de energías del espectro normal*". Este trabajo que en un principio atrajo poca atención, fue el precursor de una revolución en la física. La fecha de su presentación se considera como el nacimiento de la física cuántica, a pesar de que fue hasta un cuarto de siglo después, cuando Schrodinger y otros desarrollaron la mecánica cuántica moderna, base del conocimiento actual [ERA⁺94]. Planck sospechaba de que la radiación de cuerpo negro era producida por

cargas eléctricas submicroscópicas en vibración, que llamó *resonadores*. Tomo como punto de partida que las paredes de una cavidad luminosa estaban compuestas por billones de resonadores, cuyo origen era un interrogante hasta ese momento, todos vibrando con frecuencias diferentes. De esa forma, basado en el electromagnetismo de Maxwell, cada oscilador debía emitir radiación con una frecuencia correspondiente a su frecuencia de vibración. Según la teoría clásica de Maxwell, un oscilador de frecuencia ν podría tener cualquier valor de energía y cambiar su amplitud de manera continua a medida que radiase cualquier valor de su energía. Es aquí donde Planck planteó su revolucionaria idea. A fin de asegurarse que se coincidiera con los experimentos, Planck debió suponer que la energía total de un resonador con frecuencia mecánica ν sólo podría ser múltiplo entero de $\hbar\nu$, o bien, $E = n\hbar\nu$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$, donde \hbar es una constante fundamental de la mecánica cuántica. Además concluyó que se emitía radiación de frecuencia ν cuando un resonador caía al siguiente estado energético más bajo. Por tanto, el resonador puede cambiar su energía solo por la diferencia ΔE , según $\Delta E = \hbar\nu$, es decir, no puede perder cualquier cantidad de su energía total, sino solo una cantidad finita, $\hbar\nu$, denominada cuanto de energía. A pesar de que el planteamiento de Planck fue fascinante, fue tomado como una especie de “*revolucionario recio*”. El desarrollo de Planck era visto más bien como un recurso desesperado de cálculo y, además válido solo en caso de radiación de cuerpo negro. Fue hasta el año de 1905 cuando Albert Einstein demuestra que la luz en sí misma estaba cuantizada y de esa manera consiguió el siguiente desarrollo más importante de la física cuántica, donde se propuso la teoría de los cuantos de luz y explicó el efecto fotoeléctrico, Einstein planteo que aunque la teoría de Maxwell funcionaba al describir la propagación de la luz por el espacio durante largos intervalos de tiempo, se necesitaba de una teoría diferente para describir las interacciones momentáneas de la luz y la materia, como en el caso de la emisión de luz por osciladores o la transformación de la energía luminosa en energía cinética del electrón.

A pesar de que Einstein introdujo desde 1905 el concepto de que la luz está compuesta por cuantos puntuales de energía, no planteo la cantidad de movimiento como ente transportador de luz. La descripción teórica de las colisiones fotón-partícula fue presentada por Peter Debye y Arthur Compton en 1923, ambos se percataron de forma independiente que la dispersión de fotones de rayos X a partir de electrones podría explicarse al considerar a los fotones como partículas puntuales con energía $\hbar\nu$ y cantidad de movimiento, y al conservar la energía y la cantidad de movimiento relativistas del par fotón-electrón en una colisión. Este extraordinario desarrollo completó la representación corpuscular de la luz, al demostrar que los fotones, además de transportar energía, $\hbar\nu$, transportan cantidad de movimiento, y se dispersan como partícula [SMM10].

Bohr recurrió al trabajo de Planck y Einstein como fuentes correctas de la teoría de los sistemas atómicos. Superó la idea clásica del electrón que continuamente pierde energía al aplicar las ideas de Planck sobre los niveles de energía cuantizados a los electrones atómicos en órbita, Así postuló que los electrones en los átomos por lo general están confinados en ciertos niveles energéticos y órbitas estables, no radiantes, conocidos como estados estacionarios. Aplicó el concepto de Einstein del fotón para obtener una expresión para la frecuencia de la luz emitida cuando un electrón salta de un estado estacionario a otro. Por lo tanto, si $\Delta E = \hbar\nu$ es la separación entre dos posibles estados electrónicos estacionarios, donde \hbar es la constante de Planck y ν es la frecuencia de la luz emitida sin importar la frecuencia del movimiento orbital del electrón [ERA⁺94].

Poco tiempo después Louis Víctor De Broglie en 1923 en su disertación doctoral postuló que, debido a que los fotones poseen características ondulatorias y corpusculares, quizá todas las formas de la materia también tengan propiedades ondulatorias y corpusculares. Según De Broglie, los electrones poseen una naturaleza dual partícula-onda. Acompañado a cada electrón había una onda (no una onda electromagnética) que guiaba o piloteaba al electrón a través del espacio, con esto se concluyó que la longitud de onda y la frecuencia de una onda de materia, asociada a cualquier objeto en movimiento, estaba dado por $\lambda = \frac{h}{p}$, donde h es la constante de Planck y p es la cantidad de movimiento relativista. Esta propuesta de De Broglie permitió explicar de mejor manera los postulados de Bohr, analizándolos desde el punto de vista ondulatorio [AAAC⁺14].

Con la descripción de De Broglie y la esencia dual onda-partícula de los entes cuánticos que son discutidos desde el siglo pasado y propuestos en al menos todos las referencias introductorias a la física moderna y a la mecánica cuántica, se entre ve que el comportamiento dual de la radiación debería ser igualmente aplicable a la materia, de la misma forma como el fotón tiene asociado una onda de luz que gobierna su movimiento ya que los mismos son descritos como los objetos más simple que pueden ser desarrollados en una teoría cuantizada teniendo en cuenta que el universo consiste en general, de radiación y materia , es por ello que la sugerencia de De Broglie es esencialmente una afirmación acerca de una gran simetría de la naturaleza ([ERA⁺94]).

En este Trabajo de Grado desarrollamos una teoría simple completamente cuantizada de la emisión espontánea e ilustramos gráficamente algunas de las propiedades del campo electromagnético. Para ello comenzamos recordando la descripción semi-clásica de interacción Átomo-Campo incluyendo la "regla de oro de Fermi" (golden rule of Fermi) y las oscilaciones de Rabi hasta llegar a modelo totalmente cuantizado de Jaynes-Cummings. Finalmente se calculan las propiedades de localización espacial y de fase de fotones emitidos espontáneamente por átomos confinados en una cavidad óptica multimodo. Consideramos el campo que emite espontáneamente un átomo de dos niveles en una posición determinada en la cavidad óptica multimodo unidimensional. Se asume que el átomo está inicialmente en el nivel excitado y debido al acoplamiento con con la cavidad, potencialmente puede emitir un fotón en cualquiera de los modos de la cavidad. En este caso, el estado del sistema evoluciona de un átomo excitado sin fotones a una combinación lineal del sistema en el estado inicial y todos los estados de un fotón. Debemos tener en cuenta que el átomo se encuentra en el interior de la cavidad y esto hace que los cálculos se tornen más sencillos en cierto modo, así como las paredes de la cavidad generan reflexiones que hacen que la radiación retorne al átomo emisor, y en algunas ocasiones interfiere consigo mismo a lo largo del camino [LO02].

El Trabajo también pretende proporcionar un complemento a la discusión sobre el concepto de fotón. En este sentido, siguiendo a [MI96], podemos considerar que la palabra "LUZ", tal como se usa normalmente, es una "PALABRA CLÁSICA" referida a cosas que imaginamos que tienen una realidad objetiva entre eventos de observación. Sabemos por nuestra experiencia con la mecánica cuántica que esta realidad imaginada es solo una aproximación, generalmente muy buena. La palabra "FOTÓN", sin embargo, es una "PALABRA CUÁNTICA" que describe un fenómeno para el que ningún carácter clásico es adecuado [MI96].

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1. OBJETIVOS

2.1.1. Objetivo General

- Calcular propiedades de localización espacial y fase de fotones emitidos espontáneamente por un átomo confinado en una cavidad unidimensional multimodo.

2.1.2. Objetivos Específicos

- Calcular valores esperados del operador número de fotones en el sistema.
- Calcular valores esperados del operador campo eléctrico.

Capítulo 3

JUSTIFICACIÓN

La óptica cuántica es el estudio de las características y propiedades intrínsecamente cuánticas de la luz, a partir de este desarrollo se describe un conjunto de aspectos fundamentales de la mecánica cuántica, como la coherencia y entrelazamiento cuántico. Esta derivación de la mecánica cuántica convencional nos ayuda a desatar, tanto directa como indirectamente al surgimiento de nuevas tecnologías cuánticas, cuyo objetivo es explotar los efectos cuánticos no clásicos en aplicaciones que van desde la distribución de claves cuánticas, computación cuántica hasta interacción de radiación-materia la cual es el eje central de este Trabajo de Grado [BBMK17].

La motivación principal para el desarrollo de este trabajo, en esta área en específico, parte de que la comprensión conceptual de la radiación electromagnética cuantizada (fotones) se dificulta por al menos dos factores:

1. Los vectores de estado cuántico de los fotones no tienen representaciones en el espacio de posición. Esto significa no existen las funciones de onda, en la representación de coordenadas, de la mecánica cuántica no relativista para los fotones [MW95]. Por lo tanto, no hay una cantidad análoga a $|\psi(\vec{r})|^2$ que pueda interpretarse como una densidad de probabilidad para encontrar al fotón en algún lugar del espacio.
2. La definición de un operador cuántico correspondiente a la fase clásica de una onda electromagnética ha tenido diversas dificultades [Ors00].

Sin embargo, estos problemas se pueden evitar investigando otras cantidades mecánico-cuánticas que proporcionen información relacionada con los conceptos clásicos de fase y localización espacial.

Así, en este Trabajo de Grado, se proporciona un modelo totalmente cuántico de la *emisión espontánea* de fotones por un átomo confinado en una cavidad unidimensional multimodo.

Como segunda motivación se busca integrar la óptica cuántica como banco de soluciones para los problemas de los sectores productivos del Departamento del Huila, ya que la interacción de radiación-materia es uno de los puntos claves a la hora de tratar temas como la seguridad alimentaria, y producción de alimentos bajo entornos controlados como invernaderos inteligentes, todo esto en busca de optimizar la producción de alimentos y entender fenómenos de funcionamiento de cultivos donde la física puede jugar un papel

importante a estos cuestionamientos.

Aunque este Trabajo de Grado en física a nivel de pregrado trata del caso más simple de interacción radiación-materia (emisión espontánea de fotones por un átomo confinado en una cavidad Unidimensional multimodo) no deja de ser un punto de partida a la hora de proponer soluciones alternativas a las problemáticas de todos los sectores productivos de la región, todo esto con miras a continuar con este tipo de investigaciones a nivel maestría y doctorado dando de esa forma una descripción más elevada en la que se pueda afrontar este tipo de problemas.

Capítulo 4

MÉTODOS TEÓRICOS DE SOLUCIÓN

En esta sección se presenta Los fundamentos físicos y matemáticos necesarios para la construcción de la teoría que nos permita cumplir con los objetivos trazados en este documento, aquí se desarrollan temas como la construcción del Hamiltoniano total y la definición de los estados bases los cuales son la estructura principal de nuestra descripción, a partir de esto se describe la localización espacial y fase de fotones emitidos por átomos confinados en una cavidad óptica multimodo.

4.1. Física del Sistema: Hamiltoniano, Estados y Operadores

4.1.1. Aspectos Generales

El sistema que estudiamos está constituido por un átomo de dos niveles (estado base $|g\rangle$ y el estado excitado $|e\rangle$) dentro de una cavidad óptica multi-modo unidimensional. La energía de separación entre los dos niveles está dada por $E_{|e\rangle} - E_{|g\rangle} = \hbar w_{eg}$. La cavidad se extiende desde $x = 0$ a $x = L$, con espejos de alto índice de reflectancia en cada extremo, y el átomo está fijado en la posición x_a .

En nuestro trabajo, algunos modos del campo tendrán frecuencias muy cercanas a la frecuencia de resonancia del átomo de dos niveles. La resonancia ocurre cuando la frecuencia de uno de los modos del campo coincide con la frecuencia de transición del sistema de dos niveles. Por ejemplo, puede suceder que $w_1 = w_{eg}$ por tanto el modo del campo caracterizado por $n = 1$ entra en resonancia con el sistema de dos niveles provocando una transición del estado base al estado excitado (asumiendo que el estado inicial del átomo es el estado base). Cuando $w_1 \neq w_{eg}$ no ocurre transición.

Es conveniente enumerar los modos con respecto al modo más cercano a la frecuencia de resonancia atómica debido a que, como se dijo antes, las transiciones ocurren en la resonancia. Además, es más probable que un modo con frecuencia más cercana a la resonancia atómica provoque una transición (comparado con un modo de frecuencia más alejada a la resonancia). Así, es mejor ordenar los modos (cambiar el punto de referencia u origen para contar los modos) de tal forma que empecemos con los más cercanos a la

resonancia antes que con los más distantes (que tienen muy poca probabilidad de provocar transiciones). Denotamos el modo más cercano a la resonancia con el *número de modo* j_0 y frecuencia w_0 .

La diferencia de frecuencias entre el modo del campo y el átomo será llamada *detuning*. Para el primer modo más cercano el detuning está dado por

$$\delta_0 = w_0 - w_{eg}. \quad (4.1)$$

Si el detuning es pequeño, estamos más cerca a la resonancia.

Los números de modo para modos generales se escriben en términos de su separación del modo más resonante como $n = j_0 + j$, donde j es un entero. Aquí, asumiremos que la frecuencia de resonancia es mucho mayor que la diferencia de frecuencias entre modos de cavidad o sea $w_{eg} \gg \Delta_c$. Existirán muchos modos del campo electromagnético con frecuencias muy cercanas a la frecuencia del modo j_0 por ejemplo, si $w_{eg} = 10000$ unidades apropiadas, $\Delta_c = 0.001$ unidades apropiadas y $w_0 = 9999$ unidades apropiadas.

4.1.2. Hamiltoniano del Campo

El Hamiltoniano de campo libre está escrito en términos de productos de operadores creación y destrucción para cada modo y es equivalente a la suma de Hamiltonianos de osciladores armónicos independientes:

$$\hat{H}_{\text{campo}} = \sum_j \hbar w_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (4.2)$$

Así, cada modo es tratado como un oscilador armónico cuántico.

De acuerdo a la cuantización del campo electromagnético los modos de la cavidad son tratados como osciladores armónicos cuantizados, y los estados propios del campo libre son denotados por el número de ocupación de modos individuales.

En este Trabajo de Grado nos restringimos a las situaciones en las que se tiene 1 ó 0 fotones en el campo, o sea que ningún modo puede tener 2 o más fotones, por lo que tendremos dos casos: (a) todos los numero de ocupación son 0 y (b) uno de los numero de ocupación es 1 y los demás son 0.

En general, usaremos la siguiente notación:

$$|n_1, n_2, n_3, \dots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, \dots\rangle, \quad (4.3)$$

donde n_j es el número de fotones en el modo j . Por ejemplo, $|0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots\rangle$ significa que todos los modos tienen 0 fotones. Para este caso abreviaremos la notación escribiendo $|0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots\rangle = |\emptyset\rangle$.

Por otro lado, $|0, 0, 0, \dots, 0, n_j = 1, 0, \dots\rangle = |j\rangle$ significa que existe 1 fotón en el modo j , y en los demás modos hay 0 fotones.

4.1.3. Operador Campo Eléctrico

Los modos electromagnéticos clásicos del sistema tienen dependencia espacial de la forma

$$E(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (4.4)$$

donde n es un número entero positivo y la frecuencia angular de los modos está determinada por

$$w_n = ck = \frac{n\pi c}{L}, \quad (4.5)$$

en la que c es la velocidad de la luz y $k = n\pi/L$ es el número de onda.

Además, los modos están igualmente separados con una diferencia de frecuencia angular:

$$\Delta_c = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi c}{L} - \frac{n\pi c}{L} = \frac{\pi c}{L} \quad (4.6)$$

Debe recordarse que el concepto de modo hace referencia a que en general un modo corresponde a una configuración de oscilación, caracterizada por un valor de frecuencia, amplitud y polarización.

El operador campo eléctrico es una suma sobre términos para cada modo. Cada término presenta una dependencia espacial sinusoidal idéntica a la estructura de modo clásico

$$\hat{E}(x) = \sum_j C_j (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right], \quad (4.7)$$

donde

$$C_j = \left(\frac{\hbar w_j}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2}, \quad (4.8)$$

V es el volumen efectivo ocupado por el modo, y ϵ_0 es la permitividad del espacio libre. Como se mencionó antes, se asume que la frecuencia de resonancia atómica w_{eg} es mucho mayor que la separación entre modos Δ_c . Esto implica que el factor C_j no varía significativamente para los modos que nos interesan (los más cercanos a la resonancia), y podemos asumir que dicho factor es constante para todos los modos:

$$C_j \approx C = \sqrt{\frac{\hbar w_{eg}}{\epsilon_0 V}}. \quad (4.9)$$

Clásicamente, la densidad de energía del campo es proporcional a E^2 , el análogo mecánico cuántico es el valor esperado del operador $\hat{E}^2(x) = \hat{E}(x)\hat{E}(x)$. Utilizando la ecuación (4.7) tenemos

$$\begin{aligned} \hat{E}^2(x) &= \left(\sum_j C (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \right) \left(\sum_{j'} C (\hat{a}_{j'} + \hat{a}_{j'}^\dagger) \sin \left[(j'_0 + j') \frac{\pi x}{L} \right] \right) \\ &= \sum_{jj'} C^2 \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \sin \left[(j'_0 + j') \frac{\pi x}{L} \right] (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) (\hat{a}_{j'} + \hat{a}_{j'}^\dagger) \\ &= \sum_{jj'} C^2 \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \sin \left[(j'_0 + j') \frac{\pi x}{L} \right] (\hat{a}_j \hat{a}_{j'} + \hat{a}_j \hat{a}_{j'}^\dagger + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'} + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'}^\dagger), \quad (4.10) \end{aligned}$$

pero $[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}$ [GK05], así que $[\hat{a}_j, \hat{a}_{j'}^\dagger] = \hat{a}_j \hat{a}_{j'}^\dagger - \hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_j = \delta_{j,j'}$ tal que $\hat{a}_j \hat{a}_{j'}^\dagger = \delta_{j,j'} + \hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_j$.

Reemplazando este resultado en (4.10):

$$\begin{aligned}\hat{E}^2(x) &= \sum_{jj'} C^2 \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \sin \left[(j'_0 + j') \frac{\pi x}{L} \right] (\hat{a}_j \hat{a}_{j'} + \delta_{j,j'} + a_j^\dagger a_{j'}^\dagger + \hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'}) \\ &= \sum_{jj'} C^2 \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \sin \left[(j'_0 + j') \frac{\pi x}{L} \right] (\hat{a}_j \hat{a}_{j'} + 2\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'} + \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'}^\dagger + \delta_{j,j'}),\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde hemos usado el hecho de que j y j' corren sobre los mismos valores, y por tanto $\hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j'}$.

4.1.4. Hamiltoniano del Átomo

Consideramos el caso más simple: un átomo de un sólo electrón que únicamente puede realizar transiciones entre dos estados de energía; el estado base $|g\rangle$ y el estado excitado $|e\rangle$. La energía del electrón en los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$ está dada por:

$$\hat{H}_{\text{átomo}}|g\rangle = E_{|g\rangle}|g\rangle, \quad \hat{H}_{\text{átomo}}|e\rangle = E_{|e\rangle}|e\rangle, \quad (4.12)$$

donde $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ forma una base ortonormal y completa.

Si el cero de energía se coloca en el estado $|g\rangle$,

$$E_{|g\rangle} = 0, \quad E_{|e\rangle} = \hbar\omega_{eg} \quad (4.13)$$

La representación matricial de $\hat{H}_{\text{átomo}}$, en la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ es

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \begin{pmatrix} H_{a_{11}} & H_{a_{12}} \\ H_{a_{21}} & H_{a_{22}} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

con

$$\begin{aligned}H_{a_{11}} &= \langle e|\hat{H}_{\text{átomo}}|e\rangle = \hbar\omega_{eg}, & H_{a_{12}} &= \langle e|\hat{H}_{\text{átomo}}|g\rangle = 0, \\ H_{a_{21}} &= \langle g|\hat{H}_{\text{átomo}}|e\rangle = 0, & H_{a_{22}} &= \langle g|\hat{H}_{\text{átomo}}|g\rangle = 0,\end{aligned}$$

Entonces

$$\hat{H}_{\text{átomo}} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{eg} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_{eg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_{eg} \hat{\sigma}_3, \quad (4.15)$$

donde $\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e|$.

4.1.5. Hamiltoniano de Interacción

En la aproximación dipolar eléctrica la interacción átomo-campo está determinada por el Hamiltoniano de interacción:

$$\hat{H}_{\text{interacción}} = -e\hat{E} \cdot r = \hat{E} \cdot \hat{d}, \quad (4.16)$$

donde \hat{d} es el operador de dipolo eléctrico. Este conecta los estados base y excitado del átomo y puede escribirse como:

$$\hat{d} = \hbar(d_{eg}\hat{\sigma}_+ + d_{eg}^*\hat{\sigma}_-). \quad (4.17)$$

En esta ecuación, d_{eg} es el elemento de la matrix de dipolo entre los estados base y excitado, $\hat{\sigma}_+$ y $\hat{\sigma}_-$ son los operadores de excitación y des-excitación del átomo (son los operadores de *pseudo-spin* escalera que aparecen en la teoría de momento angular de spin 1/2. Lo que permite concluir que un átomo de dos niveles es equivalente a un sistema de spin 1/2). Están definidos de la siguiente manera:

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g|, \quad (4.18a)$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e|, \quad (4.18b)$$

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| = \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+. \quad (4.18c)$$

De esta manera, usando (4.7) y (4.17) en (4.16), podemos escribir el Hamiltoniano de interacción en términos de los operadores creación y destrucción de fotones, y operadores excitación y des-excitación del átomo como:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{interacción}} &= \left(\sum_j C(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x_a}{L} \right] \right) (d_{eg} \hat{\sigma}_+ + d_{eg}^* \hat{\sigma}_-), \\ &\approx \sum_j (C d_{eg} \hat{a}_j \hat{\sigma}_+ + C d_{eg}^* \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_-) \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x_a}{L} \right], \\ &= \sum_j (\hbar \Omega \hat{a}_j \hat{\sigma}_+ + \hbar \Omega^* \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma}_-) \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x_a}{L} \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde

$$C d_{eg} = \sqrt{\frac{w_{eg} \hbar}{\epsilon_0 V}} d_{eg} = \hbar \sqrt{\frac{w_{eg}}{\hbar \epsilon_0 V}} d_{eg} = \hbar \Omega, \quad \text{con } \Omega = \sqrt{\frac{w_{eg}}{\hbar \epsilon_0 V}} d_{eg} \quad (4.20)$$

La aproximación de onda rotante muestra la existencia de dos términos de interacción, uno de estos términos no conservan la energía ya que tenemos términos como $\hat{\sigma}_- \hat{a}_j$ que indica que se destruye un fotón al tiempo que se des excita el átomo, y $\hat{\sigma}_+ \hat{a}_j^\dagger$ el cual indica que se excita el átomo al tiempo que se crea un fotón. Estos tipos de términos son los denominados términos anti resonante, que para esta descripción no se tendrán en cuenta ya que debemos recordar que nuestra sistema no interacciona con agentes externos ni con algún tipo de ente que hagan posible estos fenómenos, el otro termino si conserva la enrgia el cual es expuesto en el Hamiltoniano (4.19) donde solo aparecen los términos rotantes :

- $\hat{\sigma}_+ \hat{a}_j$, asociado al proceso de absorción (destrucción) de un fotón y la consecuente transición del átomo del estado base al estado excitado (excitación del átomo),
- $\hat{\sigma}_- \hat{a}_j^\dagger$, asociado al proceso de emisión (creación) de un fotón acompañado de la transición del átomo del estado excitado al estado base (des-excitación del átomo).

Este Hamiltoniano es una versión multimodo generalizada de la interacción *standard* presentada en varias referencias de óptica cuántica [GK05, MS91, SSL74].

4.1.6. Hamiltoniano Total

A partir de (4.2), (4.15) y (4.19), nuestro Hamiltoniano total tendrá la estructura:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{total}} &= \hat{H}_{\text{atomo}} + \hat{H}_{\text{campo}} + \hat{H}_{\text{interacción}} \\ &= \hbar w_{eg} \hat{\sigma}_3 + \sum_j \hbar w_j \left(\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \sum_j \hbar (\Omega \hat{\sigma}_+ \hat{a}_j + \Omega^* \hat{\sigma}_- \hat{a}_j^\dagger) \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x_a}{L} \right]\end{aligned}\quad (4.21)$$

La suma sobre j incluye todos los modos de la cavidad y para $w_{eg} \gg \Delta_c$, ésta será efectivamente una suma de un número infinito de términos.

La base de estados del sistema combinado átomo-campo está dada por el producto directo de estados del átomo y estados del campo. Por tanto, una base apropiada es $\{|e, \emptyset\rangle, |g, j\rangle\}$, donde

$$|e; \emptyset\rangle = |e\rangle \otimes |\emptyset\rangle = |e, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\rangle \quad (4.22)$$

$$|g; j\rangle = |g\rangle \otimes |j\rangle = |g, 0, 0, 0, \dots, 0, n_j = 1, 0, \dots, 0, 0, 0\rangle \quad (4.23)$$

La expresión (4.22) indica que el átomo está en el estado excitado y no hay fotones en el campo de radiación. De manera similar, (4.23) indica que el átomo está en el estado base y existe un fotón en el modo j del campo de radiación.

4.1.7. Cálculo de Observables

Consideramos que en el instante inicial el átomo se encuentra en el estado excitado y el campo en el estado vacío, es decir,

$$\langle \Psi(0) \rangle = \langle e; \emptyset \rangle. \quad (4.24)$$

El estado del sistema evoluciona como una combinación lineal de los estados de la base $\{|e; \emptyset\rangle, |g; j\rangle\}$ de acuerdo a

$$\langle \Psi(t) \rangle = C_e(t) \langle e; \emptyset \rangle + \sum_j C_{g,j}(t) \langle g; j \rangle. \quad (4.25)$$

Con la descripción desarrollada hasta el momento, podemos encontrar las cantidades físicas relacionadas con los objetivos propuestos. Estas cantidades son:

1. La amplitud dependiente del tiempo de que el átomo se encuentre en el estado excitado sin modos del campo excitados,

$$C_e(t) = \langle e; \emptyset | \Psi(t) \rangle. \quad (4.26)$$

2. Las amplitudes dependientes del tiempo de que un fotón se encuentre en uno de los modos de la cavidad,

$$C_{g,t}(t) = \langle g; j | \Psi(t) \rangle. \quad (4.27)$$

3. El valor esperado del cuadrado del operador campo eléctrico, $\langle \Psi(t) | \hat{E}^2(x) | \Psi(t) \rangle$.
 Con esta cantidad se hará la descripción de la localización y fase del fotón.

Para solucionar este problema se procede a encontrar los estados y energías propias del Hamiltoniano total y después a proyectar el estado inicial del sistema en el espacio de estados propios. A continuación describimos este proceso.

El q -ésimo estado propio con energía ε_q se escribe como la combinación lineal

$$|\varepsilon_q\rangle = d_e^{(q)}|e; \emptyset\rangle + \sum_j d_{g,j}^{(q)}|g; j\rangle \quad (4.28)$$

donde $d_e^{(q)}$ y $d_{g,j}^{(q)}$ son constantes independientes del tiempo.

Para encontrar la evolución temporal del sistema, que inicialmente se encuentra en el estado $|\Psi(0)\rangle$, proyectamos el estado inicial en el espacio de estados propios del Hamiltoniano

$$|\Psi(0)\rangle = |e; \emptyset\rangle = \sum_q |\varepsilon_q\rangle \langle \varepsilon_q | \Psi(0) \rangle. \quad (4.29)$$

Además, la evolución temporal del estado del sistema está determinado por

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}_{total}t/\hbar} \sum_q \langle \varepsilon_q | e; \emptyset \rangle |\varepsilon_q\rangle \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$= \sum_q \langle \varepsilon_q | e; \emptyset \rangle e^{-i\hat{H}_{total}t/\hbar} |\varepsilon_q\rangle \quad (4.31)$$

$$= \sum_q \langle \varepsilon_q | e; \emptyset \rangle e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} |\varepsilon_q\rangle \quad (4.32)$$

$$= \sum_q e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} |\varepsilon_q\rangle \langle \varepsilon_q | e, \emptyset \rangle. \quad (4.33)$$

Usando la ecuación (4.28), y el hecho de que $\langle e; \emptyset | \varepsilon_q \rangle = d_e^{(q)}$ y $\langle g; j | \varepsilon_q \rangle = d_{g,j}^{(q)}$, llegamos a

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_q e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} \left(|e; \emptyset\rangle d_e^{(q)} + \sum_j |g; j\rangle d_{g,j}^{(q)} \right) d_e^{(q)*} \\ &= \left(\sum_q e^{-i\varepsilon_q(t)/\hbar} |d_e^{(q)}|^2 \right) |e; \emptyset\rangle + \left(\sum_{j,q} e^{-i\varepsilon_q(t)/\hbar} d_{g,j}^{(q)} d_e^{(q)*} \right) |g; j\rangle, \end{aligned} \quad (4.34)$$

de esta manera:

$$C_e(t) = \langle e, \emptyset | \Psi(t) \rangle = \sum_q e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} |d_e^{(q)}|^2, \quad (4.35)$$

$$C_{g,j}(t) = \langle e, \emptyset | \Psi(t) \rangle = \sum_{j,q} e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} d_{g,j}^{(q)} d_e^{(q)*}. \quad (4.36)$$

La densidad de energía del campo es proporcional al valor esperado del cuadrado del operador campo eléctrico mostrado en la ecuación (4.11). Este valor esperado está dado por:

$$\langle \Psi(t) | \hat{E}^2(x) | \Psi(t) \rangle = 2 \left| \sum_{j,q} C d_e^{(q)*} d_{g,j}^{(q)} e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \right|^2 + \sum_j C^2 \sin^2 \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right], \quad (4.37)$$

La última suma de la expresión anterior da información del valor esperado de \hat{E}^2 en el vacío. La contribución de este término a la energía total del campo en la cavidad es infinito, por esta razón dicho término se restará de todos los valores esperados del campo, de esta forma la expresión del valor esperado puede describirse en la forma más simplificada:

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}^2 \rangle &= \langle \Psi(t) | \hat{E}^2(x) | \Psi(t) \rangle = 2C^2 \left| \sum_{j,q} d_e^{(q)*} d_{g,j}^{(q)} e^{-i\varepsilon_q t/\hbar} \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \right|^2, \\ &= 2C^2 \left| \sum_k \langle g; k | \Psi(t) \rangle \sin \left[(j_0 + j) \frac{\pi x}{L} \right] \right|^2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

donde se ha usado la ecuación (4.36). Cada término en esta suma es la amplitud de un fotón con detuning $j\Delta$ veces la función de modo espacial para ese fotón.

De igual forma a como se encontró la expresión para $\langle \hat{E}^2 \rangle$, se encuentra una expresión para el valor esperado del operador número de fotones $\langle \hat{n} \rangle$,

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{n} | \Psi(t) \rangle, \quad (4.39)$$

donde

$$\hat{n} = \sum_j \hat{n}_j = \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (4.40a)$$

$$|\Psi(t)\rangle = C_e(t) |e; \emptyset\rangle + \sum_j C_{g,j}(t) |g; j\rangle. \quad (4.40b)$$

De manera que

$$\hat{n} |\Psi(t)\rangle = C_e(t) \sum_{j'} \hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_{j'} |e; \emptyset\rangle + \sum_j C_{g,j}(t) \sum_{j'} \hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_{j'} |g; j\rangle.$$

Se debe tener en cuenta que,

$$\hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_{j'} |e; \emptyset\rangle = 0,$$

y que al existir un solo fotón en alguno de los modos,

$$\hat{a}_{j'}^\dagger \hat{a}_{j'} |g; j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j' \neq j \\ 1 |g; j\rangle = |g; j\rangle & \text{si } j' = j \end{cases}$$

Por tanto,

$$n|\hat{\Psi}(t)\rangle = \sum_j C_{g,j}(t)|g; j\rangle. \quad (4.41)$$

Usando, ahora, la ecuación (4.39) y reemplazando los valores correspondientes nos queda que

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle &= \left(C_e^*(t)\langle e, \emptyset | + \sum_{j''} C_{g,j''}^*(t)\langle g, j'' | \right) \sum_j C_{g,j}(t)|g; j\rangle \\ &= C_e^* \sum_{j'} C_{g,j}(t)\langle e, \emptyset |g; j\rangle + \sum_{j''} \sum_j C_{g,j''}^*(t)C_{g,j}(t)\langle g, j'' |g; j\rangle \\ &= \sum_{j''} \sum_j C_{g,j''}^*(t)C_{g,j}(t)\delta_{j'',j} \\ &= \sum_j |C_{g,j}(t)|^2, \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde se ha tenido en cuenta la ortonormalidad de los estados de la base $\{|e; \emptyset\rangle, |g; j\rangle\}$.

4.2. Campo Monomodo Interactuando con el Átomo de Dos Niveles

Consideramos el caso particular de un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético monomodo con un sólo fotón. Este caso corresponde al modelo de Jaynes-Cummings (MJC) restringido a un sólo fotón. Ilustramos el cálculo de los valores esperados $\langle \hat{E}^2 \rangle$ y $\langle \hat{n} \rangle$ solucionando el problema de valores y estados propios en la base compuesta por los dos niveles del átomo y un sólo modo de cavidad con un fotón, $\{|e; 0\rangle, |g; 1\rangle\}$.

4.2.1. Hamiltoniano

El operador Hamiltoniano está dado por la expresion (4.21), en el que tendremos un sólo índice j (por simplicidad escogeremos $j = 1$), Así,

$$\hat{H} = \hbar\omega_{eg}\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\hat{1}}{2} \right) + \hbar \left(\Omega \hat{\sigma}_+ \hat{a}_1 + \Omega^* \hat{\sigma}_- \hat{a}_1^\dagger \right) \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right]. \quad (4.43)$$

Para describir la acción de los operadores excitación y des-excitación de la materia se debe recordar que $\hat{\sigma}_3 = \langle e \rangle \langle e |$, $\hat{\sigma}_+ = \langle e \rangle \langle g |$, $\hat{\sigma}_- = \langle g \rangle \langle e |$.

Para este caso en particular, la representación matricial del Hamiltoniano corresponderá a una matriz Hermítica 2×2

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e, \emptyset | \hat{H} | e, \emptyset \rangle & \langle e, \emptyset | \hat{H} | g, 1 \rangle \\ \langle g, 1 | \hat{H} | e, \emptyset \rangle & \langle g, 1 | \hat{H} | g, 1 \rangle \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

donde $H_{21} = H_{12}^*$.

Utilizando el Hamiltoniano (4.43), y (4.44) podemos encontrar cada uno de los elementos matriciales. Por ejemplo, H_{11} está dado por

$$H_{11} = \langle e, \emptyset | \hat{H} | e, \emptyset \rangle \\ = \langle e, \emptyset | \left\{ \hbar\omega_{eg}\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\hat{1}}{2} \right) + \hbar \left(\Omega \hat{\sigma}_+ \hat{a}_1 + \Omega^* \hat{\sigma}_- \hat{a}_1^\dagger \right) \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \right\} | e, \emptyset \rangle,$$

donde

$$\langle e, \emptyset | \hat{\sigma}_3 | e, \emptyset \rangle = 1, \quad \langle e, \emptyset | \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{\hat{1}}{2} \right) | e, \emptyset \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle e, \emptyset | \hat{\sigma}_+ \hat{a}_1 | e, \emptyset \rangle = 0, \quad \langle e, \emptyset | \hat{\sigma}_- \hat{a}_1^\dagger | e, \emptyset \rangle = 0,$$

de manera que

$$H_{11} = \hbar\omega_{eg} + \frac{1}{2}\hbar\omega_1 \quad (4.45)$$

Similarmente, se encuentra que

$$H_{12} = \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \quad (4.46)$$

$$H_{21} = \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \quad (4.47)$$

$$H_{22} = \frac{3}{2}\hbar\omega_1. \quad (4.48)$$

Así, la representación matricial de nuestro Hamiltoniano, queda finalmente de la forma

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{eg} + \frac{1}{2}\hbar\omega_1 & \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \\ \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] & \frac{3}{2}\hbar\omega_1 \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

4.2.2. Valores y Estados Propios

Ahora, se resuelve el problema de valores y estados propios de \hat{H} ,

$$\hat{H} | E^{(q)} \rangle = E^{(q)} | E^{(q)} \rangle \longrightarrow (\hat{H} - E^{(q)} \hat{1}) | E^{(q)} \rangle = 0$$

$$\begin{pmatrix} \hbar\omega_{eg} + \frac{1}{2}\hbar\omega_1 - E^{(q)} & \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \\ \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] & \frac{3}{2}\hbar\omega_1 - E^{(q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Como se describió anteriormente, algunos modos alcanzan frecuencias muy cercanas a la frecuencia de resonancia del átomo de dos niveles. Como la resonancia se lleva a cabo cuando la frecuencia del modo del campo coincide con la frecuencia de transición del sistema de dos niveles, asumimos que $w_{eg} = w_1$. Además, ubicamos el cero de energía de modo que $w_{eg} = w_1 = 0$, con lo cual,

$$\begin{pmatrix} -E^{(q)} & \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \\ \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] & -E^{(q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

La ecuación secular

$$\begin{vmatrix} -E^{(q)} & \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \\ \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] & -E^{(q)} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.52)$$

conduce a los valores propios

$$\begin{aligned} (E^{(q)})^2 - \hbar^2 \Omega^2 \sin^2 \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] &= 0 \\ E^{(q)} &= \pm \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Así, los valores propios son

$$E^{(1)} = \hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right], \quad E^{(2)} = -\hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \quad (4.54)$$

reemplazando estos valores propios en la ecuación (4.51) se obtienen los estados propios normalizados

$$|E^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

$$|E^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Considerando

$$|e; \emptyset\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g; 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

las ecuaciones (4.55) y (4.56) se pueden reescribir como

$$|E^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e; \emptyset\rangle + |g; 1\rangle), \quad (4.58)$$

$$|E^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e; \emptyset\rangle - |g; 1\rangle). \quad (4.59)$$

4.2.3. Evolución Temporal del Estado

El estado del sistema en cualquier instante de tiempo está determinado por

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \sum_{q=1}^2 \langle E^{(q)} | \Psi(0) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E^{(q)} t} |E^{(q)}\rangle \\ &= \langle E^{(1)} | \Psi(0) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E^{(1)} t} |E^{(1)}\rangle + \langle E^{(2)} | \Psi(0) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E^{(2)} t} |E^{(2)}\rangle \end{aligned} \quad (4.60)$$

Asumiendo que el sistema se encuentra inicialmente en el estado $|e; \emptyset\rangle$, usando (4.58) y (4.59), tenemos

$$\langle E^{(1)} | \Psi(0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e, \emptyset | + \langle g, 1 |) |e; \emptyset\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.61)$$

$$\langle E^{(2)} | \Psi(0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle e, \emptyset | - \langle g, 1 |) |e; \emptyset\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.62)$$

Reemplazando (4.61) y (4.62) en (4.60) se obtiene,

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} + e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) |e; \emptyset\rangle + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) |g; 1\rangle. \quad (4.63)$$

A partir de (4.63) se calcula el valor esperado del operador número de fotones y del cuadrado del operador campo eléctrico.

4.2.4. Valor Esperado del Número de Fotones

Para calcular el valor esperado de operador número de fotones usamos la ecuación (4.39), para un sólo modo,

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{n} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi(t) \rangle, \quad (4.64)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi(t) \rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \left[\frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} + e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) |e; \emptyset\rangle + \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) |g; 1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) |g; 1\rangle, \end{aligned} \quad (4.65)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle &= \left[\frac{1}{2} \left(e^{\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} + e^{\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) \langle e; \emptyset | + \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) \langle g; 1 | \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) |g; 1\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) \left(e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(1)}t} - e^{-\frac{i}{\hbar}E^{(2)}t} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[\frac{E^{(1)} - E^{(2)}}{\hbar} t \right] \right) \\ &= \sin^2 \left(\frac{E^{(1)} - E^{(2)}}{2\hbar} t \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Usando (4.53) o (4.54) podemos encontrar la diferencia de energía $E^{(1)} - E^{(2)}$,

$$E^{(1)} - E^{(2)} = 2\hbar\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right]. \quad (4.67)$$

Reemplaza (4.67) en (4.66) se obtiene finalmente que el valor esperado del operador número de fotones tiene una relación sinusoidal y que depende de la constante de acoplamiento átomo-campo,

$$\langle \hat{n} \rangle = \sin^2 \left(\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] t \right). \quad (4.68)$$

4.2.5. Valor Esperado del Cuadrado del Campo Eléctrico

Ahora calculamos el valor esperado del cuadrado del operador campo eléctrico $\langle \hat{E}^2 \rangle = \langle \Psi(t) | \hat{E}^2 | \Psi(t) \rangle$, para ello tenemos en cuenta las ecuaciones (4.7) y (4.11) restringidas a

un sólo modo,

$$\langle \hat{E}^2 \rangle = C^2 \sin^2 \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \left(\langle \Psi(t) | \hat{a}^2 | \Psi(t) \rangle + 2 \langle \Psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{a}^{\dagger 2} | \Psi(t) \rangle + \langle \Psi(t) | \hat{1} | \Psi(t) \rangle \right), \quad (4.69)$$

donde $\langle \Psi(t) | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi(t) \rangle$ está dada por la ecuación (4.68) y

$$\langle \Psi(t) | \hat{a}^2 | \Psi(t) \rangle = 0, \quad \langle \Psi(t) | \hat{a}^{\dagger 2} | \Psi(t) \rangle = 0, \quad \langle \Psi(t) | \hat{1} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1. \quad (4.70)$$

Por tanto,

$$\langle \hat{E}^2 \rangle = C^2 \sin^2 \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] \left\{ 2 \sin^2 \left(\Omega \sin \left[(j_0 + 1) \frac{\pi x_a}{L} \right] t \right) + 1 \right\}. \quad (4.71)$$

Capítulo 5

RESULTADOS

Los resultados más importantes de este trabajo de grado se muestran en las siguientes figuras, en donde se muestra las amplitudes dependientes del tiempo para el estado base del sistema el cual $C_e(t)$, simultaneo a ello se visualiza el valor esperado del campo eléctrico, en todos los casos del sistema se empieza en $t = 0$ en el estado $|e; \emptyset\rangle$, cabe recordar que dichas visualizaciones se realizan en gran media en casos de un solo modos y 299 modos, pero se enfatiza más en el segundo caso correspondiente, puesto que como se dijo antes es donde se ven las mejores representaciones.

Definimos las unidades que ayudan a una concepción esquematizada y hacen parte de las representaciones que se muestran a continuación:

$$\frac{L}{c} = 1 \quad (5.1)$$

El cual se hace alusión de que el tiempo para que un fotón viaje a lo largo de la cavidad es de 1. Esto da intuición de que esta selección de unidades implica que el espacio entre los modos de la cavidad para todos los cálculos posteriores será:

$$\Delta_c = \frac{\pi C}{L} \longrightarrow \pi \quad (5.2)$$

Cabe mencionar que la ecuación (4.35) se puede reformular para casos fuera de la cavidad $t < L/C$ introduciendo una constante de decaimiento de manera que la amplitud para encontrar un átomo en el estado excitado sin fotones en la cavidad es:

$$C_e(t) = \langle e; \emptyset | \Psi(t) \rangle = e^{-\gamma t} \quad (5.3)$$

Donde la constante de decaimiento es dado por:

$$\gamma = \frac{\pi |\Omega|^2}{2\Delta_c} \quad (5.4)$$

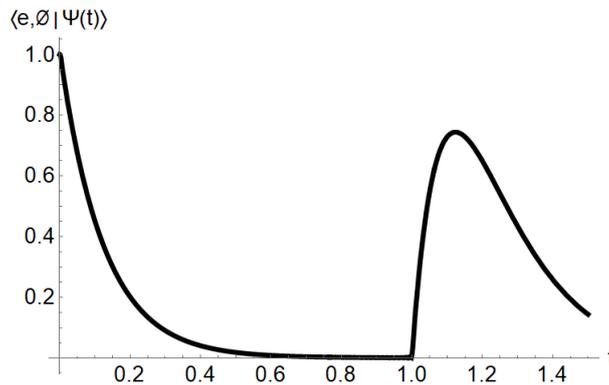


Figura 5.1: Para 299 modos y un átomo que se mantiene en el estado excitado y sin fotones, se muestra que la amplitud del mismo crece abruptamente con el tiempo $t = 1$, indica el momento preciso en que el fotón regresa al átomo después de reflejarse en el final de la cavidad **(la frecuencia de resonancia atómica armoniza justamente con la frecuencia de un modo par de la cavidad; y el acoplamiento de campo atómica para esta visualización es $\Omega = 4$)**

Como se mencionó anteriormente en este trabajo de grado se trata con el caso más simple el cual es de un átomo en el centro de la cavidad en el que $x_a = 1/2$, así todos los modos impares tienen nodos opuestos (antinodos) en esa posición, de esta forma el tan esperado acoplamiento átomo-campo tienen la misma magnitud para todos los modos impares en donde se debe tener en cuenta que el signo del acoplamiento se alterna.

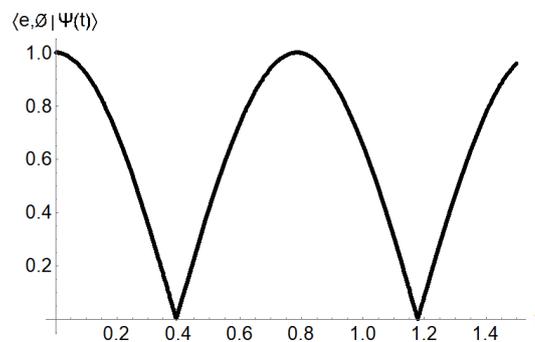


Figura 5.2: Para un solo modo en la cavidad y un átomo que se mantiene en el estado excitado y sin fotones, se muestra que la amplitud del mismo crece abruptamente en el tiempo $t \approx 0,4$, el cual indica el momento preciso en el que el fotón regresa al átomo después de reflejarse en el final de la cavidad.

Resaltamos que en la figura 5.2 luego de que el fotón regresa por primera vez al átomo emisor luego de reflejarse con los extremos de la cavidad, se evidencia un comportamiento de onda estacionaria que se asemeja al patrón de onda que se forma en los extremos de la cavidad .

A continuación se muestran en las siguientes representaciones que dan cuenta de forma clara los resultados para un átomo al cual le corresponde una frecuencia de resonancia que coincide justamente con la de un número par del modo ($\delta = 0$), (mostramos de forma

detalladas los por menores de todos estos calculo a través de código de programación en el software Mathematica como anexos de este trabajo de grado), mostramos en la figura 5.1 que el átomo manifiesta un decaimiento exponencial exacto en $t = \frac{L}{c} = 1$ para 299 modos, ya que en ese momento el fotón vuelve al átomo después de la reflexión.

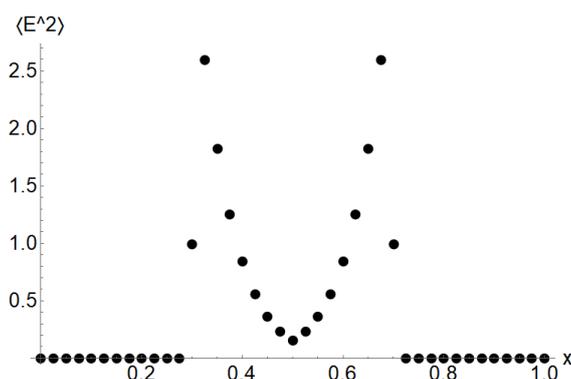


Figura 5.3: El valor esperado del el cuadrado del operador campo eléctrico $\langle \hat{E}^2 \rangle$ en el tiempo $t = 0,2$ para el caso de 299 modos, muestra la dependencia espacial exponencial de la intensidad que refleja la dependencia temporal de la desintegración atómica. (El acoplamiento átomo campo para esta desintegración es $(\Omega = 4)$)

Debemos recordar que el átomo emisor se encuentra en el centro de cavidad en $x = 0,5$, para tiempo mayores a $t = 0,2$ este muestra un desplazamiento repetitivo hacia la derecha y a la izquierda el cual se sobre entiende como la onda que describe el comportamiento del átomo dentro de la cavidad.

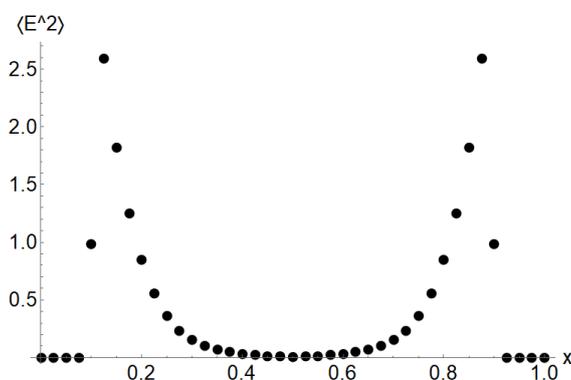


Figura 5.4: El valor esperado del el cuadrado del operador campo eléctrico $\langle \hat{E}^2 \rangle$ en el tiempo $t = 0,4$ para el caso de 299 modos, muestra la dependencia espacial exponencial de la intensidad que refleja la dependencia temporal de la desintegración atómica. (El acoplamiento átomo campo para esta desintegración es $(\Omega = 4)$)

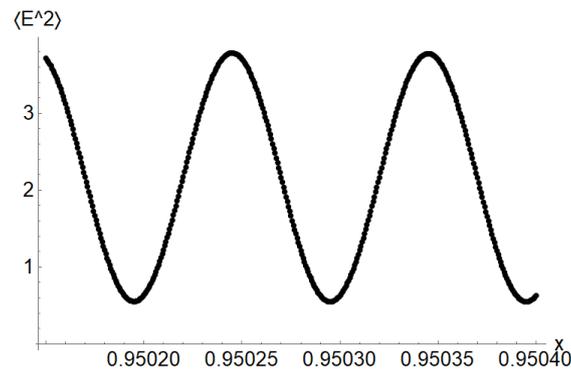


Figura 5.5: Inmediatamente de que el límite de la expectativa de intensidad golpea la pared de la cavidad y se refleja hacia el átomo emisor, el patrón esperado muestra un comportamiento de onda estacionaria que como sabemos es un caso particular de interferencia que se produce cuando se superponen dos ondas de la misma dirección, amplitud y frecuencia, pero sentido contrario. En una onda estacionaria los distintos puntos que la conforman oscilan en torno a su posición de equilibrio a medida que transcurre el tiempo, pero el patrón de la onda no se mueve ([Car18]), de ahí su nombre, esta región de superposición está comprendida en $0,9 < x < 1,0$, estos detalles se muestran en la presente figura, el cual abarca un rango espacial mucho más pequeño dentro de la región de superposición comprendidos en $0,9500 < x < 0,9504$ como se evidencia aquí, este patrón se exhibe para el caso de 299 modos y un solo modo, los valores mínimos del patrón de onda estacionaria no llegan a cero, cabe mencionar que la relación de onda estacionaria es tal cual como se encuentra para dos ondas interferentes clásicos solo que para esta situación la amplitud da el patrón mostrado en las figuras (5.3 y 5.4)

Es importante en todo este desarrollo ver que la suma de la ecuación (4.35) la cual está determinada por el producto interno entre el estado excitado y sin fotones con la con la evolución temporal del sistema correspondiente al problema planteado, da un comportamiento exponencial en los primeros tiempos, simultáneo a esto también se muestra un cambio notorio en la excitación atómica a medida que la radiación regresa al átomo.

El valor esperado del cuadrado del operador del campo eléctrico está totalmente representado para tiempos $t = 0,2$ y $t = 0,4$, mostrados en las figuras (5.3 y 5.4) los detalles de estos cálculos se muestran en los anexos que están compuestos por los códigos de programación correspondientes a las visualizaciones que se han visto y se verán en lo que queda del presente documento, todos los puntos del valor esperado se realizaron con un $j_0 = 10000$ (valor par), ya que un valor preciso para j_0 no afecta a ninguna de las propiedades cualitativas principales de los gráficos, esta elección solo influye en la escala espacial de efectos de interferencia, también la intensidad del campo contiene extremos bien marcados los cuales se desplazan desde la derecha hasta la izquierda en movimientos oscilatorios, ya que en juntas direcciones la intensidad se reduce exponencialmente en el espacio que revela el descenso exponencial.

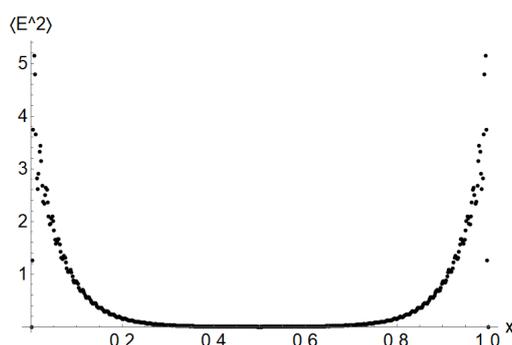


Figura 5.6: Para tiempos superiores a $t = 0,4$, la radiación se refleja desde las puntas de la cavidad, es en ese momento la onda interfiere consigo misma y el valor esperado de la intensidad muestra propiedades como la modulación espacial en la región de superposición entre el pulso saliente y su reflejo, tal como se evidencia en esta figura, también cabe mencionar que en las regiones de superposiciones que pertenecen a $x < 0,1$ y $x > 0,9$ se evidencia claramente un patrón de interferencia que es idéntico a la onda estacionaria transitoria que se formarían con las ondas clásicas salientes y reflejadas, en la figura (5.5) mostramos el patrón de onda estacionaria que se forman con el rango $x > 0,9$, pero si lo hubiéramos hecho en el rango $x < 0,1$ obtendríamos el mismo patrón.

La longitud de onda de lo que se acabó de definir como onda estacionaria es un resultado importante para este tipo de fenómeno, es precisamente lo que se predeterminó para dos contra propagaciones de ondas clásicas a la frecuencia de resonancia del átomo, los por menores de las gráficas que representan dichas ondas se tuvieron que realizar en una escala muy refinada para poder ser visualizadas en la cavidad. Se entiende que características como la profundidad de la modulación de la onda estacionaria es mucho más apreciable en las paredes de la cavidad, donde las ondas de propagación tienen amplitudes muy similares que disminuyen hacia el centro de la cavidad, las componentes de la misma que viajan de derecha a izquierda se diferencian en las amplitudes gracias a la envolvente exponencial.

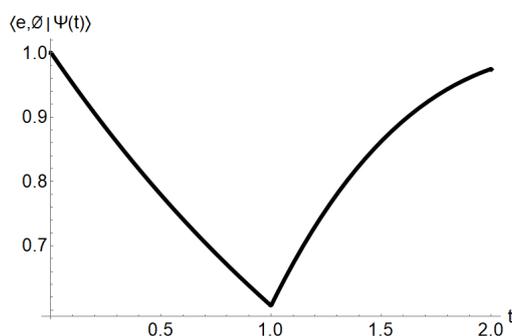


Figura 5.7: Tal como se mostró en la figura (5.1), la amplitud para que un átomo permanezca en el estado excitado y sin fotones del campo, con frecuencia de resonancia atómica coincidente con la de un modo par de la cavidad, con la diferencia de que el acoplamiento atómico toma un valor inferior correspondiente a $\Omega = 1$, y la radiación para este caso regresa al átomo antes de que se lleve a cabo el decaimiento espontáneo, además la amplitud presenta un cambio en $t = 1$ tal como esperaríamos.

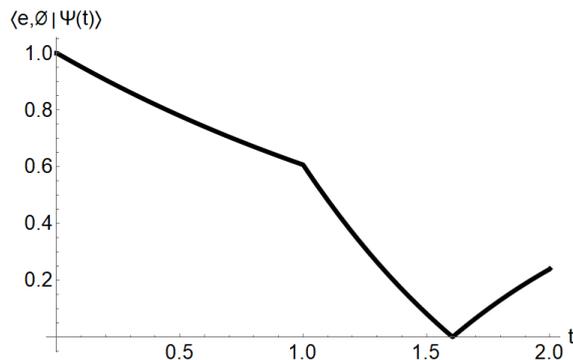


Figura 5.8: como se mostró en la figura (5.1), la amplitud para que un átomo permanezca en el estado excitado y sin fotones del campo, con frecuencia $\Omega = 1$, y la radiación para este caso regresa al átomo antes de que se lleve a cabo el decaimiento espontáneo, con la distinción de que en este caso el decaimiento se acelera además la amplitud presenta cambio en $t = 1$ tal como se presentó anteriormente.

Las cavidades se dividen ampliamente en dos categorías: buenas y malas. Las cavidades en la primera categoría tienen tasas de fuga de fotones que son más lentas que la tasa de emisión espontánea de los átomos de la cavidad. En las cavidades defectuosas, los fotones emitidos espontáneamente desaparecen de la región espacial del átomo emisor antes de que sea probable la reabsorción y la emisión espontánea proceda de manera irreversible. En el régimen óptico, las buenas cavidades son extremadamente difíciles de realizar experimentalmente y sólo recientemente se ha informado de éxito la cual consiste en un intercambio periódico de energía entre el átomo y la cavidad ([TRK92]), en este orden de ideas se determina que en cierto sentido en el que los fotones individuales emitidos espontáneamente tienen en sí una fase interna definida que se revela en determinadas regiones en las que se puede afirmar que el fotón interfiere consigo mismo debido a la reflexión.

La excitación de pocos modos o de un solo modo concluye en un valor esperado de intensidad el cual se propaga a lo largo de cavidad con la estructura sinusoidal del modo clásico, pero la localización del valor esperado mostrada por el fotón emitido espontáneamente requiere que el campo este compuesto por muchos modos, por esta razón la mayoría de las visualizaciones mostradas hasta el momento se han desarrollado con una cantidad considerable de modos (299 para ser exactos), es claro que por esta justificación no se realizó lo descrito hasta el momento en la situación de solo un modo, pues dicha representación nos sirvió para ambientar el desarrollo de este tipo de problema y para comparar las amplitudes en relación al tiempo para 1 y 299 modos respectivamente.

Las amplitudes que dan información de donde están los fotones en diversos modos están dados por los coeficientes de la ecuación (4.36), antes de que el fotón sufra reexcitaciones en $t = 1$, toda esta descripción planteada hasta el momento ofrece un espectro de frecuencias Lorentziano relacionado con la tasa de desintegración dado por (5.4).

Como se mencionó en el apartado anterior el fotón tiende a mostrar una fase cuando interfiere con el mismo, el átomo emisor muestra una fase relativa, en la representación

gráfica mostrada en (5.1), se escoge como punto de partida que el átomo resuena con un número par del modo. Ahora también, el átomo sufre desafinaciones (detuning) del número par del modo, esto sucede cuando las deltas son iguales, esto con lleva a que el mismo este resonante con un número impar del modo teniendo como consecuencia que la amplitud para que el átomo este en el estado excitado y sin fotones debido a las reflexiones de las paredes que cambia de signo, si se regresa el documento unas cuanta paginas atrás hasta llegar nuevamente a la figura (5.1), se encontrara que para este caso la frecuencia de resonancia coincide con la frecuencia de un modo impar de la cavidad, y la amplitud para que el átomo regrese al estado excitado (la radiación regresa al átomo) en el momento $t = 1$ tomara el mismo valor que en el caso donde frecuencia de resonancia coincide con la frecuencia del modo par de la cavidad con la diferencia que para esta situación tomara un signo negativo.

Estos cambios de signos son comprendidos de mejor manera en términos de características de fase clásica, ya que si el átomo resuena con un modo par, este se ubica en un nodo del modo resonante lo que significa que un número entero de medias longitudes de onda desde las paredes de la cavidad, con esto la radiación (fotón) reflejada se verá obligada a desplazarse una distancia equivalente a un número entero de longitudes de onda antes de regresar al átomo. También ocurre que el átomo este en resonancia con un nodo impar, en este caso el estará ubicado en un antinodo, y en esta situación la radiación tendrá que desplazarse en un numero enteros de longitudes de onda más otra media longitud de onda antes de retronar al átomo, recordemos que esta se puede aseverar en gran medida porque tenemos un patrón de interferencia que nos lleva a una onda estacionaria en los extremos de la cavidad, y es en esos lugares donde podemos apreciar esta dinámica de una forma más sencilla que en otro punto de la cavidad.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de grado desarrollado en este documento para la concepción del título como físico a nivel pregrado de la Universidad Surcolombiana se abordaron temas y problemas de interés en el área de mecánica cuántica, electrodinámica y óptica cuántica. Nos hemos centrado en cuestiones relacionados como interacciones radiación-materia, como eje central de tema de desarrollo del mismo, ya que la electrodinámica cuántica de cavidades (QED) trata de la interacción luz-materia en el mundo cuántico, el cual ha despertado un gran interés por la comunidad científica. El dominio y manipulación de la interacción luz-materia incursiona en el estudio y aplicaciones fundamentales en dispositivos cuánticos y áreas de interés ([LLHW18]), de esta manera se sobre entiende la importancia de modelos simples pero totalmente cuantizados como el sistema el cual describe la física de un átomo confinado en una cavidad óptica unidimensional multi-modo, tal como la luz revoluciona la era digital en términos de telecomunicaciones a través de láser y fibra óptica los cuales son aplicados en lo que conocemos hoy en día como internet por mencionar uno de los tantos casos existentes, también se evidencia gran potencial en el estudio y comprensión de este tipo de planteamiento a la hora de brindar soluciones a los sectores productivos de la región, la física como una ciencias natural que responde a una gran cantidad de problemáticas existentes en todos los sectores desde la conceptualización y la aplicación , nos lleva a la motivación para el desarrollo de este trabajo de grado en este tema en específico que es llegar a la conclusión del alcance que puede tener este tipo de investigaciones a la seguridad alimentaria, como sabemos las plantas de los diferentes cultivos necesitan energía en forma de radiación electromagnética $E = \hbar\mu$, para poder realizar los diferentes procesos como la fotosíntesis y la estimulación a la hora de la producción del fruto, se deja claro que este trabajo de grado a pesar de que toma uno de los problemas más simples pero totalmente cuantizados de la óptica cuántica (radiación interactuando con materia) , no deja de ser un punto de partida a la hora de abordar este tipo de cuestiones donde a medida que el nivel educativo se torne más elevado las soluciones a estas problemáticas se conviertan más puntuales con mayor grado de precisión ([LMR20]).

Por ello se calcularon los observables los cuales permiten determinar propiedades de localización espacial y fase de fotones emitidos espontáneamente por un átomo confinado en una cavidad unidimensional multimodo, para ello solucionamos para dos sistemas, el primero está compuesto por un modo y un solo fotón y el segundo por 299 modos y un

solo fotón, se planteó de esta manera para poder mostrar una de las tantas formas que pueden existir a la hora solucionar manualmente el determinar valores y vectores propios para este tipo de sistemas, esta metodología es una propuesta alternativa en a lo descrito por Martin Ligare y Stephen Becker en su artículo denominado “Simple soluble models of quantum damping applied to cavity quantum electrodynamics” el cual es una extensión del modelo de emisión espontanea para un sistema de dos niveles desarrollado por Wigner y Weisskopf’s ([LB95]), este tipo de desarrollo funciona muy bien cuando se tienen pocos modos que complementado con un software de programación orientada a objetos o procedimientos se obtienen buenas aproximaciones del comportamiento relacionados con la interacción átomo-campo cuantizado.

En conclusión se obtuvieron visualizaciones graficas las cuales representan el comportamiento en términos de amplitud para que un átomo se mantenga en el estado excitado y sin fotones, el cual indica que cuando la amplitud crece de manera repentina en determinado tiempo (para nuestro sistema se cumple en $t=1$, para sistemas compuestos por 299 modos), se debe a que el fotón retorna al átomo después de relejarse en los extremos de la cavidad, si se hubiera aumentado el tiempo de apreciación de este comportamiento en la gráfica se evidenciaría que este comportamiento es repetitivo el cual es distinto cuando se tiene una constante de acoplamiento igual a la unidad, ya que la radiación retorna al átomo emisor antes de que se complete el decaimiento espontaneo, además cuando la frecuencia de resonancia atómica coincide con la de un modo impar de la cavidad y con una constante de acoplamiento igual a la unidad, la radiación para este caso regresa al átomo mucho antes de que el decaimiento se complete haciendo que el mismo se acelere para un mismo tiempo $t = 1$.

Simultaneo a ello también se debe resaltar como resultado importante el hecho de ubicar el átomo en el centro de la cavidad $x = 0,5$ ya que permitió observar patrones de onda estacionaria en los extremos de la cavidad en términos del valor esperado del cuadrado del operador campo eléctrico con propiedades de ondas interferentes clásicas, a parte que a medida que tiempo transcurre en la cavidad el operador campo electrico evidencia una dependencia espacial de la intensidad que refleja la dependencia temporal dela desintegración atómica.

Con todo esto podemos decir que en las descripciones fundamentales de la denominada física moderna, los fotones son tratados como cuerpos de naturaleza dual de onda Partícula, con ello mostramos hasta aquí un modelo completamente cuantizado de emisión espontanea con una fundamentación teórica soportada con los lineamiento de la mecánica clásica en la que la radiación emitida se trata como un excitación de campo cuántico. Al determinar observables físicos del sistema átomo-campo usando la conceptualización de la teoría cuántica simplificada de campos, llegamos a la conclusión la forma en que el comportamiento clásicos de los campos de radiación de reiteran en el mundo cantico.

Bibliografía

- [AAAC⁺14] Peter AR Ade, N Aghanim, C Armitage-Caplan, M Arnaud, M Ashdown, F Atrio-Barandela, J Aumont, C Baccigalupi, Anthony J Banday, RB Barreiro, and otros. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 571:A16, 2014.
- [ANB18] Segundo Bienvenido Camatón Arizabal, Jorge Washington Encalada Noboa, and Christian Antonio Pavón Brito. Breve recuento histórico del desarrollo de la mecánica cuántica. *Espirales Revista Multidisciplinaria de investigación*, 2(14), 2018.
- [BBMK17] Dan Browne, Sougato Bose, Florian Mintert, and MS Kim. From quantum optics to quantum technologies. *Progress in Quantum Electronics*, 54:2–18, 2017.
- [Car18] Carlos Adrián Jiménez Carballo. Ondas estacionarias. 2018.
- [ERA⁺94] R. Eisberg, R. Resnick, Leonel Cota Araiza, et al. *Física cuántica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos y partículas*. 1994.
- [GK05] C. Gerry and P. Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge U.P., Cambridge, 2005. Capítulo 2.
- [LB95] Martin Ligare and Stephen Becker. Simple soluble models of quantum damping applied to cavity quantum electrodynamics. *American Journal of Physics*, 63(9):788–796, 1995.
- [LLHW18] Benliang Li, Tao Liu, Daniel W Hewak, and Qi Jie Wang. Superradiant phase transition with graphene embedded in a one-dimensional optical cavity. *Superredes y microestructuras*, 113:401–408, 2018.
- [LMR20] Roberto G Lopez, Qingwu Meng, and Erik S Runkle. Blue radiation signals and saturates photoperiodic flowering of several long-day plants at crop-specific photon flux densities. *Scientia Horticulturae*, 271:109470, 2020.
- [LO02] Martin Ligare and Ryan Oliveri. The calculated photon: Visualization of a quantum field. *American Journal of Physics*, 70(1):58–66, 2002.
- [MI96] John H Marburger III. What is a photon? *The Physics Teacher*, 34(8):482–486, 1996.

- [MS91] P. Meystre and M. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. Springer-Verla, Berlin, 1991.
- [MW95] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge U.P., Cambridge, 1995. Sección 12.11.
- [Ors00] M. Orszag. *Quantum Optics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Capítulo 15.
- [SMM10] R. Serway, C. Moses, and C. Moyer. *Física moderna*. 2010.
- [SSL74] M. Sargent, M. O. Scully, and W. E. Lamb. *Laser Physics*. Addison-Wesley, 1974.
- [TRK92] RJ Thompson, G Rempe, and HJ Kimble. Observing the normal mode division of an atom in an optical cavity. *Physical Review Letters*, 68(8):1132, 1992.