



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS**



**CARTA DE AUTORIZACIÓN**

**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-06**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**1 de 2**

Neiva, 21 sep. 2021

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad Neiva

El (Los) suscrito(s):

EDITH JOHANA BOLAÑOS ACHICANOY, con C.C. No. 175294525,

\_\_\_\_\_, con C.C. No. \_\_\_\_\_,

\_\_\_\_\_, con C.C. No. \_\_\_\_\_,

\_\_\_\_\_, con C.C. No. \_\_\_\_\_,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado: EDITH JOHANA BOLAÑOS ACHICANOY

Titulado: Sistema Nanomecánico Acoplado a un Resonador No Lineal en el Contexto de la Electrodinámica Cuántica de Cavidades. Presentado y aprobado en el año 2021 como requisito para optar al título de

FÍSICO; Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS**



**CARTA DE AUTORIZACIÓN**

**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-06**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**2 de 2**

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Edith Johana Rojas

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: \_\_\_\_\_

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-07**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**1 de 4**

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** Sistema Nanomecánico Acoplado a un Resonador No Lineal en el Contexto de la Electrodinámica Cuántica de Cavidades.

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
BOLAÑOS ACHICANOY	EDITH JOHANA

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
RASERO CAUSIL	DIEGO ALEJANDRO

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
RASERO CAUSIL	DIEGO ALEJANDRO

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE: FÍSICO**

**FACULTAD:** Ciencias exactas y naturales

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**PROGRAMA O POSGRADO:** FÍSICA

**CIUDAD:** NEIVA                      **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2021      **NÚMERO DE PÁGINAS:** 33

**TIPO DE ILUSTRACIONES** (Marcar con una X):

Diagramas\_\_ Fotografías\_\_ Grabaciones en discos\_X\_\_ Ilustraciones en general\_\_ Grabados\_\_  
Láminas\_\_ Litografías\_\_ Mapas\_\_ Música impresa\_\_ Planos\_\_ Retratos\_\_ Sin ilustraciones\_\_ Tablas  
o Cuadros\_\_

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento:

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN** (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

Español

1. Espectro de Correlación
2. Sistema Nanomecánico
3. Resonador No Lineal.
4. Ecuación maestra

Inglés

- correlation spectrum
- Nanomechanical system
- Nolinear reonator
- Master ecuation



<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>3 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

En este Trabajo de Grado se calculó, de manera analítica, el espectro de correlación de un resonador Nanomecánico acoplado a un qubit en el contexto de la electrodinámica cuántica de cavidades. La dinámica del sistema, es descrita a través de un Hamiltoniano tipo Jaynes Cummings con dos términos adicionales que corresponden a un agente externo forzante y a una interacción no lineal. Los cálculos analíticos se realizaron, en el régimen de forzado débil, usando el enfoque de ecuación maestra en la forma de Lindblad incluyendo pérdidas por decaimiento del resonador y del qubit. El espectro está caracterizado por dos picos y al incrementar la intensidad de forzado  $\xi$  no hay un cambio significativo debido a que este es pequeño. Al incrementar el valor del parámetro no lineal se observa un corrimiento en la frecuencia central de los dos picos hacia valores positivos si la constante de forzamiento tiende a valores menores, sin cambiar su separación relativa esto significa que podemos utilizar este modelo no lineal forzado para caracterizar el efecto de división Rabi de vacío.



<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>4 de 4</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

In this Degree Project, the correlation spectrum of a nanomechanical resonator coupled to a qubit is calculated analytically and numerically in the context of the quantum electrodynamics of cavities. The dynamics of the system is described through a Jaynes-Cummings type Hamiltonian with two additional terms that correspond to a forcing external agent and a nonlinear interaction. Analytical calculations were performed, in the weak forcing regime, using the master equation approach in Lindblad form including resonator and qubit decay losses. The numerical calculations, performed with the QuTip software package, agree quite well with the analytical results. The spectrum is characterized by two peaks and when increasing the forcing intensity  $\xi$  there is no significant change because it is small. By increasing the value of the nonlinear parameter, a shift in the central frequency of the two peaks is observed towards positive values if the forcing constant has lower values, without changing its relative separation, this means that we can use this forced non-linear model to characterize the effect of Rabi vacuum division.

**APROBACION DE LA TESIS**

Nombre presidente Jurado:

Firma:

Nombre Jurado: FRANCIS ARMANDO SEGOVIA

Firma:

Nombre Jurado: HERNANDO GONZALES SIERRA

Firma:

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**PROGRAMA DE FÍSICA.**

**ACTA DE SUSTENTACIÓN TESIS DE GRADO**

Ante el jurado evaluador, y Jefe de Programa, con participación de estudiantes, docentes e invitados, se hizo presente en la sala virtual <https://meet.google.com/jow-xsqv-rrn> el día veinte (20) del mes de septiembre del 2021, a las 4:30 p.m. la estudiante Edith Johana Bolaños identificada con cédula de ciudadanía No. 1.075.294.525 y Código 20141125439, con el propósito de presentar y sustentar el trabajo de grado: “*Sistema Nanomecánico Acoplado a un Resonador no lineal en el Contexto de la Electrodinámica Cuántica de Cavidades*”, bajo la dirección del profesor Diego Alejandro Rasero Causil, presentes en la sustentación. Actuaron como Jurados, los profesores, Francis Segovia Chavez y Hernando González Sierra, docentes adscritos al Departamento de Ciencias Naturales de la Universidad Surcolombiana. El estudiante presentó una ilustración ante el Comité evaluador y asistentes, sobre la actividad realizada en este proyecto de grado y, entre otros, sobre los siguientes aspectos: Introducción, Planteamiento del Problema, Pregunta de Investigación, Área de Estudio, Objetivo General, Marco Teórico, Metodología, Resultados y Conclusiones.

Los jurados y asistentes realizaron algunas preguntas al Tesista, las cuales respondió satisfactoriamente y el jurado otorgó al trabajo de grado la calificación de Aprobado.



Ph.D. FRANCIS SEGOVIA CHAVEZ  
Jurado



Ph.D. HERNANDO GONZALES SIERRA  
Jurado



Ph.D. JOSÉ MIGUEL CRISTANCHO FIERRO  
Jefe de Programa

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**PROGRAMA DE FÍSICA**



---

**Sistema Nanomecánico Acoplado a un Resonador No Lineal en el Contexto de la Electrodinámica Cuántica de Cavidades**

---

Trabajo de Grado para optar al título de Físico(a)

**Desarrollado por:**

**Edith Johana Bolaños**

**Código:** 20141125439

**Firma:** Edith Johana Bolaños

**Director:** Diego Alejandro Rasero Causil

**Firma:** Diego A. Rasero C.

**Área:** Óptica Cuántica

Neiva-Huila  
21 de septiembre de 2021



# DEDICATORIA

El presente trabajo de grado deseo dedicarlo a mi padre, el señor Álvaro Bolaños, al cual admiro y amo de corazón, quien con paciencia, sabiduría y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más. Gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer a las adversidades y a superar los retos que se nos aparezcan en nuestras vidas.

# AGRADECIMIENTOS

“No podemos elegir lo que somos y sin embargo, ¿qué somos sino la suma de nuestras elecciones?”

Rob Grant

A la divina providencia por otorgarme la oportunidad de ser una mejor persona cada día que pasa, por supuesto los que han compartido conmigo durante todos estos años (y toda mi vida) los momentos buenos y malos ha sido mi familia, le debo todo lo que soy. A ellos les estoy especialmente agradecida, a mis padres de los que siempre me sentiré orgullosa que, a través de sus esfuerzos especialmente a los sacrificios de mi padre por permitirme continuar con mi educación lo cual me hicieron la mujer integra y responsable que soy, a mis hermanos a mi familia por creer en mis capacidades a mis amigos y compañeros que con su apoyo me brindaron las fuerzas necesarias para salir adelante, a toda la Universidad por brindar el espacio, tiempo y fundamentos que me permitieron formarme como profesional.

La frase de Rob Grant, hace referencia a cómo la vida de una persona está determinada por todas y cada una de las elecciones que se toman a lo largo de los años. Y en verdad que todos los acontecimientos que me ha tocado vivir en los últimos cinco años me han hecho cambiar. Ya no soy la misma que ingresó a la universidad en febrero de 2014 para empezar una vida de investigación y se lo debo en gran parte, a Diego Alejandro Rasero. Él me dio la oportunidad de empezar en este campo de la investigación dándome el apoyo y la confianza, necesarios para abrir mis conocimientos hacia nuevas líneas en el desarrollo de la ciencia, si bien la mayor parte han sido fructíferas, han contribuido a mi formación como investigadora ya que es la única forma de impulsar el conocimiento y la ciencia tan vitales para el crecimiento de mi país.

# RESUMEN

En este Trabajo de Grado se calculó, de manera analítica, el espectro de correlación de un resonador nanomecánico acoplado a un qubit en el contexto de la electrodinámica cuántica de cavidades. La dinámica del sistema, es descrita a través de un Hamiltoniano tipo Jaynes-Cummings con dos términos adicionales que corresponden a un agente externo forzante y a una interacción no lineal. Los cálculos analíticos se realizaron, en el régimen de forzado débil, usando el enfoque de ecuación maestra en la forma de Lindblad incluyendo pérdidas por decaimiento del resonador y del qubit. El espectro está caracterizado por dos picos y al incrementar la intensidad de forzado  $\xi$  no hay un cambio significativo debido a que este es pequeño. Al incrementar el valor del parámetro no lineal se observa un corrimiento en la frecuencia central de los dos picos hacia valores positivos si la constante de forzamiento tiene valores menores, sin cambiar su separación relativa esto significa que podemos utilizar este modelo no lineal forzado para caracterizar el efecto de división Rabi de vacío.

# ABSTRACT

In this Degree Project, the correlation spectrum of a nanomechanical resonator coupled to a qubit is calculated analytically and numerically in the context of the quantum electrodynamics of cavities. The dynamics of the system is described through a Jaynes-Cummings type Hamiltonian with two additional terms that correspond to a forcing external agent and a non-linear interaction. Analytical calculations were performed, in the weak forcing regime, using the master equation approach in Lindblad form including resonator and qubit decay losses. The numerical calculations, performed with the QuTip software package, agree quite well with the analytical results. The spectrum is characterized by two peaks and when increasing the forcing intensity  $\xi$  there is no significant change because it is small. By increasing the value of the non-linear parameter, a shift in the central frequency of the two peaks is observed towards positive values if the forcing constant has lower values, without changing its relative separation, this means that we can use this forced non-linear model to characterize the effect of Rabi vacuum division.

# Índice General

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos del Trabajo de Grado . . . . .	2
1.1.1. <b>Objetivo General</b> . . . . .	2
1.1.2. <b>Objetivos Específicos</b> . . . . .	2
1.2. Estructura del Trabajo de Grado . . . . .	2
<b>2. Métodos Teóricos de Solución</b>	<b>4</b>
2.1. Modelo . . . . .	4
2.1.1. Hamiltoniano del Resonador . . . . .	5
2.1.2. Hamiltoniano de la Caja de Pares Cooper . . . . .	5
2.1.3. Hamiltoniano de Interacción entre el Resonador y la Caja de Pares de Cooper . . . . .	6
2.1.4. Hamiltoniano del Sistema Resonador–Caja de Pares de Cooper . . . . .	6
2.2. Sistemas Cuánticos Abiertos y Ecuación Maestra . . . . .	8
2.3. Espectro de Correlaciones . . . . .	8
<b>3. RESULTADOS</b>	<b>9</b>
3.0.1. Análisis de resultados . . . . .	14
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>15</b>
<b>A. Hamiltoniano del Problema</b>	<b>16</b>
A.1. Oscilador Armónico Unidimensional . . . . .	16
A.2. Hamiltoniano del Resonador . . . . .	17
A.2.1. Cuantización del Circuito LC . . . . .	17
A.2.2. FEM Inducida en el Circuito LC . . . . .	19
A.3. Hamiltoniano de la Caja de Pares Cooper . . . . .	20
A.4. Hamiltoniano de Interacción entre el Resonador y la Caja . . . . .	21
<b>B. Deducción de la Expresión del Espectro</b>	<b>23</b>

# Índice de Figuras

2.1. Diagrama esquemático de circuito de una caja de pares Cooper (a la izquierda) acoplado capacitivamente a un resonador nanomecánico (a la derecha). . . . .	4
3.1. Epectro de correlacion para valor $\chi = 0.0$ $\chi = 0.02$ y $\chi = 0.04$ . para valor $\delta = 0.0$ y valor $g = 0.2$ . . . . .	10
3.2. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.0$ y valor $g = 0.2$ . . . . .	10
3.3. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.0$ y valor $g = 0.5$ . . . . .	11
3.4. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.4$ y valor $g = 0.5$ . . . . .	11
3.5. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.8$ y valor $g = 0.2$ . . . . .	12
3.6. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.8$ y valor $g = 0.5$ . . . . .	12
3.7. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.2$ y valor $g = 0.5$ . . . . .	13
3.8. Epectro de correlacion para valor $\delta = 0.4$ y valor $g = 0.2$ . . . . .	13
A.1. Circuito LC correspondiente al resonador nanomecánico. . . . .	18



# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

En óptica cuántica y en teoría de información cuántica el modelo de Jaynes-Cummings (JCM), que describe la interacción entre un átomo y un campo electromagnético, ( entre un sistema cuántico de dos niveles (qubit) y un bosón (resonador)) tiene gran importancia. Este es un modelo sencillo y totalmente cuántico que se puede solucionar analíticamente. Se utilizó por primera vez, en 1963 para examinar los aspectos clásicos de la emisión espontánea y revelar la existencia de oscilaciones de Rabi en las probabilidades de excitación atómica para campos con energía definida (o número de fotones definido) [1] y se ha empleado para comprender el efecto conocido como división Rabi de vacío (vacuum Rabi splitting) que permite caracterizar la fuerza de acoplamiento entre un qubit y un resonador [2, 3].

Recientemente, los resonadores nanomecánicos (NAMR) han atraído considerable atención [4], por ejemplo la espectrometría de partículas en tiempo real en un entorno líquido utilizando resonadores microfluídicos-nanomecánicos, donde los resonadores nanomecánicos huecos representan una técnica prometedora para la espectrometría de partículas, ya que su diseño permite la detección de masas de partículas altamente sensibles en entornos líquidos al reunir el buen comportamiento mecánico de un resonador nanomecánico que vibra en un entorno de vacío o gas con compatibilidad fisiológica de entornos líquidos para aplicaciones biológicas [5]. Los resonadores nanomecánicos han permitido el nacimiento de un nuevo tipo de espectrometría de masas de tal forma que se pueden usar para medir la masa y la rigidez de partículas individuales como pequeñas partículas contaminantes, virus, bacterias o incluso proteínas [6]. Resonadores nanomecánicos con frecuencias de 1 GHz han servido para llevar a cabo pruebas de los principios básicos de la mecánica cuántica [7]. Además, se han utilizado para probar efectos nanomecánicos sin introducir detectores externos, imitando los efectos de electrodinámica cuántica de cavidades (QED) en un sistema de resonador nanomecánico-qubit [4].

Cuando se incluyen agentes externos, al aumentar la amplitud de forzado, la respuesta no lineal del resonador nanomecánico no se puede despreciar [8]. Efectos no lineales intrínsecos del sistema se han observado en qubits superconductores y ha permitido probar fluctuaciones cuánticas del resonador [9], además pueden ser usados para generar estados no clásicos en sistemas mecánicos [10, 11].

En este Trabajo de Grado se estudia la dinámica disipativa de un sistema qubit-resonador, a través del espectro de correlación, usando el enfoque de ecuación maestra y el teorema de regresión cuántico [12].

El espectro de correlación, descrito en sus inicios por Wiener (1930), fue el origen de una rama completamente nueva de las matemáticas, llamada análisis armónico generalizado. Wiener



consideró una clase amplia de funciones y en su análisis estableció que cuando se trata de un conjunto estacionario y ergódico de funciones aleatorias, se puede reemplazar la función de autocorrelación, definida como promedio de temporal por otra función de autocorrelación, definida como promedio de ensamble. Cuatro años después de la publicación del trabajo de Wiener, Khintchine (1934) mostró, con la ayuda del teorema de Bochner, que una función de autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario continuo, puede ser expresada en la forma de una integral de Fourier [13]. Según el teorema de Wiener-Khintchine la función de autocorrelación de un proceso aleatorio estacionario y la densidad espectral (o espectro de potencia) del proceso forman un par de transformadas de Fourier.

En este Trabajo de Grado se da respuesta a la siguiente pregunta:

**¿QUÉ EFECTO TIENE LA VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD DE FORZADO Y DEL PARÁMETRO NO LINEAL SOBRE EL ESPECTRO DE CORRELACIÓN DE UN SISTEMA ACOPLADO QUBIT-RESONADOR NO LINEAL?**

Se implementarán expresiones analíticas que permitan describir el sistema y aclarar la influencia del agente forzante y los parámetros de no linealidad en el espectro de correlación.

## 1.1. Objetivos del Trabajo de Grado

### 1.1.1. Objetivo General

- Calcular el espectro de correlación de un sistema nanomecánico acoplado a un resonador no lineal en el contexto de la electrodinámica cuántica de cavidades.

### 1.1.2. Objetivos Específicos

- Calcular los elementos matriciales del operador densidad.
- Calcular las funciones de correlación a dos tiempos.
- Calcular el espectro utilizando el teorema de regresión cuántico.

## 1.2. Estructura del Trabajo de Grado

Se construye el Hamiltoniano del resonador en primera instancia como se muestra en la sección 2.1.1, los cálculos detallados se muestran apéndice A.2.1, se construye el hamiltoniano del circuito LC y su cuantización como se muestra en el apéndice A.2.2 y A.2.3 ahora se construye el hamiltoniano de la caja de pares cooper como se muestra en la sección 2.1.2 Los cálculos detallados se muestran en el apéndice A.3, para formar el hamiltoniano total del sistema (Interacción entre el Resonador y la Caja de Pares Cooper) se muestra en el capítulo 2.1.3 ver los cálculos detallados se muestran en el apéndice A.4.

Una vez se formado se realiza análisis de la equivalencia del Hamiltoniano del sistema resonador-qubit con el Hamiltoniano Jaynes-Cummings con dos términos adicionales que corresponden a un agente externo forzante y a una interacción no lineal ver capítulo (2,2), luego haciendo la representación matricial y solución de la ecuación maestra previamente encuentra

de manera analítica y numérica, el espectro de correlación a dos tiempos del sistema se realiza el cálculo de las funciones de correlación a dos tiempos y finalmente se realiza el cálculo del espectro de correlación ver detalles de los calculos en el apendice B Deducción de la Expresion del Espectrode Correlaciones a dos Tiempos usando el teorema de regresión cuántico. Para comparación de los recultados de hace una solución analítica y programación computacional ver seccion (3,0,1) para realizar el náalisis y discusión de los resultados .

# Capítulo 2

## Métodos Teóricos de Solución

### 2.1. Modelo

El sistema que se va a estudiar se muestra en la figura 2.1. Se supone que el Qubit tiene dos uniones Josephson idénticas con una sola energía Josephson  $E_J$  y capacitancia  $C_J$ . Se aplica un voltaje de compuertas de control  $V_g$  a la caja de pares de Cooper a través del capacitor. La unión Josephson es una fina capa de óxido aislante que actúa como barrera entre los pares cooper. La capacitancia distribuida entre el Resonador nanomecánico y la isla superconductora del qubit se indica con  $C_n$ . A la derecha está ubicado un circuito LC con una barra móvil (de color azul)

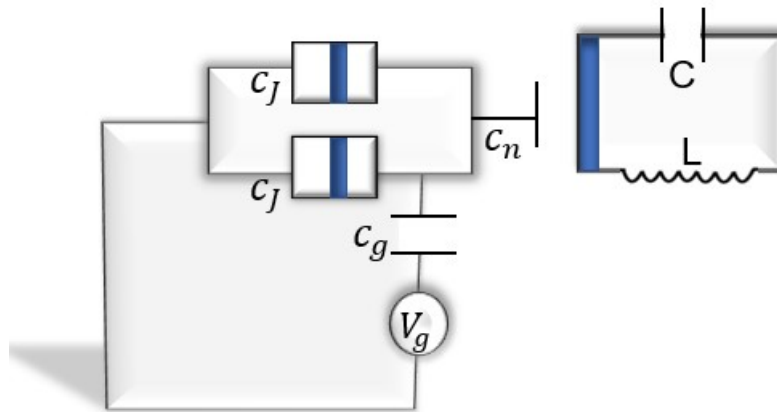


Figura 2.1: Diagrama esquemático de circuito de una caja de pares Cooper (a la izquierda) acoplado capacitivamente a un resonador nanomecánico (a la derecha).

La corriente en el circuito resonador viene dada por

$$I(t) = I_0 \sin(\omega_p t), \quad (2.1)$$

donde  $I_0$  es la corriente máxima y  $\omega_p$  es frecuencia angular.

Teniendo en cuenta la ley de Faraday, la fuerza electromotriz inducida entre los extremos del NARM se puede escribir como

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Bl \frac{p}{m}, \quad (2.2)$$

donde  $l$  y  $m$  representan la longitud y masa del NARM, respectivamente. La energía eléctrica estará dada por

$$U_e = - \int Bl \frac{dx}{dt} dq = -B l I(t) x, \quad (2.3)$$

donde  $I(t) = dq/dt$ .

### 2.1.1. Hamiltoniano del Resonador

El resonador nanomecánico (NARM) de nuestro problema corresponde a un circuito LC cuya energía total está dada por

$$H_R = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}, \quad (2.4)$$

Donde  $q^2/2C$  es energía eléctrica almacenada en el condensador y  $\phi^2/2L$  es la energía magnética almacenada en el inductor.

Como se muestra en el Apéndice A la energía del NARM se puede escribir como la suma de la *energía cinética*, la *energía potencial elástica* del oscilador y la *energía potencial eléctrica* (2.3), osea:

$$\hat{H}_{NARM} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega^2 \hat{x}^2 - B l I(t) \hat{x}, \quad (2.5)$$

Donde  $\Omega$  denota la frecuencia de oscilación del NAMR.

La ecuación (2.5) se puede escribir en términos de operadores creación y destrucción de excitaciones en el resonador,  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  respectivamente, como

$$\hat{H}_{NARM} = \Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{B l I(t)}{\sqrt{2m\Omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.6)$$

### 2.1.2. Hamiltoniano de la Caja de Pares Cooper

Siguiendo la descripción de Wiseman and Milburn [14] el Hamiltoniano de la caja de pares Cooper está dada por

$$\hat{H}_c = -\frac{E_j}{2} \sum_N (|N\rangle\langle N+1| + |N+1\rangle\langle N|) \quad (2.7)$$

Donde  $N$  es el numero de pares Cooper ( $N \in \mathbb{N}$ ),  $\hat{N}$  es el operador numero y  $|N\rangle$  representa los estados número.  $E_j = \hbar\omega_J$  es la energía Josephson ( $\omega_J$  es la frecuencia Josephson)

El Hamiltoniano (2.7) esta expandido en la base  $|N\rangle$ . Restringiendo el problema a  $N = 1$  la base estará constituida por los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  y (2.7) se convierte en (ver Apéndice A).

$$\hat{H}_c = -\frac{E_j}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (2.8)$$

donde  $\hat{\sigma}_x$  es el operador de Pauli asociado a la componente  $x$  en la teoría de momento angular  $1/2$ .

### 2.1.3. Hamiltoniano de Interacción entre el Resonador y la Caja de Pares de Cooper

Siguiendo la descripción de Wiseman and Milburn [14] el Hamiltoniano de interacción Resonador Nanomecánico con la caja de pares Cooper, en la base  $\{|N\rangle\}$ , está dado por

$$\hat{H}_I = -4E_c \sum_N (N\hat{1} - \hat{\eta}_g)^2 |N\rangle\langle N|, \quad (2.9)$$

donde  $E_c$  es la energía de carga de la unión Josephson,

$$E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma} \quad (2.10)$$

$e$  es la carga fundamental  $C_\Sigma$  es la capacitancia entre la isla conductora y el resto del circuito,

$$C_\Sigma = 2C_J + C_g + C_n(x), \quad (2.11)$$

$\hat{\eta}_g$  es el operador efectivo de número de pares de Cooper,

$$\hat{\eta}_g = \frac{C_g \hat{V}_g}{2e}, \quad (2.12)$$

$C_g$  es la capacitancia entre la caja de pares Cooper y el voltaje de puerta polarización.  $\hat{V}_g$  es el operador voltaje total aplicado a la caja de pares Cooper que puede ser escrito como

$$\hat{V}_g = V_g^{(0)} \hat{1} + \hat{V}, \quad (2.13)$$

donde  $V_g^{(0)}$  es un voltaje DC y  $\hat{V}$  es un operador de voltaje del resonador,

$$\hat{V} = \frac{\hat{q}}{C}. \quad (2.14)$$

(2.9) se puede reescribir como (ver Apéndice A)

$$\hat{H}_I = 4E_c \delta \hat{\eta}_g \hat{\sigma}_z, \quad (2.15)$$

donde  $\hat{\sigma}_z$  es el operador de Pauli asociado a la componente  $z$  en la teoría de momento angular 1/2 y

$$\hat{\eta}_g = \frac{C_g}{2e} \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2C}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.16)$$

### 2.1.4. Hamiltoniano del Sistema Resonador–Caja de Pares de Cooper

El Hamiltoniano total del sistema es la suma de las ecuaciones (2.6), (2.8), (2.15),

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_{NARM} + \hat{H}_{CPB} + \hat{H}_I \\ &= \hbar\Omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - BLI(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \frac{E_j}{2} \hat{\sigma}_x + 4E_c \delta \hat{\eta}_g \hat{\sigma}_z. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Según Wiseman and Milburn [14] haciendo una rotación, alrededor del eje  $y$  que convierte  $\hat{\sigma}_z$  en  $\hat{\sigma}_x$  y  $\hat{\sigma}_x$  en  $-\hat{\sigma}_z$ , el Hamiltoniano (2.17) se puede escribir como

$$\hat{H} = \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - BII(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-), \quad (2.18)$$

donde  $\hat{\sigma}_+$  y  $\hat{\sigma}_-$  son los operadores creación y destrucción de excitaciones en el qubit (operadores excitación y desexcitación del qubit), respectivamente.

Para obtener (2.18) se usó la ecuación (2.16) y la aproximación se onda que rota. Además,

$$g = e\frac{C_g}{C_\Sigma}\sqrt{\frac{\Omega}{2\hbar C}} \quad \text{y} \quad \omega_a = \frac{E_j}{\hbar}. \quad (2.19)$$

Considerando  $I(t) = I_0 \sin(\omega_p t)$ , la ecuación (2.18) puede escribirse como

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z + \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) - \xi \text{sen}(\omega_p t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (2.20)$$

donde

$$\xi = BII_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}}. \quad (2.21)$$

Además, como

$$\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- = \frac{1}{2}(\hat{1} + \hat{\sigma}_z) \quad \longrightarrow \quad \hat{\sigma}_z = 2\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hat{1}, \quad (2.22)$$

entonces el primer termino de (2.20) se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z = \hbar\omega_a\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hbar\omega_a\hat{1}. \quad (2.23)$$

Podemos reescalar (2.23) de tal forma que

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_a\hat{\sigma}_z = \hbar\omega_a\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-. \quad (2.24)$$

Por lo tanto (2.20) queda de la forma

$$\hat{H} = \hbar\omega_a\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) - \xi \sin(\omega_p t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) corresponde al modelo de Jaynes-Cummings (JC) forzado por un agente externo:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{JC}}^{\text{driven}} = \underbrace{\hbar\omega_a\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)}_{\text{Jaynes-Cummings}} \underbrace{-\xi \sin(\omega_p t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}_{\text{Agente externo}}. \quad (2.26)$$

Donde  $\sigma_+$  es el operador excitación y  $\sigma_-$  operador desexcitación, a operador creación para el resonador y  $\hat{a}^\dagger$  el operador destrucción,  $\omega_a$  frecuencia del qubit y  $\omega_c$  frecuencia del resonador,  $\xi$  es el agente externo forzado,  $g$  es la fuerza de interacción Interacción entre el qubit y el resonador y  $\omega_p$  es la frecuencia de conducción.

Se puede reescribir el hamiltoniano de la ecuación (2.25) de la siguiente forma

$$\hat{H}_t = \Delta_a\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \Delta_c\hat{a}^\dagger\hat{a} + g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) - \xi(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a} + \chi(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2, \quad (2.27)$$

donde se está considerando  $\hbar = 1$ . La ecuación (2.27) describe la dinámica de un modelo de Jaynes-Cummings forzado y no lineal.  $\chi$  es el parámetro que da cuenta del caracter no lineal del sistema,  $\Delta_a = \omega_a - \omega_p$  es la diferencia de frecuencias entre el resonador y el agente externo,  $\Delta_c = \omega_c - \omega_p$  es la diferencia de frecuencias entre el qubit y el agente externo, y  $\delta = \Delta_c - \Delta_a$ , es la diferencia de frecuencias entre el resonador y del qubit.

## 2.2. Sistemas Cuánticos Abiertos y Ecuación Maestra

La dinámica de un sistema cuántico cerrado (no disipativo) está determinada por el operador Hamiltoniano. En nuestro caso el Hamiltoniano  $\hat{H}_t$  de la ecuación (2.27).

Sin embargo debido a las interacciones con el ambiente, los sistemas de la electrodinámica cuántica de cavidades y de circuitos, deben ser descritos por una teoría cuántica de sistemas abiertos que incluya efectos disipativos como, por ejemplo, el decaimiento del qubit y del resonador. Una forma de incluir dichos efectos es a través del enfoque de ecuación maestra de Lindblad [12, 15, 16]. Para nuestro sistema NARM-CPB, podemos considerar dos fuentes principales de pérdidas, (i) decaimiento del qubit a una tasa  $\kappa$  y (ii) decaimiento del resonador a una tasa  $\gamma$ .

De acuerdo al enfoque de ecuación maestra, la dinámica del sistema acoplado NARM-CPB está determinada por la ecuación diferencial

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_t, \hat{\rho}] + 2\kappa \hat{\mathfrak{L}}[\hat{a}] + \gamma \hat{\mathfrak{L}}[\hat{\sigma}], \quad (2.28)$$

donde  $\hat{\rho}(t)$  es el operador densidad reducida del sistema NARM-CPB,  $\hat{\mathfrak{L}}$  es el superoperador de Lindblad y, como en (2.27), se considera  $\hbar = 1$ . El efecto de  $\hat{\mathfrak{L}}$  cuando actúa sobre un operador  $\hat{O}$  está dado por

$$\hat{\mathfrak{L}}[\hat{O}] = \hat{O}\hat{\rho}\hat{O}^\dagger - \frac{1}{2}\hat{O}^\dagger\hat{O}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{O}^\dagger\hat{O}. \quad (2.29)$$

Los términos asociados a decaimiento del qubit y del resonador se encuentran reemplazando  $\hat{O} = \hat{a}$ , y  $\hat{\sigma}$ , respectivamente, en la ecuación (2.29). Así, la ecuación (2.28) se puede escribir como

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[\hat{H}_t, \hat{\rho}] + \kappa(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\gamma}{2}(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-) \quad (2.30)$$

## 2.3. Espectro de Correlaciones

Según la ecuación (2.2), la fuerza electromotriz inducida entre los extremos del NARM se puede escribir como

$$V = Bl \frac{dx}{dt} = Bl \frac{p}{m}, \quad (2.31)$$

a la cual se le asocia un operador mecano-cuántico

$$\hat{V} = \frac{Bl}{m}\hat{p} = iBl\sqrt{\frac{\omega_c}{2M}}(a^\dagger - a), \quad (2.32)$$

donde usamos la relación entre el operador  $\hat{p}$  y los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ .

El espectro de correlación asociado a  $\hat{V}$  es

$$S_V(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle V(\tau)V(0) \rangle, \quad (2.33)$$

donde la función de correlación a dos tiempos  $\langle \hat{V}(\tau)\hat{V}(0) \rangle$  se escribe como

$$\langle \hat{V}(\tau)\hat{V}(0) \rangle = \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{2M} (\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}^\dagger(0) \rangle - \langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle - \langle \hat{a}(\tau)\hat{a}^\dagger(0) \rangle + \langle \hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle). \quad (2.34)$$

Utilizando el teorema de regresión cuántico, las funciones de correlación a dos tiempos y calculando los elementos matriciales del operador densidad de la ecuación maestra de este sistema, se logrará determinar analíticamente del espectro de correlación.

# Capítulo 3

## RESULTADOS

Utilizando (2.33) se encuentra la siguiente expresión para el espectro de correlaciones

$$S_V(\omega) = \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{4\pi M} \operatorname{Re} \left[ \frac{D_4^*}{D_5^*} \frac{1}{D_3^* - i\omega} - \frac{D_2^*}{D_5^*} \frac{1}{D_1^* - i\omega} \right], \quad (3.1)$$

donde

$$D_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) \quad (3.2)$$

$$D_2 = \alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} - \beta \quad (3.3)$$

$$D_3 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) \quad (3.4)$$

$$D_4 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) \quad (3.5)$$

$$D_5 = -\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta \quad (3.6)$$

$$D_6 = \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} \quad (3.7)$$

$$\alpha = i(\Delta_c + 2\chi), \quad \beta = i\Delta_a + \frac{\gamma}{2} \quad (3.8)$$

La deducción detallada de (3.1) se muestra en el Apéndice B.

Para simplificar al momento de graficar se considera

$$\frac{4M\pi S_V(\omega)}{I^2 B^2 l^2 \omega_c} = \operatorname{Re} \left[ \frac{D_4^*}{D_5^*} \frac{1}{D_3^* - i\omega} - \frac{D_2^*}{D_5^*} \frac{1}{D_1^* - i\omega} \right] \quad (3.9)$$



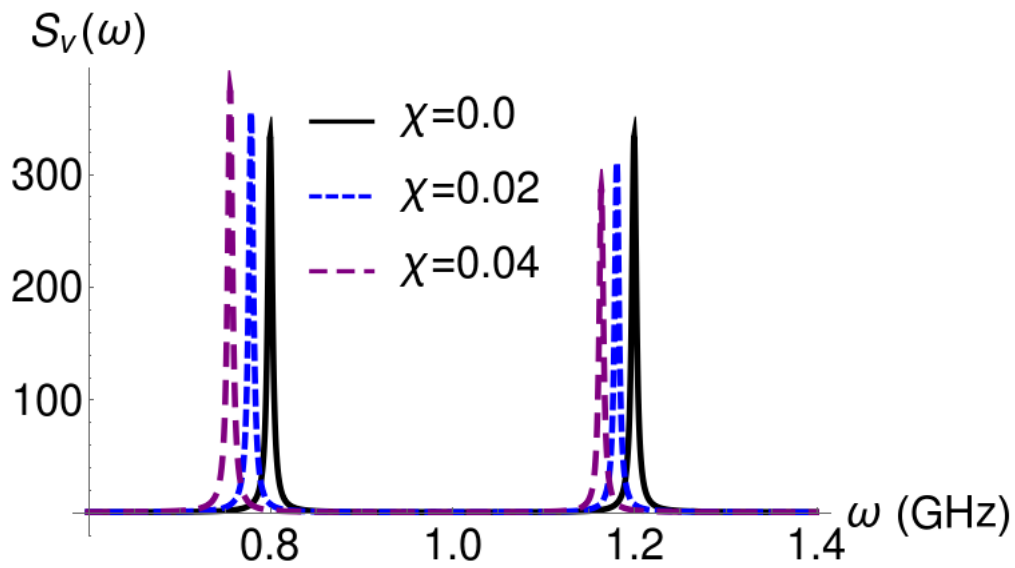


Figura 3.1: Epectro de correlacion para valor  $\chi = 0.0$   $\chi = 0.02$  y  $\chi = 0.04$ . para valor  $\delta = 0.0$  y valor  $g = 0.2$ .

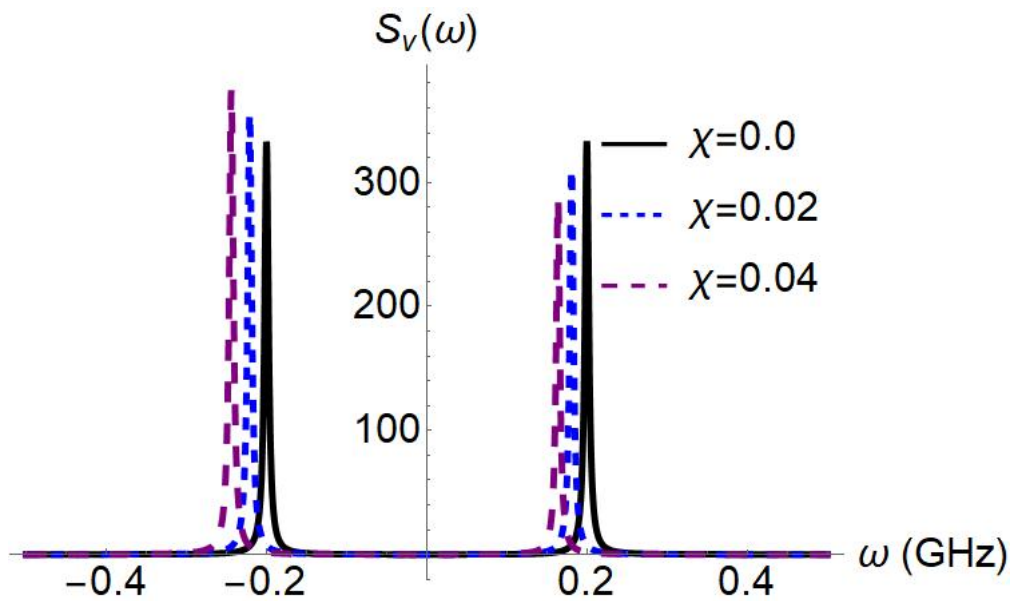


Figura 3.2: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.0$  y valor  $g = 0.2$ .

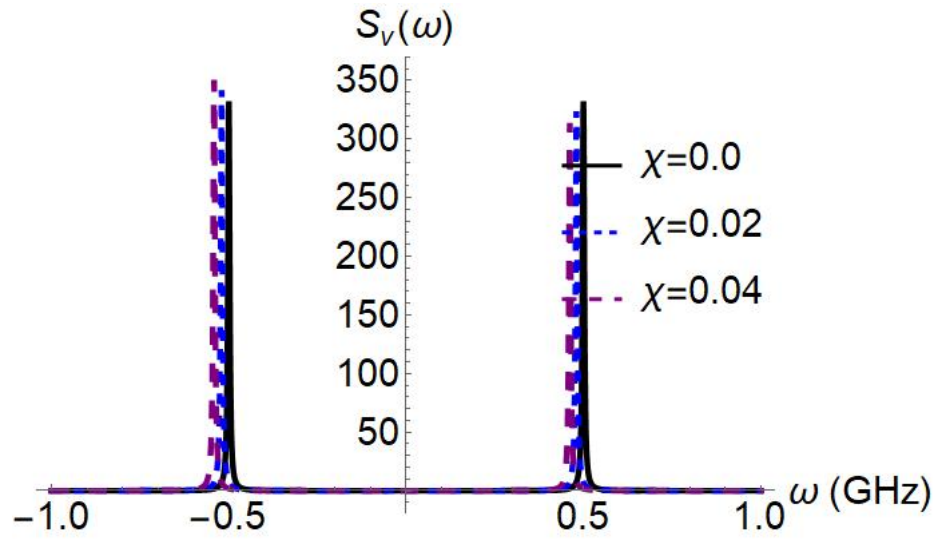


Figura 3.3: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.0$  y valor  $g = 0.5$ .

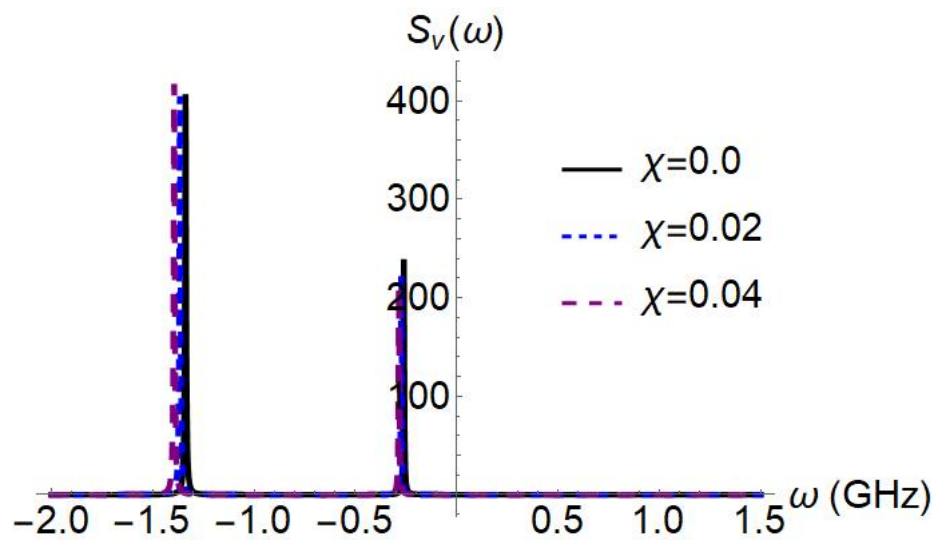


Figura 3.4: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.4$  y valor  $g = 0.5$ .

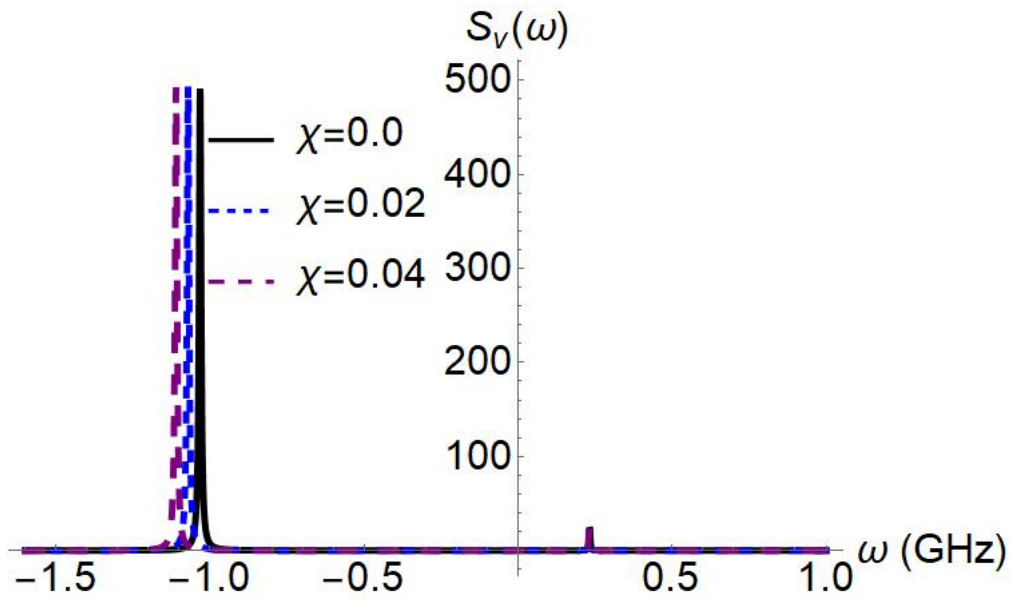


Figura 3.5: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.8$  y valor  $g = 0.2$ .

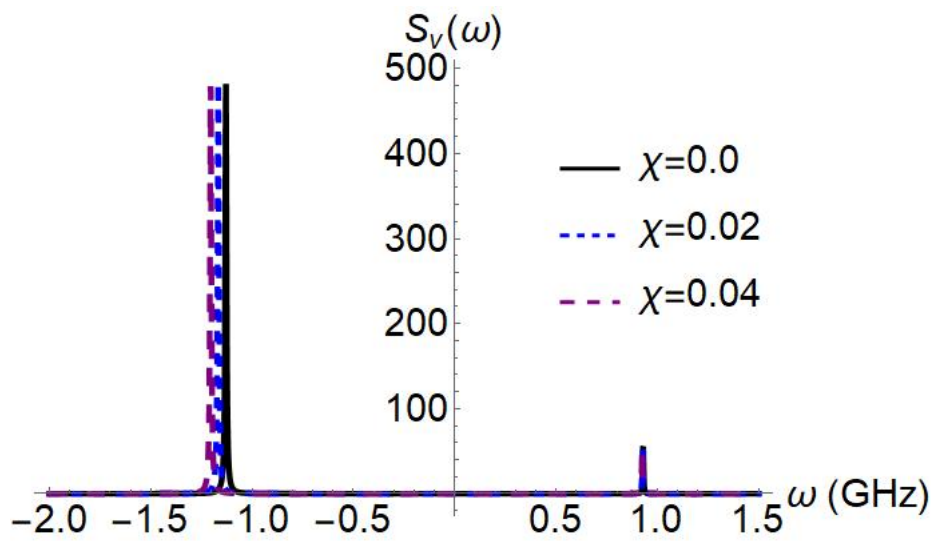


Figura 3.6: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.8$  y valor  $g = 0.5$ .

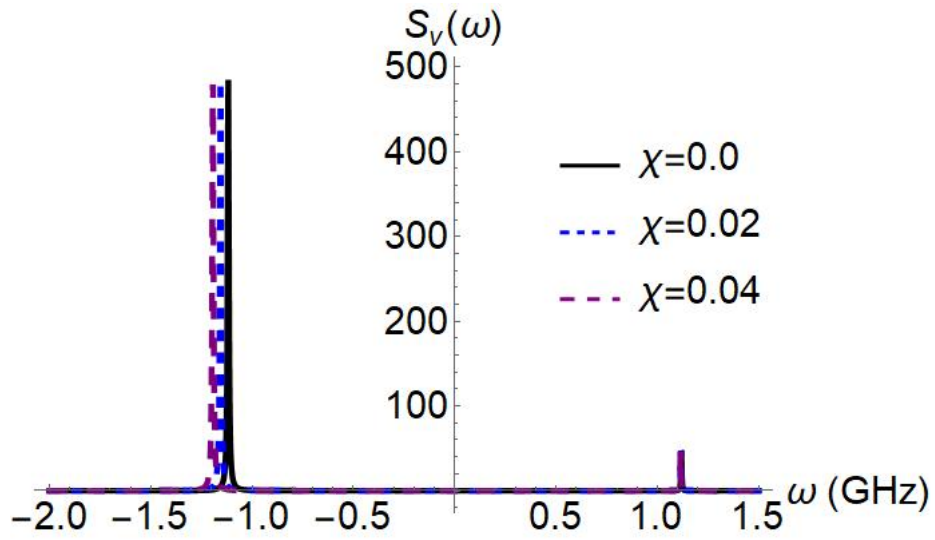


Figura 3.7: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.2$  y valor  $g = 0.5$ .

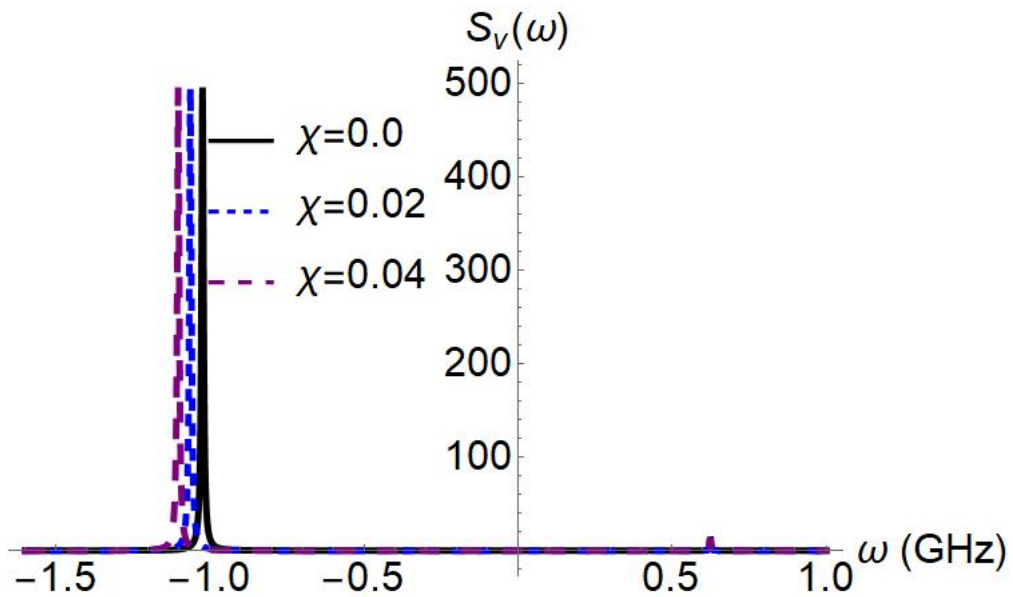


Figura 3.8: Espectro de correlacion para valor  $\delta = 0.4$  y valor  $g = 0.2$ .

### 3.0.1. Análisis de resultados

Utilizando el teorema de la regresión cuántica y el enfoque de la ecuación maestra, se ha estudiado el efecto de división de Rabí del vacío para proporcionar la información del acoplamiento  $g$  y Para probar la validez de nuestros cálculos analíticos obtenidos. Teniendo en cuenta la no linealidad intrínseca en el resonador Nanomecánico y utilizando el teorema de regresión cuántica se aplicó el espectro de correlación  $S_V(\omega)$  a dos tiempos numéricamente como se ve en la ecuación (3.1). Se calcula analíticamente para aclarar la dependencia del efecto de división Rabí del vacío en la fuerza de conducción  $\xi$  y el parámetro de no linealidad  $\chi$ .

Los valores de excitación total  $n$  pueden variar, por ejemplo,  $n = 1, 2, 3$ . Aquí en este caso no se varían debido a que el valor de excitación  $n$  esta fijo, es decir su valor solo puede ser  $n = 0$  o  $n = 1$ , por lo tanto, se usa el valor de  $n=1$  ya que este proporciona el número de valores de la matriz base de la ecuación maestra, que representa el hamiltoniano Jaynes Cumming. los valores de  $\xi$  de condición se consideran muy pequeños y porque además se escoge una base única. Se grafica el espectro de correlación  $S_V(\omega)$  en función de la frecuencia central  $\omega$  para tres valores diferentes de parámetro de no linealidad  $\chi$ , para valores de  $\chi=0$ ,  $\chi=0.2$  y  $\chi=0.4$ , se modifica la frecuencia central  $\omega$  de los dos picos teniendo en cuenta que los valores de desafinación  $\delta = 0,2$  y la fuerza de interacción  $g$  quedan fijos, la frecuencia de separación de picos es de  $\omega = 2\text{GHz}$ , esto indica que la separación de estos picos entre mayor sea el valor de  $\chi$  corren hacia mayores valores positivos como lo indica en la figura(3.1)

En las figuras (3.3, 3.4, 3.7 y 3.5 ), el espectro  $S_V(\omega)$  en función de la frecuencia  $\omega$  se traza para diferentes desafinaciones  $\delta$  y diferentes valores de fuerza de interacción  $g$  con los mismos parámetros que en la figura (3.1)  $\chi=0$ ,  $\chi=0.2$  y  $\chi=0.4$ , para estos casos en que se varía los valores de  $\delta = 0$  y  $g=0.5$ ,  $\delta = 0,4$  y  $g=0.5$ ,  $\delta = 0$  y  $g=0.2$ ,  $\delta = 0,4$  y  $g=0.2$ ,  $\delta = 0,8$  y  $g=0.2$  respectivamente a las gráficas mencionadas, la frecuencia de separación de los picos es de  $\omega=1\text{GHz}$ , Esto significa que para la variación de los valores mencionados de la desafinación ( $\delta$ ) y la fuerza de interacción ( $g$ ) conduce al cambio de la frecuencia central de dos picos dramáticamente y por ende cambia la distancia entre los centros los picos obviamente el parámetro de no linealidad estará constante en esta variación de parámetros. en cambio,  $\delta = 0,2$  y  $g=0.5$  y  $\delta = 0,8$  y  $g=0.5$  la frecuencia central de los picos es de;  $\omega = 2\text{ GHz}$  ver figuras (3.6 y 3.5 ), se observa que la frecuencia central de los picos al hacer variación de parámetros, no varía con respecto a los valores de las grafica (3.1). esto significa que podemos utilizar este modelo no lineal forzado para caracterizar efecto de división Rabí de vacío Utilizando el teorema de la regresión cuántica y el enfoque de la ecuación maestra.

# Capítulo 4

## CONCLUSIONES

- En este trabajo, se calcula el espectro de correlación de un sistema Nanomecánico acoplada un resonador no lineal, Teniendo en cuenta el uso del modelo de Jaynes-Cummings no lineal impulsado para describir la dinámica del sistema qubit-resonador, este estudio se realizó en el contexto de la electrodinámica cuántica de cavidades y la dinámica disipativa del sistema qubit-resonadores resuelve mediante el enfoque de ecuación maestra en el cual se logra Calcular los elementos matriciales del operador densidad.
- Utilizando el teorema de la regresión cuántica y el enfoque de la ecuación maestra, se ha estudiado el efecto de división de Rabí del vacío para proporcionar la información del acoplamiento  $g$  y Para probar la validez de nuestros cálculos analíticos obtenidos. Teniendo en cuenta la no linealidad intrínseca en el resonador Nanomecánico y utilizando el teorema de regresión cuántica se aplicó el espectro de correlación  $S_V(\omega)$  a dos tiempos numéricamente como se ve en la ecuación (3.1). Se calcula analíticamente para aclarar la dependencia del efecto de división Rabí del vacío en la fuerza de conducción  $\xi$  con el parámetro de no linealidad  $\chi$  y la fuerza de acoplamiento coherente del qubit de carga al NAMR.

# Apéndice A

## Hamiltoniano del Problema

### A.1. Oscilador Armónico Unidimensional Usando el Método Algebraico

En esta sección se resuelve el problema de valores y estados propios del oscilador armónico usando un método basado en algebra de operadores. Este problema es resuelto en la mayoría de libros de mecánica cuántica, por ejemplo ver las referencias [17, 18].

El operador Hamiltoniano de un oscilador armónico, de masa  $m$  y frecuencia  $\Omega$ , está dado por

$$\hat{H}_{osc} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2 \hat{x}^2. \quad (\text{A.1})$$

Haciendo el cambio

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} \hat{u}, \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{p} = \sqrt{m\hbar\Omega} \hat{v}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  son operadores adimensionales, se obtiene

$$\hat{H}_{osc} = \frac{1}{2}\hbar\Omega (\hat{v}^2 + \hat{u}^2). \quad (\text{A.4})$$

Si ahora definimos los operadores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u} + i\hat{v}), \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u} - i\hat{v}), \quad (\text{A.6})$$

cuyo conmutador está dado por

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1}, \quad (\text{A.7})$$

y a partir de los cuales,

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{v} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (\text{A.9})$$

podemos escribir  $\hat{H}_{osc}$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\hat{H}_{osc} &= \frac{1}{2}\hbar\Omega (\hat{v}^2 + \hat{u}^2) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Omega \left( -\frac{1}{2} \{(\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2\} + \frac{1}{2} \{\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + (\hat{a}^\dagger)^2\} \right) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\Omega (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)\end{aligned}$$

Usando el conmutador (A.7),  $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{1} + \hat{a}^\dagger\hat{a}$ , se puede escribir

$$\begin{aligned}\hat{H}_{osc} &= \frac{1}{2}\hbar\Omega (2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{1}) \\ &= \hbar\Omega \left( \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1} \right).\end{aligned}\tag{A.10}$$

Así, el problema de encontrar los valores y estados propios del oscilador armónico es equivalente a encontrar los valores y estados propios del operador  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  y conduce a las expresiones

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,\tag{A.11}$$

donde  $n$  es un entero positivo,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Ya que  $\hat{a}$  hace que el sistema pase del  $|n\rangle$  al  $|n-1\rangle$ , se le denomina operador escalera de descenso. De manera similar, a  $\hat{a}^\dagger$  se le llama operador escalera de ascenso. De (A.11) se puede ver que

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle.\tag{A.12}$$

Así, la ecuación de valores y estados propios del oscilador armónico se convierte en

$$\hat{H}_{osc}|n\rangle = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle,\tag{A.13}$$

o sea que los valores y estados propios del hamiltoniano son

$$\begin{aligned}E_n &= \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{valores propios,} \\ \{|n\rangle\} &= \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \dots\} \quad \text{estados propios,}\end{aligned}$$

## A.2. Hamiltoniano del Resonador

### A.2.1. Cuantización del Circuito LC

La energía total en el resonador, circuito LC de la Figura A.1 está dada por

$$H_R = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L}.\tag{A.14}$$



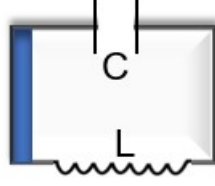


Figura A.1: Circuito LC correspondiente al resonador nanomecánico.

Para realizar la cuantización del circuito LC, y por tanto encontrar una expresión cuántica para la energía (A.14), primero se comprueba que  $q$  y  $\phi$  son dos variables canónicamente conjugadas. Para ello se usan las ecuaciones de Hamilton, veamos

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\phi}{L} = I, \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{q}{c} = -V. \quad (\text{A.16})$$

Las ecuaciones (A.15) y (A.16) conducen a las expresiones correctas para la corriente  $I$  y la diferencia de voltaje  $V$ , entonces  $\dot{q}$  y  $\dot{\phi}$  son variables canónicamente conjugados, por lo tanto se puede cuantizar convirtiendo  $q$  y  $\phi$  en operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{\phi}$  que deben satisfacer la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{\phi}] = i\hbar \hat{1}. \quad (\text{A.17})$$

Las versiones cuánticas de las ecuaciones (A.15), (A.16) y (A.14) son

$$\dot{\hat{q}} = \frac{\hat{\phi}}{L}, \quad (\text{A.18})$$

$$\dot{\hat{\phi}} = -\frac{\hat{q}}{c}, \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_R &= \frac{1}{2C} \hat{q}^2 + \frac{1}{2L} \hat{\phi}^2 \\ &= \frac{L}{2} \dot{\hat{q}}^2 + \frac{1}{2C} \hat{q}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

El operador Hamiltoniano (A.20) corresponde al Hamiltoniano del oscilador armónico, de masa  $m$  y frecuencia  $\Omega$ , (A.1) siempre que se hagan las equivalencias

$$\hat{q} \longleftrightarrow \hat{x}; \quad \dot{\hat{q}} \longleftrightarrow \dot{\hat{x}} = \hat{v}; \quad \hat{\phi} \longleftrightarrow \hat{p} \quad (\text{A.21})$$

$$L \longleftrightarrow m; \quad \frac{1}{C} \longleftrightarrow k; \quad \Omega \longleftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (\text{A.22})$$

donde  $k$  es la constante elástica asociada al oscilador.

Utilizando el procedimiento de escritura del Hamiltoniano de oscilador armónico en términos de operadores escalera de la Sección A.1 y las equivalencias (A.21) y (A.22) se puede escribir

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{u} + i\hat{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}}} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar m\Omega}} \right) \longleftrightarrow \hat{a} = \left( \frac{\hat{q}}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\frac{C}{L}}}} + i \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{2\hbar\sqrt{\frac{L}{C}}}} \right) = \frac{\hat{q}}{q_0} + i \frac{\hat{\phi}}{\phi_0}, \quad (\text{A.23})$$

donde

$$q_0 = \sqrt{2\hbar\sqrt{\frac{C}{L}}}, \quad \phi_0 = \sqrt{2\hbar\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (\text{A.24})$$

A partir de (A.23) y de la hermiticidad de los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{\phi}$  se obtiene

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q}^\dagger}{q_0} - i \frac{\hat{\phi}^\dagger}{\phi_0} = \frac{\hat{q}}{q_0} - i \frac{\hat{\phi}}{\phi_0}. \quad (\text{A.25})$$

Entonces el Hamiltoniano (A.20), en términos de  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ , queda escrito como

$$\hat{H}_R = \hbar\Omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hat{1}}{2} \right). \quad (\text{A.26})$$

Reescalando la energía se puede escribir como

$$\hat{H}_R = \hbar\Omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (\text{A.27})$$

### A.2.2. FEM Inducida en el Circuito LC

Ahora calculamos la FEM inducida en el circuito LC debido al cambio de área expuesta a un campo magnético constante.

La FEM inducida, se calcula mediante

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad (\text{A.28})$$

donde el flujo magnético  $\Phi_B$  está dado por

$$\Phi_B = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (\text{A.29})$$

En nuestro caso

$$\vec{B} = B\mathbf{e}_z; \quad d\vec{a} = da\mathbf{e}_z = dx dy \mathbf{e}_z. \quad (\text{A.30})$$

Así, en la ecuación (A.29),

$$\Phi_B = \int_0^x \int_l^0 (B\mathbf{e}_z) \cdot (dx dy \mathbf{e}_z) = Blx. \quad (\text{A.31})$$

Reemplazando (A.31) en (A.28)

$$V = -Bl \frac{dx}{dt} = Blv = Bl \frac{p}{m}. \quad (\text{A.32})$$

Así, la energía eléctrica estará dada por

$$U_e = - \int Bl \frac{dx}{dt} dq = -Bl \int \frac{dq}{dt} dx = -Bl \int I(t) dx = -BLI(t)x, \quad (\text{A.33})$$

y el operador cuántico  $\hat{U}_e$  asociado a  $U_e$  será

$$\hat{U}_e = -BLI(t)\hat{x}, \quad (\text{A.34})$$

donde, según las ecuaciones (A.2) y (A.8) de la Sección A.1 el operador  $\hat{x}$  está dado por

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (\text{A.35})$$

por tanto,

$$\hat{U}_e = -BLI(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{A.36})$$

Entonces, el Hamiltoniano del resonador está dado por la suma de las ecuaciones (A.27) y (A.36)

$$\hat{H}_{NARM} = \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - BLI(t) \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{A.37})$$

### A.3. Hamiltoniano de la Caja de Pares Cooper

Siguiendo la descripción de Wiseman and Milburn [14] el Hamiltoniano de la caja de pares Cooper está dada por

$$\hat{H}_c = -\frac{E_j}{2} \sum_N (|N\rangle\langle N+1| + |N+1\rangle\langle N|). \quad (\text{A.38})$$

Donde  $N$  es el número de pares Cooper ( $N \in \mathbb{N}$ ),  $\hat{N}$  es el operador número y  $|N\rangle$  representa los estados número.  $E_j = \hbar\omega_j$  es la energía Josephson ( $\omega_j$  es la frecuencia Josephson) Considerando únicamente los valores de  $N = 0, 1$ , la base de estados quedará restringida a  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  y (A.38) se convierte en

$$\hat{H}_c = -\frac{E_j}{2} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|). \quad (\text{A.39})$$

La representación matricial de  $\hat{H}_c$  es

$$\begin{aligned} \hat{H}_c &= 0|0\rangle\langle 0| - \frac{E_j}{2}|0\rangle\langle 1| - \frac{E_j}{2}|1\rangle\langle 0| + 0|1\rangle\langle 1| \\ &\doteq \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_j}{2} \\ -\frac{E_j}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &\doteq -\frac{E_j}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Además, recordando la definición del operador  $\hat{\sigma}_x$  de la teoría del momento angular 1/2,

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.41})$$

la ecuación (A.40) se puede escribir como

$$\hat{H}_c = -\frac{E_j}{2}\hat{\sigma}_x. \quad (\text{A.42})$$

## A.4. Hamiltoniano de Interacción entre el Resonador y la Caja de Pares Cooper

Siguiendo la descripción del Wiseman and Milburn [14], el Hamiltoniano de interacción NARM-CPB, en la base  $|N\rangle$ , esá dado por

$$\hat{H}_I = -4E_c \sum_N (N\hat{1} - \hat{\eta}_g)^2 |N\rangle\langle N|, \quad (\text{A.43})$$

donde  $E_c$  es la energía de carga de la unión Josephson

$$E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma}, \quad (\text{A.44})$$

$e$  es la carga fundamental,  $C_\Sigma$  es la capacitancia entre la isla conductora y el resto del circuito

$$C_\Sigma = 2C_J + C_g + C_n(x), \quad (\text{A.45})$$

$\hat{\eta}_g$  es el operador efectivo de número de pares de Cooper

$$\hat{\eta}_g = \frac{C_g \hat{V}_g}{2e}, \quad (\text{A.46})$$

$C_g$  es la capacitancia ente la caja de pares Cooper y el voltaje de puerta polarización,  $\hat{V}_g$  es el operador voltaje total aplicado a la caja de pares Cooper, que puede ser escrito como

$$\hat{V}_g = V_g^{(0)}\hat{1} + \hat{V}, \quad (\text{A.47})$$

donde  $V_g^{(0)}$  es un voltaje DC y  $\hat{V}$  es un operador de voltaje del resonador

$$\hat{V} = \frac{\hat{q}}{C}. \quad (\text{A.48})$$

Según las ecuaciones (A.23), (A.24) y (A.25)

$$\hat{q} = \frac{q_0}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\hbar\Omega C}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (\text{A.49})$$

Por tanto la ecuación (A.48) se convierte en

$$\hat{V} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2C}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (\text{A.50})$$

y las ecuaciones (A.47) y (A.46) toman la forma

$$\hat{V}_g = V_g^{(0)}\hat{1} + \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2C}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_g &= \frac{C_g}{2e}V_g^{(0)}\hat{1} + \frac{C_g}{2e}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2C}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ &= \hat{\eta}_g^{(0)}\hat{1} + \delta\hat{\eta}_g, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

donde

$$\hat{\eta}_g^{(0)} = \frac{C_g}{2e}V_g^{(0)}\hat{1}; \quad \delta\hat{\eta}_g = \frac{C_g}{2e}\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2C}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{A.53})$$

Ahora reemplazando (A.52) en la ecuación (A.43)

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -4E_c \sum_N (N\hat{1} - \hat{\eta}_g^{(0)}\hat{1} - \delta\hat{\eta}_g)^2 |N\rangle\langle N| \\ &= -4E_c \sum_N ((N - \hat{\eta}_g^{(0)})\hat{1} - \delta\hat{\eta}_g)^2 |N\rangle\langle N|. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Además, considerando  $\hat{\eta}_g^{(0)} = \frac{1}{2}$  y restringiendo los valores de  $N$  a  $N \in (0,1)$ , lo cual se justifica si  $\delta\hat{\eta}_g$  es pequeño, como para que en la CPB nunca exista mas de un par Cooper a la vez, la ecuación (A.54) se convierte en

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -4E_c \sum_N \left( \left( N - \frac{1}{2} \right) \hat{1} - \delta\hat{\eta}_g \right)^2 |N\rangle\langle N| \\ &= -4E_c \left( \frac{1}{2}\hat{1} - \delta\hat{\eta}_g \right)^2 |0\rangle\langle 0| + 4E_c \left( \frac{1}{2}\hat{1} - \delta\hat{\eta}_g \right)^2 |1\rangle\langle 1| \\ &= -4E_c \left( \frac{1}{4}\hat{1} + \delta\hat{\eta}_g + (\delta\hat{\eta}_g)^2 \right) |0\rangle\langle 0| + 4E_c \left( \frac{1}{4}\hat{1} + \delta\hat{\eta}_g + (\delta\hat{\eta}_g)^2 \right) |1\rangle\langle 1| \\ &= E_c\hat{1} + 4E_c\delta\hat{\eta}_g\hat{\sigma}_z, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

donde hemos despreciado los términos  $(\delta\hat{\eta}_g)^2$  ya que  $\delta\hat{\eta}_g$  es pequeño, además,  $\hat{1} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$  y  $\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$  es el operador de Pauli  $\hat{\sigma}_z$  de la teoría de momento angular 1/2.

Reescalando apropiadamente (A.55) se puede escribir como

$$\hat{H}_I = 4E_c\delta\hat{\eta}_g\hat{\sigma}_z. \quad (\text{A.56})$$

## Apéndice B

# Deducción de la Expresión del Espectro de Correlaciones a Dos Tiempos

Como se estableció en el Capítulo 2, el espectro de correlación a dos tiempos se calcula con la expresión

$$S_V(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle V(\tau)V(0) \rangle, \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\hat{V}(\tau) = IBl\sqrt{\frac{\omega_c}{2M}} (a^\dagger(\tau) - a(\tau)), \quad \hat{V}(0) = IBl\sqrt{\frac{\omega_c}{2M}} (a^\dagger(0) - a(0)), \quad (\text{B.2})$$

con lo cual

$$\langle \hat{V}(\tau)\hat{V}(0) \rangle = \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{2M} (\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}^\dagger(0) \rangle - \langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle - \langle \hat{a}(\tau)\hat{a}^\dagger(0) \rangle + \langle \hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle). \quad (\text{B.3})$$

Los términos  $\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}^\dagger(0) \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^\dagger(\tau)\hat{a}(0) \rangle$ ,  $\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}^\dagger(0) \rangle$  y  $\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle$  que aparecen en la función  $\langle V(\tau)V(0) \rangle$  se obtiene resolviendo la ecuación maestra.

$$\hat{\rho} = -i \left[ \hat{H}_t, \hat{\rho} \right] + \kappa(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\gamma}{2}(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-), \quad (\text{B.4})$$

y utilizando el teorema de regresión cuántico.

En este Apéndice mostramos la deducción detallada de la expresión analítica (3.1).

Usando (2.27) se obtiene,

$$\begin{aligned} [H_t, \hat{\rho}] &= [\Delta_a \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) + \Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - \xi(\hat{a} + \hat{a}^\dagger + \chi\hat{a}^\dagger\hat{a} + \chi(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2), \hat{\rho}] \\ &= \Delta_a[\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] + g[\hat{a}\hat{\sigma}_+, \hat{\rho}] + g[\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] \Delta_c[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \xi[\hat{a}, \hat{\rho}] - \xi[\hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] \\ &\quad + \chi[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \chi[(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2, \hat{\rho}] \\ &= -i\Delta_a\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - i\Delta_a\hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - ig\hat{a}\hat{\sigma}_+\hat{\rho} + ig\hat{\rho}\hat{a}\hat{\sigma}_+ - ig\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-\hat{\rho} + ig\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_- \\ &\quad - i\Delta_c\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\Delta_c\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + i\xi\hat{a}\hat{\rho} - i\xi\hat{\rho}\hat{a} + i\xi\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - i\chi\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + i\chi\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &\quad - i\chi(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2\hat{\rho} + i\chi\hat{\rho}(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Así la ecuación (B.4) queda de la forma

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= -i\Delta_a \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} - i\Delta_a \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - ig\hat{a} \hat{\sigma}_+ \hat{\rho} + ig\hat{\rho} \hat{a} \hat{\sigma}_+ - ig\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \hat{\rho} + ig\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \sigma_- - i\Delta_c \hat{\rho} \hat{a}^\dagger a \\
&+ i\Delta_c \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + i\xi \hat{a} \hat{\rho} - i\xi \hat{\rho} \hat{a} + i\xi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - i\chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + i\chi \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - i\chi (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \hat{\rho} + i\chi \hat{\rho} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \\
&+ \kappa (\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - a^\dagger a \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \frac{\gamma}{2} (2\hat{\sigma}_- \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-) \\
&= \left(-i\Delta_a + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} + \left(-i\Delta_a - \frac{\gamma}{2}\right) \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - ig\hat{a} \hat{\sigma}_+ \hat{\rho} + ig\hat{\rho} \hat{a} \hat{\sigma}_+ - ig\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- \hat{\rho} \\
&+ ig\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \left(-i\Delta_c + 2i\chi + \frac{\kappa}{2}\right) \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \left(i\Delta_c + i\chi + \frac{\kappa}{2}\right) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + i\xi \hat{a} \hat{\rho} - i\xi \hat{\rho} \hat{a} \\
&- i\chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} + i\chi \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} + 2\kappa \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger + \gamma \hat{\sigma}_- \hat{\rho} \hat{\sigma}_+
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Para resolver (B.6) se usará la base de estados  $\{|j, k\rangle\} = \{|0, 0\rangle, |0, 1\rangle, |1, 0\rangle\}$  donde  $j$  es el índice del qubit y  $k$  es el índice del resonador, la representación matricial de  $\hat{\rho}$  en esta base será:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle 00|\hat{\rho}|00\rangle & \langle 00|\hat{\rho}|01\rangle & \langle 00|\hat{\rho}|10\rangle \\ \langle 01|\hat{\rho}|00\rangle & \langle 01|\hat{\rho}|01\rangle & \langle 01|\hat{\rho}|10\rangle \\ \langle 10|\hat{\rho}|00\rangle & \langle 10|\hat{\rho}|01\rangle & \langle 10|\hat{\rho}|10\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{00,00} & \hat{\rho}_{00,10} & \hat{\rho}_{00,10} \\ \hat{\rho}_{01,00} & \hat{\rho}_{01,01} & \hat{\rho}_{01,10} \\ \hat{\rho}_{10,00} & \hat{\rho}_{10,01} & \hat{\rho}_{10,10} \end{pmatrix}, \tag{B.7}$$

donde se debe cumplir que  $Tr(\rho) = 1$ .

Según (B.6), el elemento matricial  $\rho_{00,00}$  satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\langle 00|\dot{\hat{\rho}}|00\rangle &= \frac{d\rho_{00,00}}{d\tau} = \left(-i\Delta_a + \frac{\gamma}{2}\right) \langle 00|\sigma_+ \sigma_- \rho|00\rangle + \left(i\Delta_a - \frac{\gamma}{2}\right) \langle 00|\sigma_+ \sigma_- \rho|00\rangle \\
&- ig\langle 00|\hat{a} \sigma_+ \rho|00\rangle + ig\langle 00|\rho \hat{a} \sigma_+|00\rangle - ig\langle 00|\hat{a}^\dagger \sigma_- \rho|00\rangle \\
&+ ig\langle 00|\rho \hat{a}^\dagger \sigma_-|00\rangle + \left(-i\Delta_c + 2i\chi + \frac{\kappa}{2}\right) \langle 00|\rho \hat{a}^\dagger \hat{a}|00\rangle \\
&\left(i\Delta_c + i\chi + \frac{\kappa}{2}\right) \langle 00|\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho|00\rangle + i\xi \langle 00|\hat{a} \rho|00\rangle i\xi \langle 00|\rho \hat{a}|00\rangle \\
&- i\chi \langle 00|\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho|00\rangle + i\chi \langle 00|\rho \hat{a}^\dagger \hat{a}|00\rangle + 2\kappa \langle 00|\hat{a} \rho \hat{a}^\dagger|00\rangle \\
&+ \gamma \langle 00|\sigma_- \rho \sigma_+|00\rangle \\
&= i\xi \rho_{01,00} - i\xi \rho_{00,01} + 2\kappa \rho_{01,01} + \gamma \rho_{10,10}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

De igual forma

$$\frac{d\rho_{00,01}}{d\tau} = (-i\Delta_c + 2i\chi + 2\kappa) \rho_{00,01} + ig\rho_{00,10} + i\xi \rho_{01,01} - i\xi \rho_{00,00} \tag{B.9}$$

$$\frac{d\rho_{00,10}}{d\tau} = \left(-i\Delta_a - \frac{i\gamma}{2}\right) \rho_{00,10} + ig\rho_{00,01} + i\xi \rho_{01,01} \tag{B.10}$$

$$\frac{d\rho_{01,01}}{d\tau} = 2\kappa \rho_{01,01} + ig\rho_{01,10} - ig\rho_{10,01} + i\xi \rho_{00,01} - i\xi \rho_{01,00} \tag{B.11}$$

$$\frac{d\rho_{01,10}}{d\tau} = \left(-i\delta - i\chi - \kappa - \frac{\gamma}{2}\right) \rho_{01,10} + ig\rho_{01,01} - ig\rho_{10,10} + i\xi \rho_{01,01} \tag{B.12}$$

$$\frac{d\rho_{10,10}}{d\tau} = -2\gamma \rho_{10,10} + ig\rho_{10,01} - ig\rho_{01,10} \tag{B.13}$$

$$\frac{d\rho_{01,00}}{d\tau} = (i\Delta_c - 2i\chi + 2\kappa) \rho_{00,01} - ig\rho_{00,10} - i\xi \rho_{01,01} + i\xi \rho_{00,00} \tag{B.14}$$

$$\tag{B.15}$$

$$\frac{d\rho_{00,01}}{d\tau} = \left(-i\Delta_a + \frac{i\gamma}{2}\right) \rho_{00,10} - ig\rho_{00,01} + i\xi\rho_{01,01} \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{d\rho_{10,01}}{d\tau} = \left(i\delta + i\chi - \kappa - \frac{\gamma}{2}\right) \rho_{01,10} - ig\rho_{01,01} + ig\rho_{10,10} - i\xi\rho_{01,017} \quad (\text{B.17})$$

En el límite de tiempo largo, el sistema permanece en un estado estable, tal que podemos tomar  $\rho_{00,00} = 1$ . Además, asumiendo forzado débil, sólo consideraremos transiciones entre el estado base  $|0, 0\rangle$  y los estados excitados  $|0, 1\rangle$  y  $|1, 0\rangle$ . Por tanto, la ecuación (B.7) se reduce a

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,10} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.18})$$

y del sistema (B.8)–(B.17) sólo tenemos que considerar

$$\frac{d\rho_{00,01}}{d\tau} = (-i\Delta_c + 2i\chi + 2\kappa) \rho_{00,01} + ig\rho_{00,10} - i\xi, \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{d\rho_{00,10}}{d\tau} = \left(i\Delta_a - \frac{i\gamma}{2}\right) \rho_{00,10} + ig\rho_{00,01}, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{d\rho_{01,00}}{d\tau} = (i\Delta_c - 2i\chi + 2\kappa) \rho_{00,01} - ig\rho_{00,10} + i\xi, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{d\rho_{00,01}}{d\tau} = \left(-i\Delta_a + \frac{i\gamma}{2}\right) \rho_{00,10} - ig\rho_{00,01}. \quad (\text{B.22})$$

Para las cuales se asumirá que el estado inicial es el estado estacionario ( $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^{ss}$ ).

Las soluciones del estado estacionario se encuentran haciendo  $\frac{d\rho_{jk,lm}}{d\tau} = 0$

$$(-i\Delta_c + 2i\chi + 2\kappa) \rho_{00,01}^{ss} + ig\rho_{00,10}^{ss} - i\xi = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$\left(-i\Delta_a - \frac{i\gamma}{2}\right) \rho_{00,10}^{ss} + ig\rho_{00,01}^{ss} + i\xi = 0, \quad (\text{B.24})$$

$$(i\Delta_c - 2i\chi + 2\kappa) \rho_{00,01}^{ss} - ig\rho_{00,10}^{ss} + i\xi = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$\left(-i\Delta_a + \frac{i\gamma}{2}\right) \rho_{00,10}^{ss} - ig\rho_{00,01}^{ss} + i\xi = 0. \quad (\text{B.26})$$

Usando Mathematica se encuentra

$$\rho_{00,01}^{ss} = \frac{\xi}{(\Delta_c + 2\chi) + i\kappa - \frac{g^2}{(\Delta_a + i\frac{\gamma}{2})}}, \quad (\text{B.27})$$

$$\rho_{00,10}^{ss} = -\frac{g}{(\Delta_a + i\frac{\gamma}{2})} \rho_{00,01}^{ss}. \quad (\text{B.28})$$

La solución del sistema de ecuaciones (B.19) y (B.20) se encuentra usando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{\dot{\rho}_{00,01}\} = \alpha\mathcal{L}\{\rho_{00,01}\} + ig\mathcal{L}\{\rho_{00,10}\} - ig\mathcal{L}\{1\}, \quad (\text{B.29})$$

$$\mathcal{L}\{\dot{\rho}_{00,10}\} = \beta\mathcal{L}\{\rho_{00,10}\} + ig\mathcal{L}\{\rho_{00,01}\}, \quad (\text{B.30})$$



donde  $\alpha = i(\Delta_c + 2\chi) - \kappa$  y  $\beta = i\Delta_a - \frac{\gamma}{2}$ . Para simplificar términos se hace la sustitución  $\rho_{00,01}(\tau) = f(\tau)$ ,  $\rho_{00,10}(\tau) = z(\tau)$ ,  $\rho_{00,01}(0) = f(0)$  y  $\rho_{00,10} = z(0)$ . Entonces,

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(\tau)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(\tau)\} + ig\mathcal{L}\{z(\tau)\} - i\xi\mathcal{L}\{1\}, \quad (\text{B.31})$$

$$\mathcal{L}\{\dot{z}(\tau)\} = \beta\mathcal{L}\{z(\tau)\} + ig\mathcal{L}\{f(\tau)\}. \quad (\text{B.32})$$

Aplicando propiedades de la transformada de Laplace a (B.31) y (B.32) tenemos

$$s\mathcal{L}\{f(\tau)\} - f(0) = \alpha\mathcal{L}\{f(\tau)\} + i\xi\mathcal{L}\{z(\tau)\} - \frac{i\xi}{s}, \quad (\text{B.33})$$

$$s\mathcal{L}\{z(\tau)\} - z(0) = \beta\mathcal{L}\{z(\tau)\} + ig\mathcal{L}\{f(\tau)\}. \quad (\text{B.34})$$

Si nombramos  $\mathcal{L}\{f(\tau)\} = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{z(\tau)\} = Z(s)$  entonces queda

$$sF(s) - f(0) = \alpha F(s) + i\xi Z(s) - \frac{i\xi}{s} \quad \longrightarrow \quad (s - \alpha)F(s) = f(0) + i\xi Z(s) - \frac{i\xi}{s} \quad (\text{B.35})$$

$$sZ(s) - z(0) = \beta Z(s) + igF(s) \quad \longrightarrow \quad (s - \beta)Z(s) = z(0) + igF(s). \quad (\text{B.36})$$

Despejando  $F(s)$  y  $Z(s)$  de las ecuaciones (B.35) y (B.36) se obtiene

$$F(s) = \frac{-f(0)s^2 - igz - f(0)z(0) + f(0)s\beta + is\xi}{s(g^2 + s^2 - s\alpha - s\beta + \alpha\beta)}, \quad (\text{B.37})$$

$$Z(s) = \frac{-if(0)gs - s^2z(0) - sz(0)\alpha + g\xi}{s(g^2 + s^2 - s\alpha - s\beta + \alpha\beta)}. \quad (\text{B.38})$$

Aplicando transformada inversa de Laplace, en Mathematica, se obtiene

$$\begin{aligned} f(\tau) = & \frac{e^{\frac{t}{2}(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2 + \beta})}}{2\sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} (g^2 + \alpha\beta)} \left( 2ig^3z(0) + 2igz(0)\alpha\beta \right. \\ & + (\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} - \beta)\beta(f(0)\alpha - i\xi) \\ & \left. + g^2(f(0)(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} - \beta) - 2i\xi) \right) \\ & + \frac{e^{\frac{t}{2}(\alpha - \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2 + \beta})}}{2\sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} (g^2 + \alpha\beta)} \left( -2ig^3z(0) - 2igz(0)\alpha\beta \right. \\ & + (-\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta)\beta(f(0)\alpha - i\xi) \\ & \left. + g^2(f(0)(-\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) + 2i\xi) \right) + \frac{i\beta\xi}{g^2 + \alpha\beta}, \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(\tau) = & \frac{e^{\frac{t}{2}(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2 + \beta})}}{2\sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} (g^2 + \alpha\beta)} \left( g^2z(0)(-\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) \right. \\ & + z(0)\alpha\beta(-\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) + 2if(0)(g^3 + g\alpha\beta) \\ & \left. + g\xi(\alpha - \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) \right) \\ & + \frac{e^{\frac{t}{2}(\alpha - \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2 + \beta})}}{2\sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} (g^2 + \alpha\beta)} \left( g^2z(0)(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} - \beta) \right. \\ & + z(0)\alpha\beta(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} - \beta) - 2if(0)(g^3 + g\alpha) \\ & \left. - g\xi(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta) \right) + \frac{g\xi}{g^2 + \alpha\beta}. \quad (\text{B.40}) \end{aligned}$$

Para simplificar hacemos

$$D_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta), \quad (\text{B.41})$$

$$D_2 = \alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} - \beta, \quad (\text{B.42})$$

$$D_3 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta), \quad (\text{B.43})$$

$$D_4 = \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta), \quad (\text{B.44})$$

$$D_5 = -\alpha + \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2} + \beta, \quad (\text{B.45})$$

$$D_6 = \sqrt{-4g^2 + (\alpha - \beta)^2}, \quad (\text{B.46})$$

con lo cual (B.39) y (B.40) se pueden escribir como

$$f(\tau) = \mu(\tau)f(0) + \nu(\tau)z(0) - ic(\tau)\xi \quad (\text{B.47})$$

$$z(\tau) = \nu(\tau)f(0) + \psi(\tau)z(0) + \phi(\tau)\xi, \quad (\text{B.48})$$

donde

$$\mu(\tau) = \frac{D_2}{2D_5}e^{D_1\tau} + \frac{D_4}{2D_5}e^{D_3\tau}, \quad (\text{B.49})$$

$$\nu(\tau) = \frac{ig}{D_5}e^{D_1\tau} + \frac{ig}{2D_5}e^{D_3\tau}, \quad (\text{B.50})$$

$$C(\tau) = \frac{1}{g^2 + \alpha\beta} \left[ \frac{1}{D_5} \left( \frac{D_2\beta}{2} + g^2 \right) e^{D_1\tau} + \frac{1}{D_5} \left( \frac{D_4\beta}{2} - g^2 \right) e^{D_3\tau} \right], \quad (\text{B.51})$$

$$\psi(\tau) = \frac{1}{2D_5}(D_4e^{D_1\tau} + D_2e^{D_3\tau}), \quad (\text{B.52})$$

$$\phi(\tau) = \frac{g}{(g^2 + \alpha\beta)} \left( \frac{D_3}{D_5}e^{D_1\tau} + \frac{D_1}{D_5}e^{D_3\tau} + 1 \right). \quad (\text{B.53})$$

Entonces, recordando que  $f(\tau) = \rho_{00,01}(\tau)$  y  $z(\tau) = \rho_{00,10}(\tau)$ , la solución de (B.19) y (B.20) es:

$$\rho_{00,01}(\tau) = \mu(\tau)\rho_{00,01} + \nu(\tau)\rho_{00,10} - ic(\tau)\xi, \quad (\text{B.54})$$

$$\rho_{00,10}(\tau) = \nu(\tau)\rho_{00,01}(0) + \psi(\tau)\rho_{00,10}(0) + \phi(\tau)\xi. \quad (\text{B.55})$$

Ahora se encuentran las expresiones para los valores esperados de los operadores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{\sigma}_-$  y  $\hat{\sigma}_+$  en términos de las componentes del operador densidad. Se debe recordar que para un operador arbitrario  $\hat{O}$

$$\langle \hat{O}(\tau) \rangle = Tr[\hat{O}(0)\hat{\rho}(\tau)], \quad (\text{B.56})$$

donde  $\hat{\rho}$  está dado por (B.18) y los operadores  $\hat{a}(0)$ ,  $\hat{a}^\dagger(0)$ ,  $\hat{\sigma}_-(0)$  y  $\hat{\sigma}_+(0)$  se representan matricialmente como

$$\hat{a}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^\dagger(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.57})$$

$$\hat{\sigma}_-(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_+(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.58})$$

Entonces,

$$\hat{a}(0)\rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.59})$$

$$\hat{a}^\dagger(0)\rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

$$\hat{\sigma}_-(0)\rho(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{10,00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.61})$$

$$\hat{\sigma}_+(0)\hat{\rho}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \end{pmatrix} \quad (\text{B.62})$$

Por tanto, según la ecuación (B.56), las expresiones para  $\langle \hat{a}(\tau) \rangle$ ,  $\langle \hat{a}^\dagger(\tau) \rangle$ ,  $\langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle$  y  $\langle \hat{\sigma}_+(\tau) \rangle$  en términos de las componentes del operador densidad son

$$\langle \hat{a}(\tau) \rangle = \text{Tr}[\hat{a}(0)\rho(\tau)] = \rho_{01,00}(\tau), \quad (\text{B.63})$$

$$\langle \hat{a}^\dagger(\tau) \rangle = \text{Tr}[\hat{a}^\dagger(0)\rho(\tau)] = \rho_{00,01}(\tau), \quad (\text{B.64})$$

$$\langle \hat{\sigma}_-(\tau) \rangle = \text{Tr}[\hat{\sigma}(0)\hat{\rho}(\tau)] = \rho_{10,00}(\tau), \quad (\text{B.65})$$

$$\langle \hat{\sigma}_+(\tau) \rangle = \text{Tr}[\langle \hat{\sigma}(0)\hat{\rho}(\tau) \rangle] = \rho_{00,10}(\tau). \quad (\text{B.66})$$

Procedemos ahora a utilizar el teorema de regresión cuántico.

Comparando las ecuaciones (B.64) y (B.66) con (B.9) y (B.10) se puede inferir que  $\langle \hat{a}^\dagger(\tau) \rangle$  y  $\langle \hat{\sigma}_+(\tau) \rangle$  satisfacen el siguiente sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\langle \dot{\hat{a}}^+ \rangle = \alpha \langle \hat{a}^+ \rangle + \langle \hat{\sigma}_+ \rangle - i\xi \quad (\text{B.67})$$

$$\langle \dot{\hat{\sigma}}_+ \rangle = \beta \langle \hat{\sigma}_+ \rangle + ig \langle \hat{a}^+ \rangle \quad (\text{B.68})$$

con  $\alpha = i(\Delta_c + 2\chi) - \kappa$  y  $\beta = i\Delta_a - \frac{\gamma}{2}$  y las condiciones iniciales dadas por (B.27) y (B.28)

$$\langle \hat{a}^+ \rangle = \frac{\xi}{\Delta_c + 2\chi + i\kappa - \frac{g^2}{\Delta_a + \frac{i\gamma}{2}}}, \quad (\text{B.69})$$

$$\langle \hat{\sigma}_+ \rangle = \frac{g}{\Delta_a + \frac{i\gamma}{2}} \langle \hat{a}^+ \rangle. \quad (\text{B.70})$$

Siguiendo a Carmichael [12], podemos establecer el teorema de regresión cuántico como el sistema (1.101) del libro Carmichael, ahora se busca llegar a la ecuación (1.109) del libro, y queda de la siguiente manera

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{A}(t + \tau) \hat{O}(t) \rangle = M \langle \hat{A}(t + \tau) \hat{O}(t) \rangle \quad (\text{B.71})$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{A}(\tau) \hat{O}(0) \rangle = M \langle \hat{A}(\tau) \hat{O}(0) \rangle \quad (\text{B.72})$$

En nuestro caso, según la ecuación (B.3), debemos encontrar los valores esperados a dos tiempos  $\langle a^\dagger(\tau)a^\dagger(0) \rangle$ ,  $\langle a^\dagger(\tau)a(0) \rangle$ ,  $\langle a(\tau)a^\dagger(0) \rangle$  y  $\langle a(\tau)a(0) \rangle$ . Determinemos cada una de estas cantidades

(a) **Cálculo de  $\langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle$ .** Si

$$\hat{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{a}^+ \\ \hat{\sigma}_+ \end{pmatrix} \quad y \quad \hat{O}(0) = \begin{pmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{\sigma}_+(0) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.73})$$

el teorema de regresión cuántico permite convertir el sistema (B.67)–(B.68), que involucra valores esperados a un tiempo, en un sistema para valores esperados a dos tiempos

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle = \alpha \langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle + \langle \hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(0) \rangle - i\varepsilon, \quad (\text{B.74})$$

$$\frac{d}{d\tau} \langle \hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(0) \rangle = \beta \langle \hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(0) \rangle + ig \langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle, \quad (\text{B.75})$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^+(0)\hat{a}(0) \rangle &= Tr[\hat{a}^+(0)\hat{a}(0)\rho^{ss}(0)] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01}^{ss} & \rho_{00,10}^{ss} \\ \rho_{01,00}^{ss} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00}^{ss} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \rho_{01,00}^{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(0) \rangle &= Tr[\hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(0)\rho^{ss}(0)] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01}^{ss} & \rho_{00,10}^{ss} \\ \rho_{01,00}^{ss} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00}^{ss} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho_{10,00}^{ss} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

El sistema (B.74)–(B.75) tiene la misma estructura matemática que el sistema (B.19)–(B.20), por tanto su solución tiene la misma estructura de las ecuaciones (B.54) y (B.55). Así, el término que nos interesa es de la forma

$$\langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle = \mu(\tau) \langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle + \nu(\tau) \langle \hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(0) \rangle - \xi(\tau). \quad (\text{B.78})$$

Al aplicar las condiciones iniciales (B.76) y (B.77) tenemos

$$\langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}(0) \rangle = -\xi(\tau) \quad (\text{B.79})$$

(b) **Cálculo de  $\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0) \rangle$ .** Si

$$\hat{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma}_- \end{pmatrix} \quad y \quad \hat{\sigma}(0) = \begin{pmatrix} \hat{a}^+(0) \\ \hat{\sigma}_-(0) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.80})$$

el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\frac{d}{d\tau}\langle\hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle = \alpha^*\langle\hat{a}(\tau)\hat{a}(0)\rangle + ig\langle\hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_-(0)\rangle + i\varepsilon \quad (\text{B.81})$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle\hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_-(0)\rangle = \beta^*\langle\hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_-(0)\rangle - ig\langle\hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle \quad (\text{B.82})$$

cuyas condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} \langle\hat{a}(0)\hat{a}^+(0)\rangle &= Tr[\hat{a}(0)\hat{a}^+(0)\hat{\rho}] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 1, \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

$$\begin{aligned} \langle\hat{\sigma}_-(0)\hat{\sigma}_-(0)\rangle &= Tr[\hat{\sigma}_-(0)\hat{\sigma}_-(0)\hat{\rho}] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

Como (B.81)–(B.82) tienen la misma estructura matemática de las ecuaciones (B.21) y (B.22), correspondientes a las conjugadas de (B.21) y (B.22), entonces su solución es de la forma dada en (B.54) y (B.55), pero compleja conjugada. Esto es,

$$\langle\hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle = \mu^*(\tau)\langle\hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle + \nu^*(\tau)\langle\hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_-(0)\rangle - \zeta^*(\tau) \quad (\text{B.85})$$

y aplicando las condiciones iniciales (B.83) y (B.84) se tiene

$$\langle\hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle = \mu^*(\tau) - \zeta^*(\tau) \quad (\text{B.86})$$

(c) **Cálculo de  $\langle\hat{a}^+(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle$ .** Si ahora

$$\hat{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{a}^+ \\ \hat{\sigma}_+ \end{pmatrix} \quad y \quad \hat{O}(0) = \begin{pmatrix} \hat{a}^+(0) \\ \hat{\sigma}_-(0) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.87})$$

se obtiene

$$\frac{d}{d\tau}\langle\hat{a}^+(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle = \alpha\langle\hat{a}^+(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle + ig\langle\hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(0)\rangle - i\varepsilon, \quad (\text{B.88})$$

$$\frac{d}{d\tau}\langle\hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_-(0)\rangle = \beta\langle\hat{\sigma}_+(\tau)\hat{\sigma}_+(0)\rangle + ig\langle\hat{a}^+(\tau)\hat{a}^+(0)\rangle. \quad (\text{B.89})$$

Con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\langle \hat{a}(0)\hat{a}^+(0) \rangle &= Tr[\hat{a}(0)\hat{a}^+(0)\hat{\rho}(0)] \\
&= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{00,01} & \rho_{00,10} \\ \rho_{01,00} & 0 & 0 \\ \rho_{10,00} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= Tr \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{B.90}$$

y como en la ecuación (B.77)

$$\langle \hat{\sigma}_+(0)\hat{\sigma}_-(0) \rangle = 0. \tag{B.91}$$

La solución de (B.88)–(B.89) tiene la misma estructura matemática que (B.19)–(B.20), por tanto su solución tiene la misma estructura de (B.54) y (B.55). O sea

$$\langle \hat{a}^+(\tau)\hat{a}^+(0) \rangle = \mu(\tau)\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0) \rangle + \nu(\tau)\langle \hat{\sigma}_-(\tau)\hat{\sigma}_-(0) \rangle - \zeta^*(\tau), \tag{B.92}$$

y aplicando las condiciones iniciales (B.90) y (B.91),

$$\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}^+(0) \rangle = -\zeta(\tau). \tag{B.93}$$

**(d) Cálculo de  $\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle$ .** Aplicando un procedimiento similar al de los casos (a), (b) y (c) cuando

$$\hat{A}(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma}_- \end{pmatrix} \quad y \quad \hat{O}(0) = \begin{pmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{\sigma}_-(0) \end{pmatrix}, \tag{B.94}$$

se obtiene

$$\langle \hat{a}(\tau)\hat{a}(0) \rangle = -\zeta^*(\tau). \tag{B.95}$$

Ahora, reemplazando los valores esperados hallados en las ecuaciones (B.79), (B.86), (B.93) y (B.95) en (B.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{V}(\tau)\hat{V}(0) \rangle &= \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{2M} (-\zeta(\tau) + \zeta(\tau) - \mu^*(\tau) + \zeta^*(\tau) - \zeta^*(\tau)) \\
&= -\frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{2M} \mu^*(\tau)
\end{aligned} \tag{B.96}$$

Finalmente, reemplazando (B.96) y (B.49) en (B.1), se encuentra que el espectro de correlaciones está dado por

$$\begin{aligned}
S_V(\omega) &= \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \hat{V}(\tau)\hat{V}(0) \rangle \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{2M} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \mu^*(\tau) \\
&= -\frac{1}{\pi} \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{2M} \text{Re} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} \left( \frac{D_2^*}{2D_5^*} e^{D_1^* \tau} + \frac{D_4^*}{2D_5^*} e^{D_3^* \tau} \right) \\
&= \frac{I^2 B^2 l^2 \omega_c}{4\pi M} \text{Re} \left[ \frac{D_4^*}{D_5^*} \frac{1}{D_3^* - i\omega} - \frac{D_2^*}{D_5^*} \frac{1}{D_1^* - i\omega} \right]
\end{aligned} \tag{B.97}$$

# Bibliografía

- [1] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. IEEE Proc., 1963.
- [2] M. Y. Zhao, S. M. Yu, X. Xiao, and Y. B. Gao. Vacuum rabi splitting in nanomechanical qed system with nonlinear resonator. arXiv:1603.00215 [quant-ph], 2016.
- [3] B. W. Shore and P. L. Knight. The jaynes-cummings model. Journal of Modern Optics, 40(7):1195, 1993.
- [4] Y. B. Gao, S. Yang, Yu xi Liu, C. P. Sun, and Franco Nori. Probing nano-mechanical qed effects. arXiv:0902.2512 [quant-ph], 2009.
- [5] P. Martin, R. Daniel, T. Javier, and C. Montserrat. Real time particle spectrometry in liquid environment using microfluidic nanomechanical resonators. pages 2146–2149, 2019.
- [6] J. M. Ruz, O. Malvar, E. Gil-Santos, M. Calleja, and J. Tamayo. Effect of particle adsorption on the eigenfrequencies of nano-mechanical resonators. pages 1–20, 2020.
- [7] X. M. H. Huang, C. A. Zorman, M. Mehregany, and M. L. Roukes. Nanodevice motion at microwave frequencies. Nature, 421:496, 2003.
- [8] L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, M. H. Matheny, D. Chi, J. E. Sader, and M. L. Roukes. Nonlinearity in nanomechanical cantilevers. Phys. Rev. B, 87:024304, 2013.
- [9] F. R. Ong, M. Boissonneault, F. Mallet, A. C. Doherty, A. Blais, D. Vion, D. Esteve, and P. Bertet. Quantum heating of a nonlinear resonator probed by a superconducting qubit. Phys. Rev.Lett, 110:047001, 2013.
- [10] M. Abdi, M. Pernpeintner, R. Gross, H. Huebl, and M. J. Hartmann. Quantum state engineering with circuit electromechanical three-body interactions. Phys. Rev. Lett, 114:173602, 2015.
- [11] B. Teklu, A. Ferraro, M. Paternostro, and M. G. A. Paris. Nonlinearity and nonclassicality in a nanomechanical resonator. EPJ Quantum Technol., 2:16, 2015.
- [12] H. J. Carmichael. Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations, volume 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [13] L. Mandel and E. Wolf. Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge University Press, 1995.
- [14] H.M. Wiseman and G. J. Milburn. Quantum Measurement and control. Cambridge, 2010.

- [15] H. J. Carmichael. Statistical Methods in Quantum Optics 2: Non-Classical Fields, volume 2. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [16] Heinz-Peter Breuer and F. Petruccione. The Theory of Open Quantum Systems. Oxford University Press, reprinted edition, 2003.
- [17] J. J. Sakurai, San-Fu Tuan, and E. D. Commins. Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley, 1995.
- [18] E. Merzbacher. Quantum Mechanics. Wiley, 1970.