



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 1

Neiva, 20 de junio de 2018

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

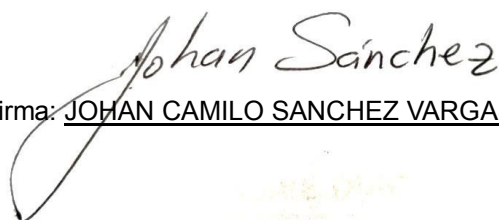
Johan Camilo Sánchez Vargas, con C.C. No. 1 117 531 222, autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado Una Convergencia entre la Música y las Matemáticas desde la Complejidad, presentado y aprobado en el año 2018 como requisito para optar al título de Magister en Estudios interdisciplinarios de la Complejidad;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:



Firma: JOHAN CAMILO SANCHEZ VARGAS

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: UNA CONVERGENCIA ENTRE LA MÚSICA Y LAS MATEMATICAS DESDE LA COMPLEJIDAD**

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
SANCHEZ VARGAS	JOHAN CAMILO

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
MONTEALEGRE CÁRDENAS	MAURO

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
MONTEALEGRE CÁRDENAS	MAURO

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MAGISTER EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD**

**FACULTAD:** FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**PROGRAMA O POSGRADO:** MAESTRIA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

**CIUDAD:** NEIVA      **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2018      **NÚMERO DE PÁGINAS:** 190

**TIPO DE ILUSTRACIONES** (Marcar con una X):

Diagramas  Fotografías  Grabaciones en discos  Ilustraciones en general  Grabados \_\_\_ Láminas \_\_\_  
Litografías \_\_\_ Mapas \_\_\_ Música impresa \_\_\_ Planos \_\_\_ Retratos \_\_\_ Sin ilustraciones \_\_\_ Tablas o  
Cuadros \_\_\_

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: ADOBE ACROBAT READER

**MATERIAL ANEXO:** 14 audios MPG-4

**PREMIO O DISTINCIÓN** (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria): **APROBADA**



<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 3</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>IEDAD</u>	<u>Inglés</u>
1. PENSAMIENTO ALEATORIO	RANDOM THINKING	6. INTERDISCIPLINAR	INTERDISCIPLINARITY	
2. AZAR	CHANCE	7. PARADIGMA DEL CAOS	CHAOS PARADIGM	
3. PROBABILIDAD	PROBABILITY	8. CREATIVIDAD	CREATIVITY	
4. DODECAEDRO	DODECAHEDRON	9. SISTEMA DINÁMICOS	DYNAMIC SYSTEM	
5. COMPLEJIDAD	COMPLEXITY	10. SISTEMA COMPLEJO	COMPLEX SYSTEM	

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

En esta investigación se abordó el pensamiento aleatorio partiendo de las orientaciones curriculares expresadas en los lineamientos curriculares desde las cuales plantea la relación de las matemáticas con otras ciencias. El objetivo central consiste en establecer una convergencia entre las matemáticas y la música desde el pensamiento aleatorio con los estudiantes de grado séptimo de Institución Educativa Rural Bolivia del municipio de El Paujil, Caquetá. Para ello se establecen unos antecedentes investigativos relacionados con el pensamiento aleatorio e investigaciones en las que se relacionan las matemáticas con la música. La metodología corresponde a una investigación hermenéutica, con un análisis cualitativo – cuantitativo. El proceso de intervención se desarrolla a través de una unidad didáctica desde la cual se desarrollan 30 sesiones relacionando el pensamiento aleatorio con la música fractal. El proceso de intervención permite que los estudiantes logren establecer una convergencia entre la música y las matemáticas desde la complejidad, ahondando en el pensamiento aleatorio de los estudiantes.

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

In this research, random thinking was approached based on the curricular orientations expressed in the curricular guidelines from which it proposes the relationship between mathematics with other sciences. The main objective is to establish a convergence between mathematics and music from random thinking with seventh grade students in Rural Educational Institution Bolivia in El Paujil, municipality of Caquetá. To this aim, a research background related to random thinking and research in which mathematics is related to music is established. The methodology corresponds to a hermeneutic investigation, with a qualitative - quantitative analysis. The intervention process is exposed through a didactic sequence in which 30 sessions are developed relating random thinking to fractal music. The intervention process allows students to establish a convergence between music and mathematics from the complexity, delving into the random thinking of students.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>3 de 3</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

**APROBACION DE LA TESIS**

Nombre Presidente Jurado: CRISTIAN CORTES GARCIA

Firma: 

Nombre Jurado: GUSTAVO LONDOÑO BETANCOURT

Firma: 

**UNA CONVERGENCIA ENTRE LA MÚSICA Y LAS MATEMATICAS DESDE LA  
COMPLEJIDAD**

**JOHAN CAMILO SANCHEZ VARGAS**

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD**

**NEIVA – HUILA**

**2018**

**UNA CONVERGENCIA ENTRE LA MÚSICA Y LAS MATEMATICAS DESDE  
LA COMPLEJIDAD**

**Tesis de grado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Estudios  
Interdisciplinarios de la Complejidad.**

**JOHAN CAMILO SANCHEZ VARGAS**

**Ph. D MAURO MONTEALEGRE**

**Director de tesis**

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA**

**MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD**

**NEIVA – HUILA**

**2018**

Nota de aceptación

APROBADO



---

MSc. CRISTIAN CORTES GARCIA  
Firma del Jurado



---

MSc. GUSTAVO LONDOÑO BETANCOURT  
Firma del Jurado

## **DEDICATORIA**

A Dios, a mis padres y a mi hermano por brindarme  
apoyo en cada proyecto que me trazo



## **AGRADECIMIENTOS**

A la Institución Educativa Rural Bolivia, por abrirme las puertas para realizar el proceso de investigación, en especial a los estudiantes del grado séptimo con quienes se llevó a cabo la secuencia didáctica.

A mi asesor de trabajo de grado Ph. D Mauro Montealegre y al profesor Edinson Oswaldo Delgado por sus aportes y asesorías en la consolidación de este proyecto de investigación.

A la Universidad Surcolombiana por brindar esta maestría en estudios interdisciplinarios de la complejidad que permite cualificar mi práctica docente.

## RESUMEN

En esta investigación se abordó el pensamiento aleatorio partiendo de las orientaciones curriculares expresadas en los lineamientos curriculares desde las cuales plantea la relación de las matemáticas con otras ciencias. El objetivo central consiste en establecer una convergencia entre las matemáticas y la música desde el pensamiento aleatorio con los estudiantes de grado séptimo de Institución Educativa Rural Bolivia del municipio de El Paujil, Caquetá. Para ello se establecen unos antecedentes investigativos relacionados con el pensamiento aleatorio e investigaciones en las que se relacionan las matemáticas con la música. La metodología corresponde a una investigación hermenéutica, con un análisis cualitativo – cuantitativo. El proceso de intervención se desarrolla a través de una unidad didáctica desde la cual se desarrollan 30 sesiones relacionando el pensamiento aleatorio con la música fractal. El proceso de intervención permite que los estudiantes logren establecer una convergencia entre la música y las matemáticas desde la complejidad, ahondando en el pensamiento aleatorio de los estudiantes.

**Palabras clave:** pensamiento aleatorio, azar, probabilidad, música fractal, dodecaedro

## **ABSTRACT**

In this research, random thinking was approached based on the curricular orientations expressed in the curricular guidelines from which it proposes the relationship between mathematics with other sciences. The main objective is to establish a convergence between mathematics and music from random thinking with seventh grade students in Rural Educational Institution Bolivia in El Paujil, municipality of Caquetá. To this aim, a research background related to random thinking and research in which mathematics is related to music is established. The methodology corresponds to a hermeneutic investigation, with a qualitative - quantitative analysis. The intervention process is exposed through a didactic sequence in which 30 sessions are developed relating random thinking to fractal music. The intervention process allows students to establish a convergence between music and mathematics from the complexity, delving into the random thinking of students.

**Keywords:** random thinking, chance, probability, fractal music, dodecahedron.

## **TABLA DE CONTENIDO**

1.	INTRODUCCIÓN .....	11
2.	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	14
2.1	Descripción del problema.....	14
2.2	Formulación y enunciación del problema de investigación .....	17
3.	ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN.....	18
3.1	Antecedentes.....	21
3.1.1	Antecedentes internacionales .....	21
3.1.2	Antecedentes nacionales.....	23
4.	Fundamentos teóricos.....	28
4.1	Referente contextual e institucional.....	28
4.1.1	Descripción geográfica de la zona. ....	29
4.2	Referentes sobre la teoría de complejidad.....	30
4.2.1	Pensamiento Aleatorio.....	30
4.2.2	Musicología. ....	30
4.2.3	Fractales.....	32
4.2.4	Música Fractal. ....	33

4.2.5	Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia.....	34
4.2.6	Probabilidad.....	36
4.2.7	Aleatoriedad. ....	36
4.2.8	Pensamiento aleatorio.....	37
4.2.9	Sistemas de datos.....	40
4.2.10	Música y Matemáticas. Una filosofía común. ....	41
4.2.11	Neuropedagogía.....	43
4.2.12	Enfoque Pedagógico: Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS).....	44
4.3	Complejidad.....	45
5.	OBJETIVOS.....	47
5.1	Objetivo General. ....	47
5.2	Objetivos Específicos. ....	47
6.	METODOLOGÍA.....	48
6.1	Tipo y enfoque de la investigación.....	48
6.2	Universo de estudio, población y muestra.....	48
6.3	Población y muestra. ....	48
6.4	Estrategias metodológicas.....	49
6.4.1	Fase de diseño de Unidad Didáctica.....	49
6.4.2	Fase de diseño y elaboración del dodecaedro.....	52
6.4.3	Fase de creación musical fractal.....	54

6.4.4 Técnicas e instrumentos de investigación. ....	57
7. RESULTADOS .....	58
7.1. Implementación de la Unidad Didáctica. ....	58
7.1.1. Guía nº 1: exploración de las ideas previas. ....	58
7.1.2. Guía final: retroalimentación de las actividades propuestas. ....	62
7.2. Construcción del dodecaedro. ....	65
7.3. Composición musical. ....	66
CONCLUSIONES.....	69
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	71
ANEXOS.....	79
ANEXO 1: ACTIVIDAD ALTERNATIVA.....	79
ANEXO 2: recursos y guías de trabajo .....	82

## LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

Figura 1. Ubicación de El Paujil, dentro del departamento del Caquetá.....	29
Tabla 1. Estructuración de la Educación Matemática en Colombia, a partir de los Lineamientos Curriculares del MEN. Adaptado por el autor de Carranza & Guerrero (2016). ....	35
Figura 2. Componentes generales del pensamiento aleatorio. Tomado de Triviño (2013) (Adaptado por Pinzón, 2016, p. 48). ....	39
Figura 3. Componentes generales del pensamiento aleatorio. Tomado de Triviño (2013) (Adaptado por Pinzón, 2016, p. 48). ....	40
Tabla 2. Diseño preliminar de la Unidad Didáctica. ....	49
Figura 4. Planimetría de un dodecaedro, poliedro regular de 12 caras, por medio del método de origami. Cada cara será un acorde musical. ....	52
Tabla 3. Actividades preliminares para la segunda fase de la investigación.....	53
Tabla 4. Actividades preliminares para la tercera fase de la investigación. ....	55
Figura 5. Gráfico de torta sistematizando las respuestas de los estudiantes de la pregunta: ¿Crees que la música tiene alguna relación con las matemáticas?.....	59
Figura 6. Respuestas asociadas a los estudiantes que creen en la relación música y matemáticas.....	60
Figura 7. Respuestas asociadas a los estudiantes que creen en la relación música y matemáticas.....	60

Figura 8. Respuestas de los estudiantes a la pregunta: ¿Qué entiendes por probabilidad?	61
Figura 9. Respuestas de los estudiantes a la pregunta: ¿Qué entiendes por azar?.....	62
Figuras 10 y 11. Elaboración del dodecaedro por parte de los estudiantes de la forma geométrica. Fotografías tomadas por el autor. ....	65
Figuras 12 y 13. Desarrollo de actividad musical con los estudiantes. Fotografías tomadas por el autor. ....	68
Figura 14. Desarrollo de composición musical con instrumento (órgano). Fotografías tomadas por el autor. ....	68



## 1. INTRODUCCIÓN

La educación matemática se resalta fundamentalmente por su aporte al desarrollo de la sociedad y de los contextos en los cuales es inmersa. Por tanto, en el aula de clase se deben propiciar los espacios para que dicho desarrollo se propicie, y así romper con la hegemonía tradicional de la matemática escolar como un área en la cual sus clases son aburridas, repetitivas, o que solo son para algunos estudiantes más superdotados que otros. en la presente investigación se desdibuja las anteriores características anacrónicas y se postula un contexto particular como lo es la música en la cual emerge el conocimiento matemático en el marco del pensamiento aleatorio, fundamental para la vinculación de la lectura y análisis de la diferente información que circula a diario por los diferentes medios audiovisuales.

En el capítulo II planteamiento del problema el trabajo está estructurado en: descripción del problema, en este apartado se describe el problema de la didáctica de las matemáticas desde la postura tradicional y los bajo resultados de las pruebas externas pisa y saber que tienen los estudiantes en esta asignatura. Finalmente se establece la formulación y enunciación del problema de investigación: ¿cómo establecer una convergencia entre las matemáticas y la música desde el pensamiento aleatorio con los estudiantes de grado séptimo de institución educativa rural Bolivia del municipio del Paujil, Caquetá?

En el capítulo III antecedentes y la justificación se presentan: la justificación en la que se hace énfasis en la importancia del pensamiento aleatorio y la relación de las matemáticas con otras ciencias y la interdisciplinariedad, en especial la articulación entre las matemáticas y la música y los antecedentes internacionales y nacionales desde la línea de investigaciones del pensamiento aleatorio o probabilístico e investigaciones en las que las matemáticas se relacionan con la música como respaldo a la investigación que se desarrolló.

En el capítulo IV fundamentos teóricos se presenta: el referente contextual e institucional desde el cual se describe de manera general las características de la institución educativa rural Bolivia y los referentes sobre la teoría de la complejidad, en el cual se establecen las siguientes categorías: pensamiento aleatorio, musicología, fractales, música fractal, lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia, probabilidad, aleatoriedad, pensamiento aleatorio, sistema de datos, música y matemáticas, neuropedagogía, enfoque pedagógico: ciencia, tecnología y sociedad (cts) y complejidad.

En el capítulo V se exponen los objetivos: el objetivo general que se enmarca en “establecer una convergencia entre las matemáticas y la música desde el pensamiento aleatorio con los estudiantes de grado séptimo de institución educativa rural Bolivia del municipio de el paujil, Caquetá y los objetivos específicos: diseñar e implementar una unidad didáctica para adquisición de las bases teórico-prácticas del pensamiento aleatorio y generación musical, elaborar un prototipo de una máquina (dodecaedro) capaz de relacionar la geometría con los acordes musicales y componer una canción aleatoria basada en los resultados de azar del dodecaedro.

En el capítulo VI se establece la metodología de la investigación: tipo y enfoque de la investigación hermenéutica, universo de estudio, población y muestra, y estrategias metodológicas

Finalmente en el capítulo VII resultados, se expone la implementación de la unidad didáctica, se describe en este apartado cada una de las guías que fueron planeadas y desarrolladas con los estudiantes del grado séptimo, así mismo en términos cuantitativos se da a conocer los resultados del proceso de intervención de la guía 1: exploración de conocimientos previos, la construcción del dodecaedro, la composición musical, el desarrollo de la composición musical con instrumentos de órgano y por último se manera general se presentan las conclusiones de este proceso de investigación, el que se logra integrar las matemáticas con la música con estudiantes del grado séptimo en una institución educativa rural.

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **2.1 Descripción del problema**

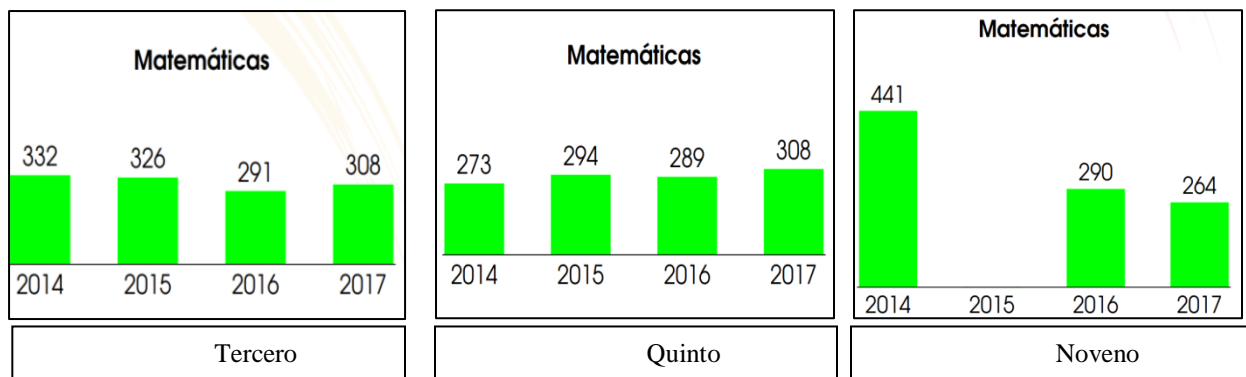
Las matemáticas son presentadas como una asignatura árida y complicada que conllevan a un desinterés por parte de los estudiantes. Es la asignatura más estigmatizada en el contexto educativo por las concepciones que se entretajan entre los docentes, estudiantes y padres de familia derivadas de las experiencias rutinarias y cargadas de algoritmos y de ejercitación que se promulgan sin sentido en aula. Según diferentes investigaciones las matemáticas es la asignatura que presentan mayor índice de reprobación escolar y la que menor resultado obtiene en las pruebas externas, ejemplo de ello Muñoz (2013) expone

El problema de la imagen de la Matemática en la sociedad, en las familias, en los profesores y en el aula, es de gran importancia. Una imagen negativa de la Matemática afecta toda la actividad del mismo profesor. Lecciones inútiles, repetitivas, aburridas, tienen repercusión negativa en los estudiantes y por consiguiente sobre todos los demás aspectos que componen el mundo de la escuela, terminando por dar una imagen negativa de la Matemática al mismo profesor que la enseña, y una imagen negativa de si mismo como profesor, haciendo negativo todo el trabajo didáctico. (D. Amore, 2005, p.13)

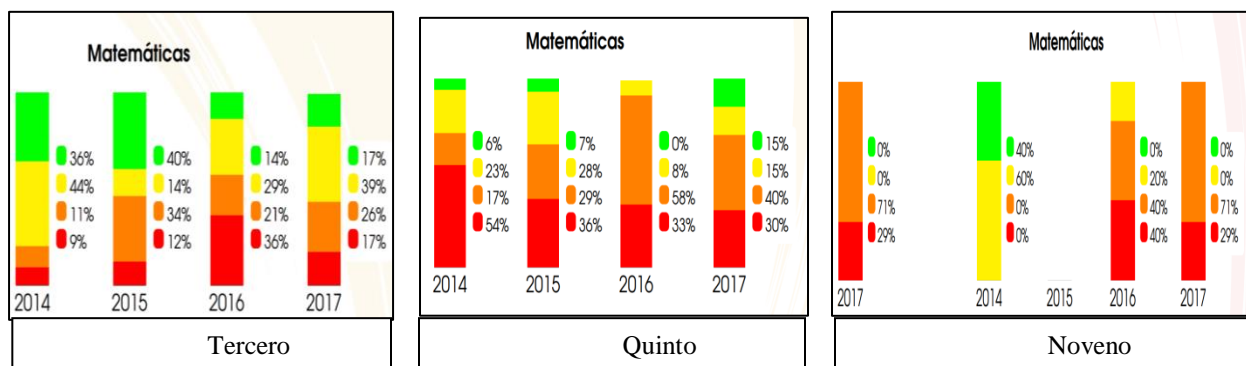
Contrario a esta perspectiva tradicional, las pruebas externas: Programme for International Student Assessment (PISA) y Saber conciben la didáctica de las matemáticas desde situaciones problémicas en contextos sociales o en el contexto de otras ciencias. Las pruebas PISA establecen

para la evaluación de la competencia matemática establece cuatro contextos o situaciones: situación personal, situación educativa o laboral, situación pública y situación científica. Por ello “Los contenidos de la evaluación de competencia matemática abarcan problemas de *cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad*” (OCDE, sf, p. 13). Por su parte la prueba externa SABER establece para la evaluación de matemáticas “se busca evidenciar las significaciones que el estudiante ha logrado construir y que pone a prueba cuando se enfrenta con diferentes situaciones problema” (MEN, 2016, p.36). Tanto la postura de la prueba externa internacional y la prueba externa nacional se centra en conocer cómo los estudiantes pueden utilizar lo aprendido en matemáticas en situaciones auténticas, en situaciones usuales de la vida cotidiana, postura que trasciende la percepción errónea y restringida de sólo contenidos matemáticos descontextualizados.

Para el caso de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional a través de los documentos de política pública los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los estándares básicos de competencias de matemáticas establecen una estrecha relación entre el currículo propuesto y el currículo evaluado; sin embargo según el análisis de los resultados que se realizan en los últimos años a través del día E, el currículo desarrollado que hace alusión a las prácticas de aula está desarticulado de las orientaciones oficiales y de las necesidades sociales de los estudiantes planteado en la política pública educativa. La Institución Educativa Rural Bolivia, no es ajena a esta problemática, en el índice sintético de calidad 2018 se puede observar que en todos los niveles tercero, quinto y noveno los resultados son favorables, sin embargo en comparación con los resultados de lenguaje, son bajos. También es importante mencionar que los resultados corresponden a pruebas censales y en ningún momento a pruebas controladas.



Los resultados que presentan en índice sintético de calidad de la Institución Educativa, en el progreso del cuatrienio los niveles de desempeño de matemáticas en las pruebas Saber 3°, 5° y 9° dejan entrever que en tercero y quinto los alcanzan los desempeños satisfactorio y avanzado, sin embargo en noveno los resultados se sitúan en insuficiente y mínimo.



Dentro de las pruebas externas se evalúa el pensamiento aleatorio y sistema de datos, los resultados nacionales han demostrado que los estudiantes de las instituciones educativas de Colombia obtienen resultados mínimos en este pensamiento. Se atribuye que las causas de ello se derivan en que los docentes se enfatizan más en el pensamiento numérico y sistema numérico y pensamiento métrico y sistema de medidas, evitando el pensamiento aleatorio por suponer que es complejo o por la organización gráfica de los Estándares Básicos de competencias de

matemáticas se deja para los últimos meses del año escolar, o porque se considera que este pensamiento es exclusivo para los grados superiores, también porque los docentes se limitan a desarrollar las actividades conductistas propuestas en los libros de texto y materiales de apoyo que tienen una visión somera y superficial de las implicaciones de aleatoriedad y probabilidad.

...por ello, hoy día ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos. (MEN, 200, p.66)

Con respecto al desarrollo de la didáctica de las matemáticas, se determina en el currículo oficial de Colombia su relación con otras ciencias, es decir no sólo propender por actividades que incluyan la resolución de problemas con situaciones del contexto social sino también con otras ciencias. En relación a ello se cuestiona sobre la música y la relación con las matemáticas. La música está inmersa en diferentes aspectos de la vida de las personas, desde la diversión hasta en el aprendizaje, esto implica que además de ser apta para ser investigada desde varios puntos de vista y para el caso de esta investigación surge este cuestionamiento.

## **2.2 Formulación y enunciación del problema de investigación**

¿Cómo establecer una convergencia entre las matemáticas y la música desde el pensamiento aleatorio con los estudiantes de grado séptimo de Institución Educativa Rural Bolivia del municipio de El Paujil, Caquetá?

### 3. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo pretende desarrollar una alternativa en la enseñanza-aprendizaje del pensamiento aleatorio, como consecuencia a la constante dificultad de los alumnos de entender el azar como parte de la cotidianidad. La intención es rescatar aquellas características de la música fractal, que pueden servir para que los estudiantes asimilen conceptos de la aleatoriedad debido a su profunda racionalidad, su carácter hiperlingüístico y organización matemática. Se sustenta en las orientaciones curriculares expresadas en los Lineamientos curriculares de matemáticas, en los estándares de competencias de lenguaje y en la matriz de referencia desde lo relacionado con La formulación, el tratamiento y la resolución de los problemas del pensamiento aleatorio y sistema de datos en el contexto de otras ciencias.

El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (MEN, 2006, p. 65)

Esta iniciativa busca descubrir nuevas conexiones, procesos e interrelaciones entre las matemáticas y la música en la Educación Básica secundaria, desafiando las supuestas bases de las teorías tradicionales, ampliando la capacidad de profundizar críticamente la esencia de los fenómenos naturales, interactuando con la incertidumbre y el azar, permitiendo que el conocimiento existente sea reestructurado en el aula. Se asume esta interdisciplinariedad como un reto de unificación, como estrategia de reproducción musical de los números, buscando las



relaciones entre el pensamiento aleatorio (contemplado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas) y lo armónico (mediante la composición de canciones de forma aleatoria).

La interdisciplinariedad trata de crear un ambiente de estudio de significados y situaciones significativas para el alumno. Tiene que partir de las áreas de conocimiento reales y presentes, de solución a situaciones de conflicto (Neira, SF, p.3).

Para lograr el objetivo de la investigación, se requiere una visión holística, donde se integre y globalice las matemáticas y la música en una propuesta didáctica que trascienda las prácticas rutinarias y tradicionalistas que imperan en el aula como lo plantea Pérez de la Cruz:

Las matemáticas están presentes de forma implícita en todas las áreas de la vida y la música no es una excepción. Es más: la música es matemática pura en estado gaseoso. En todas sus características, la música encierra números, proporciones, medidas, operaciones...que son la base de su espíritu. La relación de la música y las matemáticas es comparable a la de la materia con el átomo. El uno es parte de aquella y aquella es en esencia lo otro (, 2013, p.6).

Es importante hacer el esfuerzo por articular estos saberes, pues en la mayoría de las veces está ausente esta relación; porque los procesos se dan de manera aislada, dispersos, diversos y adversos entre sí. Desde la antigua Grecia hasta el Renacimiento, la música era considerada parte de las matemáticas, tal y como lo sustenta Neubauer (1992) en La Emancipación de la Música:

El concepto matemático de la música se formalizó en la división medieval de las artes liberales, que asignó a la música, junto con la aritmética, la geometría y la astronomía, al *quadrivium*, y las artes verbales de la retórica, gramática y dialéctica, al *trívium*.

Desde el punto de vista social, la música se ha configurado como un elemento educativo, teniendo en cuenta que hace parte de las bellas artes. Leibniz expresaba la exigencia de una reconciliación entre lo sensible y lo científico: Escudriñar conceptos, experiencias, y sensaciones, orientadas a entrelazar, tomadas de la mano, la música y las matemáticas, en las actuales aulas de enseñanza. Aspecto que también es abordado por Moyano (2016):

La música y la matemática se relacionan porque en ambas ciencias se maneja un alto nivel de abstracción, hacen uso de un variado lenguaje simbólico y sistemas de notación para constituir un lenguaje universal de comprensión y construcción (p. 20).

Esta propuesta investigativa busca intervenir, desde una convergencia entre las matemáticas y la música, en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento aleatorio en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Rural Bolivia de El Paujil (Caquetá), configurado desde la teoría de la complejidad que permita comprender la naturaleza probabilística que tienen los distintos juegos de azar. La intención es rescatar aquellas características de la música fractal, que pueden servir para que los estudiantes asimilen conceptos de la aleatoriedad debido a su profunda racionalidad, su carácter hiperlingüístico y organización matemática.

En la sociedad actual es imprescindible manejar objetos matemáticos y relacionarlos con situaciones de la vida corriente. Según progresa el desarrollo cognitivo del alumno éste Capítulo I: Fundamentación teórica 17 requiere unas matemáticas más complejas. De acuerdo con la naturaleza de las matemáticas, en cuanto a lenguaje formal, debe tener características propias y la capacidad de elaborar y comunicar los conocimientos. A lo largo de la educación, las Matemáticas deben desempeñar un papel formativo básico de capacidades intelectuales, un papel aplicado y un papel instrumental (Sordo, 2005, p.16)

En este sentido, se establece además un gran aporte a esta región que ha sido estratégicamente golpeada por el flagelo de la violencia de diferentes grupos al margen de la ley,

los cuales han establecido como medio de producción los cultivos ilícitos promoviéndolos en los habitantes. Así mismo, la I.E. ha presentado problemáticas desde los inicios de su creación debido a los altos índices de pobreza que presenta su comunidad educativa, en los años ochenta a riberas del río Suncillas unos pocos habitantes abrieron selva para empezar a labrar la tierra y años después en una primera casa de bareque y guajo fue creada la primera escuela. Además de lo anterior la impenetrable vía de acceso, cerca de ochenta kilómetros de la cabecera municipal de El Paujil no ha permitido mayor desarrollo en sus habitantes para el libre comercio de sus productos cultivados en el sector.

### **3.1 Antecedentes**

En este capítulo se presentan los antecedentes que corresponden a investigaciones que preceden y apoyan el proceso de investigación, los fundamentos teóricos..

Con la intención de definir y delimitar la presente investigación, se acudieron en principio a trabajos que aludían a la intención de fomentar el pensamiento aleatorio a través de una propuesta de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, o sobre la enseñanza de la música, a partir de las matemáticas. A continuación se presentan algunas de estas investigaciones que aportaron en la construcción de la siguiente propuesta.

#### **3.1.1 Antecedentes internacionales**

El primer referente investigativo se denomina un *estudio sobre el desarrollo del pensamiento aleatorio usando recursos educativos abiertos* (Pinzón, Poveda y Pérez. 2015) en el que desarrollaron un proyecto de investigación con 231 estudiantes, de los cuales 80

correspondían a estudiantes de una institución educativa mexicana y 151 a dos instituciones colombianas del grado tercero. El proceso de intervención se situó en describir el proceso que evidenciaron tres grupos de estudiantes de tercer grado de secundaria frente a la conceptualización del azar mediante el uso de la plataforma Edmodo para evaluar una clasificación de sus concepciones y redireccionar orientaciones académicas conducentes a potenciar el desarrollo del pensamiento probabilístico propio para esta etapa de las operaciones lógico formales. Entre las conclusiones más relevantes se encuentra

...llevamos a cabo una planeación didáctica que incorporó el uso de la plataforma Edmodo como herramienta de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto permitió establecer que 95% de los estudiantes eran capaces de utilizar sus conocimientos en la toma de decisiones, como un proceso cognitivo que involucra la ponderación de las opciones para determinar el curso adecuado de una acción. Estos estudiantes, al involucrarse en la resolución de problemas probabilísticos que incluyen la identificación y el análisis de enunciados, demostraron la capacidad para identificar de manera eficiente los datos relevantes y las preguntas implícitas en diferentes situaciones (p.14)

El segundo antecedente *razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo* (Batanero) hace énfasis en la necesidad de reforzar la formación de razonamiento probabilístico en la educación primaria y secundaria “El azar está presente en la vida cotidiana en muchos contextos en los que aparecen nociones de incertidumbre, riesgo y probabilidad” (p.3), para ello presenta un análisis relacionado en una situación social de un robo cometido en el que establece una falacia fiscal producto del azar. Como segundo ejemplo presenta una evaluación de riesgos médicos en las pruebas de prevención masivas. Finalmente presenta unas

implicaciones para la enseñanza de la probabilidad aludiendo el estado actual de las tecnologías que permiten las simulaciones y los experimentos.

Tabla 5. Recursos para explorar la probabilidad en Internet

Actividades para la clase	<a href="http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-04/ed99-0224-04.html">http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-04/ed99-0224-04.html</a>
CICA	<a href="http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html">http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/matematicas-28.html</a>
Descartes	<a href="http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Azar_y_probabilidad/index.htm#obje">http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Azar_y_probabilidad/index.htm#obje</a>
Fermatsi	<a href="http://www.fermatsi.org/ProbBachExpeAleaProb.htm">http://www.fermatsi.org/ProbBachExpeAleaProb.htm</a>
Juego 3 puertas	<a href="http://www.dpye.iimas.unam.mx/proyectos/puertas/puertas.html">http://www.dpye.iimas.unam.mx/proyectos/puertas/puertas.html</a>
Probabilidad y estadística	<a href="http://www.cete-sonora.gob.mx/AFDA/recursos/mat/moe/galerie/wstat1/wstat1.html">http://www.cete-sonora.gob.mx/AFDA/recursos/mat/moe/galerie/wstat1/wstat1.html</a>
Statmedia	<a href="http://www.ub.es/stat/docencia/Software/Statmedia/Welcome.html">http://www.ub.es/stat/docencia/Software/Statmedia/Welcome.html</a>

### 3.1.2 Antecedentes nacionales

En el nivel nacional se sitúa para el caso de esta investigación a Basso (2002) con la conferencia *La geometría fractal en la música*, en la que se ofrece una breve introducción al tema desde interrogantes como ¿qué son los fractales o, mejor aún, ¿qué es la geometría fractal?, presenta un análisis bibliográfico de las estructuras fractales como la curva de Koch, analizando las composiciones fractales; aunque no presenten estructuras fractales estrictas, se han hallado procedimientos musicales que reproducen algunas de las características inherentes a la geometría fractal, en especial las propiedades de autosemejanza y de memoria de gran alcance. También expone el empleo intencional de procedimientos fractales quizá haya tenido lugar, por primera vez, en los trabajos de los compositores franceses que formaron el groupe de l'itineraire a mediados de la década de 1970. El momento y lugar no parecen casuales la geometría fractal es consecuencia de desarrollos matemáticos franceses (Poincaré, Mandelbrot,...) y había sido definida a fines de la década anterior.

Una segunda investigación que aporta al proceso investigativo es la propuesta por Pachón (2015) “*matemáticas y música: una mirada a la armonía desde la teoría de grupos*”. Este trabajo establece el enlace entre las técnicas de composición musical y la Teoría de grupos. Para el inicio de su estudio realizó una búsqueda bibliográfica sobre la relación entre la música y las matemáticas y la teoría de grupos; su documento base fue Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música de Agustín y otros (2009). Con estos referentes proyectó ideas básicas sobre música, a saber, la estructuración actual de las notas musicales, escritura básica en partitura y la composición de acordes. Entre sus conclusiones relevantes planeta: Los métodos de composición obedecen a transformaciones de los objetos base en la música: las notas y acordes. Dichas trasformaciones pueden verse como funciones por lo cual los diferentes métodos son susceptibles a re interpretaciones Matemáticas. (p.7)

En la misma línea de la relación de las matemáticas como la música Moyano (2016) presenta el reporte de experiencia “*desarrollo humano, música y matemática*”. Este trabajo constituye el reporte de aplicación de una secuencia de actividades empleando la música como recurso para el aprendizaje de la función Senoidal, valorando el aspecto emocional y afectivo del estudiante como estrategia para mejorar su cognición y su disposición hacia esta asignatura. El método de la investigación de este estudio tiene como base una investigación cualitativa de tipo descriptivo-exploratoria, mediante el estudio de caso y la implementación de una secuencia de actividades la cual fue pilotada y validada en el instituto Marsella en la localidad de Kennedy. A partir de dicha implementación -en el trabajo de campo- se realizó la recolección de la información que fue objeto de análisis para la emisión de los resultados de la investigación. Los resultados obtenidos con 29 estudiantes de grado once fueron analizados desde cuatro aspectos fundamentales: la didáctica, teniendo en cuenta los planteamientos de Bruno D’amore y otros

(2010) para valorar la actividad del estudiante en la construcción del concepto de función Senoidal; la pedagogía emocional en relación con los postulados de Chabot (2009) para resaltar la importancia del aspecto afectivo y emocional en los procesos cognitivos; la noción de la función seno propuesta por Valiente (2007) para describir el camino hacia la construcción de éste concepto y por último desde la mate-música estudiada por Amster (2010) para describir la estrecha relación existente entre dos disciplinas separadas culturalmente: música y matemáticas.

En relación al pensamiento aleatorio Carranza & Guerrero (2016) presentan su estudio en *el pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes*. Establecen un estudio crítico sobre los conceptos relacionados en los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (EBCM), documento de política pública emitido por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Las investigadoras expresan que en este documento que se reconocen los conceptos y procesos de cada pensamiento y sistema matemático, lo cual se sistematiza en una serie de tablas donde se codifica los procesos que se deben adelantar en los grupos de grado. Así mismo se establecen relaciones entre los elementos y sistema y pensamientos. Como resultado de estas relaciones y su análisis, se genera una propuesta micro curricular para el desarrollo del pensamiento matemático, lo cual se materializa a través de esquemas y algunos ejemplos (actividades) originados a partir de relaciones encontradas. Se observa que en todas las relaciones que se establecieron para los diferentes conjuntos de grados apareció el pensamiento numérico, por lo que este pensamiento se relaciona de forma directa y en mayor medida con el pensamiento aleatorio, a comparación con los demás pensamientos, además las relaciones entre los procesos y conceptos de los diferentes pensamientos dieron como resultado una propuesta micro curricular de matemáticas a partir de un

proceso secuencial entre conjuntos de grados en la cual se desarrolla el pensamiento matemático fundamentado en procesos del pensamiento aleatorio.

Lozano (2015) “*la enseñanza del pensamiento aleatorio en estudiantes de grado quinto en la escuela Dulcenombre en Samaná*”, implementa una estrategia didáctica que permite a los estudiantes de quinto grado de la sede central de Dulcenombre comprender el pensamiento aleatorio como herramienta pedagógica, a través del principio de Dirichlet. La estrategia se implementó en una escuela rural con metodología de Escuela Nueva, en el que convergen en un salón de clase varios grupos de estudiantes (aula multigrado) y en el que un solo docente desarrolla todos los procesos de formación desde transición a quinto. El investigador diseñó unas guías en las que fortalece la resolución de problemas manipulando material concreto y en un ambiente lúdico y de confianza para los estudiantes lo que permitió una relación de intersubjetividad y no de jerarquía. Este proceso permitió despertar en los estudiantes una gran expectativa de trabajo investigativo, demostró que, partiendo de experiencias sencillas y de la vida cotidiana, se pueden extraer inferencias y modelos predictivos en determinadas situaciones y de acuerdo con el nivel de conocimiento de las ciencias y las matemáticas que el estudiante posea.

Finalmente Pinzón (2016) en su estudio exploratorio *habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de aplicaciones móviles*: desarrollado en los semilleros de investigación escolar de la educación media establece las implicaciones que podría tener el proceso de creación de aplicaciones móviles para manejo básico de sistemas de datos, en las habilidades de pensamiento aleatorio en el contexto de la investigación escolar. La investigación tiene un enfoque cualitativo, exploratorio, cuyo diseño cuasi experimental consistió en un grupo experimental y un grupo control del semillero de investigación de la institución educativa Román



Gómez, aplicándoles una evaluación de razonamiento estadístico antes y después de implementar una secuencia didáctica. El análisis de los resultados los realizó a la luz de la prueba de Moses para muestras independientes en los que concluye desde las evidencias las diferencias significativas en los datos extremos de los grupos en dos habilidades del pensamiento aleatorio, la secuencia generó afectaciones positivas o de mejora en el grupo experimental, en la habilidad de interpretar probabilidades correctamente y una disminución en la concepción incorrecta ley de los pequeños números, datos que toman validez en el contexto del semillero de la institución.

## 4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 4.1 Referente contextual e institucional

La Institución Educativa Rural Bolivia está ubicada en el municipio de El Paujil, Caquetá. Cuenta con una planta física de 120 estudiantes. Es de naturaleza oficial, con jornada mañana, mixto.

Para comprobar la asimilación de conceptos respecto a la enseñanza tradicional del pensamiento aleatorio y de sistemas de datos, la población será dividida en dos muestras: a la primera se aplicará la presente propuesta; y a la segunda muestra se empleará el método tradicionalista. Al final se hará el contraste entre ambos grupos y se determinarán las diferencias entre uno y otro.

Figura 3. Ubicación de la IE Rural Bolivia. Tomado de *Google Maps*.

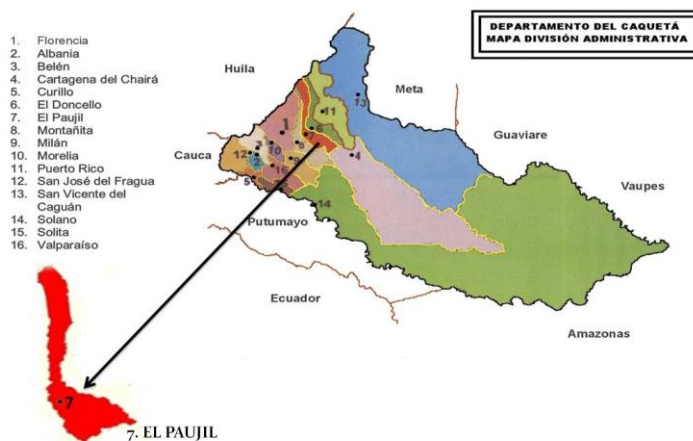


#### 4.1.1 Descripción geográfica de la zona.

El municipio de El Paujil está localizado al norte del Caquetá y al sureste y noreste en relación con Florencia, hace parte de los ramales de la cordillera Oriental y el resto comprende los paisajes de piedemonte y lomeríos, comenzando en su cabecera municipal. La altura promedio sobre el nivel del mar es de 470 metros, temperatura promedio de 26°C. Su cabecera municipal está ubicada a 1°35' de latitud norte y 75°20' de longitud oeste del meridiano de Greenwich. Sus límites principales son: norte: con el departamento del Huila y el municipio de El Doncello; este: Con el municipio de El Doncello; sur: Con los municipios de La Montañita y Cartagena del Chaira; occidente: Municipio de La Montañita (Alcaldía El Paujil, 8 de abril de 2018).

**Figura 1. Ubicación de El Paujil, dentro del departamento del Caquetá.**

Tomado de [http://www.elpaujil-caqueta.gov.co/mapas\\_municipio.shtml?apc=bcxx-1-&x=2036501](http://www.elpaujil-caqueta.gov.co/mapas_municipio.shtml?apc=bcxx-1-&x=2036501) el 8 de abril de 2018.



## **4.2 Referentes sobre la teoría de complejidad**

### **4.2.1 Pensamiento Aleatorio**

Este pensamiento también se le llama probabilístico o estocástico, fomenta en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, o hasta de ambigüedad por falta de información confiable o verídica, en las que no es posible predicción con seguridad de diferentes ocurrencias. La aleatoriedad se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, fomenta la búsqueda de soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura. El azar tiene que ver con la relación entre la ausencia de patrones y sucesos con esquemas específicos, además de otras veces con las situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser esos patrones, si acaso existen, por ejemplo con los estados del tiempo, también como la ocurrencia o no de los fenómenos naturales como: terremotos, huracanes; de los accidentes, fallas mecánicas, epidemias y enfermedades; de las elecciones por votación; de los resultados de dispositivos como los que se usan para extraer los números de las loterías "...y de las técnicas para efectuar los lanzamientos de dados o monedas o para el reparto de cartas o fichas en los juegos que por esto mismo se llaman "de azar"" (MEN, 2006, p.64)

### **4.2.2 Musicología.**

Según la Revista Musical Chilena (1967), la musicología es una disciplina relativamente nueva, en consecuencia, ha resultado difícil establecer en un comienzo, qué es y para qué sirve y, por lo tanto, desarrollar una clara conciencia de su problemática particular.

El concepto de musicología ha crecido, en dirección de lo particular a lo general y en el curso de su evolución ha ensanchado cada vez más sus horizontes, hasta un extremo tal que en la actualidad es más fácil ser un fragmento de musicólogo, que uno de ellos de forma integral. La musicología para Alder tiene que ver con todos los aspectos de la música, ya sean históricos o sistemáticos, puesto que no se trata de una simple inserción entre la historia de la música y la estética musical. Su tarea consiste en la investigación y explicación del curso que han seguido los productos compositivos y su objetivo es el estudio de los orígenes, el desarrollo y la agrupación de las obras musicales, así como también la dependencia y la esfera de influencia de cada personalidad musical.

Este campo está constituido por amplia diversidad de perspectivas, enfoques y metodologías de investigación. Afirma García (2017) que la musicología es la ciencia que estudia los fenómenos relacionados con la música, disciplina que se vincula a la antropología, sociología y a otros estudios culturales. Esta disciplina dio origen a nuevos puntos de discusión, profundizando en cuestiones más allá de como entender la música, sino también de los criterios y principios científicos de los cuales se derivan esas discusiones. El análisis musical se realiza a partir de la exposición y descripción sintéticas de la estructura musical y su relación con elementos más simples en una estructura general, que parten de un trabajo plausible, dejando en claro que las mejores herramientas para este análisis son nuestros oídos, papel y lápiz (Sammartino, 2015). De esta manera, se ha tratado de incluir a la musicología dentro de las ciencias sociales, naturales y matemáticas, como un nuevo paradigma dentro de esta disciplina: “la nueva musicología se ha volcado decididamente en el estudio de los fenómenos que discurren alrededor de la propia música, sobre la reflexión de la música misma, es decir, la “metamusicología” (González, 2016, p. 56).

### 4.2.3 Fractales.

Los fractales son figuras geométricas que se caracterizan por su semejanza, estructuras infinitas que se pueden dividir y dividir, fraccionar y fraccionar cuantas veces se deseen y seguirán teniendo la misma estructura sin cambiar, a pesar de que siempre se encontrarán en una superficie finita.

El término “fractal”, proviene de la palabra *fractus*, cuyo significado es roto ó entero, término acuñado por Benoit Mandelbrot (en su libro *Les objets fractales: forme, hasard et dimension*), quien lo empleó para describir objetos geométricos que muestran una figura detallada con dimensiones fraccionarias. A partir de estas consideraciones, surge la geometría fractal o de la naturaleza. Oviedo, Kanashiro y Colombini (2005, p. 12) definen los fractales como formaciones gráficas que muestran procesos iterativos, en los que se repiten procesos infinitos; una construcción fractal es una figura auto semejante, ya que todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas: hojas de un helecho, copa de árboles, costas, nubes...todas implican la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente.

En la escuela, el trabajo con fractales acerca a los estudiantes a la idea de *infinito*, como un estado natural, constituidos por funciones producidas. Al principio eran curiosidades matemáticas, sin embargo, al pasar el tiempo se encuentran diversas aplicaciones desde la física, la química, economía, biología, geografía, informática, música (Oviedo *et al.*, 2005).

#### **4.2.4 Música Fractal.**

Se entiende como cualquier sonido que se genera y reproduce según patrones de comportamiento espontáneo predominantes en el medio natural. En la actualidad, los algoritmos matemáticos que controlan el software específico generan partituras y composiciones de una fisiología pareja a las estructuras que el fractal nos proporciona.

Para Pérez (2000) los fractales se caracterizan por dos propiedades: autosemejanza y autorreferencia. La autorreferencia determina que el propio objeto aparece en la definición de sí mismo, con lo que la forma de generar el fractal necesita algún tipo de algoritmo recurrente. La autosemejanza implica invarianza de escala, es decir, el objeto fractal presenta la misma apariencia independientemente del grado de ampliación con lo que se mira. Por más que se amplíe cualquier zona de un fractal, siempre hay estructuras, hasta el infinito y aparece muchas veces el objeto fractal inicial contenido en sí mismo.

El principio fundamental de la música fractal radica en la proyección del comportamiento dinámico o la estructura de un fractal sobre un espacio musical; esta forma de composición suele presentarse como opuesta a la de la música tradicional. Entre los compositores de música fractal más importantes se encuentran: Phil Thompson, Gary Lee Nelson, Don Archer. Mehment Okonsar, Chris Sansom, Brian Jones, Dave Sthrohben José Oscar Marques, Phil Thompson, Patricia Mason y Armand Turpel (Pérez, 2000). Nápoles & Palomá (2012) mencionan que es

posible asignarles valores numéricos a notas musicales, un fractal puede convertirse en una nota musical.

Finalmente, Pérez concluye que la música fractal es un cambio que influenciará y atraerá a muchos interesados en el tema, consolidando la teoría fractal:

La música fractal se mueve en la frontera entre la monotonía y la sorpresa, entre la aleatoriedad y la predictibilidad. Su complejidad probablemente impida que llegue al gran público, aunque quizás sea demasiado pronto para juzgar una manifestación musical que cuenta con poco más de una década de vida. Tampoco las primeras imágenes del conjunto de Mandelbrot permitían presagiar la belleza de sus simas inacabables (Pérez, 2000, p. 45).

#### **4.2.5 Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia.**

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM), establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) son, de acuerdo a Carranza & Guerrero (2016) orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares, en los cuales se proponen criterios para la construcción y orientación de los currículos particulares de las instituciones educativas, con el fin de dar un enfoque a la Educación Matemática en Colombia, estructurándose en tres aspectos: *procesos generales, conocimientos básicos y contextos.*

En la siguiente tabla (tabla 1) se consolidan los procesos de los aspectos de los LCM mencionados anteriormente.



**Tabla 1. Estructuración de la Educación Matemática en Colombia, a partir de los Lineamientos Curriculares del MEN. Adaptado por el autor de Carranza & Guerrero (2016).**

Aspectos de los LCM	Procesos	Descripción
<b>Procesos generales</b>	Razonamiento	Significa justificar el cómo y porqué de los procedimientos que se ponen en acción, la formulación de hipótesis y exposición de ideas, potenciando la capacidad de pensar.
	Resolución y planteamiento de problemas	Este proceso debe permear en su totalidad el currículo de tal manera que provea un contexto en el cual los conceptos y herramientas sean aprendidos.
	Comunicación	Posibilita que los estudiantes adquieran seguridad para hacer conjeturas, argumenten y expliquen su forma de razonar, para tener un pensamiento crítico frente a lo que se realiza en un ambiente de aprendizaje.
	Modelación	Es la forma de descubrir la interrelación entre el mundo real y las matemáticas, donde el punto de partida de este proceso es una situación problemática real, donde se tiene en cuenta el lenguaje de los niños, por lo cual se deben hacer preguntas para que los estudiantes reflexionen, expliquen y predigan el modelo que explica la situación real estudiada.
	Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Es importante que los estudiantes ejecuten tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales, refiriéndose a las acciones, destrezas, estrategias, métodos y técnicas para resolver un problema con sus propias actuaciones.
<b>Conocimientos básicos</b>	Pensamiento numérico y sistemas básicos	Exige dominar procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías a través de los diferentes contextos, permitiendo configurar las estructuras conceptuales de número, sus relaciones u operaciones.
	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Se plantea trabajar la geometría desde una postura intuitiva, con el fin de establecer representaciones y manipular información para la resolución de problemas; buscando desarrollar la inteligencia espacial (orientación, distribución de espacios, ubicación).
	Pensamiento métrico y sistemas de medida	A través de este se busca la construcción del significado de magnitud y el desarrollo de procesos de medición, lo cual se puede trabajar a partir de las nociones de los estudiantes.
	<b>Pensamiento aleatorio y sistemas de datos</b>	<b>Se propone que los estudiantes planteen situaciones problema que puedan ser analizadas por medio del tratamiento de datos (ordenar, agrupar, representar, y hacer uso de modelos y métodos estadísticos) (en este trabajo investigativo se ahondará en este tipo de pensamiento).</b>
	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos	Se fundamenta en el desarrollo de la noción de cambio y acumulación, en diferentes contextos para modelar situaciones problemáticas, reconociendo representaciones y la transición entre ellas (verbal, grafico, icónico, entre otros).

<b>Contextos</b>	Hacen referencia a los ambientes de aprendizaje que rodean al estudiante y que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático, por lo cual se sugiere proponer situaciones problemáticas en donde los estudiantes puedan explorar, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos, siendo la solución de problemas el ambiente propicio y significativo para poner en práctica el aprendizaje.
------------------	--

#### **4.2.6 Probabilidad.**

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia, se señala que, la teoría de la probabilidad y su aplicación a los fenómenos aleatorios, han construido un andamiaje matemático que de alguna manera logra dominar y manejar acertadamente la incertidumbre. Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a cómo actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias. Cano & Zapata (2016), por su parte, afirman que, en términos de la probabilidad, se considera que un objeto (o un suceso) es un miembro aleatorio de una cierta clase de objetos (población), si la probabilidad de obtener este objeto (en un sorteo u otro experimento) es igual que la de cualquier otro miembro de su clase; así mismo, declaran que la probabilidad de un suceso es el "cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles, siempre que todos sean equiprobables" (p. 28).

#### **4.2.7 Aleatoriedad.**

La aleatoriedad es un modelo matemático que permite describir un gran número de fenómenos en forma más adecuada que otros modelos deterministas. A partir de dos ideas muy simples: repetibilidad de la situación en las mismas condiciones e independencia de resultados en

dos repeticiones, surgen una serie de modelos de complejidad progresiva, que permiten resolver problemas de inferencia y de predicción en presencia de incertidumbre. Estas dos ideas son, en sí mismas, una simplificación de la realidad y pueden ser más o menos aceptables en cada problema particular.

La idea de aleatoriedad (Batanero y Serrano, 1999; citados por Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005; citados todos por Londoño y Montoya, 2010) se introduce de un modo descriptivo en la educación escolar, resultando fundamental el papel del lenguaje utilizado para comunicar los significados: “la falta de clarificación a cerca de lo que los términos y expresiones relacionados con la aleatoriedad y la probabilidad significan, deja abierta la posibilidad de interpretación ambigua, lo cual se constituye en un obstáculo fundamental para la construcción de los significados matemáticos” (Londoño & Montoya, 2010, p. 2).

#### **4.2.8 Pensamiento aleatorio.**

De acuerdo con Carranza & Guerrero (2016) los estudiantes plantean situaciones problema que puedan ser analizadas por medio del tratamiento de datos (ordenar, agrupar, representar, y hacer uso de modelos y métodos estadísticos), en el que se deben trabajar con ambientes reales y significativos, puesto que los estudiantes tienen nociones de conceptos estocásticos, con el objetivo de que se haga uso de estos para razonar críticamente frente a situaciones de incertidumbre o riesgo. Así, como lo mencionan los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional, no es necesario que los estudiantes aprendan fórmulas y procedimientos matemáticos, sino que es importante avanzar

gradualmente en el desarrollo de habilidades para encontrar todas las situaciones posibles dadas ciertas condiciones, dominar conceptos y procedimientos necesarios para la recolección y estudio de sistemas de datos estadísticos.

Triviño (2013, citado por Pinzón, 2016) esquematiza los aspectos que componen el pensamiento aleatorio, enfatizando la importancia del pensamiento inductivo para su desarrollo (figura 2). En este sentido, Pinzón (2016) establece la importancia de este pensamiento a la gran cantidad de información que puede estar inmersa en muchos lugares de la vida cotidiana:

La importancia de este tipo de pensamiento según Ben-Zvi y Garfield (2004) radica en que gran cantidad de información cuantitativa y estadística se presentan con frecuencia en muchos medios, como una manera de agregar credibilidad a los anuncios, los argumentos o las informaciones. Ser capaz de evaluar toda esta información, basada en datos, es una habilidad importante que todos los estudiantes deben aprender como parte de sus programas educativos (Pinzón, 2016, p. 48).

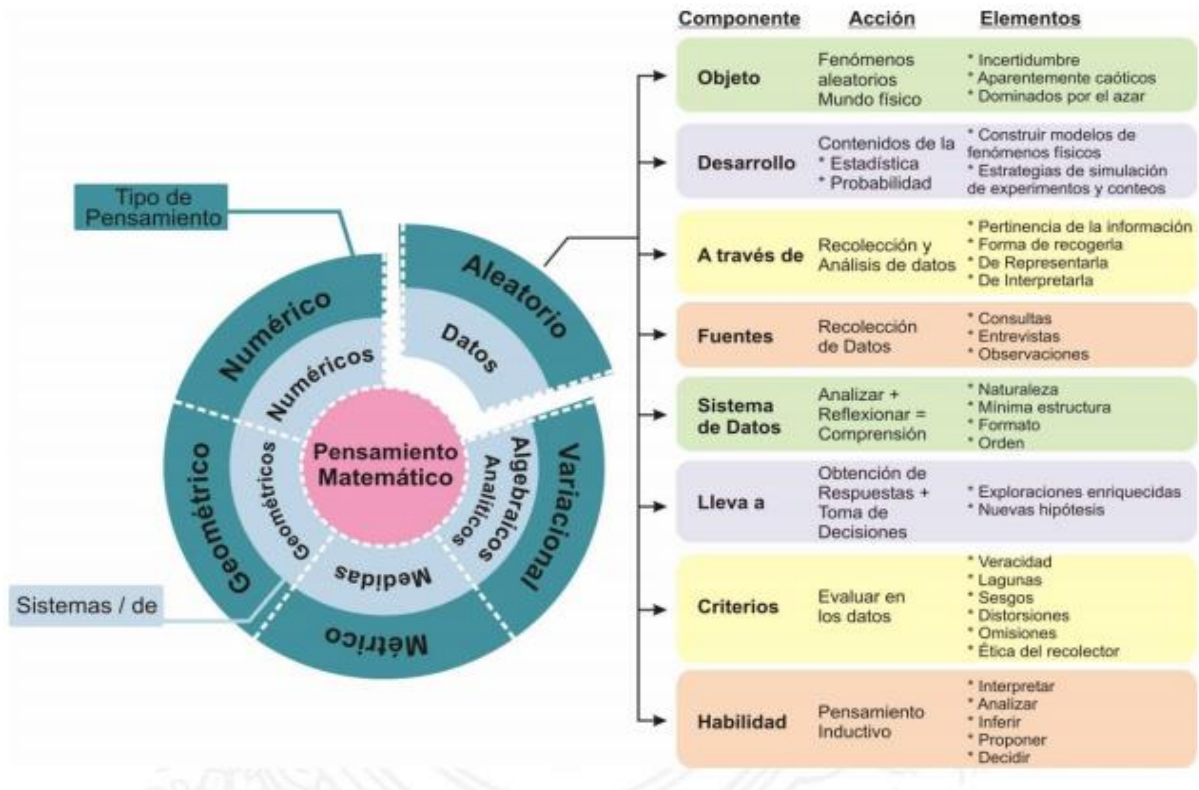


Figura 2. Componentes generales del pensamiento aleatorio. Tomado de Triviño (2013)

(Adaptado por Pinzón, 2016, p. 48).

En la figura 3, Gómez, Gallego, Cisneros y Castrillón (2006), definen una serie de actividades en torno al fomento del pensamiento aleatorio en estudiantes de séptimo grado, muestra con la cual se trabaja en el marco de este proceso investigativo:

Ejes por grado	6° A 7°
<b>Organización de datos</b>	2. Reconocer relación entre un conjunto de datos y su representación. 3. Usar representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares). 7. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.
<b>Medidas de posición y variabilidad</b>	1. Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). 4. Usar medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.
<b>Probabilidad e inferencia</b>	5. Usar modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. 6. Hacer conjeturas acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. 7. Resolver y formular problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas y experimentos. 8. P redecir y justificar razonamientos y conclusiones usando información estadística.

**Figura 3. Componentes generales del pensamiento aleatorio. Tomado de Triviño (2013)**

**(Adaptado por Pinzón, 2016, p. 48).**

#### **4.2.9 Sistemas de datos.**

Pinzón (2016) establece que los sistemas de datos se incorporan en el currículo de matemáticas como “elementos importantes, necesarios y pertinentes en el contexto social y escolar” (p. 46). Las principales razones que fundamentan el estudio de la estadística son:

(1) La utilidad de esta para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos en el tema; (2) el estudio para el desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos frente a criterios subjetivos; (3) así como comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como

posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos (Pinzón, 2016, p. 46).

Tanto el pensamiento aleatorio, como los sistemas de datos plantean la resolución de problemas matemáticos desde la adquisición de pensamiento crítico en la cotidianidad, mediante la integración de los modelos para entender el mundo físico que rodea a los estudiantes:

Esto quiere decir que la enseñanza del pensamiento aleatorio y sistemas de datos no solo se basa en una adquisición de conceptos, sino que el estudiante debe adquirir un conocimiento que lo ayude a tener un pensamiento crítico capaz de enfrentarse a situaciones de la vida cotidiana y que tenga la habilidad para interpretar y solucionar tales situaciones. Debe ayudar entonces la enseñanza a establecer estas relaciones los conocimientos deben integrar la construcción de modelos que permitan comprender fenómenos físicos y el desarrollo de estrategias (Cano & Zapata, 2016, p. 33).

#### **4.2.10 Música y Matemáticas. Una filosofía común.**

La función de la filosofía es incitar al conocimiento, saturar, enloquecer, conversar, ser la moza de la sabiduría, siendo realmente excitante. Y es que la sabiduría está en todo, es difícil, definir la filosofía de la música excluyéndola de la filosofía de las matemáticas, porque cuando decimos algo de la una, también estamos diciendo algo de la otra.

Quienes han investigado la naturaleza matemática de la música se ven empujados a destacar más los valores intelectuales y metafísicos vinculados al arte de los sonidos que esos

otros de orden emocional. Quien considera que la música se establece sobre un complejo y rígido orden matemático que el músico no hace sino descubrir, evidenciar e, incluso, reproducir en sus composiciones, y que esta estructura esencialmente racional, corresponde a otra estructura igualmente racional, de todo el universo, reivindica con ello la independencia de la música respecto a la poesía o a cualquier otro lenguaje artístico.

Bertos (2013) supone que las relaciones entre música y matemáticas comienzan desde la física del sonido, fenómeno que es posible medir debido a la emisión de vibraciones por segundo de un objeto en particular, existiendo de esta manera teorías que han desarrollado varios conceptos: armonía y número (desde una conceptualización pitagórica), la escala diatónica, traslaciones, simetrías, rotaciones musicales, la combinatoria y el *azar*.

Los orígenes de la relación entre la música y las matemáticas ha sido un proceso de acercamiento a los fenómenos propios de la naturaleza y de comunicación entre los seres humanos; de esta manera Blázquez (2014) describe las relaciones entre estos dos campos:

La música nace de la necesidad de protegerse de ciertos fenómenos naturales, de alejar los espíritus malignos, de atraer la ayuda de los dioses, de honrarlos y festejar sus fiestas, y de celebrar el cambio de las estaciones. Las finalidades mágicas, rituales, ceremoniales y religiosas de la música pueden comprobarse a través de múltiples fuentes de documentación y continúan en los sentimientos religiosos y en las ceremonias y ritos del hombre de nuestros tiempos (Blázquez, 2014, p. 5).



#### **4.2.11 Neuropedagogía.**

La neuropedagogía es una ciencia naciente que tiene por objeto de estudio el cerebro humano que debe ser entendido como un órgano social capaz de ser modificado por los procesos de enseñanza y aprendizaje especialmente lúdicos y no simplemente como un computador (Pinzón y Téllez, 2016). En este orden de ideas, es una disciplina relativamente reciente, que involucra tanto a las neurociencias como a la pedagogía, así como lo contempla Jiménez (2008):

Ahora bien, se hace necesario trazar líneas divisorias entre las neurociencias y la neuropedagogía, debido a sus métodos y a sus objetos de estudio, pero lo anterior no significa que no podamos tejer o hilvanar relaciones entre estos dos paradigmas, para entender que los contrarios no son opuestos, si no complementarios. De lado a lado, desde las investigaciones en neurociencias y en pedagogía pueden adquirirse conocimientos válidos y significativos. Al respecto nadie duda hoy en día, que el hombre es un ser biológico, también, un producto social y lúdico (Jiménez, 2008, p. 25).

Jiménez (s.f.) establece que la neuropedagogía es una disciplina tanto biológica como social. No puede haber mente sin cerebro, ni cerebro sin contexto social y cultural. En síntesis, el cerebro humano es un procesador de significados atravesados por una gran cascada de moléculas de la emoción que afectan nuestra mente y nuestra corporalidad. De esta manera, la neuropedagogía involucra acciones de juego, de lúdica; factores que pueden mediar en la

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a partir del pensamiento aleatorio, tal y como lo explica Jiménez (2008):

El juego, al igual que el deseo, el goce, o cualquier otra emoción, es un producto mental del cerebro humano. En todo el proceso mismo del juego se producen neurotransmisores, hormonas, péptidos, moléculas de la emoción, que necesariamente activan algunas áreas del cerebro, en especial todas aquellas ligadas al sistema límbico (...) Desde allí largos manojos de fibras nerviosas se conectan con muchas partes del cuerpo y luego con todo el cuerpo humano a través de la médula espinal. En este equipo emocional subyacen la alegría, el miedo, el placer, la huida y el ataque que hace el ser humano cuando se ve en una situación de estrés. (Jiménez, 2008, p. 26).

#### **4.2.12 Enfoque Pedagógico: Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS).**

El movimiento Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS) se formó hace tres décadas a partir de nuevas corrientes de investigación empírica en filosofía y sociología, debido a un incremento en la sensibilidad social e institucional sobre la necesidad de una regulación pública del cambio científico y tecnológico, constituyéndose un paradigma alternativo de estudio para entender el fenómeno científico-tecnológico en el contexto social (Quintero, 2010). Este enfoque, según Quintero, está en auge en América Latina, mediante la innovación y la creación de nuevas tecnologías, así como el progreso de las disciplinas científicas:

La panorámica de campo CTS en Latinoamérica se concreta en la variedad de objetivos y problemas de análisis que compone la matriz disciplinar de este campo de

trabajo. En esta matriz, se incluye la política científica y tecnológica en América Latina, gestión de tecnología, los procesos de innovación y el cambio técnico en la empresa, el progreso de las disciplinas y comunidades científicas, los problemas de la vinculación en ciencia–producción, el comercio internacional de la tecnología, la articulación en el análisis de la perspectiva de la ciencia jurídica y de la economía y por último la prospectiva tecnológica (Quintero, 2010, p. 229).

Por su parte Mejía & Ortiz (2007) señalan que este enfoque se ha venido incorporando hace aproximadamente una década, coincidiendo con las reformas educativas planificadas, desarrolladas e implantadas en muchos países durante los 90`s bajo el lema de alfabetización científica, cuyo objetivo es formar una ciudadanía mejor preparada en temas que tienen que ver con ciencia y tecnología: “una sociedad transformada por las ciencias y las tecnologías requiere que los ciudadanos manejen saberes científicos y técnicos y puedan responder a necesidades de diversa índole, sean estas profesionales, utilitarias, democráticas, operativas e incluso lúdicas” (p. 4).

### **4.3 Complejidad.**

La complejidad, de acuerdo con González (2009, p. 243) “es una forma de analizar, de reflexionar sobre determinados aspectos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento, los cuales presentan ciertas características que los clasifican como sistemas de comportamiento complejo”. Por otro lado, Rodríguez & Aguirre afirman que “la ‘complejidad’ constituye una perspectiva novedosa y marginal en la ciencia contemporánea; su carácter de novedad radica en que el

estudio de la complejidad implica, en buena medida, un quiebre o discontinuidad en la historia de la ciencia o, más precisamente dicho, en la racionalidad científica occidental” (p. 2).

Bustamante y Opazo (2004) establecen que la complejidad es una medida del número de estados del mundo (complejidad del mundo) o del número de estados de un sistema (complejidad propia), sugiriendo que es factible organizarlos en una creación común, ya que el orden de un sistema social (parte de un sistema complejo) es tan imposible como el orden del sistema mayor en el que éste está integrado, lo que hace referencia a que no se puede pretender buscar una relación cien por ciento efectiva entre las acciones de las organizaciones y su adaptabilidad al entorno complejo.

Las ciencias de la complejidad, como lo señala Maldonado (2014), constituyen un conjunto de disciplinas, enfoques, metodologías y lenguajes que, históricamente, nacieron en el seno de la física, la química, la biología, las matemáticas y la ciencia de la computación. Sin embargo, de manera rápida y consistente, se han emparentado con las ciencias sociales y humanas, reconociéndolas, expresamente, como las de mayor complejidad conocida.

## **5. OBJETIVOS**

### **5.1 Objetivo General.**

Establecer una convergencia entre las matemáticas y la música a través del pensamiento complejo, desde el pensamiento aleatorio con los estudiantes de grado séptimo de Institución Educativa Rural Bolivia del municipio de El Paujil, Caquetá.

### **5.2 Objetivos Específicos.**

- Proponer las estrategias del pensamiento complejo para desarrollar el pensamiento complejo.
- Diseñar e implementar una unidad didáctica para adquisición de las bases teórico-prácticas del pensamiento aleatorio y generación musical.
- Elaborar un prototipo de una maquina (dodecaedro) capaz de relacionar la geometría con los acordes musicales.
- Componer una canción aleatoria basada en los resultados de azar del dodecaedro.

## **6. METODOLOGÍA**

### **6.1 Tipo y enfoque de la investigación.**

A partir del marco referencial y teórico constituido previamente, se ajusta la propuesta investigativa desde el punto de vista de la investigación hermenéutica, con un análisis cualitativo y cuantitativo. A continuación, se desglosará los aspectos metodológicos a implementar.

### **6.2 Universo de estudio, población y muestra.**

Esta investigación se enmarca en el enfoque interpretativo cualitativo. Hernández *et al.* (2010) la define como aquella en donde se estudia la calidad de las actividades o de los instrumentos utilizados en la determinación de una situación o problema. Este tipo de investigación busca una descripción integral de todos los elementos de análisis. Se presenta un interés especial en saber e interpretar como se dan las dinámicas o como se llevan a cabo los procesos al interior de las preguntas e interrogantes del problema.

### **6.3 Población y muestra.**

El trabajo se desarrolla en la Institución Educativa Rural Bolivia, ubicada en el municipio de El Paujil, Caquetá, Colombia. La población estudiantil atendida para este trabajo serán los 35 estudiantes pertenecientes al grado séptimo de básica secundaria, grupo en el cual se aplicará este planteamiento sobre la generación de una alternativa musical aleatoria a través del dodecaedro.

## 6.4 Estrategias metodológicas

Para la recolección de la información para dar cumplimiento a los objetivos específicos de esta investigación, el diseño estará dividido en tres fases:

### 6.4.1 Fase de diseño de Unidad Didáctica.

Esta fase consiste en la creación de una Unidad Didáctica, para los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Rural Bolivia, desde el planteamiento de la generación de una alternativa musical aleatoria. Esto con el fin de aplicar el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos de acuerdo con los Lineamientos en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional. La Unidad Didáctica es definida por Fonseca (2009) como una estrategia que permite sintetizar los componentes que hacen parte de la formación como maestro. Estará planteada para 10 sesiones de clase, con una duración de 2 horas cada una, donde se abordarán temas relevantes del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, resumidos en la tabla 2. Los objetivos de esta secuencia didáctica son adaptados de los Estándares Básicos de Competencias en Matemática de Sexto y Séptimo, contemplados por el Ministerio de Educación Nacional. Estas actividades son complementadas por ejercicios propuestos por Blázquez (2012) (Consultar **Anexo 1**).

**Tabla 2. Diseño preliminar de la Unidad Didáctica.** Esta puede sufrir modificaciones a partir de la primera actividad sobre las ideas previas de los estudiantes.

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación	Recursos
1	<i>Ideas previas pensamiento aleatorio</i>	Indago sobre las ideas que tienen los estudiantes sobre los conceptos del pensamiento aleatorio y la música	Cuestionario exploratorio donde se indaguen ideas sobre azar, estocástica y procesamiento de datos a los estudiantes. Actividad exploratoria sobre las ideas que tienen los estudiantes sobre la composición musical	Argumentación de ideas. Interpretación de datos. Participación.	Guía de trabajo 1 (Anexo)

2	<b>Pensamiento aleatorio I: comparación de datos.</b>	Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	Taller por equipos de trabajo, presentando una situación cotidiana que involucre datos estadísticos: extraer datos provenientes de medios de comunicación e interpretarlos.	Argumentación de ideas, pensamiento matemático, participación, trabajo colaborativo.	Guía de trabajo 2 (Anexo)
3	<b>Pensamiento aleatorio II: Gráficas.</b>	Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.)	ENCUESTA EN CLASE: De manera individual los estudiantes realizarán una encuesta en donde se indague sobre alguna particularidad (con ayuda del docente), procesará los datos y los presentará por medio de diagramas de barras o histogramas.	Trabajo en clase, argumentación de ideas, participación.	Guía de trabajo 3 (Anexo)
4	<b>Pensamiento aleatorio III: medidas de tendencia central.</b>	Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.	ENCUESTA EN CLASE (PARTE II): Los estudiantes utilizarán los datos de la sesión anterior para analizar los datos desde medidas de tendencia central: media, moda, mediana.	Interpretación de datos, pensamiento matemático, participación.	Guía de trabajo 3 y 4 (Anexo)
5	<b>Pensamiento aleatorio IV: predicción de eventos.</b>	Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.	LANZAR UN DADO I: En grupos los estudiantes harán cierta cantidad de lanzamientos de un dado. Luego repetirán el ejercicio las veces que indique el profesor.	Argumentación, pensamiento matemático, seguimiento de instrucciones.	Guía de trabajo 5 (Anexo)
6	<b>Pensamiento aleatorio V: proporciones y probabilidad</b>	Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	LANZAR UN DADO II: Los estudiantes relacionarán los resultados obtenidos en la sesión anterior con los conceptos de proporciones y probabilidad.	Argumentación, pensamiento matemático, seguimiento de instrucciones.	Guía de trabajo 6 (Anexo)
7	<b>Pensamiento aleatorio VI: interpretación</b>	Resuelvo y formulo problemas a	A partir de los datos obtenidos en una encuesta, los estudiantes	Aplicación de conceptos, pensamiento	Guía de trabajo 7 (Anexo)



	<i>de datos</i>	partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.	representarán los resultados por medio de gráficos de barras o diagramas de torta.	matemático, capacidad de interpretación. Actividad extra clase: elaboración, diseño y aplicación de una encuesta por medio de <i>Google forms</i> . Análisis de resultados.	
8	<b><i>Las relaciones entre la matemática y la música I</i></b>	Identificar las posibles relaciones entre la música y la matemática	Explicación magistral sobre conceptos musicales aplicados a la matemática: notas musicales, dinámica musical, escala musical, entre otros. Actividad de retroalimentación.	Evaluación actividad de retroalimentación	Clase magistral Apoyo del experto en música
9	<b><i>Las relaciones entre la matemática y la música II: Composición musical</i></b>	Realizar un ejercicio práctico sobre la aplicación de la matemática a la música	EJERCICIO EN GRUPOS: Por medio de vasos de cristal con diferentes medidas de agua se explicarán las notas musicales desde el punto de vista matemático, sustentando conceptos básicos de la música.	Valoración de explicaciones sobre la relación entre la matemática y la música	Guía de trabajo 7 (Anexo)
10	<b><i>Música fractal</i></b>	Entender y comprender la música fractal para la composición musical.	EJERCICIO DE DIAGNÓSTICO: Los estudiantes deben establecer las relaciones entre la música y la composición musical a través de un taller de retroalimentación.	Valoración del ejercicio de diagnóstico.	Guía de trabajo 7(Anexo).

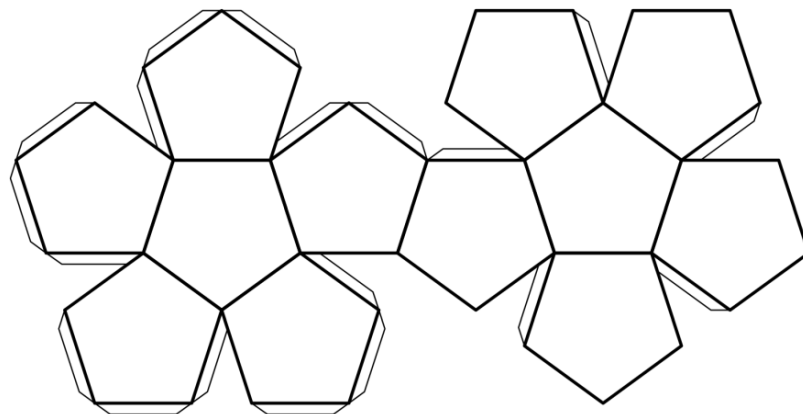
A su vez, esta Unidad Didáctica servirá de diagnóstico, para determinar qué entienden los estudiantes por pensamiento aleatorio, a través de la formulación de situaciones estocásticas que pueden presentarse en la cotidianidad. Es importante para que exista una familiaridad entre lo que piensan los estudiantes y lo que se plantea realizar. Esta Unidad servirá para realizar los respectivos ajustes metodológicas de rigor al presente proyecto.

#### 6.4.2 Fase de diseño y elaboración del dodecaedro.

Permitirá realizar un prototipo de máquina, a través de un dodecaedro (poliedro regular de doce caras) (figura 4) Tomado de <https://www.mvblog.cl/2015/05/01/maqueteria-poliedros-y-su-construccion/dodecaedro/>. Los estudiantes tendrán que realizar esta figura bajo dos métodos: por medio de origami-fractal y por el método de comprobación. A cada cara se le asignará una nota musical. Esto permitirá relacionar la geometría con los acordes musicales. En esta fase se aplicarán los fractales y el pensamiento complejo, en la elaboración de una figura geométrica. El material del “dado” será de cartón cartulina, lo que permitirá su durabilidad.

El dodecaedro es un cuerpo geométrico tridimensional, también llamado poliedro convexo regular, ya que sus caras son polígonos regulares iguales y los ángulos tienen el mismo número de caras. Un dodecaedro se caracteriza por tener doce caras (30 aristas, 12 vértices). Esta figura es posible elaborarla mediante el *origami*. Es el primer método que probarán los estudiantes para la elaboración de este objeto, y para ello se les suministrará una plantilla para que sea armada,

**Figura 4. Planimetría de un dodecaedro, poliedro regular de 12 caras, por medio del método de origami. Cada cara será un acorde musical.**



El segundo método de elaboración del dodecaedro es el de comprobación, en el que los estudiantes tienen que elaborar la figura a partir de cálculos con regla, compás y transportador. Las caras del dodecaedro son paralelas dos a dos (las opuestas), estando sus centros sobre una recta perpendicular a ambas y estando giradas una respecto la otra  $180^\circ$  siendo eje de giro la recta mencionada. En proyección horizontal, el contorno aparente de sus aristas representa un decágono regular, para determinar el radio de la circunferencia circunscrita de este decágono procederemos del siguiente modo: Dibujadas en proyección horizontal la cara A, B, C, D, E contenida en el plano horizontal de proyección y su opuesta P, V, Q, S, R, dibujamos sobre el plano horizontal de proyección dos pentágonos regulares auxiliares de lados A-E y E-D contiguos y de vértices a, e, F1, O1, Ñ1 y e, d, Ñ2, N1, M1 respectivamente. Para que los estudiantes puedan elaborar esta figura, es necesario que dispongan de regla, compás, lápiz HB y borrador.

La intención de aplicar ambos métodos con los estudiantes consiste en determinar, mediante observación participante, el nivel de dificultad que posean los estudiantes para diseñar y construir un cuerpo geométrico, tal y como es el dodecaedro. Asunto que posteriormente contribuirá en el análisis del pensamiento complejo en el marco de la geometría fractal en los estudiantes de séptimo grado. En la tabla 3 se sintetizan las actividades preliminares en el marco de la elaboración del dodecaedro, en la cual se emplearán ocho sesiones de clase, con una duración de dos horas cada una. Cada actividad requerirá dos sesiones para ser desarrollada.

**Tabla 3. Actividades preliminares para la segunda fase de la investigación.**

<b>Nº de sesión</b>	<b>Actividad</b>	<b>Tiempo</b>
11 y 12	Elaboración del dodecaedro desde el método geométrico, de comprobación. Retroalimentación sobre la geometría fractal. Aclaración de dudas.	2 sesiones

13 y 14	Elaboración del dodecaedro desde el método de origami. Retroalimentación sobre la geometría fractal. Aclaración de dudas.	2 sesiones
15 y 16	Actividad de retroalimentación de lo visto durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, por medio de ejercicio grupal.	2 sesiones
17 y 18	Ejercicio previo de composición: colocar las notas musicales a cada una de las caras del dodecaedro.	2 sesiones

A partir de la guía anterior se ajustan los principios metodológicos de este proyecto, lo que permite la metacognición permanente de los procesos investigativos.

#### **6.4.3 Fase de creación musical fractal.**

A partir de la creación del prototipo de máquina (dodecaedro), se pretende componer una creación aleatoria de una canción, productos de los resultados estocásticos arrojados por el dodecaedro (aplicando los términos de la música fractal y el pensamiento aleatorio y sistemas de datos). Los estudiantes registran las notas musicales que se obtengan de arrojar el “dado” y se anotarán. Básicamente, por medio de una micro clase, se aplican las características del pensamiento aleatorio, buscando las relaciones entre la música y las matemáticas. Finalmente, los estudiantes participantes obtendrán conclusiones que serán consignadas en una nueva guía como resultado de esta fase.

Desde la lúdica y el juego se aplica el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, importantes para la formación matemática de los estudiantes de grado séptimo de la I.E.R. Bolivia de El Paujil, Caquetá.

**Tabla 4. Actividades preliminares para la tercera fase de la investigación.**

N° de sesión	Nombre de la actividad	Objetivo	Desarrollo	Tiempo	Recursos
19	<i>Conozcamos sobre la música</i>	Identifico las notas musicales que posee la escala musical.  Aprendo a manejar el pentagrama musical.	Identificación de las notas musicales con ayuda de un maestro en música a los estudiantes de séptimo grado.  Aprendiendo a manejar el pentagrama musical y las escalas.	1 sesión	Guía de trabajo 8 (Anexo)
20	<i>¡Compongamos!</i>	Realizo actividades de composición por medio del lanzamiento del dodecaedro.  Comprendo sobre la composición musical.	Ejercicio previo de composición: colocar las notas musicales a cada una de las caras del dodecaedro.  Explicación preliminar de como se compone una pieza musical	1 sesión	Guía de trabajo 9 (Anexo)
21	<i>Las maravillas de la música fractal I</i>	Propongo una composición musical por medio del lanzamiento del dodecaedro.	Primera sesión de composición musical, arrojando el dodecaedro para la composición al azar.  Retroalimentación sobre la composición musical a través de una guitarra, por parte del maestro en música.	1 sesión	Guía de trabajo 9 (Anexo) Pentagramas
22	<i>Las maravillas de la música fractal II</i>	Propongo una composición musical por medio del lanzamiento del dodecaedro.	Segunda sesión de composición musical, arrojando el dodecaedro para la composición al azar.  Retroalimentación sobre la composición musical a través de la guitarra, por parte del maestro en música.	1 sesión	Guía de trabajo 9 (Anexo) Pentagramas
23	<i>Frecuencia de las notas</i>	Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones	Recopilación de las composiciones realizadas por los estudiantes.  Los estudiantes aplican la frecuencia relativa y	1 sesión	Guía de trabajo 9 (Anexo) Pentagramas

		elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	absoluta con la que salen las notas musicales al arrojar el dodecaedro.		
24	<b><i>Probabilidad al componer</i></b>	Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Los estudiantes aplican los datos obtenidos de arrojar los dodecaedros y establecen la probabilidad de que salga una nota musical. Retroalimentación sobre la composición musical y su relación con la probabilidad.	1 sesión	Guía de trabajo 9(Anexo) Pentagramas
25	<b><i>¿Cuántas veces sale Do?</i></b>	Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Los estudiantes analizan la frecuencia relativa y absoluta, la probabilidad con la que sale la nota <i>Do</i> . Así mismo, establecen un análisis de datos por medio de gráficos de torta e histogramas.	1 sesión	Guía de trabajo 9 Pentagramas
26	<b><i>Analicemos notas musicales</i></b>	Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Partiendo del ejercicio de la sesión 25, los estudiantes harán el mismo procedimiento con Re, Mi, Fa, Sol, La, Si (y las que estén dispuestas en las caras del dodecaedro), estableciendo que nota es más frecuente, la moda y la media de la composición. (Anexo 1).	1 sesión	Pentagramas
27	<b><i>Ejercicio libre para los estudiantes</i></b>	Empleo mi creatividad para aplicar la matemática a la música.	En este espacio, los estudiantes tendrán la oportunidad de componer diferentes canciones, arrojando el dodecaedro. Deben consignar la composición en el pentagrama, para que el maestro en música interprete por medio de un instrumento el resultado de la composición. Análisis de la música fractal y su relación con el pensamiento aleatorio, por parte del docente titular.	1 sesión	Acompañamiento de maestro en música
28	<b><i>Matemáticas para mis oídos</i></b>	Establezco relaciones entre la música y las	Los estudiantes establecerán cuáles son las relaciones entre la música	1 sesión	Propuesta argumentativa de los estudiantes

		matemáticas. Empleo mi creatividad para dar explicar y argumentar.	y las matemáticas, por medio de una pregunta: ¿Cuál es la relación entre las notas musicales, la composición musical con aprender matemáticas? Los estudiantes pueden contestar este interrogante de manera creativa: ensayo, cuento, poesía, canción, etc.		
29	<i>Música en números</i>	Establezco relaciones entre la música y las matemáticas. Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Los estudiantes establecen los elementos que han aprendido por medio de una actividad evaluativa: realizar una composición con el dodecaedro, aplicando todos los conceptos del pensamiento aleatorio. El profesor evalúa la actividad, identificando los conceptos en los que tienen dificultades de asimilación por parte de los estudiantes.	1 sesión	Guía de trabajo 10.
30	<i>Ejercicio final de retroalimentación</i>	Establezco relaciones entre la música y las matemáticas. Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Tanto los estudiantes como el profesor establecen una retroalimentación mutua sobre la experiencia. Por medio de un “compartir”, se establecen los logros a los que se llegaron con el ejercicio realizado, a lo largo de las 30 sesiones.	1 sesión	Socialización de la experiencia por medio de un compartir, en el que se establezcan fortalezas, debilidades y metas superadas en el transcurso de la investigación. Guía de trabajo final.

#### 6.4.4 Técnicas e instrumentos de investigación.

Se aplican dos guías: un módulo guía, que permitirá el diagnóstico del pensamiento aleatorio, y servirá para realizar los ajustes a la presente investigación; la segunda guía será donde los estudiantes consignen las composiciones musicales que derivan de la experiencia de la fase de creación fractal.

## **7. RESULTADOS**

En el siguiente apartado se desglosan los resultados obtenidos, se exponen los conceptos y los procesos que están involucrados en la aplicación de la Unidad Didáctica.

### **7.1. Implementación de la Unidad Didáctica.**

#### **7.1.1. Guía n° 1: exploración de las ideas previas.**

Mediante la guía uno, los estudiantes tuvieron la oportunidad de establecer una primera relación entre la música y la matemática, por medio de la pregunta: ¿Crees que la música tiene alguna relación con las matemáticas?, respuesta que debía ir acompañada de su respectiva justificación. Tal y como se observa en la figura 6, el 53% de la muestra de estudiantes analizada establecen que si hay una relación entre las matemáticas y la música; por otro lado, el 40% manifiesta que no hay relación entre las dos disciplinas y el 7% restante no contesta la pregunta. Esta actividad fue importante ya que reconoce las ideas previas de los estudiantes como un punto de partida importante para el abordaje de las temáticas planteadas en la presente investigación.



**Figura 5. Gráfico de torta sistematizando las respuestas de los estudiantes de la pregunta:**

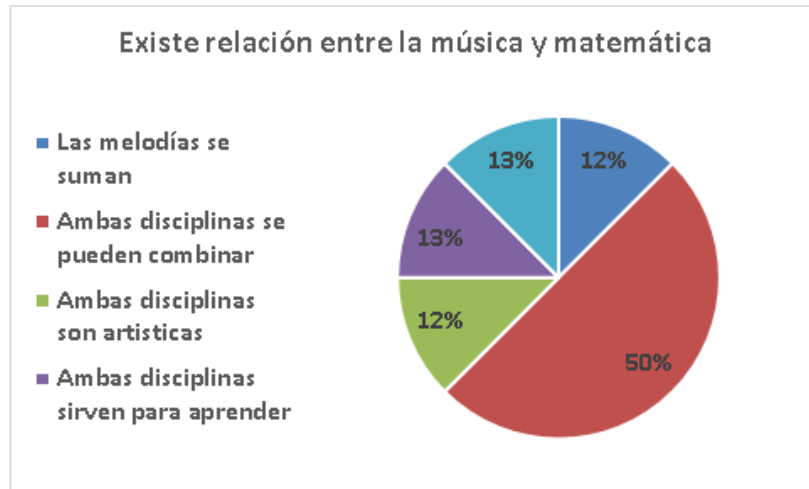
**¿Crees que la música tiene alguna relación con las matemáticas?**



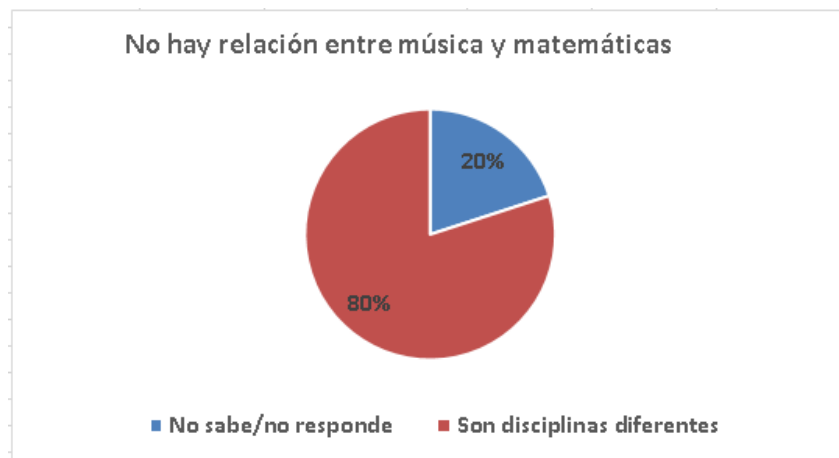
En cuanto a los estudiantes que creen que hay una relación entre la música y la matemática (figura 7), el 50% afirman que ambas disciplinas se pueden combinar, con un 13% los estudiantes sugieren que ambas disciplinas tienen actividades en común. Finalmente, con un 12% los estudiantes afirman que las melodías se suman y ambas disciplinas son artísticas.

Por otro lado, al analizar la figura 8, donde se evidencian las respuestas dadas los estudiantes que no le encuentran una relación entre la música y las matemáticas, justifican que son dos disciplinas distintas (50%). Mientras que el 20% de los estudiantes no contesta la pregunta.

**Figura 6. Respuestas asociadas a los estudiantes que creen en la relación música y matemáticas.**



**Figura 7. Respuestas asociadas a los estudiantes que creen en la relación música y matemáticas.**

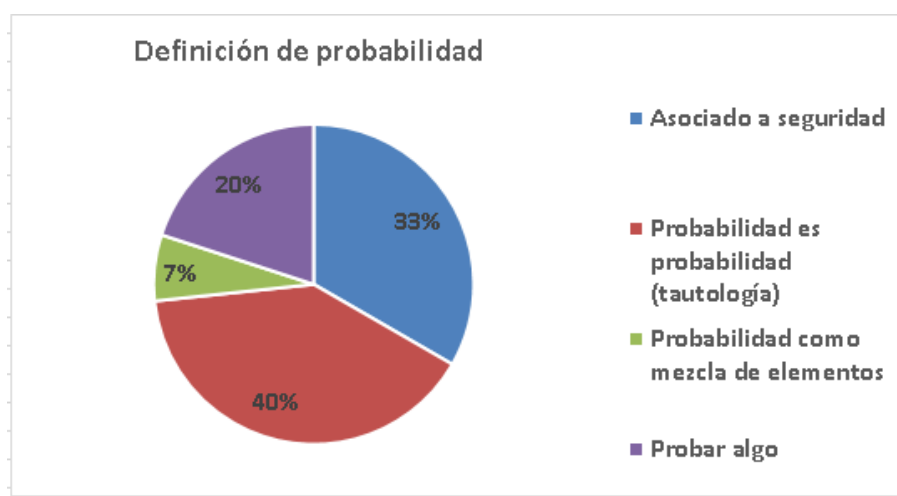


En esta misma guía se les preguntó a los estudiantes sobre lo que entendían sobre el concepto de probabilidad. Mediante la figura 9, se evidencia que los estudiantes en su mayoría (40%) define este concepto de manera tautológica (es decir, la “*probabilidad es la probabilidad*”).

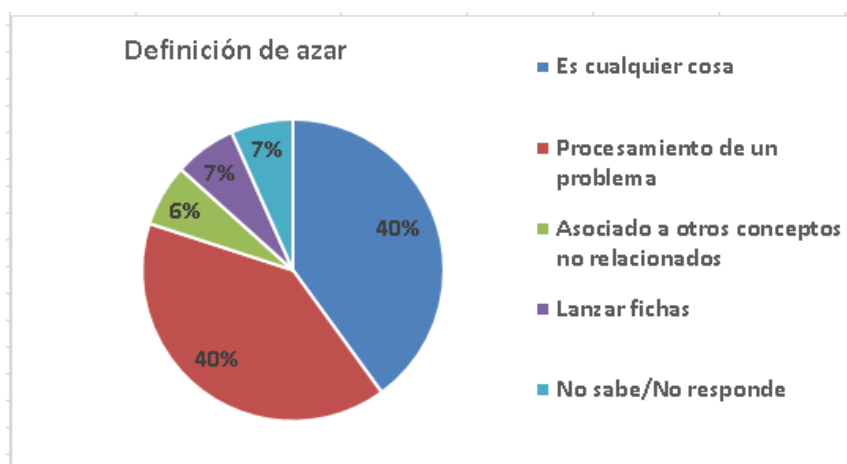
que pase algo”), el 33% asocian este concepto a la “seguridad de que suceda algo”, el 20% de los estudiantes estiman que la probabilidad consiste en probar algo.

En cuanto a la definición de azar (figura 10), el 40% de los estudiantes responden a que puede ser cualquier cosa, asociado a que puede pasar cualquier cosa. Mientras que el otro 40% considera que es un procesamiento de un problema (o la forma como se procesa un problema). Un 7% asocia este concepto a la acción de lanzar fichas, se asocia a otros conceptos relacionados (7%).

**Figura 8. Respuestas de los estudiantes a la pregunta: ¿Qué entiendes por probabilidad?**



**Figura 9. Respuestas de los estudiantes a la pregunta: ¿Qué entiendes por azar?**



### 7.1.2. Guía final: retroalimentación de las actividades propuestas.

Por medio de la guía final se realizó una retroalimentación que merece la pena ser evaluado en el proceso de la investigación. En esta herramienta se les indagó a los estudiantes sobre sus percepciones sobre la aplicación de la Unidad Didáctica estableciendo los conceptos de mayor significancia para ellos. En primera instancia se les cuestionó sobre la actividad de mayor complejidad para ellos, lo cual se relacionó con la actividad propuesta en la Unidad Didáctica, sintetizado mediante la tabla 6.

**Tabla 6. Respuestas relacionadas a la pregunta: ¿Cuáles fueron las dificultades que afrontaste a lo largo de la experiencia?**

Estudiante	Respuesta <sup>1</sup>	Actividad asociada
E1	<i>Las notas musicales al organizarlas</i>	Sesión 20: ¡Compongamos!
E2	<i>Hacer el dado porque no lo podía pegar</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro
E3	<i>Fue uno de los vasos de agua porque no entendía como sonaba</i>	Sesión 9: Las relaciones entre la matemática y la

<sup>1</sup> Las respuestas de los estudiantes se plasman tal y como se contestaron en la guía final de la propuesta investigativa, por lo que pueden tener errores ortográficos y/o sintácticos.

		música II: Composición musical
E4	<i>El dado porque es muy difícil de construirlo</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro
E5	<i>Fue lo del pentagrama</i>	Sesión 19: Conozcamos sobre la música
E6	<i>Las notas que vemos en esa hoja porque así no logro hacer</i>	Sesión 19: Conozcamos sobre la música
E7	<i>La de las notas musicales, por nunca había hecho esas actividades y era difícil por que debía lanzar un dado, me enredaba mucho donde era correcto</i>	Sesión 19: Conozcamos sobre la música. Sesión 20: ¡Compongamos!
E8	<i>La hechura de los dados porque tocaba recortar las caras de los dados.</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro
E9	<i>La de hacer los dados, porque es recortar los papeles, pensar, aprender el pentagrama</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro
E10	<i>El dado me quedó difícil al comienzo porque pegando el dado</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro
E11	<i>Fue hacer los dados con las notas musicales, también los pentagramas porque son cosas que nunca he visto en mi vida</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro Sesión 20: ¡Compongamos!
E12	<i>Aprender el pentagrama, a hacer los dados de doce caras</i>	Sesiones 11 y 12: Dodecaedro Sesión 20: ¡Compongamos!
E13	<i>Las dificultades a lo largo de la experiencia fue cuando nos pusieron a hacer canciones, algunas preguntas nos tocó al azar, ahí aprendimos que era azar.</i>	Sesión 20: ¡Compongamos!
E14	<i>Manejar el pentagrama</i>	Sesión 20: ¡Compongamos!
E15	<i>El manejo del pentagrama</i>	Sesión 20: ¡Compongamos!

La complejidad de la relación entre la matemática y la música es indagada en esta guía final como un referente que permite establecer un aprendizaje significativo, que contribuyó en los estudiantes a reforzar el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, objetivos contemplados en

los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional.

Mediante la tabla 7 se consolidan las respuestas asociadas a la pregunta *¿Cuál es la relación entre la música y la matemática?*, de la guía final.

**Tabla 7. Respuestas relacionadas a la pregunta: ¿Cuál es la relación entre la música y la matemática?**

<b>Estudiante</b>	<b>Respuesta<sup>2</sup></b>
<b>E1</b>	<i>Si porque la música tiene escalas, también se divide, tiene cantidad al igual que la música.</i>
<b>E2</b>	<i>Que sumando melodías sale una nueva, porque también se pudo hacer música en dados.</i>
<b>E3</b>	<i>La relación entre la música y la matemática es que con vasos de agua hacen música porque tienen niveles y en las matemáticas de niveles diferentes.</i>
<b>E4</b>	<i>Pues las matemáticas se pueden relacionar por medio por números como los vasos con agua y las cucharas.</i>
<b>E5</b>	<i>La matemática se combina la música porque las cosas del pentagrama hay que hacer cosas matemáticas en el pentagrama se daban resultados al azar y la melodía también.</i>
<b>E6</b>	<i>La relación entre la música y la relación matemática es que la música tiene como un sonido y la matemática es más diferente</i>
<b>E7</b>	<i>Que las dos se pueden usar para hacer una nueva canción.</i>
<b>E8</b>	<i>Porque se familiarizan</i>
<b>E9</b>	<i>La relación entre la música y la matemática es que tiene unos niveles y otras cosas mas</i>
<b>E10</b>	<i>Que la música tiene un sonido suave y la matemática también tiene sus características</i>
<b>E11</b>	<i>Es que la música y las matemáticas van de la mano porque la música tiene que ser bueno en matemáticas para poder aprender música muy rápido</i>

<sup>2</sup> Las respuestas de los estudiantes se plasman tal y como se contestaron en la guía final de la propuesta investigativa, por lo que pueden tener errores ortográficos y/o sintácticos.

<b>E12</b>	<i>Si la música tiene escalas hicimos música con un dado de doce caras.</i>
<b>E13</b>	<i>La relación entre la música y la matemática es que tiene ritmos que se interpretan por las dos cosas tanto como la música y las matemáticas en común</i>
<b>E14</b>	<i>La música tiene niveles y la matemática también</i>
<b>E15</b>	<i>Si porque por ejemplo con el dodecaedro poníamos notas musicales y así se relaciona la música con las matemáticas.</i>

Se establecieron relaciones cercanas entre la música y las matemáticas desde el pensamiento aleatorio con la intervención de la geometría fractal, que contribuyó a fortalecer los conceptos de azar, interviniendo el juego y la estocástica como elementos esenciales. Es importante resaltar que es posible construir la *matemúsica* (Moyano, 2016).

De acuerdo con lo anterior, al proponer situaciones problemáticas para que los estudiantes analicen un agrupamiento de datos (en este caso, de notas musicales), es posible abordar el tema de la probabilidad, establecido mediante los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia.

### **7.2. Construcción del dodecaedro.**

Tal y como se evidencia anteriormente, los estudiantes presentaron ciertas dificultades en la elaboración y construcción del dodecaedro. Sin embargo, participaron activamente en el desarrollo de la actividad, vinculando exitosamente la geometría fractal al pensamiento aleatorio.

**Figuras 10 y 11. Elaboración del dodecaedro por parte de los estudiantes de la forma geométrica. Fotografías tomadas por el autor.**



### **7.3. Composición musical.**

Finalmente, los estudiantes mostraron gran interés en la composición musical a partir del azar aportado por el dodecaedro.

La construcción de una perspectiva de la complejidad es posible por la mediación de dos disciplinas, conjugadas en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje, establecido por Bustamante y Opazo (2004) como la posibilidad de organizarlas en una creación común.



A partir de esta organización en una creación común, los estudiantes realizaron actividades asociadas al primer acercamiento entre estas dos disciplinas: mediante la emisión de vibraciones por segundo de un objeto en particular, de una manera pitagórica, tal y como lo establece Bertos (2013).

Desde el punto de vista de la musicología, se logró anclar ambos conceptos desde lo particular a lo general, de manera integral; vinculándola a los procesos aleatorios, a la teoría de la complejidad y a la estructura misma de la composición musical (Sanmartino, 2015; García, 2017). Por lo tanto, es posible determinar que la música y la matemática en conjunto puede acoplarse a las ciencias naturales y ciencias sociales, como parte de las disciplinas que buscan entender los comportamientos de los estudiantes, teniendo en cuenta el contexto. La musicología, logra como lo establece González (2016) en una reflexión sobre la música misma.

De esta manera, se aplicaron los principios de la música fractal, mediante la proyección de una estructura fractal en un espacio musical, como lo establece Pérez (2000), al asignarles valores a las notas musicales (Nápoles & Palomá, 2012).

Finalmente, Pérez concluye que la música fractal es un cambio que influenciará y atraerá a muchos interesados en el tema, consolidando la teoría fractal:

La música fractal se mueve en la frontera entre la monotonía y la sorpresa, entre la aleatoriedad y la predictibilidad. Su complejidad probablemente impida que llegue al gran público, aunque quizás sea demasiado pronto para juzgar una manifestación musical que cuenta con poco más de una década de vida. Tampoco las primeras imágenes del conjunto de Mandelbrot permitían presagiar la belleza de sus simas inacabables (Pérez, 2000, p. 45).

**Figuras 12 y 13. Desarrollo de actividad musical con los estudiantes. Fotografías tomadas por el autor.**



**Figura 14. Desarrollo de composición musical con instrumento (órgano). Fotografías tomadas por el autor.**



## CONCLUSIONES

Mediante la presente propuesta investigativa, se logró una convergencia entre la música y las matemáticas desde la complejidad, ahondando en el pensamiento aleatorio de los estudiantes de séptimo grado de la I.E.R. Bolivia del municipio de El Paujil, Caquetá, establecido mediante la aplicación de la Unidad Didáctica, que logró la adquisición de las bases teórico-práctico del pensamiento aleatorio y de la generación musical.

Al explorar las ideas previas de los estudiantes con relación al concepto de azar y su relación con la música es posible determinar que existen ambigüedades, en cuanto son conceptos abstractos, que es posible relacionar mediante la geometría fractal, lo que le da valor agregado a la elaboración del dodecaedro; instrumento que permitió que los estudiantes interactuaran como compositores, valorando su producción musical. De esta manera, la música y las matemáticas en su conjunto, desde la musicología permiten que los alumnos descubran sus posibilidades, comprendiendo conceptos como aleatoriedad y estocástica, que son propios del pensamiento aleatorio.

En este sentido, los estudiantes presentaron un interés sobre la composición, participando activamente en la realización de las actividades finales. Una muestra concreta que desde la musicología es posible involucrar las matemáticas y la música. La naturaleza de la música establece la consideración de la complejidad del orden de las matemáticas, que se reproducen mediante las propuestas de los estudiantes, que en la actividad final descubren relaciones intrínsecas: niveles, ritmos, armonías. Los estudiantes relacionaron las notas musicales con números.

Finalmente, el pensamiento aleatorio es un aspecto de la enseñanza de las matemáticas fundamental para el desarrollo de los estudiantes de séptimo grado, ya que fortalece las relaciones entre el azar, la posibilidad y la probabilidad como parte del contexto que nos rodea. La musicología es una rama que permite abordar estos conceptos desde la didáctica de las matemáticas. Ambas disciplinas hacen parte de la consolidación de la complejidad como una red de conceptos interdisciplinarios que logran en los estudiantes un acceso real y aplicable al conocimiento de las matemáticas y la música.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adrián, A., Álvarez, J. & Páez, (1994). D. Música, Imagen y Emoción: Una Perspectiva Vigotskiana. *Piscothema*, Vol. 6, núm. 3, 1994, pp. 347-356. UNIVERSIDAD DE OVIEDO, Oviedo, España.

Ayala, M.I. (s.f.) *Definiciones de Música, La Música como Ciencia: Concepto de Musicología. Relaciones de las Ciencias de la Música con otras Disciplinas. Fuentes de Investigación Musical, Métodos de Investigación Musical. Estructuras del Lenguaje Musical. Optativa, 6 cr. Universidad de Jaén:*  
[http://www4.ujaen.es/~imayala/\\_private/estructuras/Tema%201%20sin%20resumir.pdf](http://www4.ujaen.es/~imayala/_private/estructuras/Tema%201%20sin%20resumir.pdf)

Bajo, T., Gómez- Ariza, C., Puerta-Melguizo, M. & Macizo, P. (2000). Cognición Musical: Relaciones entre Música y Lenguaje. Fundación Infancia y Aprendizaje. *Cognitiva*, 2000 (12) 1, 63-87. Universidad de Jaén, Universidad de Granada.

Basso, G. (2002). *La Geometría Fractal en la Música. Proyecto de Investigación. Programa de Incentivos a los Docentes Investigadores. "Nuevas teorías acústicas y perceptuales: su aplicación al fenómeno musical"*. Recuperado de:  
<http://sacom.org.ar/v2016/sites/default/files/Gustavo%20Basso%20-%20La%20geometr%C3%ADa%20fractal%20en%20la%20m%C3%BAsica.pdf>

Batanero, Carmen. (2001). *Aleatoriedad, Modelización, Simulación*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Bertos, M. (2013). *Música y matemáticas*. Mesa redonda. Recuperado de:  
<http://www.ugr.es/~jmcontreras/thales/1/MesaRedondaPDF/BertosMesaRedonda.pdf>

- Bessone, M. (2011). *Intersecciones entre Música y Arquitectura. Tradición y Visualización Digital*. Facultad de Arquitectura Diseño y Urbanismo- UNL.
- Biegun, K. & Liatis, A. Viviana. (2013) *Educación Musical y Multiculturalidad: Una Mirada Crítica y Reflexiva desde la Antropología de la Música*. Departamento de Artes Musicales y Sonoras, IUNA. ISSN 2314-2847.
- Blázquez, R. (2014). *Música y Matemáticas*. Universidad de Valencia. Trabajo de grado.
- Bustamante, M., & Opazo, P. (2004). Hacia un concepto de complejidad: sistema, organización y empresa. *Revista FACE-Serie Documentos Docentes*, 2(3), 1-21.
- Cano, M. I., & Zapata Castro, D. C. (2016). *Análisis del pensamiento aleatorio desde las representaciones semióticas presentes en las pruebas saber grado quinto. Caso: Institución Educativa Escuela Normal Superior Amagá (IEENSA)*. Universidad de Medellín. Trabajo de grado.
- Carranza, S. M., & Guerrero, M. A. (2016). *El pensamiento aleatorio como fundamento para el desarrollo del pensamiento matemático y sus componentes*. Universidad Pedagógica Nacional. Trabajo de grado.
- De Guzmán, Miguel. *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
- Díaz de la Fuente, Alicia. (2005) *Estructura y significado en la música serial y aleatoria*. Tesis doctoral. Departamento de Filosofía y Filosofía Moral y Política. Facultad de Filosofía. UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA.

- Duarte, D. (2014). *Enseñar Arte desde la Complejidad: Notas para una práctica de enseñanza dialéctica*. Conservatorio de música de Morón “Alberto Ginastera”
- Fonalla, M. Arce. (2005). Los Sistemas Dinámicos como Teoría Cognitiva. *SUMMA Psicológica* 2, (2) 47-52.
- Fonseca, G. (2009). La formación de profesores de biología a través del diseño, implementación y sistematización de unidades didácticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas* (Extra), 2293-2296.
- García, J. (2017). “Musicología musical”: la música y el sonido como medios de investigación crítica. *El oído pensante* (5)1.
- Gómez, C., Gallego, G., Cisneros, J.; Castrillón, L. (2006). *Pensamiento aleatorio y sistemas de datos*. En Posada, María Eugenia (Ed.), Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas (pp. 115-134). Medellín, Colombia: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia.
- González, V. & Guerrero, C. (2001). Fractales: Fundamentos y Aplicaciones, Parte I: Concepción geométrica en la ciencia e ingeniería. *DIMAT- FIME- UANL*. Vol. IV, N° 10.
- González, J. (2009). La teoría de la complejidad. *Dyna*, 76(157), 243-245.
- González, L. (2016). Musicología y recuperación de la práctica musical histórica. Una reflexión heterodoxa. *La albolafia: revista de Humanidades y Cultura* (9).
- Grebe, V., E. María. (1981). Antropología de la Música: Nuevas Orientaciones y Aportes Teóricos en la Investigación Musical. *Revista Musical Chilena*, 1981, XXXV, N° 153-155, pp. 52-74.

Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática. Facultad de Matemáticas*. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, Madrid.

Jiménez, C. (s.f.). *Neuropedagogía y neurociencias*. Recuperado de: <http://www.neuropedagogiacolombia.com/> el 8 de abril de 2018.

Londoño, P., & Montoya, F., Edwin. (2011) *Azar, Aleatoriedad y Probabilidad: Significados Personales en Estudiantes de Educación Media*. Departamento de Postgrados. Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE). Universidad de Manizales.

López, M., Javier. (2008). Aprendiendo a través de la Indeterminación. C.P.I de Xanceda, Mesía, A Coruña. *Revista Electrónica de Lista Electrónica Europea de Música en la Educación, LEEME 22*.

Luchsinger, M. Joaquin. (2016) *El Sonido de la Rutina. Facultad de Arte. Escuela de Artes Visuales*. Universidad Finis Terrae. Santiago, Chile.

Maldonado, C. (2014) ¿Qué es eso de Pedagogía y educación en Complejidad? Debate Teórico- Metodológico. *Intersticios Sociales. El Colegio de Jalisco (7)*.

Maldonado, C. *Exploración de una Teoría General de la Complejidad*. Complejidad: Revolución científica y teoría.

Martín, C. Torrents. (2005) Tesis doctoral: *La Teoría de los Sistemas Dinámicos y El Entrenamiento Deportivo*. Departamento de Teoría de la Historia de la Educación. Instituto Nacional de Educación Física de Catalunya. UNIVERSIDAD DE BARCELONA.



Mejía, M. L., & Ortiz, N. (2007). *Ciencia, tecnología, sociedad (CTS) y alfabetización científica*. Universidad de Antioquia. Trabajo de grado.

Mendoza, V. (1984). *El Folklore y la Musicología*.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Colombia.

Moro Vallina, Daniel. *Aleatoriedad y Flexibilidad en la Vanguardia Musical Española*. Proyecto de Investigación Música y Cultura en la España del siglo XX: Dialéctica de la modernidad y diálogos con Hispanoamérica (Ref. HAR2009-10865).

Moro Vallina, D. (2013). *La Improvisación Musical: Entre el Proceso Creativo y el Resultado Compositivo*. Universidad de Oviedo.

Moyano, C. (2016). Desarrollo humano, música y matemática. Tesis de grado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Nápoles, J. & Palomá, L. Fractales a nuestro alrededor. *VIDYA* 32 (1).

Nebauer, J. *La emancipación de la música*. Editorial Visor. Madrid 1992. Disponible en [https://books.google.com.co/books/about/La\\_Emancipaci%C3%B3n\\_de\\_la\\_m%C3%BAsica.html?id=TIicPQAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.co/books/about/La_Emancipaci%C3%B3n_de_la_m%C3%BAsica.html?id=TIicPQAACAAJ&redir_esc=y)

Neira, V. *Interdisciplinariedad de la enseñanza de la matemática*. Trabajo de investigación asociado a tesis para optar al grado de Licenciado en Educación. Facultad de Educación. UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN. Disponible en <http://www.dsc.cl/attachments/article/585/INTERDISCIPLINARIEDAD%20EN%20LA%20ENSE%C2%A5ANZA%20DE%20LA%20MATEMATICA.pdf>

- Nieto, V. (2008). *La forma abierta en la música del siglo XX*. Programa de Maestría y Doctorado en Música. Escuela Nacional de Música, UNAM
- Otálora, P. (2005) *La Investigación en Musicología desde una Perspectiva Pluridisciplinar*. Revista de Educación en Humanidades, 8 (2015), julio, 77-95.
- Oviedo, L.; Kanashiro, A. & Colombini, M. *Fractales: Un universo poco frecuentado*. Universidad Nacional del Litoral.
- Pareyón, G. (2011). *Caos, Autosemejanza y el Cambio de Paradigma en Música*. Heterofonía, N° 145, Ciudad de México, jul-dic. 2011.
- Pérez de la Cruz, C. (2013) *Educación, música y matemáticas: Un triángulo afinado en armonía*. Trabajo fin de grado. Departamento de Didáctica de las C. Experimentales, Sociales y de la matemática. UNIVERSIDAD DE VALLADOLID.
- Pérez, J. (2000). *Música Fractal: El Sonido del Caos*. Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos. UNIVERSIDAD DE ALICANTE.
- Pinzón, D. M. y Téllez Sánchez, F. J. (2016). Herramientas neuropedagógicas: una alternativa para el mejoramiento en la competencia de resolución de problemas en matemáticas. *Actualidades Pedagógicas*, (68), 15-41. doi: <http://dx.doi.org/10.19052/ap.4002>
- Pinzón, D. F. (2016). *Habilidades de pensamiento aleatorio y la creación de aplicaciones móviles. Un estudio exploratorio en semilleros de investigación escolar de la Educación Media*. Universidad de Antioquia. Trabajo de grado.
- Prates, E. (2001). Música holofractal: una conexión semiótica entre la música y la física contemporáneas. *Signa: Revista de la Asociación Española de Semiótica*, (10), 193-202.

- Prigogine, I. & Stengers, I. (1991) *Entre el Tiempo y la Eternidad*. Alianza Editorial, S. A., Buenos Aires. ISBN: 950-40-0061-4, Argentina.
- Puig, E., Lluís. (2004). *Alear: Arte Procesual- Aleatorio*. Tesis Doctoral. Departamento de Pintura. Facultad de Belles Arts. Universidad de Barcelona.
- Quintero, C. A. (2010). Enfoque ciencia, tecnología y sociedad (CTS): perspectivas educativas para Colombia. *Zona próxima*, (12).
- Reyes, Juan. Señales Musicales con Sistemas Dinámicos y Frecuencias Hápticas. *Artlab*, UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, Bogotá, Colombia.
- Rodríguez, F. (1989) *Dinámica de Sistemas*. Facultad de Ingeniería, UNAM. Trillas, México.
- Rodríguez, L., & Leónidas, J. (2011). Teorías de la complejidad y ciencias sociales. Nuevas estrategias epistemológicas y metodológicas. *Nómadas*, (30).
- ROS- Fábregas, Emilio. (2006) Retos de la Musicología en la España del Siglo XXI: De la Reflexión a la Aplicación Práctica en el Aula. *Revista de Musicología*, Vol. XXIX, Nº 1. Madrid.
- Rowell, L. (1999) *Introducción a la Filosofía de la Música. Antecedentes Históricos y Problemas Estéticos*. Gedisa Editorial, Barcelona.
- Sanjuán F. A. Miguel. & Casado Vázquez, M. José. (2005) *Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro*. RUISF.
- Sammartino, F. (2015). Ceros y unos en la musicología. Software y análisis musical. *Resonancias* (19) 37, 27-45.

Sgrecia, M. Lucas. *Música fractal-algorítmica y antropología de la música: Aportes computacionales a la búsqueda de universales*. UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.

Steingress, G. (2006) *El Caos Creativo: Fiesta y Música como Objetos de Deconstrucción y Hermenéutica Profunda. Una Propuesta Sociológica*. Universidad de Sevilla.

Syroyid, Bohdan. (2012) *El Sigilo Aleatorio en Mozart*. D.C. (CSMMálaga).

Vargas, C. *Una prueba de la existencia de la relación entre ciencia y arte: Los sistemas dinámicos discretos como una nueva forma para generar música*. UNIVERSIDAD SERGIO ARBOLEDA.

Vélez, C. A. J. (2008). *El juego. Nuevas miradas desde la neuropedagogía*. COOP. EDITORIAL MAGISTERIO.

Vicuña, M. (1967) *Revista Musical Chilena*. Facultad de Ciencias y Artes Musicales. UNIVERSIDAD DE CHILE, Santiago de Chile, N° 101.

Zanette, D. (2008). *Música, Complejidad, Información*. Grupo de Física Estadística e Interdisciplinaria del Centro Atómico Bariloche.

Enlaces web:

[http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lap/carmona\\_c\\_dc/capitulo2.pdf](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lap/carmona_c_dc/capitulo2.pdf)

## ANEXOS

### ANEXO 1: ACTIVIDAD ALTERNATIVA

Las siguientes son actividades propuestas por Blázquez (2014) para un curso de secundaria, desde su trabajo *Música y matemáticas*, tesis de grado de la Universidad de Valencia. Pueden aportar en el diseño y aplicación de la Unidad didáctica.

#### *Componer al azar.*

##### *Objetivos Específicos:*

- *Desarrollar el pensamiento lógico y la comprensión de nociones básicas de probabilidad y análisis de datos a través de la experiencia.*

- *Iniciación a la potenciación, como producto de factores iguales.*

- *Utilización de la calculadora en la resolución de problemas, por la complejidad de los cálculos.*

- *Disfrutar y compartir el potencial lúdico y creativo de la música.*

1. *Realizar un experimento aleatorio (lanzamiento de dodecaedro). Calcular la probabilidad del suceso ( $n^\circ$  de casos favorables /  $n^\circ$  de casos posibles).*

a) *Lanzamiento de un dodecaedro. Su espacio muestral. Probabilidad del suceso. Su representación.*

b) *Lanzamiento de dos dodecaedros. Su espacio muestral. Probabilidad del suceso. Su representación.*

##### *Soluciones:*

a) *Lanzamiento del dodecaedro.*

*Espacio muestral  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*

*Todos los sucesos elementales son equiprobables (en cada tirada del dado tanto puede salir una cara como otra)*

*Entonces de cada 6 veces que lancemos el dado hay una vez teórica que saldrá la cara 1, otra vez que saldrá la 2...*

<b>Dado</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
	1	1	1	1	1	1

*2. Realizar una composición al azar, mediante el lanzamiento de dos dados utilizando la tabla de los minuets y la tabla de música con los 176 compases del Juego de Dados de Mozart. Escribir los 16 compases en el pentagrama. Audición de algunas de las posibles composiciones de El Juego de Dados de Mozart.*

*¿Cuántos minuets distintos se pueden componer con 176 compases? ¿Cuál sería la composición con la probabilidad más alta para ocurrir? Si todos los minuets posibles son interpretados uno cada 30 segundos, ¿Cuántos años necesitaríamos para realizar todos los minuets?*

*Solución:*

*Para el 1º compás se elige uno de los de la 1ª columna: hay 11 para elegir.*

*Para el 2º compás se elige uno de los de la 2ª columna: hay 11 para elegir.*

*Para el compás 16 se elige uno de los de la columna 16ª: hay 11 para elegir.*

*Luego tendríamos las siguientes posibles elecciones:*

$11 \times 11 \times \dots \times 11$  (16 veces) = 46.000.000.000.000.000 = 46 mil billones

De entre los minuets posibles la probabilidad más alta será el minueto formado por los

16 compases obtenido cuando los dos dados suman 7, es decir los compases (104, 157,

27, 167, 154, 68, 118, 91, 138, 71, 150, 29, 101, 162, 23, 151).

Para saber cuántos años se tardaría en interpretar todas las versiones de minuets, calculamos los segundos que hay en un año:

1 año = 365 días = 365 días  $\times$  24 horas/día  $\times$  3600 segundos/hora = 31.536.000 seg.

Si en 30 segundos se realiza un minueto en 31.536.000 segundos que tiene un año (tocando día y noche), se interpretarían:

$31536000 : 30 = 1.051.200$  (aproximadamente un millón de versiones).

Como hay casi 46 mil billones de minuets y cada año se puede interpretar 1 millón de versiones se tardaría en interpretar todos 46 mil millones de años.

## ANEXO 2: RECURSOS Y GUÍAS DE TRABAJO

### Guía de trabajo 1

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
1	<i>Ideas previas pensamiento aleatorio</i>	Indago sobre las ideas que tienen los estudiantes sobre los conceptos del pensamiento aleatorio y la música	Cuestionario exploratorio donde se indaguen ideas sobre azar, estocástica y procesamiento de datos a los estudiantes. Actividad exploratoria sobre las ideas que tienen los estudiantes sobre la composición musical	Argumentación de ideas. Interpretación de datos. Participación.

#### Actividad escrita individual. Tiempo: 30 minutos.

1. ¿Qué entiendes por probabilidad?

---

---

---

2. ¿Crees que la música tiene alguna relación con las matemáticas?

\_\_\_SI

\_\_\_NO

Justifica tu respuesta:

---

---

---

3. ¿Alguna vez has jugado parqués? Explica en estas líneas en qué consiste jugar, y cuáles son las reglas de juego:



---

---

---

---

---

4. Define con tus palabras que es el azar:

**Actividad grupal. Tiempo: 30 minutos**

Para empezar, se puede intentar este sencillo juego. Se divide la clase en grupos de 5 alumnos y se le entrega a cada grupo un par de dados. Cada grupo tira 5 veces el par de dados anotando en cada ocasión el resultado y entendiéndose por resultado la suma de las puntuaciones de ambos dados. Después se pone en común los resultados obtenidos, de forma que los alumnos observen qué números tienen mayor probabilidad de aparecer. Luego, el profesor detallará todos los posibles casos que tiene este experimento, demostrando así el motivo por el cual los números 6, 7 y 8 se han obtenido normalmente más que los demás. Es un buen ejercicio para introducir el concepto de probabilidad de un suceso.

## Guía de trabajo 2

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
2	<b><i>Pensamiento aleatorio I: comparación de datos.</i></b>	Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	Taller por equipos de trabajo, presentando una situación cotidiana que involucre datos estadísticos: extraer datos provenientes de medios de comunicación e interpretarlos. Basada en: Núñez, R. (2007). <i>Taller de estadística y probabilidad</i> . Ittakus (p. 8).	Argumentación de ideas, pensamiento matemático, participación, trabajo colaborativo.

### Actividad grupal. Tiempo: 1 hora.

Plantear la siguiente situación al grupo de estudiantes, distribuyéndolos por grupos de discusión, luego se hará un debate:

En un campeonato de natación participan los siguientes países: España, Reino Unido, Francia, Bélgica, Corea del Sur, Noruega, Suecia y Brasil. Si se supone que los representantes de los ocho equipos son de igual nivel, la pregunta es:

*¿te parece muy probable que España consiga la medalla de oro, Noruega la de plata y Francia la de bronce?*

En esta unidad estudiaremos la forma de resolver este tipo de situaciones, pero mientras podemos adelantar que la probabilidad pedida es tan pequeña que solo ocurrirá aproximadamente 3 veces de cada 1000 que compitan.

## Guía de trabajo 3

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
3	<b>Pensamiento aleatorio II: Gráficas.</b>	Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.)	ENCUESTA EN CLASE: De manera individual los estudiantes realizarán una encuesta en donde se indague sobre alguna particularidad (con ayuda del docente), procesará los datos y los presentará por medio de diagramas de barras o histogramas.	Trabajo en clase, argumentación de ideas, participación.

### Actividad grupal

*De manera individual los estudiantes realizarán una encuesta en donde se indague sobre alguna particularidad (con ayuda del docente), procesará los datos y los presentará por medio de diagramas de barras o histogramas.*

1. Tema de la encuesta: \_\_\_\_\_

2. Pregunta a formular a los compañeros: \_\_\_\_\_

3. Cantidad de compañeros a encuestar: \_\_\_\_\_

4. Opciones de respuesta (si las hay): \_\_\_\_\_

*Después de aplicar la encuesta, se responderán los siguientes planteamientos:*

5. Cantidad de compañeros encuestados: \_\_\_\_\_

6. Respuesta más popular: \_\_\_\_\_

¿De qué manera organizarías los datos, de tal manera que puedan ser comprensibles?

---

---

---

En el recuadro organiza los datos con ayuda de tu profesor:

Muestra: \_\_\_\_\_

Variables: \_\_\_\_\_

Frecuencia absoluta: \_\_\_\_\_

## Guía de trabajo 4

N° sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
4	<b><i>Pensamiento aleatorio III: medidas de tendencia central.</i></b>	Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos.	ENCUESTA EN CLASE (PARTE II): Los estudiantes utilizarán los datos de la sesión anterior para analizar los datos desde medidas de tendencia central: media, moda, mediana.	Interpretación de datos, pensamiento matemático, participación.

Los estudiantes utilizarán los datos de la sesión anterior para analizar los datos desde medidas de tendencia central: media, moda, mediana:

Moda

Media

Mediana

Rango

## Guía de trabajo 5

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
5	<i>Pensamiento aleatorio IV: predicción de eventos.</i>	Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.	LANZAR UN DADO I: En grupos los estudiantes harán cierta cantidad de lanzamientos de un dado. Luego repetirán el ejercicio las veces que indique el profesor. Basada en: <a href="https://www.aulapt.org/2016/03/15/juego-dados-introducirse-la-probabilidad-azar/">https://www.aulapt.org/2016/03/15/juego-dados-introducirse-la-probabilidad-azar/</a>	Argumentación, pensamiento matemático, seguimiento de instrucciones.

Se divide la clase en grupos de 5 alumnos y se le entrega a cada grupo un par de dados. Cada grupo tira 5 veces el par de dados coloreando en cada ocasión el resultado y entendiéndose por resultado la suma de las puntuaciones de ambos dados. Al terminar se hace un recuento de los resultados y se anotan en las casillas de los números correspondientes en la parte de arriba, de forma que los alumnos observen qué números tienen mayor probabilidad de aparecer. Luego, el profesor detallará todos los posibles casos que tiene este experimento, demostrando así el motivo por el cual los números 6, 7 y 8 se han obtenido normalmente más que los demás. Hacer reflexionar también el por qué los dos primeros números no han salido nunca. Usar el tablero que aquí se presenta:

**¿Cuál saldrá más veces?**

aulapt.org  
Red de escuelas  
para la inclusión de A.E.D.

0	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	12

0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					

7					
8					
9					
10					
11					
12					

## Guía de trabajo 6

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
6	<i>Pensamiento aleatorio V: proporciones y probabilidad</i>	Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	LANZAR UN DADO II: Los estudiantes relacionarán los resultados obtenidos en la sesión anterior con los conceptos de proporciones y probabilidad. Basado en: <a href="https://www.aulapt.org/wp-content/uploads/2016/03/juego-dados-suma-resta.pdf">https://www.aulapt.org/wp-content/uploads/2016/03/juego-dados-suma-resta.pdf</a>	Argumentación, pensamiento matemático, seguimiento de instrucciones.

Con base a los resultados obtenidos en la clase anterior, y con ayuda del profesor, analizar las proporciones con las cuales existe la posibilidad de que se obtenga cada número.

## Guía de trabajo 7

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
9	<i>Las relaciones entre la matemática y la música II: Composición musical</i>	Realizar un ejercicio práctico sobre la aplicación de la matemática a la música	EJERCICIO EN GRUPOS: Por medio de vasos de cristal con diferentes medidas de agua se explicarán las notas musicales desde el punto de vista matemático, sustentando conceptos básicos de la música. Video de apoyo: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=uC74pXvI59k">https://www.youtube.com/watch?v=uC74pXvI59k</a>	Valoración de explicaciones sobre la relación entre la matemática y la música

### Actividad grupal:

Materiales:

- 7 u 8 copas de cristal (o vasos).

- Agua.

- Opcional: colorante.

Procedimiento:

Lo primero que tenemos que hacer es poner todas las copas que tengamos en línea y sobre una superficie plana, como puede ser una mesa. A continuación, vamos llenando las copas de agua a diferentes niveles. Las primeras, que serán las notas más graves, irán más llenas, mientras que las últimas, las más agudas, estarán prácticamente vacías.

Por último, podemos añadir colorante de diferentes tonalidades a las copas para que el efecto sea más vistoso.

Para hacer música, lo único que tenemos que hacer es mojarnos la yema de un dedo (el índice, por ejemplo) y tocar el borde de cada copa hasta notar una vibración. Esta pequeña vibración es la que produce el sonido. Si no suena, podemos probar a humedecer también el borde de la copa.

De esta forma, podemos llegar incluso a tocar distintas canciones, como la que aparece en el vídeo del final (¿adivinarás cuál es?).

¿Cuál es la relación entre la música y las matemáticas?

---

---

---



## Guía de trabajo 8

Nº sesión	Tema	Objetivos de enseñanza	Metodología/Actividades	Métodos de evaluación
10	<i>Música fractal</i>	Entender y comprender la música fractal para la composición musical.	EJERCICIO DE DIAGNÓSTICO: Los estudiantes deben establecer las relaciones entre la música y la composición musical a través de un taller de retroalimentación.	Valoración del ejercicio de diagnóstico.

### Taller de retroalimentación.

Para realizar este taller es importante revisar:

1. Blázquez, R. (2014). *Música y Matemáticas*. Universidad de Valencia. Trabajo de grado. Link: [https://gedos.usal.es/jspui/bitstream/10366/123098/1/TG\\_BlazquezLozanoN\\_Musica\\_ymatematicas.pdf](https://gedos.usal.es/jspui/bitstream/10366/123098/1/TG_BlazquezLozanoN_Musica_ymatematicas.pdf)
2. En el texto anterior, se explican algunos conceptos aquí abordados: *Juegos de datos de Mozart, minuetos, tabla de minuetos*. Es importante explorar este documento para ejecutar el ejercicio.
3. Como actividades extraclase a los estudiantes se les puede dejar los temas anteriores de consulta.

1. Realizar un experimento aleatorio (lanzamiento de dados). Calcular la probabilidad del suceso ( $n^\circ$  de casos favorables /  $n^\circ$  de casos posibles).

a) Lanzamiento de un dado. Su espacio muestral. Probabilidad del suceso. Su representación.

b) Lanzamiento de dos dados. Su espacio muestral. Probabilidad del suceso. Su representación.

*Soluciones:*

*a) Lanzamiento de un dado. Espacio muestral  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*

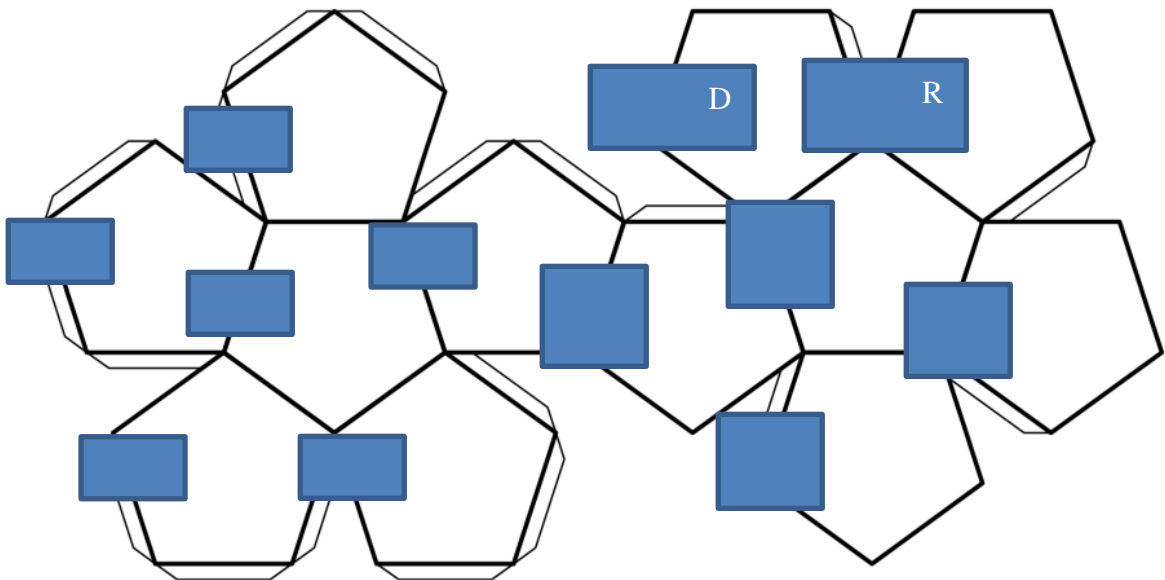
*Todos los sucesos elementales son equiprobables (en cada tirada del dado tanto puede salir una cara como otra). Entonces de cada 6 veces que lancemos el dado hay una vez teórica que saldrá la cara 1, otra vez que saldrá la 2 ...*

2. Realizar una composición al azar, mediante el lanzamiento de dos dados utilizando la tabla de los minuetos y la tabla de música con los 176 compases del Juego de Dados de Mozart. Escribir los 16 compases en el pentagrama. Audición de algunas de las posibles composiciones de El Juego de Dados de Mozart. ¿Cuántos minuetos distintos se pueden componer con 176 compases? ¿Cuál sería la composición con la probabilidad más alta para ocurrir? Si todos los minuetos posibles son interpretados uno cada 30 segundos, ¿Cuántos años necesitaríamos para realizar todos los minuetos?

# GUÍA DE ELABORACIÓN DEL DODECAEDRO

El dodecaedro es un cuerpo geométrico tridimensional, también llamado poliedro convexo regular, ya que sus caras son polígonos regulares iguales y los ángulos tienen el mismo número de caras. Un dodecaedro se caracteriza por tener doce caras (30 aristas, 12 vértices). Esta figura es posible elaborarla mediante el *origami*:

1. En un cartón cartulina dibuja un polígono regular de cinco lados en el centro. Puede ser de 5 cm de lado.
2. Luego, Dibuja en cada lado un polígono idéntico al que dibujaste, utilizando regla y transportador. Si necesitas ayuda acude a tu profesor. Repite la acción en cada uno de los vértices de la figura.
3. En otro cartón cartulina repite la misma figura.
4. Con una regla, elabora los pliegues de 1 cm de ancho a cada vértice en el primer cartón cartulina.
5. Recorta ambas figuras y únelas con pegamento.
6. Deja secar la figura, y luego, colócale notas musicales (de DO a Si Mayor, simbolizado con una M entre paréntesis en la figura abajo).
7. Listo, tienes tu dodecaedro.



## Guía de trabajo 8

Nº de sesión	Nombre de la actividad	Objetivo	Desarrollo	Tiempo
19	<i>Conozcamos sobre la música</i>	Identifico las notas musicales que posee la escala musical. Aprendo a manejar el pentagrama musical.	Identificación de las notas musicales con ayuda de un maestro en música a los estudiantes de séptimo grado. Aprendiendo a manejar el pentagrama musical y las escalas.	1 sesión

### Actividad de reconocimiento:

Cada nota musical está escrita sobre cinco líneas y cuatro espacios entre ellas, a este conjunto se le conoce como pentagrama, cada una de estas líneas son equidistantes y paralelas. Cada línea se enumera de abajo hacia arriba: 1, 2, 3, 4 y 5. De igual manera los espacios se les conocen como 1° hasta el 4°.

Pentagrama:

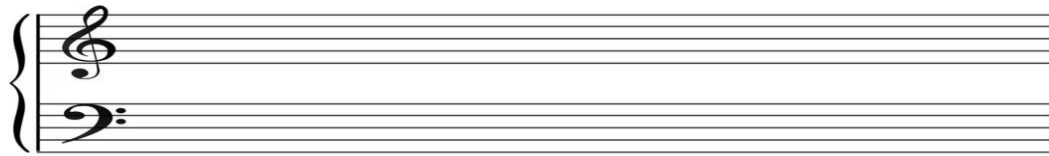
El pentagrama también es conocido como pauta musical, es el lugar designado donde se deben escribir todas las notas musicales y los signos, este orden de escritura se conoce como sistema de notación musical occidental. Lo conforman cinco líneas y cuatro espacios entre ellas, se enumeran de abajo hacia arriba. Los tipos de líneas que se pueden encontrar son rectas, horizontales y equidistantes.



Notas musicales en el pentagrama. Imagen extraída de:

<http://instrumentosmusicales10.net/notas-musicales>

Con ayuda de tu profesor has una composición con el dodecaedro, y coloca las notas a continuación:



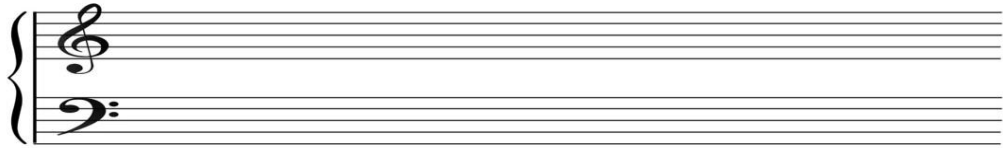
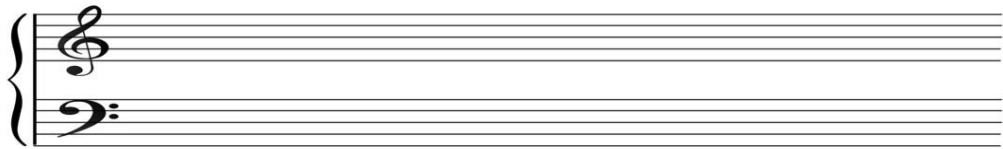
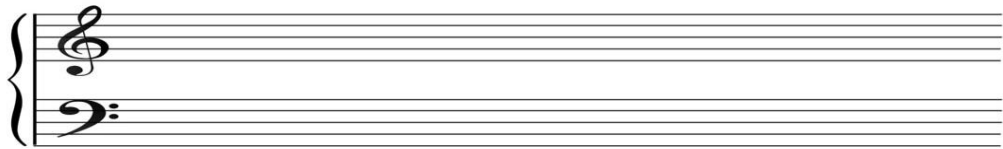
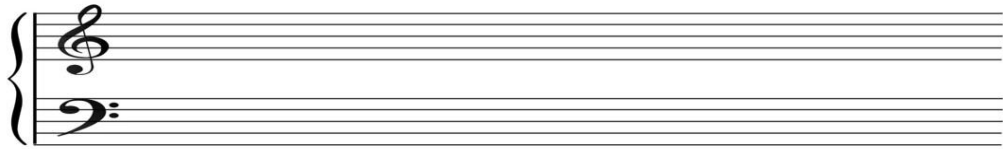
## Guía de trabajo 9

Nº de sesión	Nombre de la actividad	Objetivo	Desarrollo	Tiempo
20	<i>¡Compongamos!</i>	Realizo actividades de composición por medio del lanzamiento del dodecaedro.  Comprendo sobre	Ejercicio previo de composición: colocar las notas musicales a cada una de las caras del dodecaedro. Explicación preliminar de cómo se compone una pieza musical	1 sesión

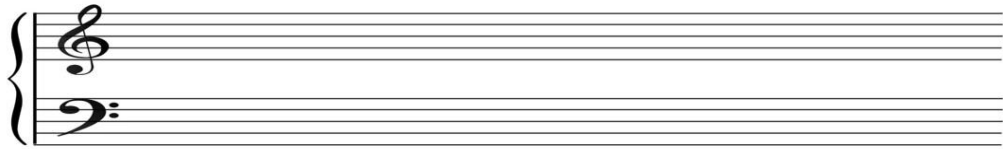
		la composición musical.		
--	--	-------------------------	--	--

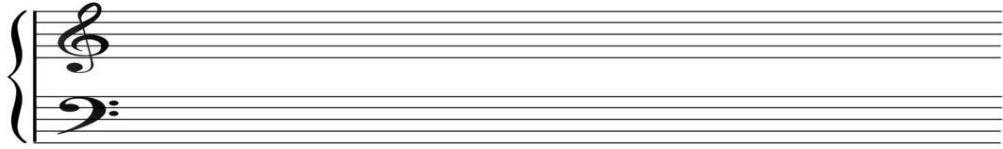
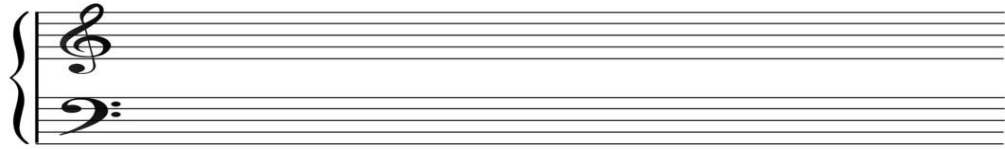
Con ayuda de tu profesor has una composición con el dodecaedro, y coloca las notas a continuación:

**Primera composición**

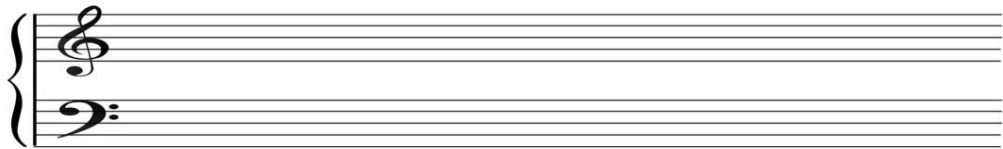
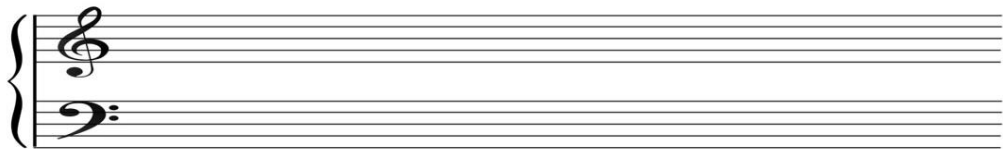
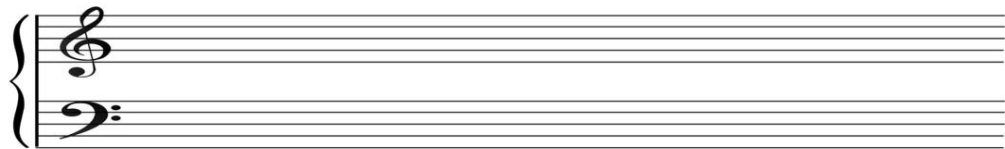


**Segunda composición**





**Tercera composición**



Realiza un análisis de medidas de tendencia central con cada uno de los lanzamientos y las composiciones realizadas:

**Análisis de composiciones:**

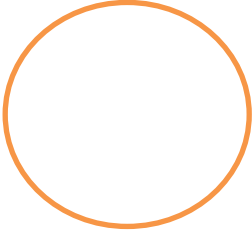
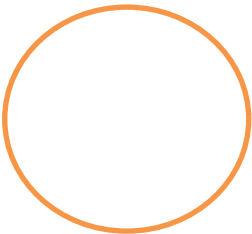
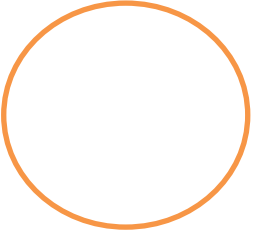
Composición	<u>Lanzamientos</u>	<u>Media de la nota DO</u>		<u>Frecuencia relativa de cada nota</u>	<u>Frecuencia absoluta</u>
<u>Primera</u>					
<u>Segunda</u>					

<b><u>Tercera</u></b>					
Composición	<b><u>Lanzamientos</u></b>	<b><u>Media de la nota RE</u></b>		<b><u>Frecuencia relativa de cada nota</u></b>	<b><u>Frecuencia absoluta</u></b>
<b><u>Primera</u></b>					
<b><u>Segunda</u></b>					
<b><u>Tercera</u></b>					
Composición	<b><u>Lanzamientos</u></b>	<b><u>Media de la nota MI</u></b>		<b><u>Frecuencia relativa de cada nota</u></b>	<b><u>Frecuencia absoluta</u></b>
<b><u>Primera</u></b>					
<b><u>Segunda</u></b>					
<b><u>Tercera</u></b>					
Composición	<b><u>Lanzamientos</u></b>	<b><u>Media de la nota FA</u></b>		<b><u>Frecuencia relativa de cada nota</u></b>	<b><u>Frecuencia absoluta</u></b>
<b><u>Primera</u></b>					
<b><u>Segunda</u></b>					
<b><u>Tercera</u></b>					
Composición	<b><u>Lanzamientos</u></b>	<b><u>Media de la nota SOL</u></b>		<b><u>Frecuencia relativa de cada nota</u></b>	<b><u>Frecuencia absoluta</u></b>
<b><u>Primera</u></b>					
<b><u>Segunda</u></b>					
<b><u>Tercera</u></b>					
Composición	<b><u>Lanzamientos</u></b>	<b><u>Media de la nota SI</u></b>		<b><u>Frecuencia relativa de cada nota</u></b>	<b><u>Frecuencia absoluta</u></b>
<b><u>Primera</u></b>					
<b><u>Segunda</u></b>					
<b><u>Tercera</u></b>					
Composición	<b><u>Lanzamientos</u></b>	<b><u>Media de la nota LA</u></b>		<b><u>Frecuencia relativa de cada nota</u></b>	<b><u>Frecuencia absoluta</u></b>
<b><u>Primera</u></b>					
<b><u>Segunda</u></b>					
<b><u>Tercera</u></b>					



Realiza los gráficos de torta correspondientes a cada lanzamiento, señalando la frecuencia con la que salió cada nota musical, no olvides las convenciones:

**Gráfico de torta**

<b>Primer lanzamiento</b>	<b>Segundo lanzamiento</b>	<b>Tercer lanzamiento</b>
 <b><u>Convenciones</u></b>		

Realiza los gráficos de barra correspondientes a cada lanzamiento, señalando la frecuencia con la que salió cada nota musical, no olvides las convenciones:

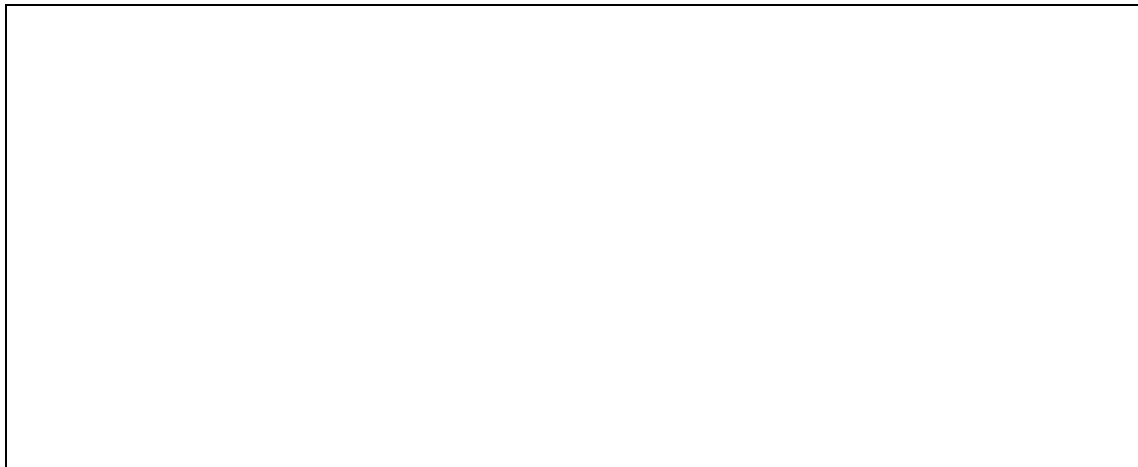
**Gráfico de barras**





Analiza las proporciones de la probabilidad de que salga cada nota musical en un lanzamiento del dodecaedro:

**Probabilidades**



## Guía de trabajo 10

N° de sesión	Nombre de la actividad	Objetivo	Desarrollo	Tiempo
29	<i>Música en números</i>	Establezco relaciones entre la música y las matemáticas.  Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Los estudiantes establecen los elementos que han aprendido por medio de una actividad evaluativa: realizar una composición con el dodecaedro, aplicando todos los conceptos del pensamiento aleatorio. El profesor evalúa la actividad, identificando los conceptos en los que tienen dificultades de asimilación por parte de los estudiantes.	1 sesión

### Actividad individual de retroalimentación

Contesta las siguientes preguntas de acuerdo con lo visto en clase:

1. ¿Cómo podemos hallar la media de una nota musical en una composición?

---

---

---

2. ¿De qué manera podemos determinar la moda en una composición musical?

---

---

---

3. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de una nota musical?

---

---

---

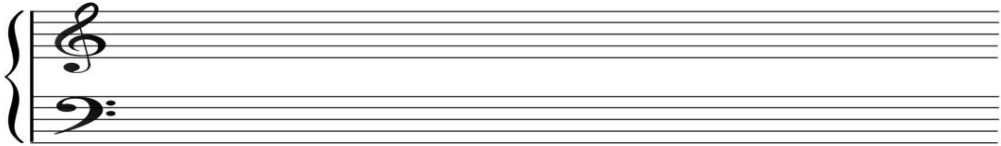
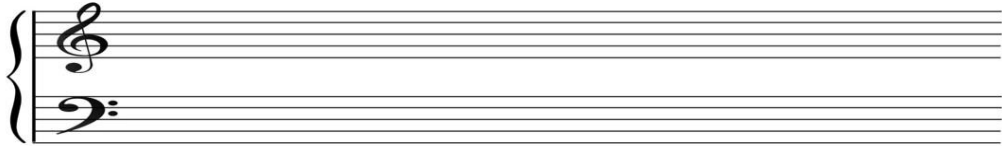
4. ¿Cuál es la frecuencia relativa de una nota musical?

---

---

---

Componer una canción a partir de 10 lanzamientos del dodecaedro, luego, obtener las medidas de tendencia central correspondientes:



Medidas de tendencia central:

## Guía de trabajo final.

Nº de sesión	Nombre de la actividad	Objetivo	Desarrollo	Tiempo
30	<i>Ejercicio final de retroalimentación</i>	Establezco relaciones entre la música y las matemáticas.  Aplico los conceptos del pensamiento aleatorio a las composiciones elaboradas del lanzamiento del dodecaedro.	Tanto los estudiantes como el profesor establecen una retroalimentación mutua sobre la experiencia. Por medio de un “compartir”, se establecen los logros a los que se llegaron con el ejercicio realizado, a lo largo de las 30 sesiones.	1 sesión

Por favor, contesta con la mayor sinceridad las siguientes preguntas:

¿Cuáles fueron las fortalezas de tu trabajo a lo largo de la experiencia?

---

---

---

---

¿Cuáles fueron las dificultades que afrontaste a lo largo de la experiencia?

---

---

---

---

¿Cuál fue la actividad con mayor grado de dificultad y por qué?

---

---

---

---

¿Cuál fue la actividad que más te gustó y por qué?

---

---

---

---

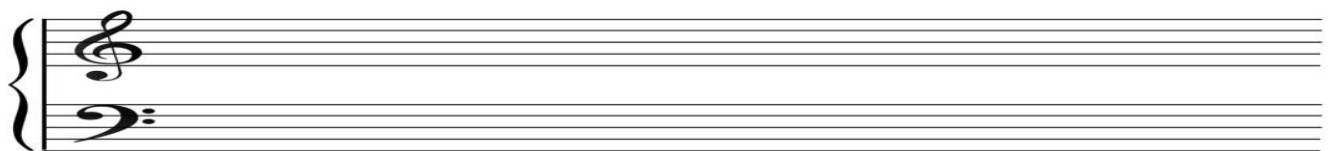
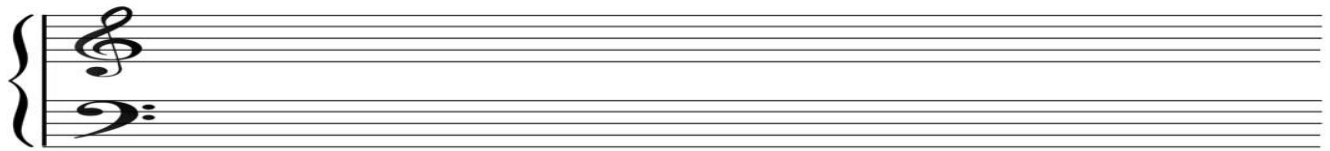
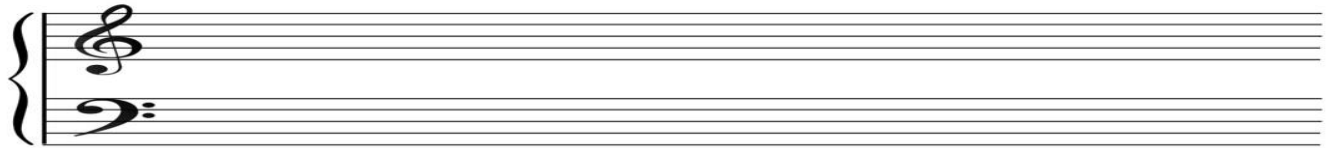
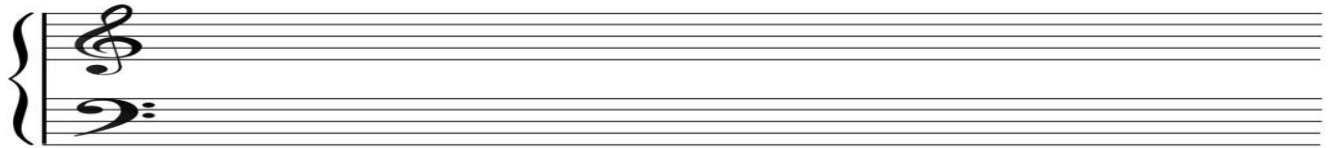
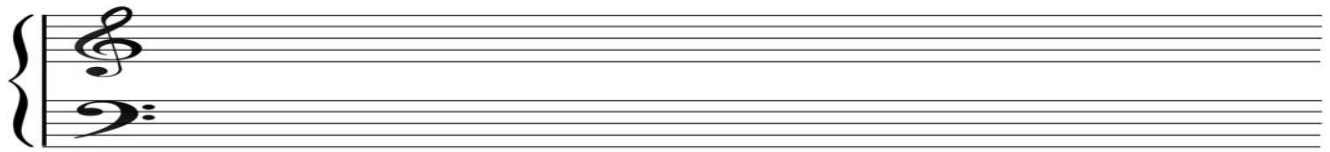
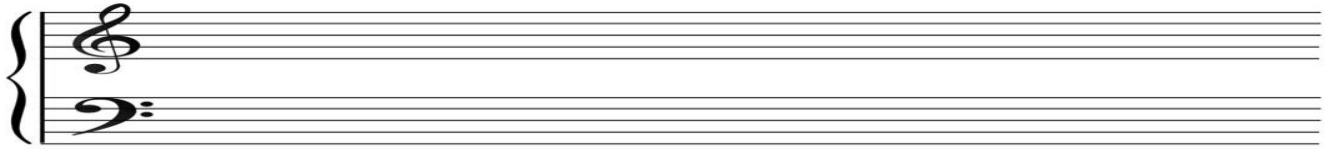
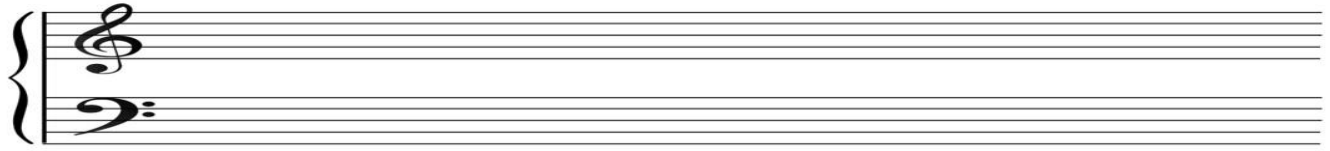
¿Cuál es la relación entre la música y la matemática?

---

---

---

---



(Material para los estudiantes)

*Si se desean más formatos, es posible fotocopiar*