UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS							
CARTA DE AUTORIZACIÓN							
CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 1

Neiva, 22 de enero de 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos: Juan Leonardo Carvajal Perez, con C.C. No. 1077864901, Mauricio Alejandro Mendez Lasso, con C.C. No. 1075538051, autores de la tesis y/o trabajo de grado titulado "Estrategia Para La Enseñanza De La Topología En Forma Visual", presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de Magister en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad;

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR: Juan Leonardo Carvajal Perez

Firma: Juan leonardo Carvajal Perez P.

EL AUTOR: Mauricio Alejandro Mendez Lasso

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TOPOLOGIA EN FORMA VISUAL

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Mendez Lasso	Mauricio Alejandro
Carvajal Perez	Juan Leonardo

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cardenas	Mauro

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Vera Cuenca	Jasmidt

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Magister en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad

FACULTAD: Ciencias Exactas y Naturales

PROGRAMA O POSGRADO: Maestría en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2019 **NÚMERO DE PÁGINAS: 78**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general_X__ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas_X__ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. complejidad	**complexity**	**6. variedades diferenciables**	**differentiable varieties**
2. didáctica de la matemática	**mathematics didactics**		
3. geometría	**geometry**		
4. grafos	**graphs**		
5. topología visual	**visual topology**		

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El presente escrito es una propuesta de enseñanza didáctica para el desarrollo de la noción de espacio en su geometría topológica, en estudiantes del programa de Matemática Aplicada de la Universidad Surcolombiana; señalando algunas actividades manuales y graficas que podrían realizarse en clase, con el objetivo de fortalecer la noción de espacio. Esperando que estas dinámicas faciliten a largo plazo la conceptualización de agrupar, colorear, identificar, ordenar, pegar, deformar, continuidad, exterior e interior entre otras.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

STRATEGY FOR THE TOPOLOGY TEACHING IN A VISUAL FORM

The present research project is a didactic teaching proposal for the development of the space notion in its topological geometry, in students of the Applied Mathematics program at Surcolombiana University; pointing out some manual and graphic activities that could be done in class, with the aim of strengthening the space notion . Expecting that these dynamics facilitate in a long term the conceptualization of grouping, coloring, identifying, ordering, pasting, deforming, continuity, exterior and interior among others.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: MAURO MONTEALEGRE CÁRDENAS

Firma: Mauro Montealegre C.

Nombre Jurado: JASMIDT VERA CUENCA

Firma: Jasmidt Vera C

ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TOPOLOGIA EN FORMA VISUAL

Presentado por:

JUAN LEONARDO CARVAJAL PEREZ

Cod. 20171160451

MAURICIO ALEJANDRO MENDEZ LASSO

Cod. 20171160424

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

MAESTRIA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

Neiva – 2018

ESTRATEGIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TOPOLOGIA EN FORMA VISUAL

Presentado por:

JUAN LEONARDO CARVAJAL PEREZ

Cod. 20171160451

MAURICIO ALEJANDRO MENDEZ LASSO

Cod. 20171160424

Trabajo de grado para obtener el título de Magister en:

Estudios Interdisciplinarios de la complejidad

Asesor

PhD. MAURO MONTEALEGRE CARDENAS

Mg. JASMIDT VERA CUENCA

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

MAESTRIA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

Neiva – 2018

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS 5

RESUMEN 7

ABSTRACT 7

INTRODUCCIÓN 8

2) ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN 9

2.1) Antecedentes 9

2.2) Justificación 11

3) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN 12

3.1) Descripción del problema 12

3.2) Sistematización del problema 13

3.3) Enunciación del problema 13

4) OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 14

4.1) Objetivo general 14

4.2) Objetivos específicos 14

5) METODOLOGIA 15

5.1) Tipo y enfoque de la investigación 15

5.2) Universo de estudio, población y muestra 15

5.3) Técnicas e instrumento de investigación 15

6) FUNDAMENTOS TEÓRICOS 17

6.1) COMPLEJIDAD 17

6.2.1) Complejidad y Educación 17

6.2.2) Aprendizaje Heurístico 18

6.2.3) Pensamiento Abductivo 22

6.2.4) Pensamiento Espacial 22

6.2) TOPOLOGIA 24

6.2.1) Historia de la Topología 24

6.2.2) Conceptos Básicos de Topología 26

6.2.3) Vecindades 27

6.2.4) Variedades Diferenciables 29

6.2.5) Superficies Orientables 31

6.2.6) Superficies No Orientables 32

6.2.7) El problema de los puentes de Königsberg 37

6.2.8) Historia de los poliedros 39

6.2.9) Teorema de Euler para Poliedros Convexos y No Convexos 47

6.2.10) Problema de los cuatro colores 49

7) PRÁCTICAS EXPERIMENTALES 54

7.1) Experimento topologicos en papel. 74

7.2) Experimentos con planos proyectivos 76

8) CONCLUSIONES 79

9) BIBLIOGRAFÍA 80

TABLA DE FIGURAS

Figura 1 Transformación topológica: Círculo-Elipse. 24
Figura 2 Bola Abierta-Bola Cerrada 27
Figura 3 Conjunto Abierto - Conjunto Cerrado. 28
Figura 4 Carta Local. 29
Figura 5 Esfera 30
Figura 6 Superficie Orientable. 32
Figura 7 Construcción de una Cinta de Mobius. 33
Figura 8 Mobius Strip II 33
Figura 9 Reusar, Reducir y Reciclar 34
Figura 10 Construcción Botella de Klein 35
Figura 11 Botella de Klein - Cinta de Mobius 35
Figura 12 Botellas de Cliff Stoll 36
Figura 13 Fragmento "El jardín de las delicias": El Bosco 36
Figura 14 Ciudad de Königsberg 37
Figura 15 Grafo asociado a los puentes de Ciudad de Königsberg 37
Figura 16 Solución del Problema de los 7 puentes 38
Figura 17 Espiral Áureo 39
Figura 18 El Diluvio Florentino Paolo Ucello 40
Figura 19 Obra de Fra Giovanni da Verona 40
Figura 20 Poliedros de Leonardo Da Vinci 41
Figura 21 Modelo cosmológico de Kepler 42
Figura 22 Virus del Herpes 43

Figura 23 Virus de la fiebre aftosa 44

Figura 24 Trímero 44

Figura 25 Estructura básica de un virus 45

Figura 26 Fullereno C60 y Perovskita ABX3 45

Figura 27 Enlace topológico de un fullereno 46

Figura 28 Enlace Fullereno heptagonal y tórico 46

Figura 29 Tetraedro inscrito en una esfera 47

Figura 30 Triangulo inscrito en un circulo 48

Figura 31 Toro deformado a una cinta de papel 50

Figura 32 Mapa en cinta de papel 50

Figura 33 Mapa en cinta de Papel 51

Figura 34 Mapas 52

Figura 35 Regiones internas 52

Figura 36 Mapas topológicamente equivalentes 53

RESUMEN

El presente escrito es una propuesta de enseñanza didáctica para el desarrollo de la noción de espacio en su geometría topológica, en estudiantes del programa de Matemática Aplicada de la Universidad Surcolombiana; señalando algunas actividades manuales y graficas que podrían realizarse en clase, con el objetivo de fortalecer la noción de espacio. Esperando que estas dinámicas faciliten a largo plazo la conceptualización de agrupar, colorear, identificar, ordenar, pegar, deformar, continuidad, exterior e interior entre otras.

ABSTRACT

STRATEGY FOR THE TOPOLOGY TEACHING IN A VISUAL FORM

The present research project is a didactic teaching proposal for the development of the space notion in its topological geometry, in students of the Applied Mathematics program at Surcolombiana University; pointing out some manual and graphic activities that could be done in class, with the aim of strengthening the space notion . Expecting that these dynamics facilitate in a long term the conceptualization of grouping, coloring, identifying, ordering, pasting, deforming, continuity, exterior and interior among others.

INTRODUCCIÓN

La topología como rama de la matemática que estudia las propiedades invariantes de los cuerpos geométricos que son sometidos a cierto tipo de transformaciones: doblar, estirar, encoger, retorcer, sin romper ni separar ni pegar. Con esta idea de topología, y al analizar el micro diseño del curso de topología ofrecido en el programa de Matemática Aplicada de la Universidad Surcolombiana, quien a criterio propio está bien orientado al dominio de los conceptos básicos de topología.

El interés académico radica en la necesidad de formar matemáticos con una visión más clara de lo que es la topología, que no sólo tengan en cuenta el concepto, el teorema y su respectiva prueba, sino que también tengan presente donde esos conceptos y teoremas, como los de continuidad, orientabilidad, diferenciabilidad, entre otros, se pueden ver en una sola hoja de papel, haciendo dobleces o plegado del papel.

Para el desarrollo del trabajo, se aplicaron tres guías a los estudiantes, dos de ellas con referencia a tres grandes problemas que fueron involucrados con la topología: el problema de los puentes de Königsberg, Teorema de Euler para Poliedros y el Problema de los cuatro colores. Cada uno de estos problemas analizados desde sus inicios y las soluciones que han propuesto los grandes matemáticos a lo largo de la historia. Y la tercera guía, fue una práctica con papel y tijeras, donde los estudiantes crearon figuras y evidenciaron sus propiedades, cuando realizaron la cinta de Möbius, se interesaron por las propiedades relevantes de la cinta: la no orientabilidad y que posee un solo borde. Además entendieron que la topología se puede trabajar de manera didáctica y práctica.

2) ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

2.1) Antecedentes

Para la elaboración de nuestro proyecto hemos tenido en cuenta trabajos como "*La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento"* (Alderete, 1983) que cita la teoría de Piaget e Inhelder sobre el conocimiento del espacio topológico, donde Piaget e Inhelder para su trabajo realizan unas series de experimentos con niños de desde los 2 años hasta los 7 años de edad; con el objetivo de analizar las relaciones topológicas, proyectivas y euclidianas en estos. En la primera fase orientaron a los infantes a explorar objetos y figuras a través del tacto (háptica), para lo cual Piaget concluye que mediante estas actividades los infantes desarrollan discriminaciones topológicas. Para la segunda fase se realizaron actividades como el dibujo libre y la intención de copia de algunas figuras geométricas, donde al igual que el primer experimento Piaget observa que el niño desarrolla conceptos como dentro, fuera, continuo o discontinuo. La siguiente experiencia para Piaget con los niños, es la de orden, donde el infante a través de la idea de *junto*, decide la posición espacial de los objetos o figuras anteriormente exploradas, entre los 4 y 7 años ellos son capaces de reconocer el orden médiate direcciones especificas arriba, abajo, derecha e izquierda y finalmente a la edad de siete años en adelante el niño es capaz de invertir el orden y proponer condiciones para dicho orden. El cuarto experimento de Piaget fue mediante la atadura de nudos, aunque en los niños de dos a cinco años niño esto fue insignificante, para los infantes de siete años en adelante establecen semejanzas, diferencias e incluso revierten los nudos, para lo cual concluye Piaget que el niño tiene la noción de cerradura o cercamiento. Por último Piaget estudia el concepto de continuidad en los niños mediante la descomposición de figuras geométricas.

"*La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje*" (Avenía y Restrepo, 2012), argumentan que: Es necesario implementar la geometría visual en las aulas de la primaria, con el objetivo de enriquecer el conocimiento de la matemática y de esta, además del lenguaje de las figuras. Según los planes de estudio, donde se realizan actividades de geometría visual es en el prescolar, pero no para la enseñanza de esta, si no como herramienta para la mejora de la motricidad fina en los estudiantes. Para el desarrollo del trabajo los autores plantean en cuatro momentos de aprendizaje heurístico de las figuras; las mereológicas en donde se enfocan las relaciones entre las partes y el todo; las ópticas, relacionan la percepción de las figuras transformadas; las posicionales, donde se estudia la orientación de la figura transformada y por último, las intrínsecas cuando se transforma la figura mediante la obtención de trazos, ya que el autor argumenta que el razonamiento de la geometría ocurre con la construcción visual de esta.

"*Propuesta didáctica para el trabajo de algunas nociones de topología en el grado décimo*" (Delgado, 2012), Realiza una propuesta fundamentada en los tres grandes problemas de la topología (Los siete puentes de Königsberg, el teorema de los cuatro colores y la cinta de Möbius), además fundamentado en algunos conceptos básico de la topología, la profesora Deisy realiza actividades geométricas visual en su propuesta, con el objetivo de facilitar el entendimiento de la topología en los estudiantes.

"*La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos*" (Gatica y Ares, 2012), realizan una propuesta didáctica para el aprendizaje visual del análisis matemático, algebra lineal y métodos numéricos en el programa de ingeniería electrónica de la universidad Nacional de San Luis, ya que los estudiantes presentan dificultades en la aplicación de los conceptos matemáticos, por lo cual, con el uso de las nuevas tecnologías, la interfaz de MATLAB y la aplicación de la regla de Simpson estudiaran el concepto de exactitud.

"*La topología y la geometría en la enseñanza educativa básica*" (Fermoso, González, 2017), presentan una propuesta didáctica de enseñanza del espacio topológico, proyectivo y euclidiano, a través de actividades de exploración que ayudaran a fortalecer las nociones de ordenar, agrupar, estirar, pegar y colorear a los niños de prescolar de cuatro y cinco años con materiales como ligas de plástico de colores, estambre, plastilina, papel de china, hojas de papel, palos de colores y crayolas.

2.2) Justificación

El presente trabajo de investigación se enfocará en encontrar una forma de enseñar la topología "rama de la matemática que se encarga del estudio de las propiedades de los cuerpos que permanecen invariantes al sufrir alguna deformación" en forma visual a los estudiantes del programa de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Surcolombiana, con la ayuda de los conceptos básicos de la interdisciplinaridad y la complejidad.

El programa de Matemática Aplicada, desde su formación ha enfrentado grandes problemas de deserción por parte de los estudiantes inscritos al programa, ya que a medida que van avanzando académicamente los cursos básicos del programa de matemáticas se vuelven más rígidos y abstractos en los contenidos, la consecuencia de la no adaptación y entendimiento de los contenidos en los cursos básicos es la falta de visualización de los estos, como también su aplicabilidad a los problemas de la vida cotidiana, el entorno y la naturaleza.

La capacidad máxima de los cursos que dicta la Universidad Surcolombiana en cualquiera de los programas de las diferentes facultades es de 45 estudiantes, a diferencia del curso de topología, el cual es dictado tan solo con un número de estudiantes oscilante entre los 10 y 15 integrantes por semestre, de los cuales menos del 40% de los asistentes son los que aprueban el curso con notas entre 3,0 y 3,5 y entienden los conceptos básicos, aplicaciones y problemáticas de la topología. Por lo tanto, nuestro trabajo de investigación está diseñado como herramienta para el fortalecimiento de los conceptos básicos, interpretación y aplicaciones de la topología a través de actividades manuales y visuales.

Para la elaboración de nuestro trabajo, inicialmente nos preguntamos ¿por qué la deserción masiva en el programa de matemáticas aplicadas en los cursos de sexto semestre en adelante? ¿Por qué en la universidad Surcolombiana se forman menor cantidad de matemáticos, en comparación con los demás programas?, las soluciones a estas preguntas nos llevan a concluir que las matemáticas para muchos no tiene sentido, puesto que no se pueden hacer una imagen de los conceptos básicos e incluso no se dan idea de amplio campo de aplicaciones que hay para ellas. Nosotros para la elaboración de nuestro trabajo seleccionamos estudiantes de séptimo semestre del programa de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Surcolombiana, a los cuales se les realizó una encuesta que nos permitió identificar las falencias en el aprendizaje visual de los estudiantes; en segunda instancias se a los estudiantes se les realizó una prueba diagnóstica, para medir los conocimientos de los conceptos topológicos obtenidos en los cursos que hasta el momento han hecho parte de la formación académica de ellos, la siguiente fase consiste en realizar actividades como doblar papel, colorear mapas, interpretar y solucionar grafos y construir con papel algunas superficies no orientables; y finalmente se aplicó un test que nos permitirá predecir si los estudiantes a cursar el seminario de topología tendrán éxito en la aprobación de este o no.

3) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

3.1) Descripción del problema

Los micro diseños de los cursos básicos del programa de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Surcolombiana, son bastante formales y rigurosos, rigurosos en el sentido de la abstracción y complejidad de los contenidos, en especial los cursos correspondientes al análisis matemático, como lo es el seminario de topología "área de la matemática que estudia la continuidad y otros conceptos originados a partir de ella. Se trata de una especialización vinculada a las propiedades y características que poseen los cuerpos geométricos y que se mantienen sin alteraciones gracias a cambios continuos, con independencia de su tamaño o apariencia" el cual exige buen manejo de conceptos fuertes de la matemática y la geometría, como: homeomorfismos, espacios topológicos, continuidad y diferenciabilidad, convergencia, conjuntos compactos entre otros, pero no se hace una visualización previa de los conceptos para tener un mejor entendimiento o asimilación por parte del estudiante, quedando el concepto en solo el papel y no en la parte geométrica o visual.

3.2) Sistematización del problema

Inicialmente, para la elaboración de nuestro proyecto debemos ver ¿Cómo haremos para identificar los factores que no permiten observar a los estudiantes del curso de topología algunos de los resultados en forma geométrica y visual?, una vez identificadas las falencias de los estudiantes nos formulamos la siguiente pregunta ¿Qué estrategias y/o tareas realizaremos con los estudiantes del programas de matemáticas aplicada para fortalecer las posibles dificultades encontradas en los estudiantes de los conceptos de la topología?, además de identificar las falencias y fortalecerlas debemos preguntarnos ¿Cómo medir la mejora en los conocimientos acerca de la topología de los estudiantes del programa de matemáticas aplicadas?.

3.3) Enunciación del problema

Teniendo en cuenta la versatilidad en las modalidades de aprendizaje de los jóvenes de hoy en día, la rigurosidad del micro-diseño del programa de Matemática Aplicada se crea la necesidad de realizar una estrategia que permita facilitar el entendimiento de los conceptos de la topología.

Para la formulación del presente trabajo, nos hemos formulado la siguiente pregunta ¿Cómo crear una estrategia para la enseñanza de la topología de manera visual?

4) OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

4.1) Objetivo general

Proponer una guía didáctica para abordar algunos de los resultados importantes en el curso de Topología del programa de Matemática Aplicada de la Universidad Surcolombiana.

4.2) Objetivos específicos

4.2.1) Identificar mediante una evaluación diagnóstica los factores que no permiten interpretar la parte geométrica de algunos de los resultados en el curso de Topología del programa de Matemática Aplicada de la Universidad Surcolombiana.

4.2.2) Construir actividades que fortalezcan las dificultades presentadas por los estudiantes en algunos resultados en el curso de Topología del programa de Matemática Aplicada de la Universidad Surcolombiana.

4.2.3) Validar las actividades mediante un taller interdisciplinar el mejoramiento de las competencias geométricas y topológicas en los estudiantes.

5) METODOLOGIA

En el presente trabajo se mencionará el enfoque, el método que se utiliza para el desarrollo de la investigación, como también la población a cuál se dirige la investigación.

5.1) Tipo y enfoque de la investigación

Para el desarrollo de este trabajo se maneja el enfoque cualitativo de la geometría a través de la topología.

El planteamiento del problema de estudio se fundamenta en el trabajo de Piaget y Dialnet sobre la didáctica en la enseñanza de la topología, donde argumenta el proceso reflexivo del niño y la interacción del medio y los objetos presentes en él, mediante las actividades que este puede realizar con dichos espacios y/u objetos a su alcance; procesos a los cuales Piaget y Dialnet llama experiencias fundamentales topológicas (doblar, estirar, rasgar, colorear, desplazar, ordenar, posicionar, entre otras), ya que ellos dirigen su trabajo topológico a la práctica y la experiencia, mas no a las definiciones y lo conceptual.

5.2) Universo de estudio, población y muestra

En una investigación uno de los factores fundamentales es la elección de la población y muestra, ya que seleccionar una población y muestra demanda ciertos criterios o parámetros de credibilidad y veracidad en el desarrollo del trabajo, por ello el presente proyecto de investigación está dirigido a los estudiantes de pregrado del programa de Matemática Aplicada, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

5.3) Técnicas e instrumento de investigación

Para el trabajo de investigación *elaboración de una estrategia de enseñanza de la topología*, se tendrán en cuenta los siguientes parámetros o instrumentos que nos permitirán recolectar, medir y analiza la información de los objetos de estudio (estudiantes de pregrado del programa de matemáticas aplicadas):

La entrevista: la entrevista educativa es una conversación entre el maestro o el orientador con el alumno, con el fin de conocerlos, orientarlos y brindarles ayuda en la solución de algún problema educativo (Rodríguez Rivera, 1980).

La entrevista, está dirigida a los estudiantes que asisten al curso de análisis en varias variables, ya que los estudiantes que aprueben este curso serán los que podrán asistir el siguiente semestre al de topología.

La entrevista está elaborada con preguntas cerradas que se relacionan con los tópicos necesarios en el aprendizaje de la topología en cursos anteriores.

Evaluación diagnóstica: Es un instrumento que permite identificar el antes, durante y después del desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes (Ministerio de Educación nacional, 2009).

En nuestro trabajo se realizarán dos pruebas diagnósticas, una antes de empezar el curso de topología, y otra al final de la aplicación de la propuesta didáctica.

Talleres: Se realizarán actividades manuales en donde los estudiantes tendrán que estirar, deformar, doblar, cortar, colorear entre otras, con el objetivo de adquirir algunas nociones del espacio topológico.

Observación: aprender a observar en la vida diaria, en el estudio es un hábito que nos ayuda a hacer mejor nuestras investigaciones y en general a mejorar en nuestra vida intelectual (Pardinas, 1989).

El tipo de observación en nuestro trabajo será de tipo directo, investigativo y de carácter cualitativo, puesto que tendremos contacto con los estudiantes del curso de topología del programa de matemáticas aplicadas, como también el desarrollo del aprendizaje de esta.

6) FUNDAMENTOS TEÓRICOS

6.1) COMPLEJIDAD

6.2.1) Complejidad y Educación

El objetivo de la educación en la antigua India era la liberación de la ignorancia, al hombre se le educaba en obediencia y temor hacia los dioses, la mujer debía aprender a adorar al marido; en la antigua China era la de formar personas en lo moral, intelectual y prepararlos para la guerra; en el antiguo Egipto, las labores de los padres trascendían a sus hijos, los cuales debían aprender el oficio del padre y a las hijas las labores del hogar; en el mundo hebreo, la educación estaba fuertemente influenciada por la educación religiosa, principios de conducta, herencia histórica y la adoración de Dios; en la antigua Grecia, formaban ciudadanos que ayudaran al fortalecimiento del Estado. En nuestros días, el objetivo de la educación es la de formar integralmente a las personas, basado en tres pilares: ser, saber y saber hacer: el ser se refiere a la persona, el saber al conocimiento y el saber hacer a como ese conocimiento lo puede aplicar a problemas de la vida cotidiana.

En nuestro país, la educación luego de la independencia, era manejada por el Estado y no fue más controlada por la Iglesia Católica, pero siguió siendo una fuerte influencia en ella. En 1870 la educación primaria se hace gratuita y obligatoria; en 1886 se divide la educación en primaria, secundaria y profesional; en 1980 se divide la educación superior en cuatro niveles: estudios profesionales intermedios, estudios tecnológicos, estudios universitarios y estudios de postgrado, lo que hoy conocemos como Nivel Técnico Profesional, Nivel Tecnológico, Nivel Profesional y Nivel de posgrado (especializaciones, maestrías y doctorados) respectivamente; llegando al sistema actual educativo gracias a una serie de proyectos que buscaban adaptar el sistema a las necesidades de las comunidades educativas.

La educación ha sido influenciada por las ciencias aplicadas, el saber hacer, que se dedica solamente a repetir, no crea ni critica, es por esto que la comunidad científica ya no investiga en términos de la linealidad, en los equilibrios, sino en términos de la no linealidad, alejados de los equilibrios ya que todo lo que ocurre en los procesos educativos ocurren en estos escenarios, no sabemos a ciencia cierta que va a pasar con estos procesos ya que al ser de complejidad creciente necesitan ser "explicados" de una manera diferente a como lo explicaba la ciencia normal. Para explicar estos fenómenos complejos, se toman como referencia las ciencias de la complejidad: Termodinámica del no Equilibrio, Teoría del Caos, Geometría Fractal, Teoría de Catástrofes, Redes Complejas, Vida Artificial y Lógicas No Clásicas. Que son ciencias surgidas a partir de la necesidad de un verdadero cambio en la manera en que era concebido el desarrollo de las ciencias clásicas.

6.2.2) Aprendizaje Heurístico

El aprendizaje heurístico es la capacidad que tiene el hombre de explorar a través del arte y la ciencia, con la ayuda del ensayo y el error, creatividad, pensamiento lateral o divergente para la resolución de problemas que se pueden presentar en un medio determinado. Así como Euclides sistematizó y organizó los principios que dieron forma a la geometría Euclidiana, Arquímedes con la postulación de expresiones algebraicas para el cálculo del volumen de una esfera, un cilindro y un cono de radio dado e incluso Albert Einstein con su teoría de la relatividad, son algunos de los pensadores más importantes de la historia que hicieron uso del aprendizaje heurístico (aprendizaje basado en la exploración y la experiencia) para el planteamiento, formulación y elaboración de sus grandes aportes del conocimiento y la ciencia.

Método heurístico de Pólya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos

Para la elaboración de nuestro trabajo, hacemos énfasis en el método heurístico de George Pólya para la resolución de problemas matemáticos.

George Pólya (Hungría, 1887). Realizó sus estudios de doctorado en la Universidad de Budapest. En su tiempo de estudios, su mayor interés fue el de descubrir el cómo se derivan los resultados matemáticos. Para G. Pólya entender una teoría, estaba ligado con el conocimiento y el descubrimiento de ella, más nos solucionar ejercicios relacionados a ello, por lo tanto, él dice que los estudiantes deben involucrarse más en la solución de problemas. A continuación, se presentará el método de G. Pólya para la resolución de problemas que se basa en cuatro pasos:

I. Comprender el Problema.

En la primera etapa es necesario realizarse las siguientes cuestiones respecto al problema:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?
- ¿Es insuficiente?
- ¿Es redundante?
- ¿Es contradictoria?

Ya definidas las variables, los datos pertinentes y las condiciones; se entiende, comprende la problemática y una vez identificada podemos pasar a la segunda etapa del método.

II. Concebir un Plan.

Pólya en esta etapa define un plan como la solución de las interrogantes ligadas a la problemática y verifica si estos son solucionables mediante problemas similares, para ello se plantean algunos interrogantes como:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
- ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado?
- ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

Ya definido y organizado el plan estratégico de solución del problema se ejecuta la siguiente etapa.

III. Ejecución del Plan.

La importancia de esta etapa es el seguimiento del paso a paso del plan para resolver la problemática, en este se revisa si hay problemas por resolver o si es necesaria la demostración de las soluciones de algunos de los problemas propuestos en el plan. Para ello se deben realizar los siguientes cuestionamientos:

- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
- ¿Puede demostrarlo?

G. Pólya plantea que se debe hacer un uso intensivo de esta serie de preguntas en cada momento. Estas preguntas van dirigidas sobre todo a lo que él llama problema por resolver y no tanto los problemas por demostrar. Cuando se tienen problemas por demostrar, entonces, cambia un poco el sentido. Esto es así porque ya no se habla de datos sino, más bien, de hipótesis. En realidad, el trabajo de Pólya es fundamentalmente orientado hacia los problemas por resolver. En síntesis: al ejecutar el plan de solución debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

IV. Examinar la Solución.

Para G. Pólya en la solución se debe verificar el proceso y el paso a paso en la solución del problema. Para ello se verifica:

- ¿Puede verificar el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?
- ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Estas cuestiones dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros: Pólya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), también se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema. En otras palabras, cuando se hace la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método de solución; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentar otro problema cualquiera. De hecho, es muy válido verificar si se puede obtener el resultado de otra manera; si bien es cierto que no hay una única forma o estrategia de resolver un problema puede haber otras alternativas. Precisamente, esta visión retrospectiva tiene por objetivo que veamos esta amplia gama de posibles caminos para resolver algún tipo de problema.

6.2.3) Pensamiento Abductivo

Según Peirce la abducción, la deducción y la inducción son los tres modos de inferencia; sin embargo, el razonamiento abductivo es el único que puede generar ideas nuevas: La abducción es el proceso de formar supuestos explicativos a partir de algunos datos que sirve de base para iniciar una investigación o una argumentación, es la única operación lógica que permite ingresar ideas nuevas; a diferencia de la inducción, la cual se dedica a determinar valores y la deducción a desarrollar las consecuencias necesarias de una hipótesis. La deducción prueba que algo debe ser, la inducción muestra que algo es realmente operativo, en cambio la abducción sugiere que algo puede ser.

Para Peirce, la justificación es que, a partir de su sugerencia, la deducción puede extraer una predicción que puede comprobarse por inducción; y que, si es que podemos llegar a aprender algo o a entender completamente los fenómenos, debe ser por abducción (EP 2:216, 1903).

Un modelo de diferenciación entre la abducción, inducción y deducción es que la abducción forma parte del proceso de descubrimiento, la inducción es el proceso de probar o dar validez a estos descubrimientos y la deducción es el proceso mediante el cual se realiza un juicio final de acuerdo a la validez de los descubrimientos.

6.2.4) Pensamiento Espacial

Cuando Howard Gardner propuso su obra "Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences" (Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples) en 1983, revolucionó el sistema educativo, ya que al facilitar la educación de cada persona de acuerdo a su "inteligencia" facilita el aprendizaje y con ello la mejora de las habilidades personales de cada individuo, debido a que, como afirma Gardner, las personas somos diferentes y cada una posee habilidades y capacidades diferentes a los demás.

La inteligencia espacial, que la define como la capacidad que tiene cada persona para procesar (comprender, manipular y modificar) información en dos y tres dimensiones, tomando como referencia aspectos como color, línea, forma, figura, espacio, y la relación que existe entre ellos (Gardner, 2016).

Muy ligado a la inteligencia espacial, está el pensamiento espacial. El pensamiento espacial es un conjunto de habilidades cognitivas centradas en tres aspectos importantes: El espacio, la representación y el razonamiento.

El espacio: este aspecto está relacionado en la forma como se calcula (tiempos, costos, distancias, etc.), la manera de ubicarse en un sistema de coordenadas y la dimensionalidad de los espacios.

La representación: involucra la manera en que es visto un espacio o lo que está dentro de él, los efectos de las proyecciones teniendo en cuenta algunos de los elementos de diseño de la escuela de la Gestalt: Elementos visuales: forma, tamaño, color, textura; Elementos de relación: dirección, posición, espacio, gravedad. (López Ortiz, 2016). Estas representaciones espaciales pueden ser: internas, externas, lingüísticas o físicas donde cada una de ellas implican formas específicas de almacenamiento de información, análisis y comunicación, donde los procesos de razonamiento permiten manipular, interpretar y expresar información estructurada.

El razonamiento: relacionado con el cómo se extrapola, interpola, se determinan tendencias para tomar decisiones. Este pensamiento tiene tres funciones específicas:

- Ser descriptivo, donde captura, preserva, traspasa las relaciones entre objetos.
- Ser analítico, que permite entender la estructura de los objetos.
- Ser inferencial, que responde preguntas asociadas a la evolución y función de los objetos.

6.2) TOPOLOGIA

6.2.1) Historia de la Topología

La topología es la rama de la geometría que se encarga de estudiar las propiedades de las figuras, objetos o cuerpos que permanecen invariantes al ser estos deformados; en palabras comunes la topología, se ocupa de aquellas características de las figuras, objetos o cuerpos que no desaparecen, cuando estas son plegados, dilatados, contraídos o deformados, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes.

Entre las figuras, objetos o cuerpos originales y las transformaciones permitidas se supone, que debe haber una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los puntos de las figuras, objetos o cuerpos originales y los de la transformación obtenida, y que la deformación debe hacer corresponder puntos próximos a puntos próximos (propiedad de la continuidad).

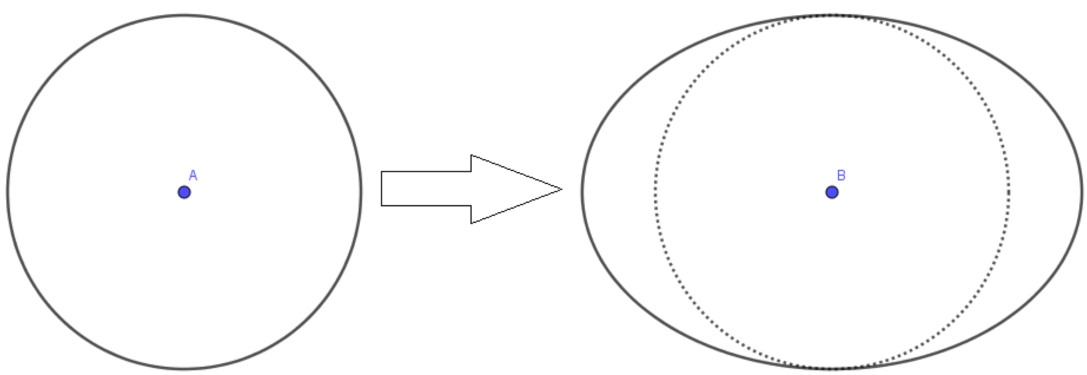


Figura 1 Transformación topológica: Círculo-Elipse.

Fuente: Elaboración propia

La topología en su estudio tiene los mismos objetos que la geometría euclidiana, pero en forma distinta, ella no se limita en las distancias o los ángulos o alineación de los puntos. En la topología un círculo es topológicamente equivalente a una elipse, porque se puede obtener una a partir de la otra mediante una transformación.

Cuando inicia el siglo XVIII, los matemáticos de la época empiezan a formularse problemas donde la distancia entre los objetos no importaba, sino la idea de forma y posición de los objetos. Los primeros matemáticos en darle cierta importancia a este tipo de problemas la denominaron de Geometría situs o Analysis situs (Geometría o Análisis de la situación o de la posición).

Las primeras ideas topológicas nacen en el siglo XVII, con el análisis matemático, mediante la necesidad de formalizar el concepto de proximidad y continuidad en la geometría.

G. Leibniz (1646–1716) fue el primero en designar el nombre Geometría situs a los problemas relacionados con la proximidad y continuidad, esto es evidenciable en la carta a L. Euler (1707–1783), la cual fue publicada en 1736 y decía:

"Además de esta parte de la geometría que trata de las magnitudes y que desde siempre ha sido cultivada con mucho celo, existe otra completamente desconocida hasta nuestros días, "Geometria Situs". Esta parte de la geometría se ocupa de determinar solamente la posición y busca las propiedades que resulten de esta posición; en este trabajo no es necesario considerar las magnitudes por sí mismas, ni calcular; pero aún no está muy bien establecido cuáles son los problemas de este tipo que pertenecen a la "Geometria Situs" y cuál es el método que hay que utilizar para resolverlos; es por lo que, cuando recientemente se me presentó un problema que parecía ligado a la geometría ordinaria, pero cuya solución no dependía de la determinación de las magnitudes ni del cálculo de las cantidades, no he dudado en relacionarlo con la "Geometria Situs", tanto por las consideraciones de posición que únicamente entran en la solución, como porque el cálculo no interviene para nada".

El problema de los siete puentes de Königsberg fue solucionado por L. Euler en 1736, bajo el título "Solutio problematis and geometriam situs pertinentis" (Solución de un problema relacionado con la geometría de posición), el cual da origen a la topología.

6.2.2) Conceptos Básicos de Topología

Se hace una descripción formal de los conceptos topológicos básicos que nos sirven de base para el estudio realizado en este proyecto. Empezando con "Espacio", siendo una de las ideas de las cuales no se tiene una definición precisa, se empieza a tener en cuenta al espacio clásico que también se conoce como euclídeo: es el conjunto que representa todas las n-uplas de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde se verifican los axiomas de Euclides, que son:

1) Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
2) Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
3) Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
4) Todos los ángulos rectos son congruentes.
5) Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Teniendo en cuenta estas ideas, la recta real, el plano cartesiano y el espacio tridimensional son espacios euclídeos de dimensión 1, 2 y 3 respectivamente.

Se tiene también que un conjunto ($\mathbb{R}$, por ejemplo) junto con dos operaciones $(+,*)$, si verifican la propiedad clausurativa de las dos operaciones, además, las propiedades conmutativa, asociativa, existencia del elemento neutro y elemento inverso para la operación $+$, y la propiedad asociativa, distributiva del producto respecto la suma de vectores, distributiva del producto respecto la suma de escalares para la operación $*$ se tiene un espacio vectorial. Adicional a estos espacios, si el espacio posee una norma entonces es un espacio normado. Si esa norma induce una distancia, entonces es un espacio métrico.

Un espacio topológico es un espacio X en el que al conjunto ($\mathbb{R}$, por ejemplo) se le ha definido una topología $\mathcal{T}$ que cumple las propiedades:

1. Vacío ($\emptyset$) y el conjunto están en $\mathcal{T}$.
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.
3. La intersección de los elementos de cualquier su subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Se pueden tomar como ejemplos, la topología discreta y la indiscreta: para X un conjunto cualquiera, y $\mathcal{T}_X = P(X)$ una topología sobre X, formada por todos los subconjuntos de X, topología discreta. La topología indiscreta (o trivial), es la familia cuyos únicos conjuntos son el vacío ($\emptyset$) y el propio X.

Para definir un subespacio topológico es necesario definir lo que es una topología inducida o relativa: sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$, es una topología relativa de X a A a:

$$\mathcal{T}_A = \{G \cap A / G \in \mathcal{T}\}.$$

Donde $(X, \mathcal{T}_X)$ se denomina Subespacio topológico.

6.2.3) Vecindades

Una métrica (d) inducida por una norma definida sobre un conjunto vectorial se dice que es un espacio métrico, entendiendo a la métrica como la distancia que existe entre dos elementos del conjunto.

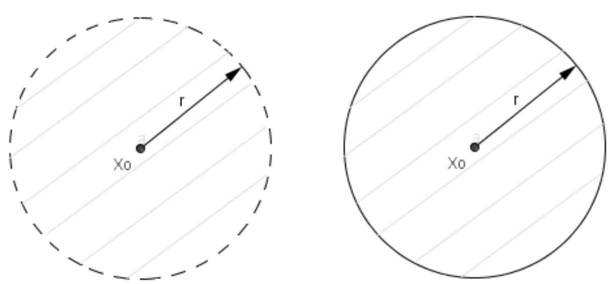


Figura 2 Bola Abierta-Bola Cerrada

Fuente: Elaboración propia.

Para las siguientes definiciones se tiene en cuenta que el espacio es métrico (sea $\mathcal{X}$ el conjunto y d la métrica). Empieza con el concepto de bola abierta y bola cerrada. La bola abierta centrada en un punto x_0 y radio $r > 0$ (r un real), es el conjunto $B(x_0, r) = \{x \in X \,/\, d(x, x_0) < r\}$. La bola cerrada centrada en un punto x_0 y radio $r > 0$ (r un real), es el conjunto $B(x_0, r) = \{x \in X / d(x, x_0) \leq r\}$.

Tomando la misma idea de las bolas en los espacios métricos, se define punto interior (a) del conjunto $\mathcal{S}$ como el punto tal que $B(a, r) \subset \mathcal{S}$ (la bola centrada en a y de radio $r > 0$, esté contenida en el conjunto $\mathcal{S}$). El conjunto de todos los puntos interiores de $\mathcal{S}$, se denomina el interior de $\mathcal{S}$. Si todos los puntos de un conjunto son puntos interiores entonces el conjunto es abierto.

b pertenece a $\mathcal{X}$ es punto adherente de $\mathcal{S}$ si $B(b, r) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ (la intersección de la bola centrada en b y de radio $r > 0$ y el conjunto $\mathcal{S}$ tenga al menos un elemento). El conjunto de todos los puntos adherentes de $\mathcal{S}$, se denomina la adherencia o clausura de $\mathcal{S}$. Si S contiene todos sus puntos adherentes entonces $\mathcal{S}$ es cerrado. Otra forma de verificar si un conjunto es cerrado es verificar si su complemento $(\mathcal{X} - \mathcal{S})$ es un conjunto abierto en $\mathcal{X}$.

c pertenece a $\mathcal{X}$ se llama punto límite de $\mathcal{S}$ si la intersección de la bola centrada en c sin el centro, de radio $r > 0$ y el conjunto $\mathcal{S}$ tiene por lo menos un punto de $\mathcal{S}$, diferente de su centro $((B(c, r) - \{c\}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset)$.

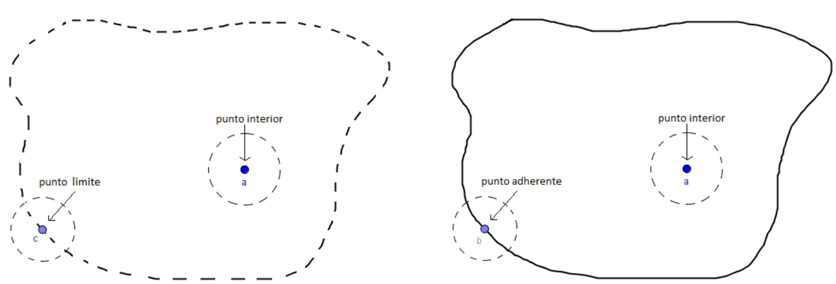


Figura 3 Conjunto Abierto - Conjunto Cerrado.

Fuente: Elaboración propia.

6.2.4) Variedades Diferenciables

Sea $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ conjuntos, $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ topologías definidas sobre $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ respectivamente. Sea $f(\mathcal{X},\mathcal{T}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y},\mathcal{H}_{\mathcal{Y}})$ una aplicación. Dado $a \in \mathcal{X}$ se dice que f es continua en a si dada una vecindad $V_{f(a)}$ en $\mathcal{Y}$ existe una vecindad U_a en $\mathcal{X}$ tal que $F(U_a) \subseteq V_{f(a)}$. Además, si f es continua en cada punto de $\mathcal{X}$, se dice que f es continua.

También hablando en términos de abiertos se puede decir que una aplicación es continua si $f\colon(\mathcal{X},\mathcal{T}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y},\mathcal{H}_{\mathcal{Y}})$ si y solo si para cada $V \in \mathcal{H}_{\mathcal{Y}}$ se tiene que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$, es decir, $f^{-1}(\mathcal{H}_{\mathcal{Y}}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{X}}$.

Continuando con los conceptos de la topología se dice que una aplicación $f\colon(\mathcal{X},\mathcal{T}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y},\mathcal{H}_{\mathcal{Y}})$ es un Homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa es también continua.

Además, para definir una Carta Local de dimensión m en M, (U,φ) es necesario que:

1. U sea abierto de M, el cual se denomina Dominio de la carta.
2. φ es un homeomorfismo de U en un abierto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^m$, cuyo denominación es Aplicación Coordenada de la carta.

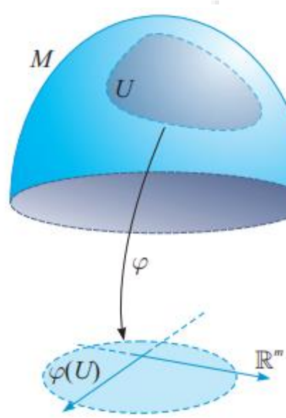


Figura 4 Carta Local.

Fuente: Santamaria, O. (2014)

Para tomar un ejemplo, sea $D \subset \mathbb{R}^3$ una curva alabeada que no se intersecta consigo misma, cuya topología es la inducida por la euclídea, y sea $\sigma\colon(a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow D$ una parametrización local inyectiva. Se conoce que σ es un difeomorfismo, particularmente, un homeomorfismo, del intervalo (a,b) en $\sigma(a,b)$, que es abierto en D. Llamando γ a la aplicación σ^{-1} de $\sigma(a,b)$ en (a,b), se tiene que $(\sigma(a,b),\gamma)$ es una carta local de dimensión 1 en D.

Ahora, cuando una familia de cartas locales, de dimensión m, sobre M tales que sus dominios recubren a M y que dos a dos están relacionadas, se denomina un Atlas en M de dimensión m. Cuando un atlas no está propiamente contenido en otro se dice Maximal.

Para tener un ejemplo de un atlas de dimensión 1 (2) sobre una curva (superficie) se tienen las parametrizaciones locales inyectivas (superficies simples) de la curva regular (de la superficie regular). Además, si una carta local (de dimensión m) está relacionado con todas las cartas de un atlas, es admisible en dicho atlas (de igual dimensión que la carta local).

Como un segundo ejemplo de atlas, para $\mathbb{S}^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} {z_i}^2 = 1\}$ la esfera unitaria n-dimensional. Se tienen las siguientes aplicaciones

$$\varphi_{kj}: U_{kj} \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_{kj}(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_{n+1})$$

Donde $U_{kj} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : (-1)^j z_k > 0\}$, $j = 0{,}1$ y $k = 1{,}2, \dots, n+1$

Con esto $\{(U_{kj}, \varphi_{kj})\}$ es un atlas para $\mathbb{S}^n$. (Figura 5)

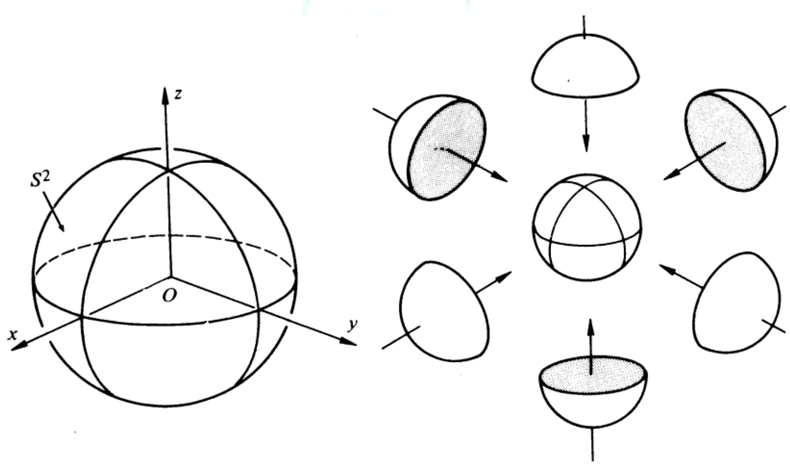


Figura 5 Esfera
Fuente: Saorın, P. L. (1999)

Si la unión de dos atlas de la misma dimensión sobre M es otro atlas entonces los atlas son compatibles (o equivalentes), donde esta relación de compatibilidad entre atlas de la misma dimensión es una relación de equivalencia.

Para un espacio topológico M y A un atlas de dimensión m sobre M, es una Variedad Diferenciable de dimensión m el par (M, A). Además, a la clase de equivalencia por la relación anterior del atlas A se le llama Estructura Diferenciable.

6.2.5) Superficies Orientables

Tomando la idea de Euclides, quien hacia el 300 a. C. en sus Estoiecheia (Elementos), definió una superficie como lo que solo tiene longitud y anchura, y que sus bordes son curvas. Las superficies son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que admiten parametrizaciones locales, 2-dimensionales alrededor de cada uno de los puntos de la superficie (entendiendo las parametrizaciones como una función vectorial la cual, al variar el parámetro describe los puntos de la superficie).

Teniendo en cuenta esta idea de superficie, se puede hablar de una clasificación: superficie orientable y no orientable.

Las superficies orientables son las que al orientar el plano tangente $T_p(\mathcal{S})$, este plano está en cada punto p de la superficie $\mathcal{S}$, induce una orientación en torno de p (movimiento positivo a través de las curvas cerradas que encierran cada punto p del entorno de p). Si al realizar la intersección de dos entornos la orientación coincide entonces se dice que $\mathcal{S}$ es orientable. Todas las superficies son orientables localmente (en algún punto p) pero no todas las superficies son orientables en todos los puntos.

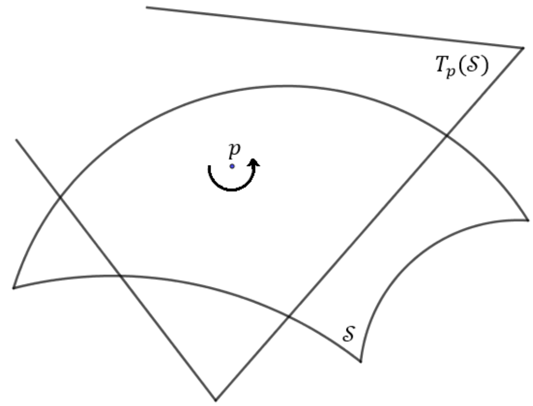


Figura 6 Superficie Orientable.

Fuente: Elaboración propia. Adaptado de P. do Carmo, M. (1976)

6.2.6) Superficies No Orientables

Se empieza el estudio con la banda de Mobius que fue descubierta en 1858 por los matemáticos alemanes August Ferdinand Möbius y Johann Benedict Listing, de manera independiente, pero se hace el reconocimiento a Möbius.

Antes de describir la banda de Mobius, podemos empezar mostrando su construcción y una manera práctica de verificar sus propiedades especiales: una sola cara, un solo borde y no orientabilidad.

Para construir la denominada banda de Mobius solo es necesaria una tira de papel rectangular, girar uno de los extremos de la tira y en seguida unir ambos extremos, sin realizar el giro de algún extremo de la tira resultaría un cilindro.

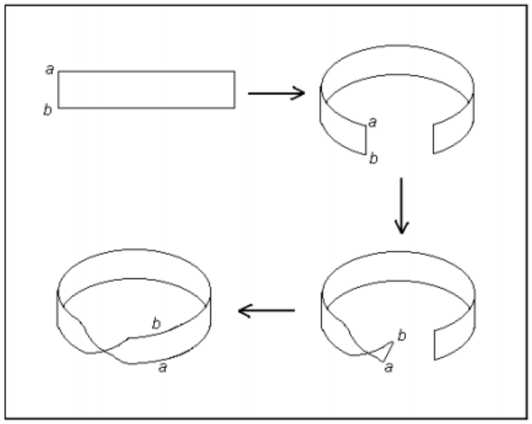


Figura 7 Construcción de una Cinta de Mobius.
Fuente: Pérez-Enríquez, R. (2002)

Resulta una banda muy interesante en la que se pueden hallar varias características que la hacen especial:

Al trazar una línea a lo largo de toda la superficie cuando se llega al punto inicial queda marcada toda la banda, por lo tanto, solo tiene una cara. Al marcar el borde, y se llega al punto de partida queda toda la banda recorrida, por lo tanto, solo tiene un borde.

Si se dibuja un objeto sobre la banda y se mueve a través de la superficie, al llegar al punto de partida el objeto queda en sentido contrario al de partida, por lo tanto, la banda no es orientable.

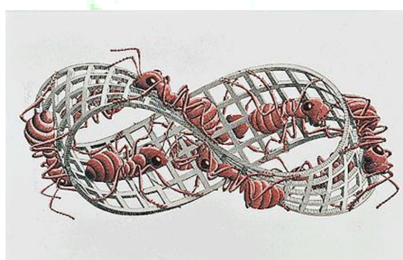


Figura 8 Mobius Strip II
Fuente de: Mobius, A. (1963). Recuperado de: https://store.mcescher.com/posters/mobius-strip-ii-large-poster-color

La banda de Mobius ha sido inspiración para diferentes artistas a los largo de la historia, las obras más recordadas son la Mobius Strip II, del artista neerlandés Maurits Cornelis Escher, en la que hormigas rojas caminan a lo largo de la única cara de la banda;

Figura 9 Reusar, Reducir y Reciclar
Fuente: Dominio Público

Y el logo del reciclaje, que fue creado por Gary Anderson, quien en 1970 participa de un concurso convocado por una empresa papelera, Container Corporation of America, con sede en Estados Unidos, su país de origen y que representa el proceso de transformación del material de desecho en material útil.

Se continúa con el estudio de la botella de Klein que es otro ejemplo de superficie no orientable, fue descrita en 1882 por el matemático alemán Felix Christian Klein. El nombre original era "Superficie de Klein" (Kleinsche Fläche), pero debido a un error de traducción del alemán al inglés, resultó "Botella de Klein" (Kleinsche Flasche).

Para tener una idea de la representación visual de la botella de Klein, podemos pensar primero en formar un cilindro, luego pasar la tapa superior del cilindro a través de su pared, con el objetivo de pegar el círculo superior con el inferior desde dentro. Se considera que no es una superficie que está en R3, entonces no se puede realizar un modelo físico de la botella.

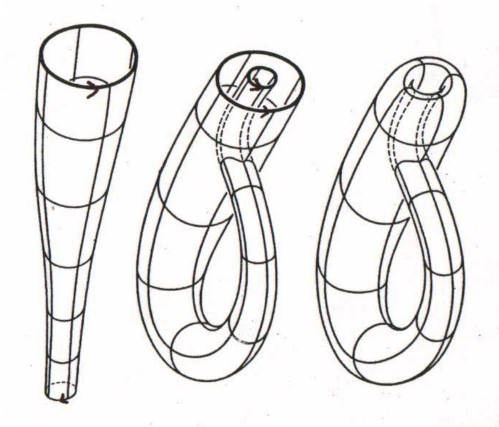


Figura 10 Construcción Botella de Klein
Fuente: Macías, S

Al igual que la banda de Mobius, la botella de Klein tiene propiedades que la hacen interesante, no solo para el científico, sino que para toda persona interesada en salir de lo normal. Se considera una superficie no orientable, como se observa al hacer un corte transversal, se puede obtener a partir de pegar dos bandas de Mobius por sus bordes.

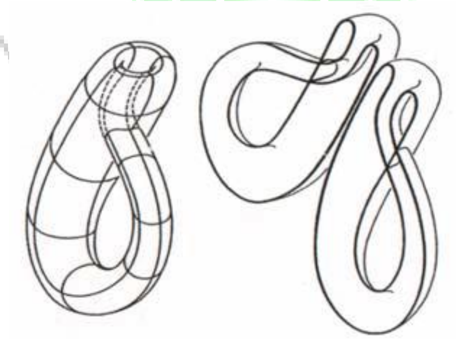


Figura 11 Botella de Klein - Cinta de Mobius
Fuente: Macías, S

Su propiedad más interesante es la de no tener bordes: se puede recorrer totalmente de manera continua, pasando por todos los puntos que la forman. Al entrar se sale, al pasar por "arriba", se pasa por "debajo" en exactamente el mismo punto de "arriba" y esto no tiene mucho sentido. Con estas ideas se hace imposible "llenarla", ya que si se intenta llenar, lo que se pretenda “introducir” también estará en su exterior y con esto los conceptos de “adentro” y “afuera” no existe en la botella de Klein.

La botella al no poderse llenar, no sirve como recipiente para algún líquido, se utiliza en la decoración. El físico estadounidense Clifford Stoll, ha construido proyecciones en tres dimensiones de la botella en vidrio.

Figura 12 Botellas de Cliff Stoll
Fuente: Stoll, C. (2018)

Además, se cree que en el tríptico “El jardín de las delicias” del famoso pintor holandés Jheronimus van Aken (El Bosco), del que no se conoce fecha exacta, pero muchos especialistas lo consideran entre 1485 y 1505, en el panel central en la parte inferior izquierda aparece un detalle el cual muchos consideran una botella de Klein.

Figura 13 Fragmento "El jardín de las delicias": El Bosco
Fuente: Dominio Público

6.2.7) El problema de los puentes de Königsberg

Durante el Siglo XVIII, la ciudad de Königsberg, en Prusia Oriental estaba dividida en cuatro zonas por el río Pregel. Las cuatro regiones se comunicaban por medio de 7 puentes, tal como se muestra en la Figura 12.

Figura 14 Ciudad de Königsberg
Fuente: Villegas, A. (2016).

El problema de los siete puentes nace con la idea de los habitantes de tratar de recorrer la ciudad en paseos dominicales, cruzando cada puente solo una vez y regresando al lugar de partida.

L. Euler en 1735 presento ante la Academia Rusa de San Petersburgo una solución bastante sencilla, aunque no para la época, él colocó un punto de referencia (vértice) a cada extensión de tierra, los cuales se unían a través de cada puente como se muestra en la Figura 15.

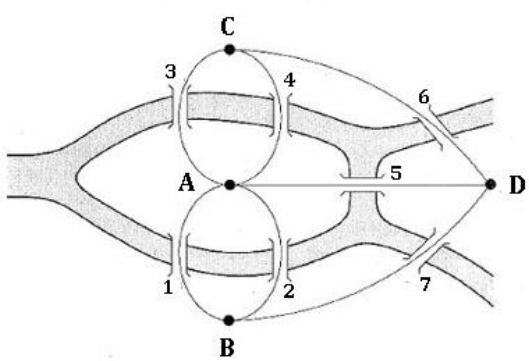


Figura 15 Grafo asociado a los puentes de Ciudad de Königsberg
Fuente: Reynoso, C. (2008)

Euler representa el problema en un grafo en el cual se tiene en cuenta la relación entre objetos presentes en este (exenciones de tierra y puentes). Euler después de analizar cuidadosamente cada vértice y verificando que solo se recorriera cada arista solo una vez, llegó a la conclusión de que no era posible encontrar un camino que cumpliera con las características, ya que el grafo contenía 4 vértices impares. Para ello él propuso el siguiente grafo (Figura 16).

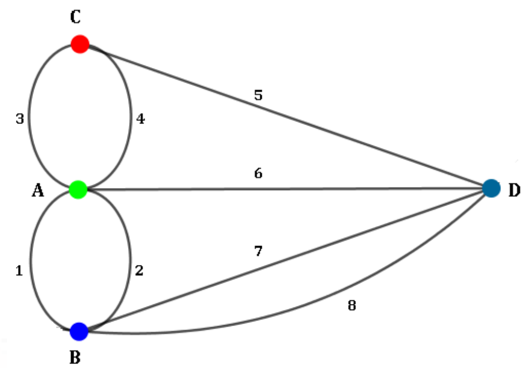


Figura 16 Solución del Problema de los 7 puentes
Fuente: Autoría propia

Las conclusiones obtenidas en el desarrollo de su trabajo fueron:

- La información clave es el número de puentes y la lista de sus extremos, mas no las posiciones exactas, si no que posiciones relativas.
- Un grafo contiene un circuito Euleriano si y sólo si todos sus vértices son pares.
- Un grafo contiene un camino Euleriano si y sólo si tiene dos vértices impares y los otros vértices pares.
- Cualquier camino Euleriano empieza en uno de los vértices impares y termina en el otro.

6.2.8) Historia de los poliedros

Los poliedros han sido de gran importancia para el desarrollo de la ciencia de hoy en día a tras vez de la historia, nosotros hemos considerado que tres principios son los fundamentales responsables de este hecho:

Para dar pie al Primer principio enunciaremos la frase de G.H. Hardy "Los diseños del matemático, como los del pintor o el poeta, han de ser bellos; las ideas, como los colores o las palabras, deben relacionarse de manera armoniosa. La belleza es la primera prueba: no hay lugar permanente en el mundo para las matemáticas feas".

La unión de ciencia con la belleza ha sido un símbolo de avance científico. Como muestra de ello tenemos la proporción áurea que Euclides realiza entre una diagonal y el lado de un pentágono regular, esta sección además de encontrarse en un dodecaedro, icosaedro, también se puede obtener con la sucesiva división de un rectángulo, con lo cual se obtiene el espiral áureo (Figura 17).

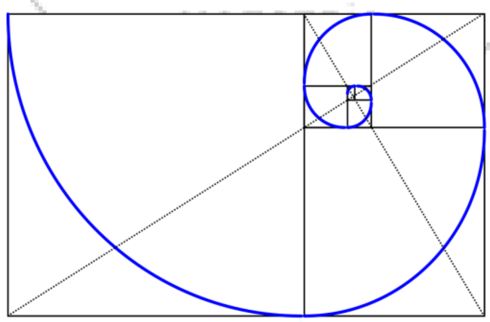


Figura 17 Espiral Áureo
Fuente: Autoría propia

La geometría y los poliedros fueron base fundamental para el desarrollo de la ciencia a través del arte. En la obra "el Diluvio" el pintor y mosaicista Florentino Paolo Ucello (1397–1475) se puede observar a un joven con un toro poliedral alrededor de su cuello.

Figura 18 El Diluvio Florentino Paolo Ucello
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

Fra Giovanni da Verona con algunos trabajos de marquetería (Unión de pequeños trozos de madera de diferentes tonalidades) construye también el toro poliedral.

Figura 19 Obra de Fra Giovanni da Verona
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

Leonardo Da Vinci también se encantó con la complejidad de los poliedros y en unas de sus obras se puede apreciar poliedros cuyos esqueletos son construidos en madera (aristas del poliedros), tal como aparece en la Figura 20.

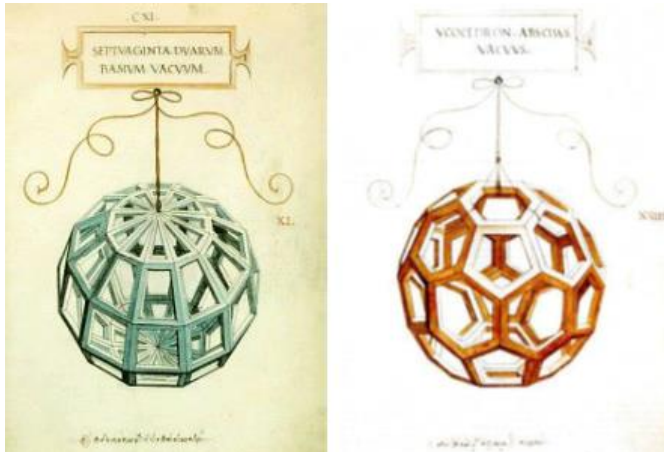


Figura 20 Poliedros de Leonardo Da Vinci
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

Hemos citado algunos personajes importantes de la historia, que por medio del arte y los poliedros han conmovido al mundo y a la ciencia, pero vale recordar otros no menos importantes como Piccaso, Dalí, Oteiza entre otros, que en algunas de sus obras involucran las representaciones poleidrales.

El segundo principio es la asociación de la cosmología con los poliedros, como el gran y único representante tenemos a J. Kepler (1571–1630), quien argumento en su obra lo siguiente:

“. . .Antes de ser creado el universo, no existían los números excepto la Trinidad que es Dios mismo. . .Dado que la línea y el plano no implican ningún número, entonces reina la infinidad. Consideremos por lo tanto a los sólidos. Primero debemos eliminar a los sólidos irregulares dado que sólo estamos interesados en la creación ordenada; quedan por lo tanto seis cuerpos: la esfera y los cinco poliedros regulares. A la esfera corresponde el cielo exterior, mientras que el mundo dinámico está representado por los sólidos de cara plana, de los cuales existen cinco, los cuales a la vez (cuando son vistos como límite) determinan seis cosas diferentes: los seis planetas que giran alrededor del sol. Éste es el motivo por el cual sólo hay seis planetas... ”

Más tarde Kepler asigna a cada planeta existente en la época un poliedro, argumentando lo siguiente:

“. . . los sólidos regulares se dividen en dos grupos: tres en uno y dos en otro. Al grupo mayor pertenecen primero el cubo, segundo la pirámide, y finalmente el dodecaedro. Al segundo grupo pertenecen primero el octaedro y segundo el icosaedro. Lo mencionado explica por qué la parte más importante del universo, que es la Tierra —donde la imagen de Dios se refleja en el hombre—, separa a los dos grupos. Por consiguiente, como posteriormente procedo a demostrar, los sólidos del primer grupo deben hallarse fuera de la órbita de la Tierra, mientras que los del segundo grupo deben encontrarse dentro. . . por lo tanto, asigno el cubo a Saturno, el tetraedro a Júpiter, el dodecaedro a Marte, el icosaedro a Venus y el octaedro a Mercurio”.

La Figura 19 ilustra el modelo de Kepler sobre el universo donde presenta un cubo con un tetraedro inscrito en él, un dodecaedro inscrito en el tetraedro, un icosaedro inscrito en el dodecaedro, y finalmente un octaedro inscrito en el icosaedro; todos ellos separados por esferas.

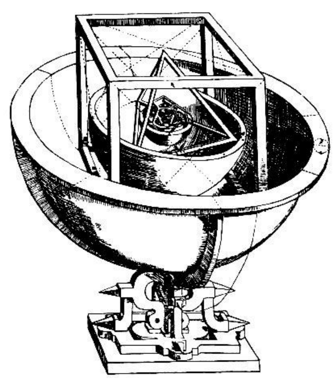


Figura 21 Modelo cosmológico de Kepler
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

Finalmente, el tercer principio que relaciona los poliedros con la ciencia es la presencia de los poliedros en la naturaleza, a partir de la unión de poliedros simples se construyen estructuras más complejas.

Es notorio que la geometría y en su defecto los polígonos y poliedros están presentes en la naturaleza como por ejemplo el panal de abejas en su estructura poligonal, la forma de las telarañas, la visión de algunos insectos, el polen y semillas de algunas plantas, y algunos corales de arrecifes.

Figura 22 Virus del Herpes
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

En la imagen anterior, podemos ver como la cápside (estructura proteica formada por una serie de monómeros llamados capsómeros). La cápside protege el material genético del virus. Cada capsómero puede estar constituido por una o varias proteínas distintas) del virus del herpes se asemeja a un cuerpo construido por pequeños fragmentos en forma de estrella.

El virus de la fiebre aftosa o glosopeda, es un virus altamente contagioso del ganado bovino, ovino, porcino y caprino, que se manifiesta mediante fiebres altamente concentradas, úlceras pequeñas en la boca, llamadas aftas y erosiones originadas de vesículas y flictenas en las pezuñas y la ubre, la Figura 21 muestra la estructura cáspide del virus de la fiebre aftosa, el cual presenta una estructura simétrica icosaedral.

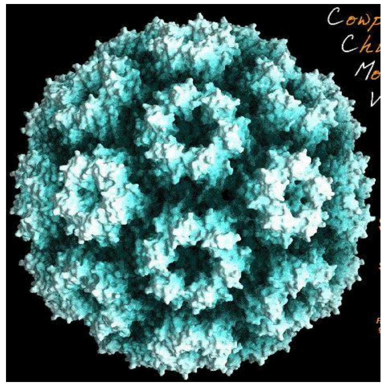


Figura 23 Virus de la fiebre aftosa
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

La cápside del virus del moteado clorótico del caupí CCVM por sus siglas en inglés (Cowpea Chlorotic Mottle Virus) consta de 180 subunidades proteicas que tienen una composición química idéntica pero la proteína que las forma no adopta la misma conformación geométrica. Se distinguen de tres tipos: A, B y C. Precisamente la diferente conformación de estos tipos de subunidades determina la manera en la que se van a enlazar unas con otras para formar el sello protector del ácido. Matemáticamente, la unidad generadora de la estructura poliedral sería el trímero ABC, que se esquematiza como un triángulo dividido en tres regiones equivalentes A,B y C, coloreadas en gris oscuro o azul, gris o rojo y gris claro o verde respectivamente.

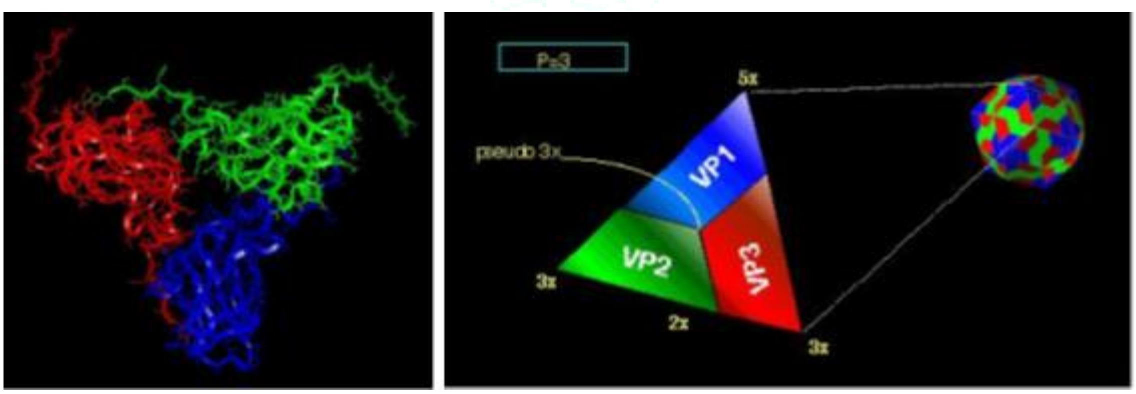


Figura 24 Trímero
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

A partir de esta estructura más simple, se puede obtener la estructura poleidral más básica del virus, que presenta la estructura icosaedral. Figura 25

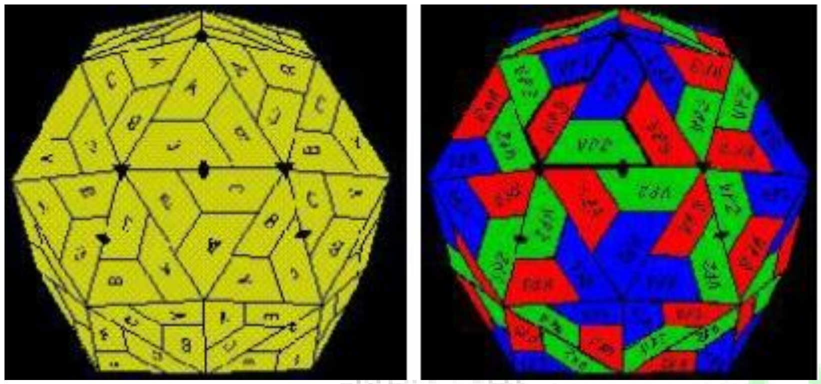


Figura 25 Estructura básica de un virus
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

Los poliedros además de encontrarse en la virología se pueden encontrar en las estructuras químicas como cristales de diversas sustancias. Por ejemplo, el cubo aparece en los cristales de sal común (cloruro de sodio), el tetraedro en los del sodio sulfantimoniato, el octaedro en los del alumbre de cromo, y el dodecaedro (no del todo regular) en los de la pirita.

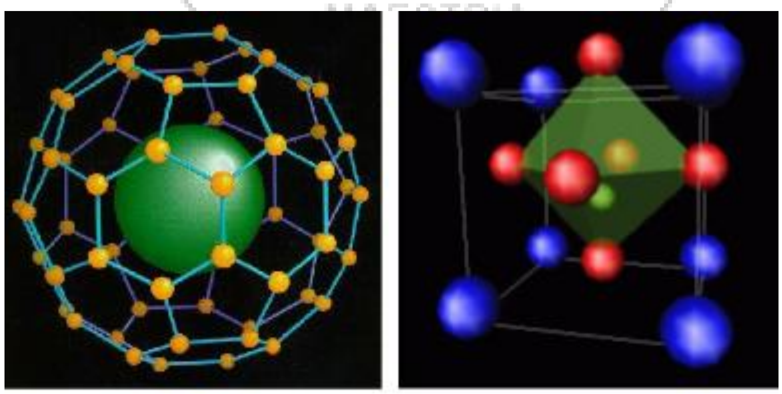


Figura 26 Fullereno C60 y Perovskita ABX3
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

Por medio de la cristalografía se trabajan temas de los poliedros en la geografía y la química.

Las moléculas estables adquieran forma de superficie, las disposiciones de los enlaces de las estructuras son de mucha importancia. Hay casos en los que las superficies se unen para formar superficies de curvatura gaussiana de diferentes signos; son positivas cuando las zonas de curvatura son positivas es porque las caras son pentagonales, son cero con zonas de superficie Hexagonales y negativas con zonas de figura heptagonal.

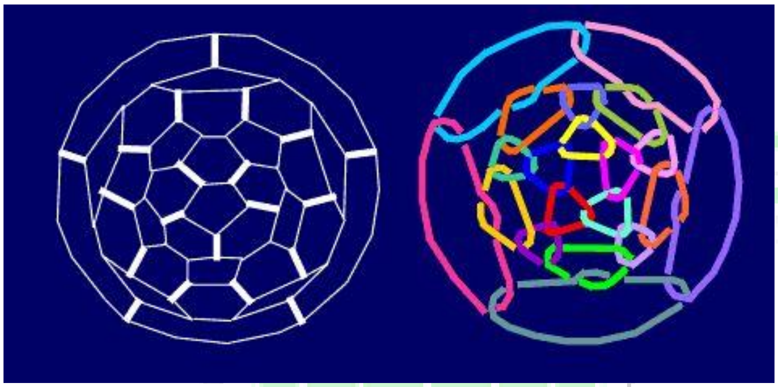


Figura 27 Enlace topológico de un fullereno
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

A continuación, se presenta un Fullereno en un plano hiperbólico y el furilleno Tórico

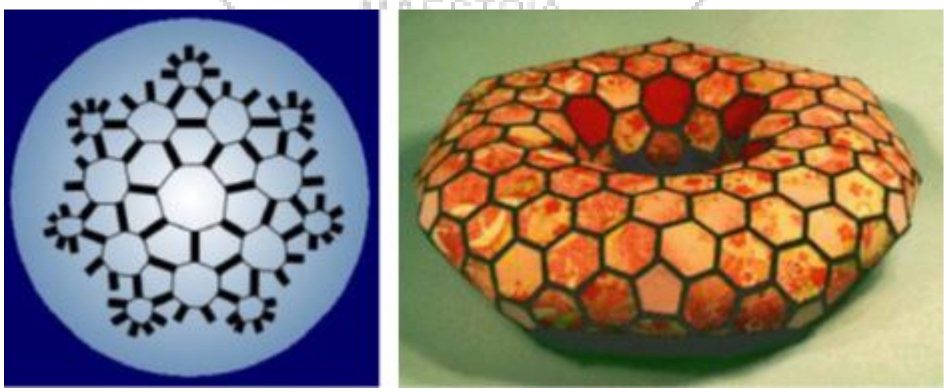


Figura 28 Enlace Fullereno heptagonal y tórico
Fuente: Extremiana, Hernández, Rivas (2001).

6.2.9) Teorema de Euler para Poliedros Convexos y No Convexos

Uno de los grandes ejemplos de invariantes topológicos es el teorema del matemático suizo L. Euler, el cual formula en 1752 a partir del siguiente enunciado "Puede haber poliedros más complicados, con más cara, pero nunca con menos de cuatro caras como el tetraedro" (Barr, 2012).

Euler propuso que las caras menos las aristas más los vértices de todo poliedro convexo es siempre equivalente a dos C-A+V=2

Realizaremos una prueba fácil de seguir. En primer lugar, recordaremos que en la topología la línea se puede doblar, estirar y contraer, observemos la siguiente figura

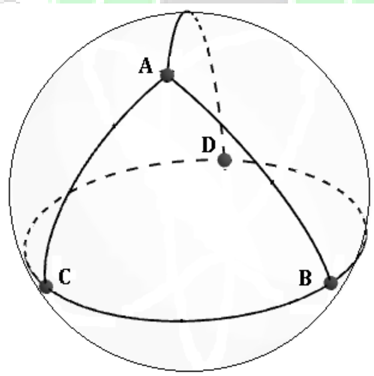


Figura 29 Tetraedro inscrito en una esfera
Fuente: Autoría propia

Como podemos ver los vértices y aristas del tetraedro coinciden con la esfera. Ahora lo que haremos es rotar la esfera y traer al frente la figura correspondiente a los puntos B,C,D, puesto que en la topología las figuras se pueden contraer (Figura 29). La nueva figura estará formada por 4 vértices (A, B, C, y D); 6 bordes y tres caras (1,2 y 3) como se muestra en la siguiente figura.

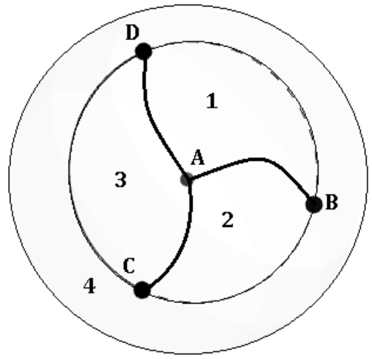


Figura 30 Triangulo inscrito en un circulo
Fuente: Barr (2012)

Y la cuarta cara del tetraedro es la que está fuera de la figura BCD en la esfera, Si observamos, la gráfica obtenida es topológicamente equivalente a un triángulo, ya que tiene los mismos tres bordes, como sabemos en topología se pueden distorsionar las figura, sin modificar la forma como esta se conecta. En el caso de los polígonos se pueden suavizar los ángulos, aunque estos deben conservar los vértices como puntos referentes en el trazo obtenido.

Para conectar caras, bordes (aristas) y vértices se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Cuatro caras son lo mínimo en un poliedro
- Un vértice en un poliedro une como mínimo 3 bordes (aristas).

Ahora, las anteriores reglas llevadas a cualquier figura en el plano, según Euler se formulan así:
La figura debe estar completamente conectada no habrá partes sueltas, Si cada línea tiene un vértice libre, habrá un extremo libre y donde cruza una línea, puede haber un vértice creado anteriormente.

Cualquier recinto cuenta como una cara, incluido el espacio exterior. Se debe obtener una figura simplemente conectada y se permiten donas, porque entonces el enunciado cambia.
Ahora, si demostramos los dos enunciados anteriores, entonces se tiene para poliedros.

Iniciamos con una línea, como no encierra nada, entonces tiene una cara, una arista que es el recorrido de la línea y dos vértices que son los puntos extremos.

Si se unen los extremos, se encierra un espacio, al coincidir estos se crea un vértice que topológicamente permanece en cualquier parte del borde de la figura, por tanto, tendremos dos caras, una arista y un vértice.

6.2.10) Problema de los cuatro colores

En los alcances de la topología existen algunos teoremas tan obvios a simple vista, pero con pruebas algo rigurosas, no imposibles ni mucho menos fácil, teoremas como por ejemplo curva de Jordán y/o el teorema del mosaico. El teorema que nos interesa en el presente es el problema de los cuatro colores, el cual ha permanecido durante más de 100 años, pero aún no tiene una prueba formal, en él se plantea que solo se necesitan cuatro colores para colorear cualquier mapa siempre y cuando se dibuje en una superficie simplemente conectada, como el globo terráqueo, un continente o un país.

Si podemos imaginar un ajedrez, comúnmente tiene solo dos colores (blanco y negro), pero siempre en una esquina de cualquier cuadrado, se encuentra un cuadrado del mismo color del original y dos del otro. Cuando coloreamos mapas, no nos interesa que los mares siempre sean azules, ni que los polos sean blancos o incluso que la región británica sea de color amarillo. Lo importante es que las regiones continuas sean de diferentes colores.

Hasta la fecha nadie ha probado que no se pueda colorear un mapa con tan solo cuatro colores e incluso no se han coloreado mapas con más de cuatro colores, si intentamos colorear un mapa con 5 colores, nos encontramos con la problemática es que una región no podrá encontrarse en un punto común con los cuatro restantes. Se ve simple de entender, pero lo más irritante es que en el trascurso de la historia se han probado teoremas de más dificultad que el de los cuatro colores.

¿Se han preguntado cómo podríamos colorear un toro (dona) con la ayuda de 7 colores, teniendo en cuenta que cada color debe conectarse con los seis restantes y que las donas no son muy buenas para la cartografía?

Inicialmente cortaremos transversalmente el toro, para obtener un cilindro sin tapas, después con un corete horizontal transformamos el toro en una cinta (de papel) (Figura 31).

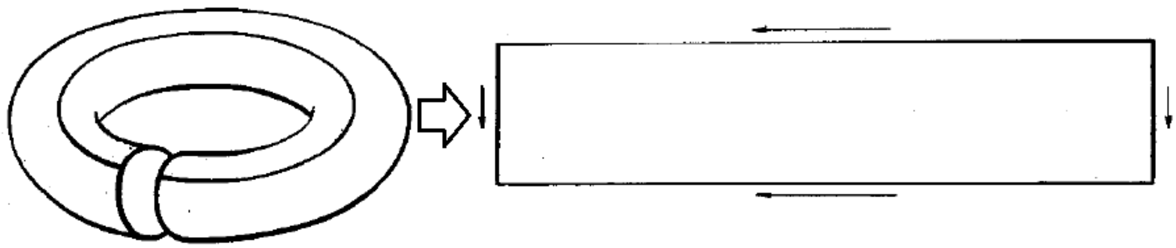


Figura 31 Toro deformado a una cinta de papel
Fuente: Barr (2012)

A continuación, se secciona la cinta en siete regiones distintas, suponiendo que la cinta tiene continuidad de un borde al otro, en la figura se demuestra una forma de organizar esos siete colores en el toro.

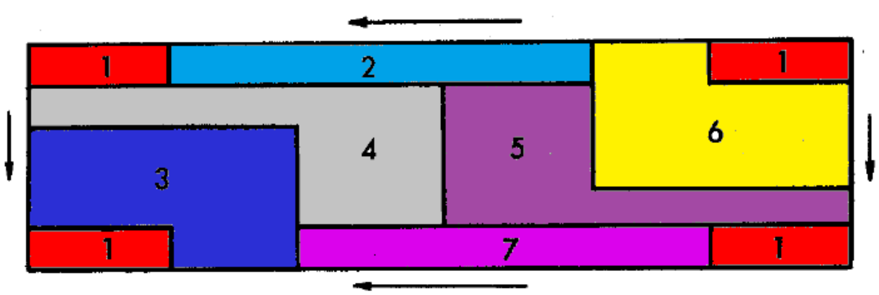


Figura 32 Mapa en cinta de papel
Fuente: Barr (2012)

Realizaremos el mismo ejercicio de cortar y desplegar, que ejecutamos anteriormente con la superficie orientable del toro, pero la diferencia radica que esta vez la superficie será no orientable, la cinta de Möbius. A continuación, demostraremos que a pesar de que la cinta de papel podría tener las mismas dimensiones, esta vez solo son necesarios 6 colores distintos como lo muestra la figura

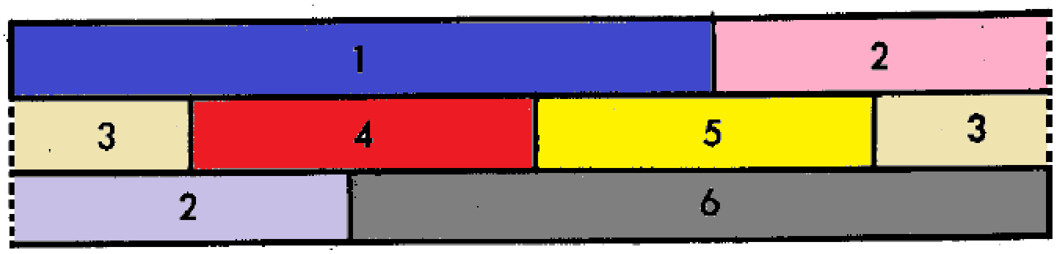


Figura 33 Mapa en cinta de Papel
Fuente: Barr (2012)

Cuando doblemos y peguemos la cinta, observaremos que el color 2 del extremo derecho coincide con el 2 del derecho y el 3 del derecho con el 3 del izquierdo, lo que permite dar continuidad a las secciones coloreadas y de otra forma permitir que cada color límite con los restantes.

Muchos expertos han tratado de demostrar el teorema de los cuatro colores desde muchos puntos de vista, pero el que se acerca a una mejor explicación de este es la fórmula de Euler ya que cualquier mapa se puede deformar topológicamente a otro y siempre mantendrá los mismos invariantes las caras (regiones), bordes (limites) y vértices (puntos de unión de más de dos limites). Para los siguientes gráficos y teniendo en cuentas los ideales de L. Euler, estos tienen en cada cara tres vértices y tres aristas, lo cual nos permite usar tres colores en el momento de colorearlos (Figura 34)

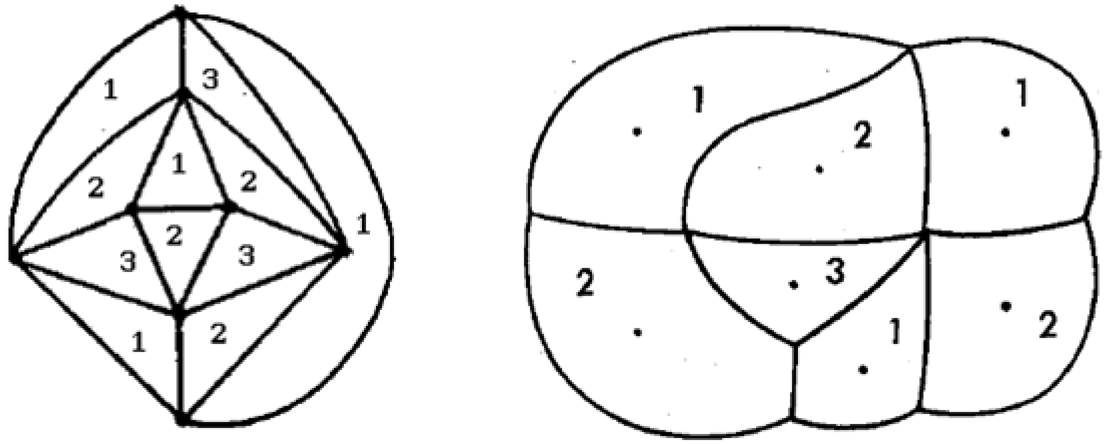


Figura 34 Mapas
Fuente: Barr (2012)

Cuando tenemos un mapa rodeada por 2 o 3 áreas, es necesario usar dos o tres colores, ya que la región interior seria el tercer color o el cuarto color en su defecto, tal como lo muestra la siguiente figura

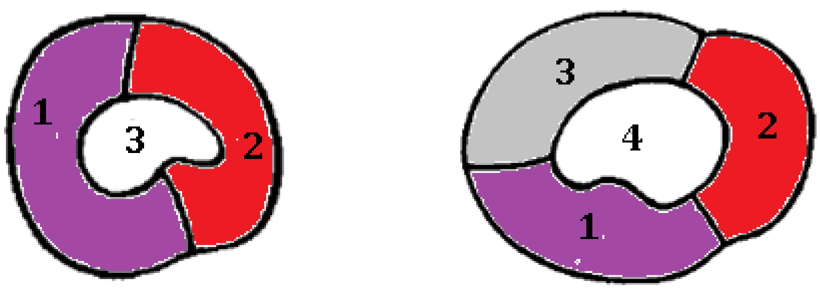


Figura 35 Regiones internas
Fuente: Barr (2012)

Para el siguiente ejemplo (Figura 36), no es posible aplicar el criterio anterior, puesto que las 3 regiones limitantes en la frontera del mapa, encierra un grupo de estas; y si buscamos la forma de colorear el mapa con solo tres colores no podríamos realizar el ejercicio, ya que estaríamos quebrantando el primer criterio para colorear mapas “dos fronteras adyacentes no deben tener el mismo color". Si observamos la Figura 36 podemos ver dos grafos topológicamente equivalentes, como podemos apreciar el mapa de la derecha tiene dos de sus regiones adyacentes y tienen el mismo color "azul", por lo tanto afirmamos que el mapa no se puede colorear con solo 3 colores.

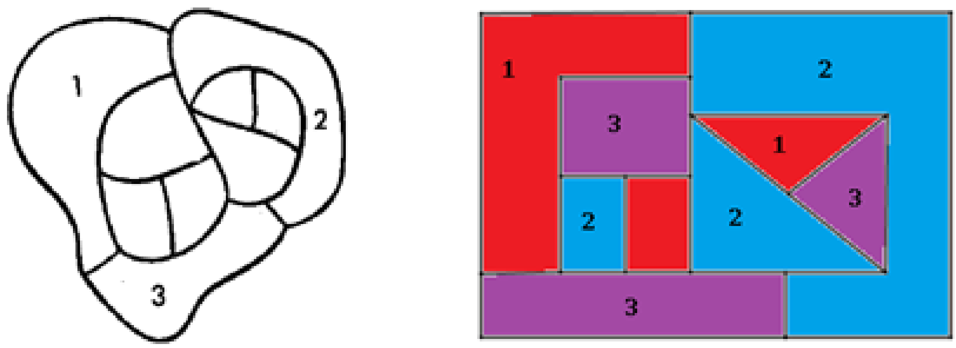


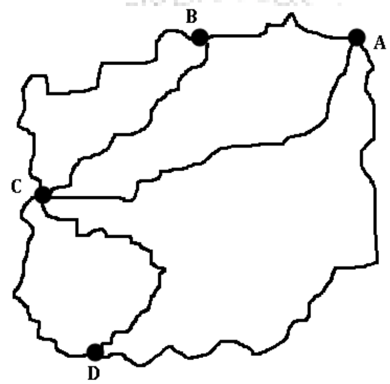
Figura 36 Mapas topológicamente equivalentes
Fuente: Barr (2012)

7) PRÁCTICAS EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD
ACTIVIDAD #1

1. Un comerciante necesita visitar las ciudades A, B, C y D para vender su mercancía, él para evitar los ladrones plantea una estrategia, conociendo que las ciudades se encuentran como se muestra en la figura:

- Entrar a la ciudad por un camino y salir de la misma por un camino diferente.
- En la travesía del comerciante, no debe repetir ningún camino.



a. Encuentre, si es posible la ruta que debe seguir el comerciante para pasar por las cuatro ciudades.

b. De no ser posible encontrar el recorrido que debe hacer el comerciante, dadas las condiciones. ¿Qué podría hacer él para recorrer las ciudades, sin romper la segunda condición impuesta?

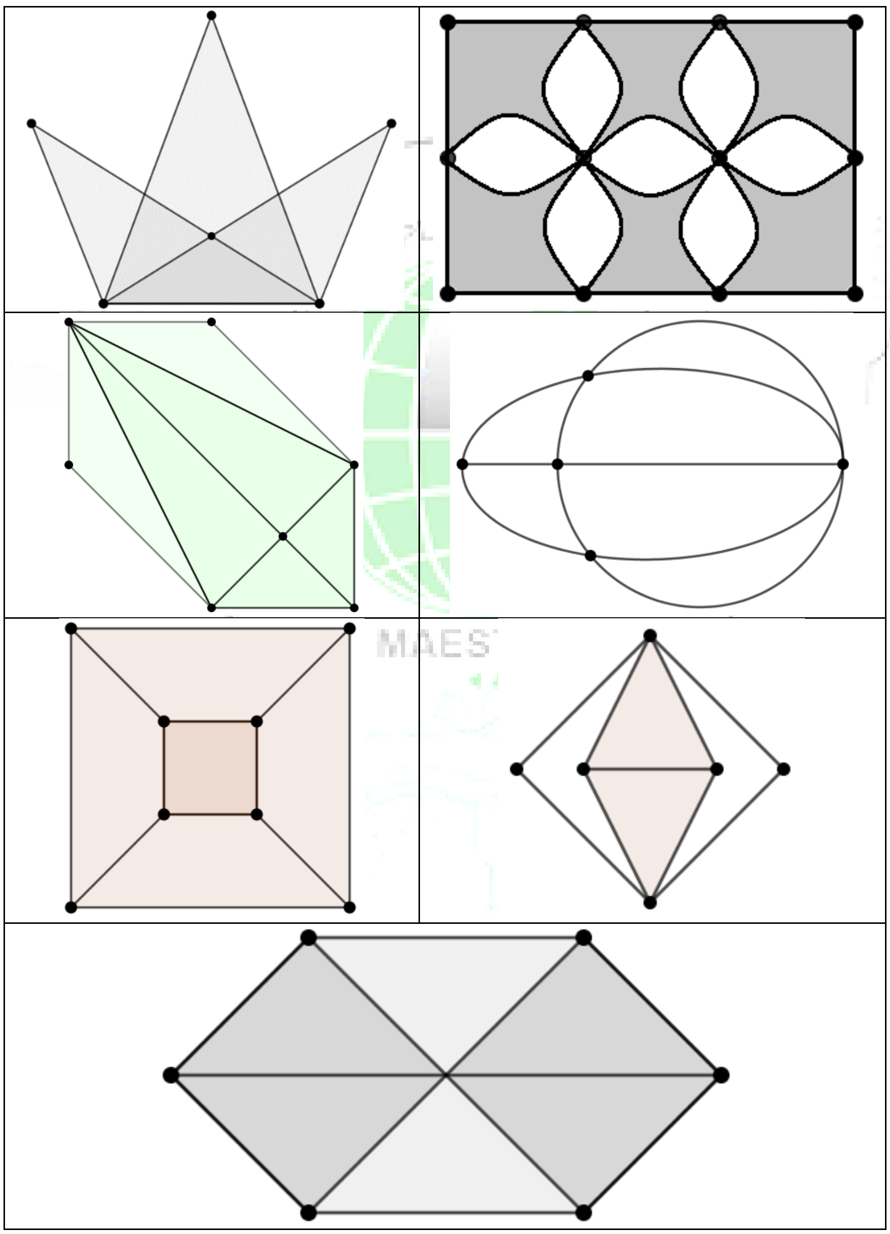
c. Encontrada la solución. ¿Será que el comerciante puede llegar al punto de partida, sin importar cuál fue su ciudad de donde inicio su recorrido?

d. Si no se puede llegar a la ciudad de partida. ¿Qué solución plantearía sin que se vieran afectadas las condiciones iniciales del problema?

2. El grado de un vértice es la cantidad de aristas que incurren en él. Identifique en cada uno de los siguientes grafos:

a. El grado en cada vértice.

b. Encuentre el camino de como recorrer cada uno de los grafos, teniendo en cuenta que no se pueden recorrer un camino dos o más veces.

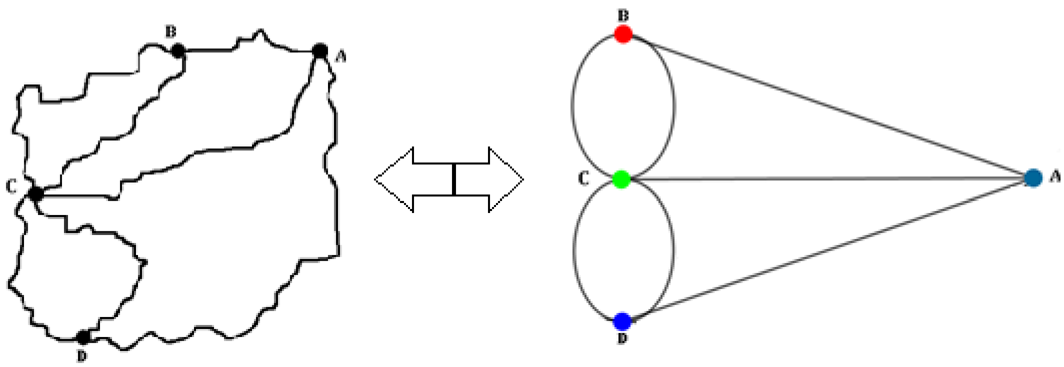


Muchas veces los grafos que se construyen no tienen la misma forma, pero si entre grafos coincide numero de vertices, aristas y el grado de cada vertice, entonces estos grafos se dicen llamar isomorfos.

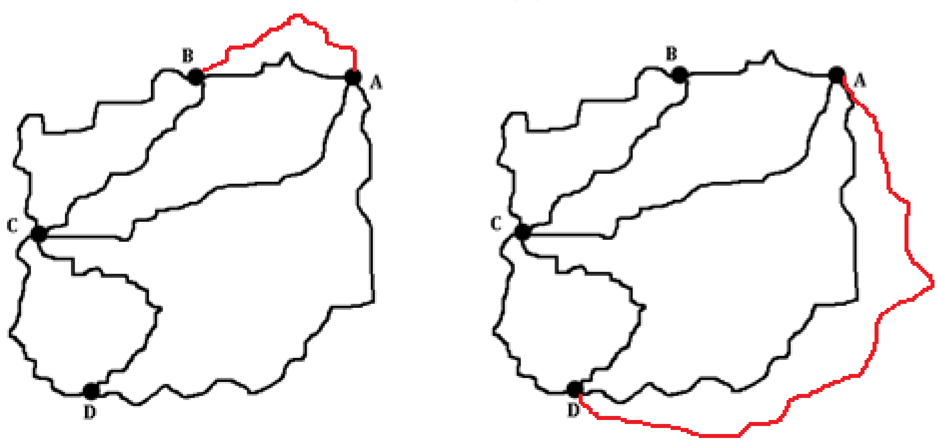
SOLUCIÓN

1.

a. No se puede encontrar una ruta que pueda seguir el comerciante y que cumpla las condiciones iniciales del problema, puesto que el grafo del problema es topológicamente equivalente al grafo del problema de los puentes de Königsberg, el cual no tiene solución, puesto que el grafo está compuesto por 4 vértices impares.



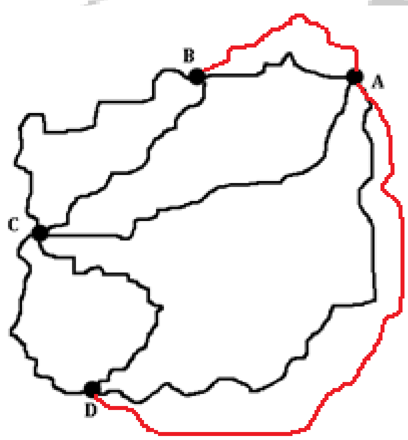
b. Como no es posible encontrar el recorrido que debe hacer el comerciante dadas las condiciones iniciales, entonces este deberá crear un camino nuevo entre las ciudades $\overline{AB}$ o $\overline{AD}$, como se muestra en la Figura xxx



Esto con el objetivo de obtener un grafo Eureliano (Es un grafo que se puede recorrer completamente desde un vértice y regresar a este sin pasar por la misma arista).

c. No, puesto que para que el grafo pueda iniciar en un vértice y terminar en este, necesita dos o más vértices pares.

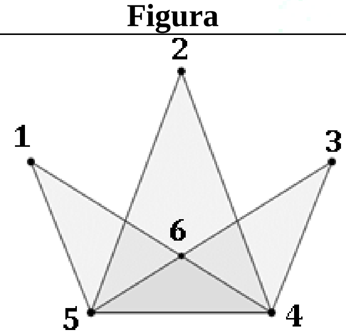
d. Como no es posible encontrar el recorrido que debe hacer el comerciante dadas las condiciones iniciales y llegar a la ciudad de partida, entonces este deberá crear dos camino nuevos entre las ciudades $\overline{AB}$ k $\overline{AD}$, como se muestra en la Figura xxx

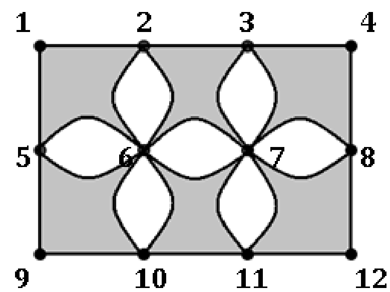
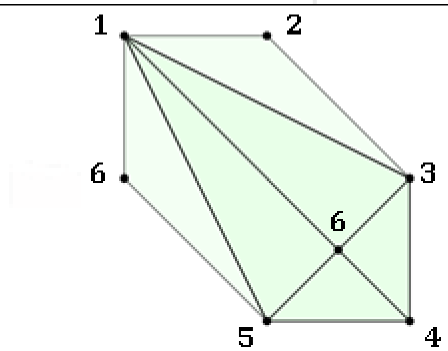
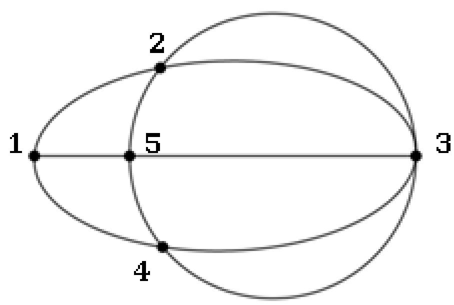
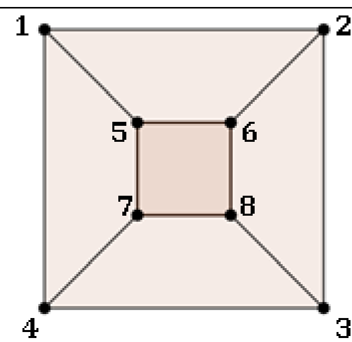


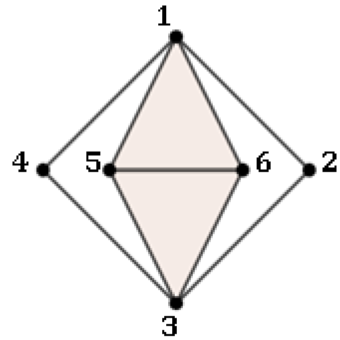
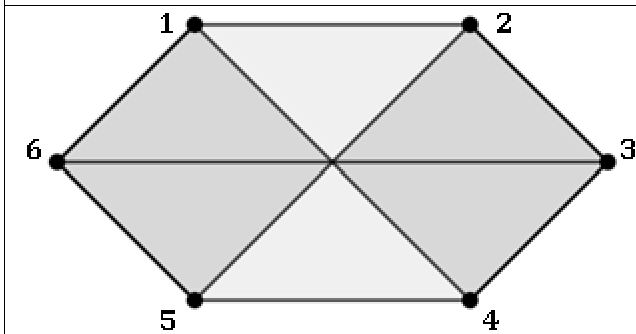
SOLUCIÓN

2.

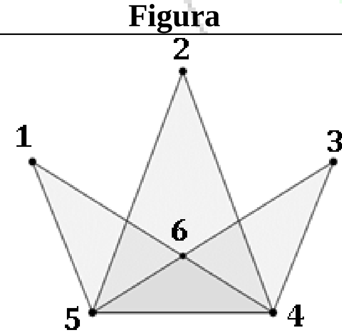
a.

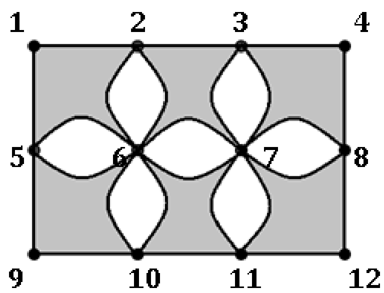
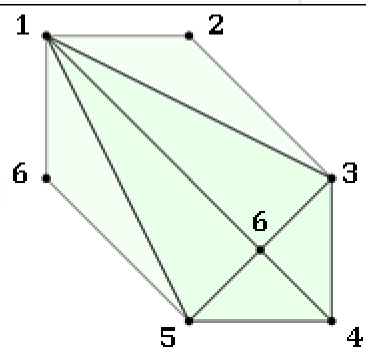
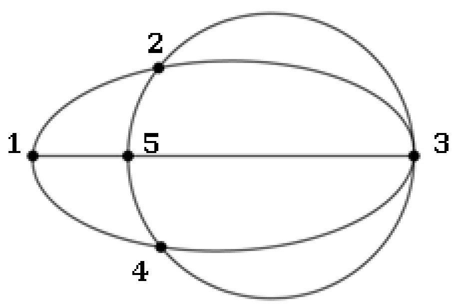
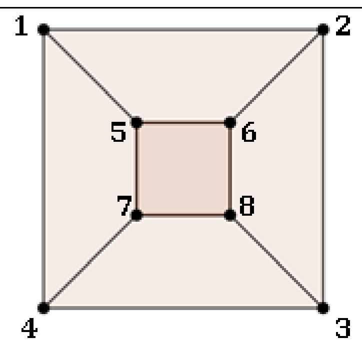
Figura	Vértice	Grado del vértice
	1 2 3 4 5 6	2 2 2 2 2 4

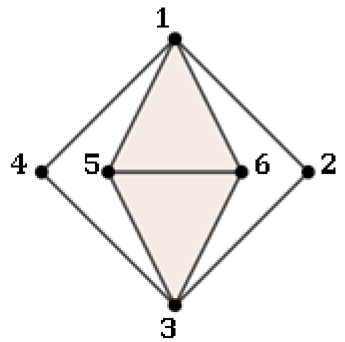
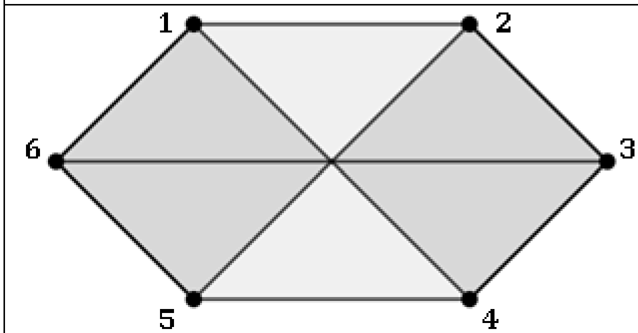
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12</td>
<td>2
4
4
2
4
8
8
4
2
4
4
2</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>1
2
3
4
5
6</td>
<td>5
2
4
3
4
4</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>1
2
3
4
5</td>
<td>3
4
4
4
4</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>1
2
3
4
5
6
7
8</td>
<td>3
3
3
3
3
3
3
3</td>
</tr>
</table>

	1 2 3 4 5 6	4 2 4 2 3 3
	1 2 3 4 5 6	3 3 3 3 3 3

b.

Figura	Camio a seguir
	De 1 a 5, 5 a 4, 4 a 3, 3 a 5, 5 a 2, 2 a 4, 4 a 6 y de 6 a 1

	De 1 a 5, 5 a 6, 6 a 7, 7 a 6, 6 a 6, 5 a 9, 9 a 10, 10 a 6, 6 a 2, 2 a 6, 6 a 10, 10 a 11, 11 a 7, 7 a 3, 3 a 7, 7 a 11, 11 a 12, 12 a 8, 8 a 4, 4 a 3, 3 a 2 y 2 a 1
	De 1 a 6, 6 a 4, 4 a 5, 5 a 6, 6 a 3, 3 a 2, 2 a 1, 1 a 6, 6 a 5, 5 a 1 y de 1 a 3
	De 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4, 4 a 3, 3 a 2, 2 a 5 y de 5 a 4.
	No tiene solución.

	De 5 a 6, 6 a 3, 3 a 2, 2 a 1, 1 a 4, 4 a 3, 3 a 5 y de 5 a 1.
	No tiene solución

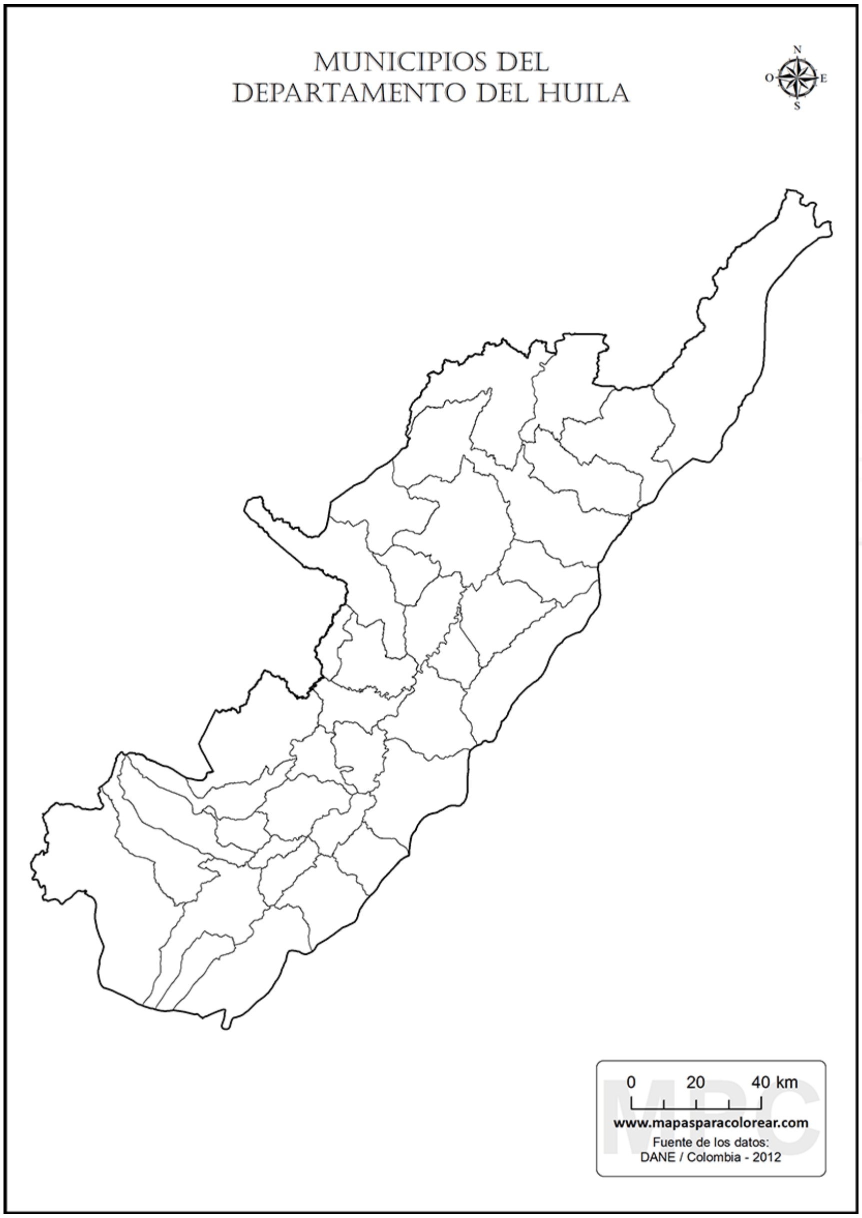
UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

ACTIVIDAD #2

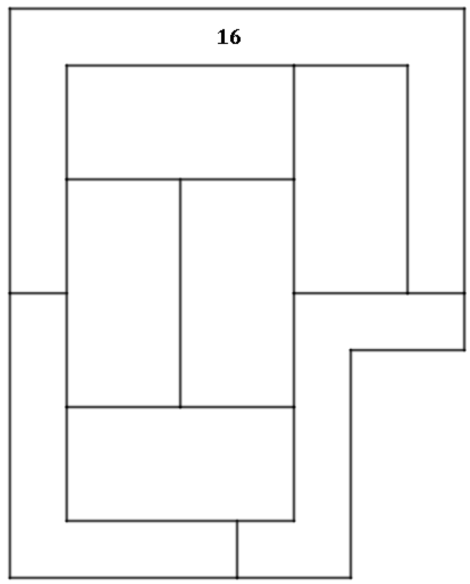
1. El siguiente mapa, es el mapa político del departamento del Huila, intente colorearlo con la menor cantidad de colores posible teniendo en cuenta que dos fronteras contiguas no deben tener el mismo color.

a. Con la ayuda del programa GeoGebra, encuentre el grafo dual asociado al mapa del Huila. Encuentre una forma distinta de colorearlo con la ayuda del grafo dual y respetando las condiciones anteriores.



2. El siguiente mapa está compuesto por siete (7) regiones de 8 unidades cuadradas, y una (1) de 16 unidades cuadradas, colorea el mapa teniendo en cuenta lo siguiente: colorear de azul 24 unidades cuadradas, de amarillo 24 unidades cuadrada, de rojo 16 unidades

cuadradas y de verde 8 unidades cuadradas. No puede haber regiones adyacentes de igual color.



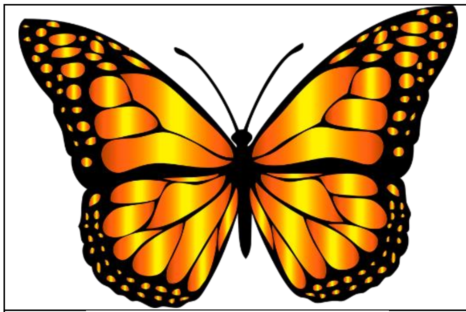
a. De no ser posible la ejecución del ejercicio, proponga una nueva condición para que el mapa al ser coloreado, respetando la condición "No puede haber regiones adyacentes de igual color".

b. Trace el grafo dual correspondiente al mapa anterior y concluya el por qué se cumple o no los puntos 1, según las condiciones dadas o propuestas.

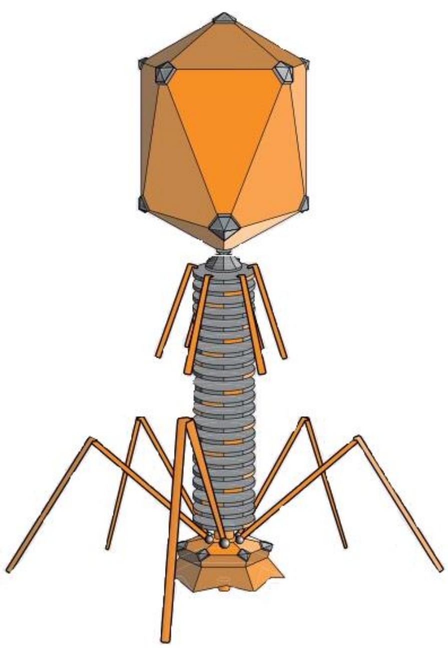
3. Si observamos las siguientes imágenes podemos apreciar la presencia de los grafos en la naturaleza: dibuja en cada imagen el grafo correspondiente e identifica en cada uno de los grafos:

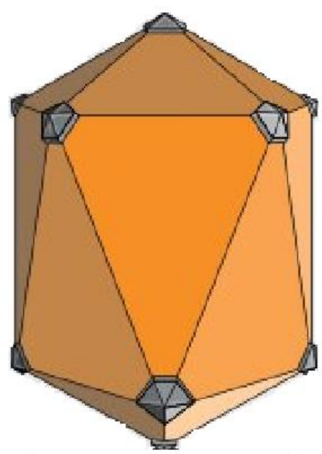
a. El grado en cada vértice.

b. Encuentre el camino de como recorrer cada uno de los grafos, teniendo en cuenta que no se pueden recorrer un camino dos o más veces.

4. Los bacteriófagos son virus que afectan a las bacterias, encuentra el grado dual de la cápside del siguiente bacteriófago T2 con la ayuda del programa GeoGebra.

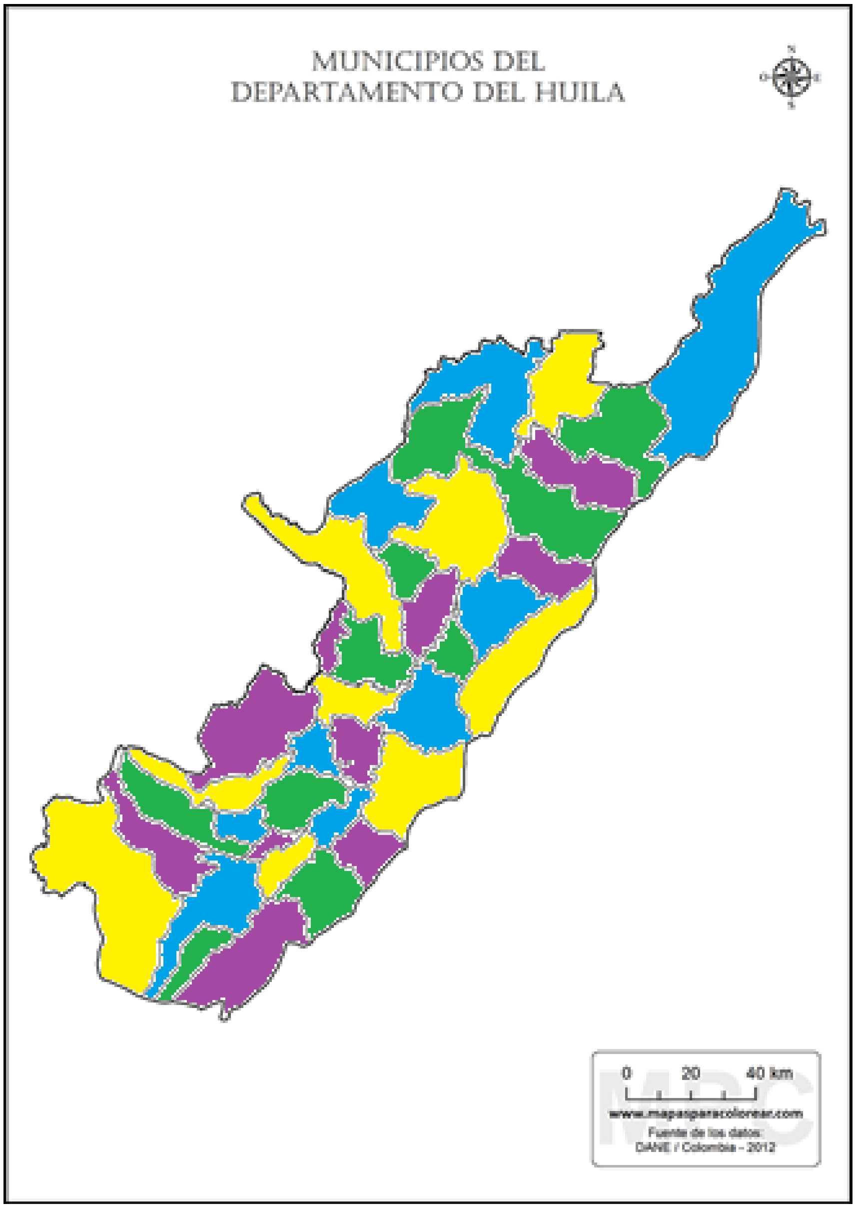




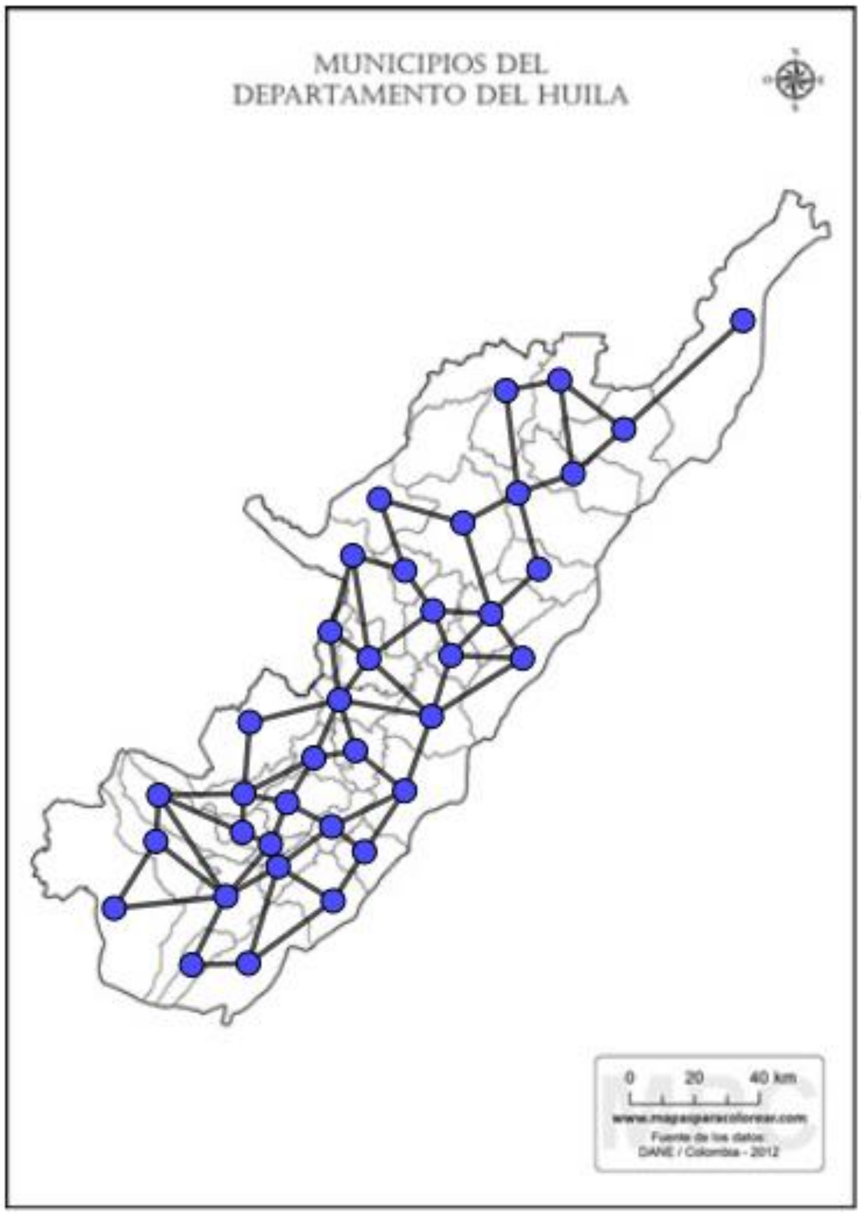
SOLUCIÒN

7)

a.

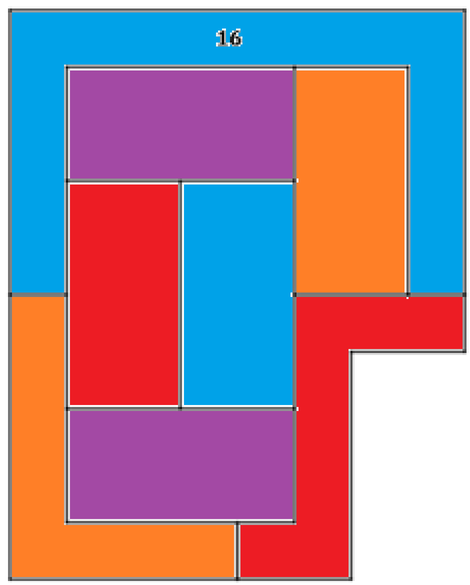

MUNICIPIOS DEL
DEPARTAMENTO DEL HUILA
0 20 40 km
www.mapasparacolorear.com
Fuente de los datos:
DANE / Colombia - 2012

b.

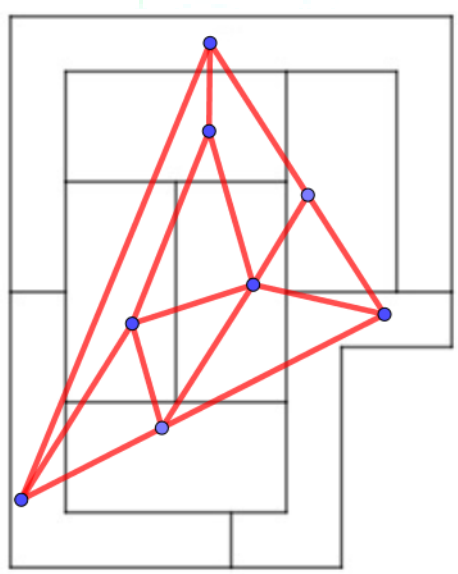

MUNICIPIOS DEL
DEPARTAMENTO DEL HUILA
0 20 40 km
www.mapasparacolorear.com
Fuente de los datos:
DANE / Colombia - 2012

8)

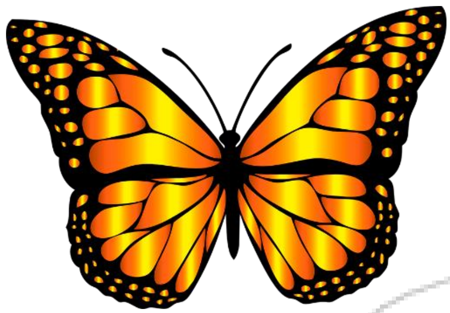
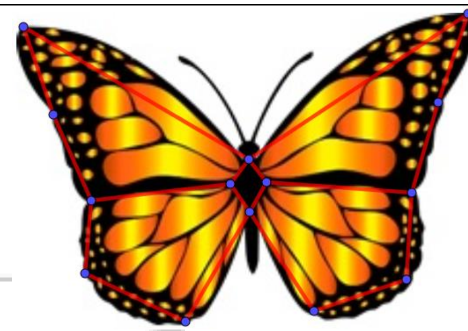
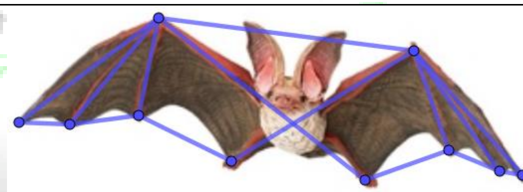
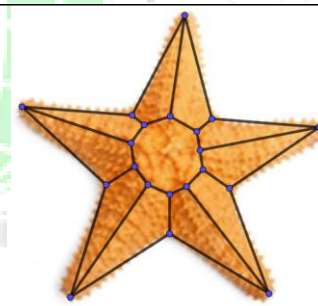
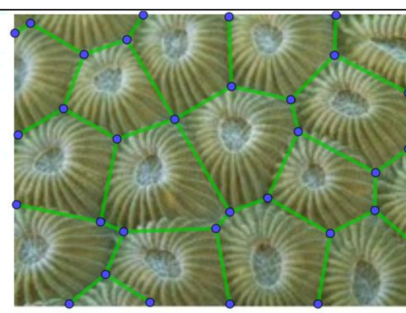
a. No es posible colorear el mapa según las condiciones dadas, pero si cambiamos las condiciones a 24 unidades cuadradas de azul, 16 unidades cuadrada de amarillo, 16 unidades cuadradas de rojo y de verde 8 unidades cuadradas. Obtenemos el siguiente mapa



Trace el grafo dual correspondiente al mapa anterior y concluya el por qué se cumple o no los puntos 1, según las condiciones dadas o propuestas.

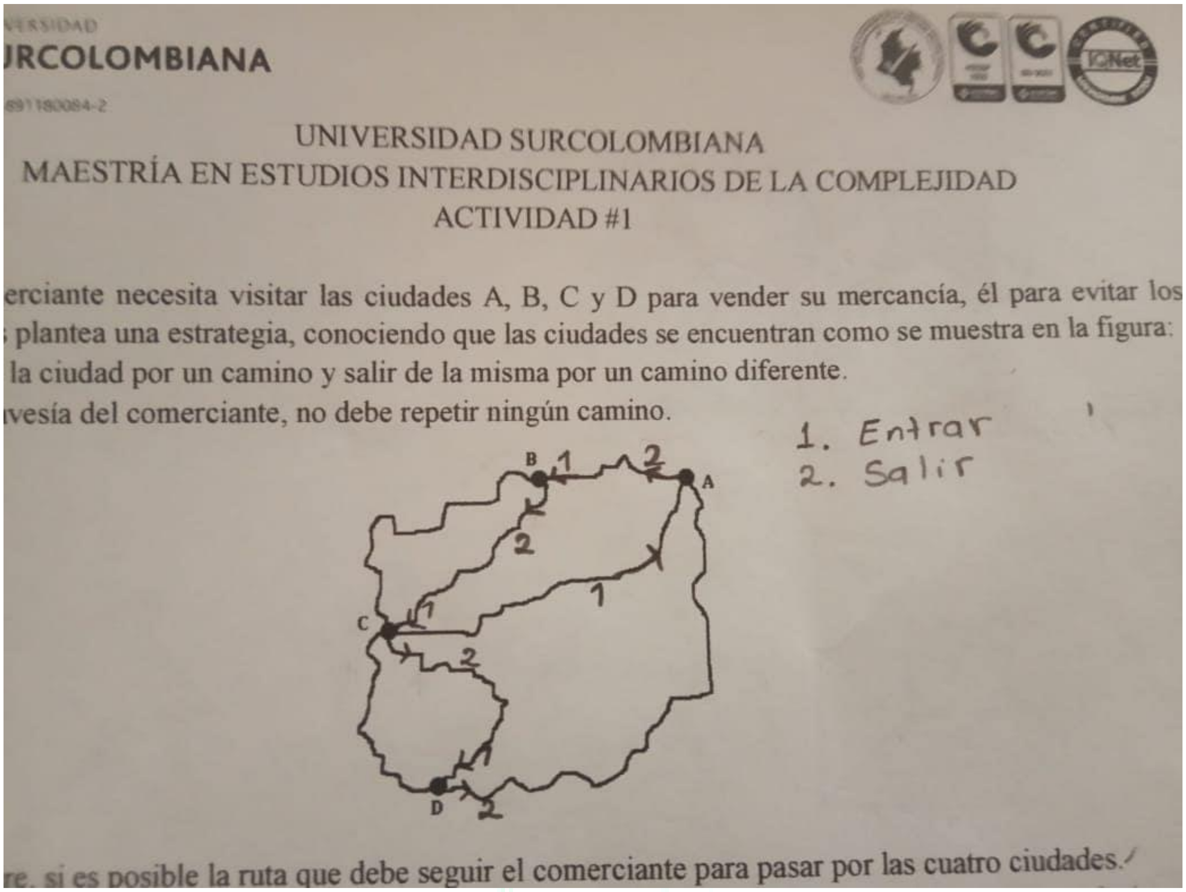


9)

FIGURA INICIAL	GRAFO ASOCIADO
	
	
	
	

ALGUNAS DE LAS SOLUCIONES REALIZADAS POR LOS ESTUDIANTES

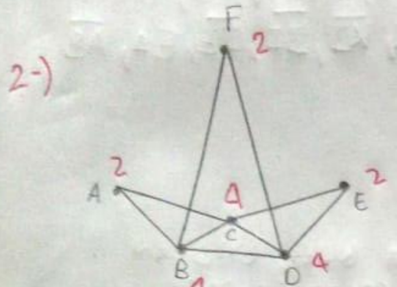
Guía 1


UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD
ACTIVIDAD #1

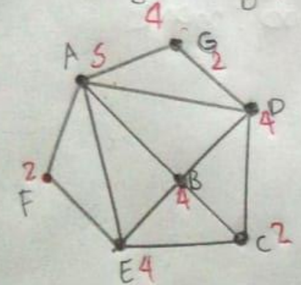
erciante necesita visitar las ciudades A, B, C y D para vender su mercancía, él para evitar los
plantea una estrategia, conociendo que las ciudades se encuentran como se muestra en la figura:
la ciudad por un camino y salir de la misma por un camino diferente.
vesía del comerciante, no debe repetir ningún camino.

re, si es posible la ruta que debe seguir el comerciante para pasar por las cuatro ciudades.

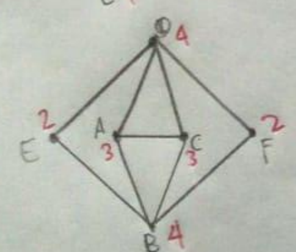
2-)



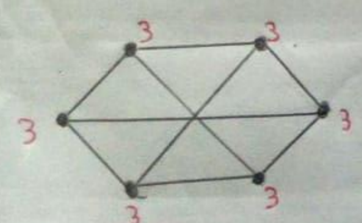
b-) $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BF}$, $\overline{FD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BA}$



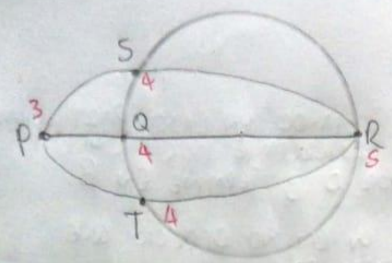
b-) $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DG}$, $\overline{GA}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BE}$, $\overline{EF}$
$\overline{FA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$



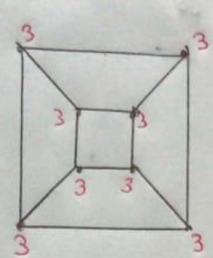
b-) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DF}$, $\overline{FB}$, $\overline{BE}$, $\overline{ED}$, $\overline{DA}$, $\overline{AC}$



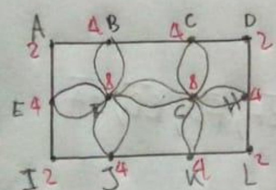
NO SE PUEDE TRAZAR CAMINOS 1 SOLA VEZ YA QUE EN LA FIGURA EXISTEN MAS DE DOS GRAFOS DE GRADO IMPAR



b.) $\overline{RS}, \overline{SP}, \overline{PT}, \overline{TR}, \overline{RT}, \overline{TQ}, \overline{QS}, \overline{SR}, \overline{RT}, \overline{QP}$

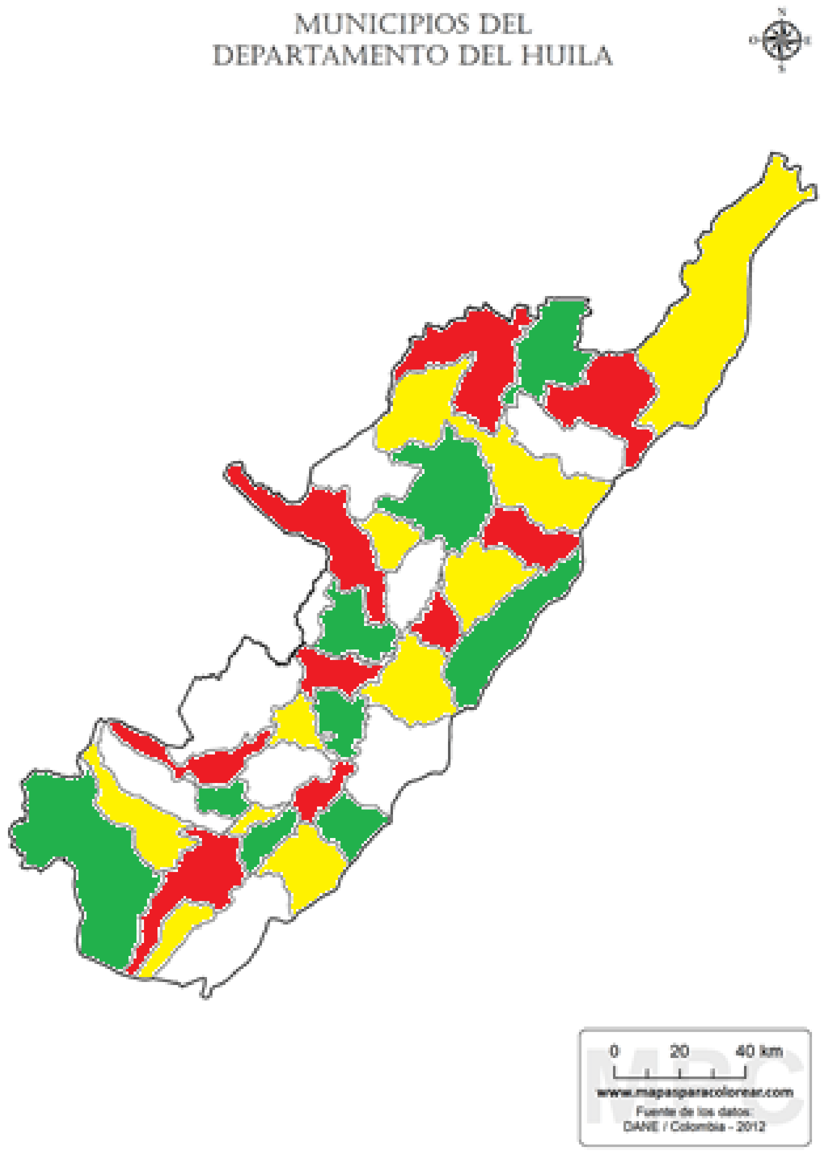


b.) NO TIENE SOLUCIÓN YA QUE EXISTEN MAS DE DOS GRAFOS CON GRADO IMPAR

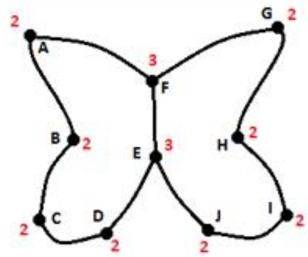


b.) $\overline{BF}, \overline{FJ}, \overline{JF}, \overline{FE}, \overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GC}, \overline{CG}, \overline{GK}, \overline{KG}, \overline{GH}, \overline{HD}, \overline{DC}, \overline{CB}, \overline{BF}, \overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HL}, \overline{LK}, \overline{KJ}, \overline{JI}, \overline{IE}, \overline{EA}, \overline{AB}$

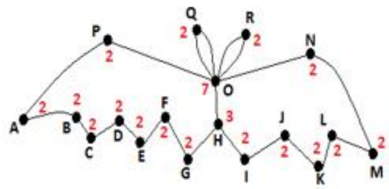
Guía 2



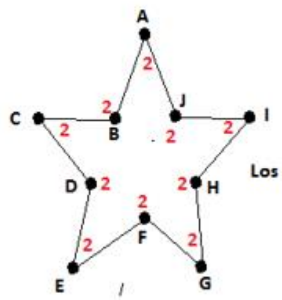
Sede Central - AV. Pastrana Borrero Cra. 1a.
PBX: (57) (8) 875 4753 FAX: (8) 875 8890 - (8) 875 9124
Edificio Administrativo - Cra. 5 No. 23-40
PBX: (57) (8) 8753686 - Línea Gratuita Nacional: 018000 968722
Vigilada Mineducación
www.usco.edu.co
Neiva, Huila



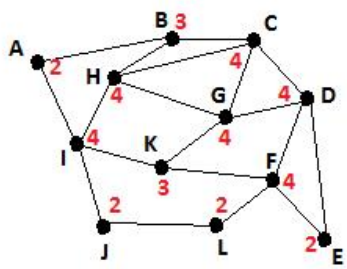
Los caminos son: FA, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JE.



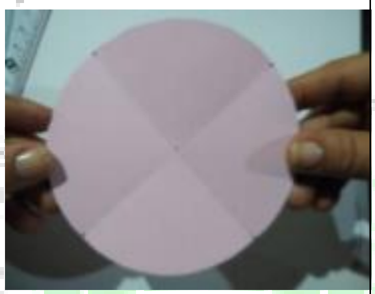
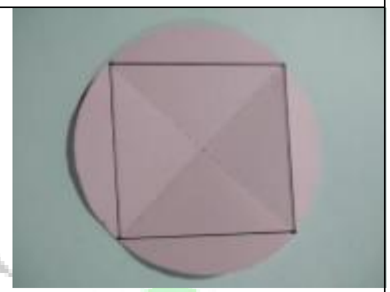
Los caminos son: OP, PA, AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HO, OQ, QO, OR, RO, ON, NM, ML, LK, KJ, JI, IH

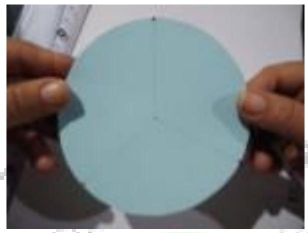


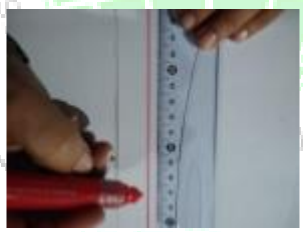
Los caminos son: AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JA



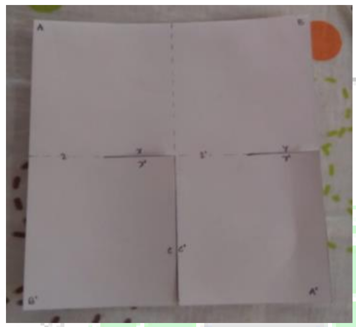
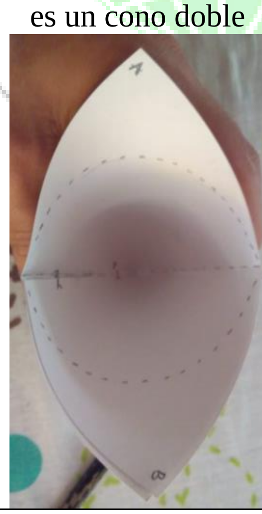
7.1) Experimento topologicos en papel.

Trasformación de disco a cuadrado		
Paso 1 Construimos un disco (circulo) en papel 	**Paso2** Partimos el disco en cuatro partes iguales y marcamos los vértices del cuadrado en el borde del circulo 	 **Paso 3** Unimos con segmentos de recta los vértices del cuadrado.
Paso 3 Doblamos los bordes del círculo , para luego obtener el cuadrado 		

Transformación del disco a un triángulo rectángulo		
Paso1 Construimos un disco (circulo) de radio r. 	**Paso 2** Partimos el disco en tres partes iguales y marcamos los vértices del triángulo. 	**Paso 3** Doblamos los bordes del circulo y transformamos el disco en un triángulo rectángulo 

Construcción de la cinta de Mobius		
Paso 1 	**Paso 2** 	**Paso 3** 
Paso 4 	**Paso 4** 	**Paso 5** 

7.2) Experimentos con planos proyectivos

Transformación de un cuadrado a cono		
Paso 1 Construimos un cuadrado de lado $\boldsymbol{L}$ 	**Paso 2** Hacemos tres cortes en xx', yy' y ee'. 	**Paso 3** Doblamos la mitad derecha BA' a la izquierda en la línea de puntos; B en A y A' en B'. 
Paso 4 Introducimos la hendidura yy' en xx' 	**Paso 5** Traemos A' arriba de A y B' arriba de B (no se unen a ee’), visto desde arriba es un cono doble 	**Paso 6** Cortamos las esquinas AA’ y BB’ obteniendo un cono de bordes suaves 

Transformación de un cono en un disco		
Paso 1 Tomamos el cono suavizado 	**Paso 2** Aplastamos 	**Paso 3** Cortamos la línea de puntos a través de ambas capas 
Paso 4 Abrimos y agregamos refuerzos, que tienen forma de V 		

<table>
<tr><th colspan="3">Construcción de una Cinta ortodoxa de Moebius</th></tr>
<tr>
<td>Paso 1
Partimos de una cinta, haciendo un corte en ee'
</td>
<td>Paso 2
Doblamos en los cortes
</td>
<td>Paso 3
Usamos un rectángulo estrecho en la otra dirección
</td>
</tr>
<tr>
<td>Paso 4
Unimos AB' y BA', habiendo vuelto a unir ee' cortamos a lo largo de aa'
</td>
<td>Paso 5
Giramos un bucle
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

8) CONCLUSIONES

Como consecuencia de lo expuesto en el proyecto de investigación podemos afirmar que una de las falencias en el entendimiento de los cursos básicos como lo es la Topología, dictada en el programa de Matemática Aplicada de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Surcolombiana, es la falta de la visualización de los contenidos y conceptos trabajados en el curso, como también la aplicación de dicha disciplina en el entorno y la naturaleza.

De igual forma, creemos importante tener en cuenta el seguimiento de los contenidos dictados en los cursos básicos del programa de matemáticas, proponiendo que sin cambiar en un 100% el contenido de los cursos, se haga un poco de énfasis en la visualización de los temas, ya que estas dinámicas podrán facilitar el entendimiento y aprendizaje de los conceptos matemáticos y geométricos.

9) BIBLIOGRAFÍA

Alderete, E. O. (1983). *La teoría de Piaget sobre el desarrollo del conocimiento espacial*. Estudios de psicología, 4(14-15), 93-108.

Avenia, G. A. M., & Restrepo, M. B. V. (2012). *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje*. Educación matemática, 24(3), 7-32.

Barr, S. (2012). Experiments in topology. Courier Corporation.

Bastán, M., Cuenya, H., & Fioritti, G. *Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática*. Revista de Educación Matemática.

Bunge, M. (2002). *Ser, saber, hacer*.

Cruz, G., González A, S., & Quiroz, L. (2017). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza del pensamiento espacial en las ciencias sociales*. Espacialidades, 7(2), 91-107.

Delgado Monroy, D. J. (2012) *Propuesta didáctica para el trabajo de algunas nociones de topología en el grado décimo* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

De Miguel González, R. (2015). *Tecnologías de la geoinformación para el desarrollo del pensamiento espacial y el aprendizaje por proyectos en alumnos de secundaria*. Análisis espacial y representación geográfica: innovación y aplicación, 1321-1327.

Extremiana, J. I., Hernández, L. J., & Rivas, M. T. (2001). *Poliedros*. Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández, 139-166.

Fermoso, N. L. C., & González, R. (2017) *La topología y la geometría en la enseñanza educativa básica*. Alternativas en psicología, (37), 93-106

Fritsch, R., & Fritsch, G. (1998). *The Four-Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof.* Translated by Julie Peschke.

Gardner, H. (2016). *Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples*. Fondo de cultura económica.

Gardner, M., & Garcia, L. B. (1988). *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Labor.

Gatica, S. N., & Ares, O. E. (2012). *La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos*. EDMETIC, 1(2), 88-107.

Guillemin, V., Pollack, A., & Velasco, O. A. P. (2003). *Topología diferencial* (Vol. 20). Sociedad Matemática Mexicana.

Hernando Pérez, M. (2014). *Caracterización de las propiedades mecánicas de bacteriófagos mediante microscopía de fuerzas atómicas*

Herrera, M. C. (1993). *Historia de la educación en Colombia. La República Liberal y la modernización de la educación: 1930-1946*. Revista colombiana de educación, (26).

Kosniowski, C. (1992). *Topología algebraica*. Reverté.

Lombardi, O. (2001). *La teoría del caos y sus problemas epistemológicos*. Revista de filosofía, 57, 91-109.

López Ortiz, R. H. (2016). *Análisis de las leyes de la Gestalt y su aplicación en materiales didácticos para niños de educación inicial II* (Doctoral dissertation, Ecuador-PUCESE-Escuela de Diseño Gráfico).

Lucio, R. (2010). *La construcción del saber y del saber hacer.* Revista Educación y Pedagogía, 4(8-9), 38-56.

Macías, S. Sobre la botella de Klein y algunos de sus “amigos”.

Maldonado, C. E. (2014). *¿Qué es eso de pedagogía y educación en complejidad?* Intersticios sociales, (7), 1-23.

Maldonado, C. E. (2013). *Significado e impacto social de las ciencias de la complejidad*. Ediciones desde abajo.

Maldonado, C. E., & Gómez Cruz, N. A. (2011). *El mundo de las ciencias de la complejidad*. Editorial Universidad del Rosario.

Margalef Roig, J., & Outerelo Domínguez, E. (1982). *Una variedad diferenciable de dimension infinita, separada y no regular*.

Marotta, G. (2007). *La topología aplicada al lenguaje visual*.

Mejía, H. D. L. T., & Prada, A. (2008). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría*.

Marrou, H. I. (2004). *Historia de la educación en la antigüedad* (Vol. 80). Ediciones AKAL.

Ministerio de Educación Nacional (2009). *Evaluación Diagnóstica*. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-246644.html

Mobius, A. (1963) *Möbius Strip II*. [Figura]. Recuperado de https://store.mcescher.com/posters/mobius-strip-ii-large-poster-color

Munkres, J. R. (2000). *Topology*. Prentice Hall.

National Research Council (2006). *Learning to Think Spatially: gis as a Support System in the K-12 Curriculum*. Whasington, D.C.: National Academy Press.

Núñez Valdés, J., Alfonso Pérez, M., Bueno Guillén, S., Diánez del Valle, M. D. R., & Elías Olivenza, M. D. C. D. (2004). *Siete puentes, un camino: Königsberg*. Suma: revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 45, 69-78.

Pardinas, F. (1989). *Metodología y técnicas de investigación en ciencias sociales. Siglo XXI*.

Perdigão do Carmo, M. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*.

Pérez-Enríquez, R. (2002). *Algo de Física a lo Largo de una Cinta de Möbius*. Arenario, 2(1), 13-23

Prieto, J. I. R. (2002). *Matemáticas y papiroflexia*. Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria, (21), 175-192.

Prieto, J. I. R. (2008). *Poliedros y teoremas de papel*. In Descubrir las matemáticas hoy: Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2006 (pp. 201-216). Servicio de Publicaciones.

Ramírez Rodríguez, J. (2004). *Extensiones del problema de coloración de grafos* (Doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones).

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.a ed.). Madrid, España: Autor.

Reynoso, C. (2008). Hacia la complejidad por la vía de las redes: nuevas lecciones epistemológicas. Desacatos, (28), 17-40.

Rodríguez Rivera, V. M. (1980). *Psicotécnica pedagógica*.

Ruiz M., I. (2001). *Dinámica Simbólica en la Ecuación de Fitzhugh-Nagumo*. (Tesis de Maestría), Universidad Autónoma Metropolitana, México.

Santamaría, O. (2014). *Variedades Diferenciables. Una introducción*. UNPRG

Sarion, P. L. (1999). *Variedades Diferenciables y Topología*. Murcia.

Schlichtkrull, H. (2011). *Differentiable manifolds*. Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen.

Stadler, M. M. (2002). *¿Qué es la topología?* Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria, (20), 63-77.

Stadler, M. M. (2002). *Topología General*.

Stoll, C. (2018) Kleinbottle. [Figura]. Recuperado de http://www.kleinbottle.com/

Toscano, F. S. (2012). Razonamiento abductivo en lógica clásica. College Publications.

Villegas, A. (2016) Los Puentes De Konigsberg. [Figura]. Recuperado de https://introalafinformatica.blogspot.com/2016/04/los-puentes-de-konigsberg-me-parece-muy.html

Wilson, R. (2013). *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton university press.

Wirth, U. (1998). El razonamiento abductivo en la interpretación según Peirce y Davidson. Alemania. < http://www.unav.es/gep/AN/Wirth.html.