Neiva, 3 de Febrero de 2020

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Sixto Hernández Valencia, con C.C. No. 7684451 y Luis Gabriel Vidal Rojas, con C.C. No. 83040618, autores de la tesis y/o trabajo de grado titulado "Fractalidad, Caos y el lenguaje NetLogo como agentes integradores del currículo de las matemáticas escolares" presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de "Magíster en estudios interdisciplinarios de la complejidad"; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

LUIS GABRIEL VIDAL ROJAS.　　　　SIXTO HERNÁNDEZ VALENCIA.

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: "FRACTALIDAD, CAOS Y EL LENGUAJE NETLOGO COMO AGENTES INTEGRADORES DEL CURRÍCULO DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES"

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Hernández Valencia	Sixto
Vidal Rojas	Luis Gabriel

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Mauro

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Montealegre Cárdenas	Edgar

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MAGISTER EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

FACULTAD: **CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

PROGRAMA O POSGRADO: MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

CIUDAD: NEIVA AÑO DE PRESENTACIÓN: 2020 NÚMERO DE PÁGINAS: 186

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas **X** Fotografías **X** Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general **X** Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros **X**

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento**: NINGUNO**

MATERIAL ANEXO: NINGUNO

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*: **N/A**

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	**Complejidad**	**Complexity**	6.	**Fractalidad**	**Fractality**
2.	**Matemáticas**	**Math**	7.	**Caos**	**Chaos**
3.	**Currículo**	**Curriculum**	8.	**Metodología**	**Methodology**
4.	**Lineal**	**Linear**	9.	**Capacidades**	**Capacities**
5.	**Fragmentado**	**Fragmented**	10.	**Aprendizaje**	**Learning**

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

La presente tesis se fundamenta en la necesidad latente y urgente de introducir algunos elementos de la complejidad en el currículo de las matemáticas escolares de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, de la ciudad de Neiva.

La tesis dinamiza tres ejes fundamentales que consideramos son necesarios para dejar atrás el currículo lineal, fragmentado, desactualizado y tradicional vigente y evolucionar hacia un currículo basado en la complejidad. El primer eje hace referencia a la introducción en el currículo de dos conceptos claves que caracterizan a un sistema complejo, como son la fractalidad y el caos, que emergieron en el siglo XX. El segundo eje atañe a la metodología usada en el proceso aprendizaje - enseñanza de la matemática, a manera de una comunidad de aprendizaje, en la que el protagonista no es necesariamente el profesor. Finalmente el tercer eje plantea la necesidad insalvable del uso de la Modelación Basada en Agentes (NetLogo®) para dinamizar el análisis y comprensión de algunos fenómenos complejos.

Es así como después de un diagnóstico del currículo de matemáticas para el grado noveno y un análisis de los estándares y lineamientos curriculares correspondientes, se diseñaron siete secuencias didácticas que buscan desarrollar, a partir de fractalidad, el caos y el uso del lenguaje NetLogo® las competencias para este grado.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

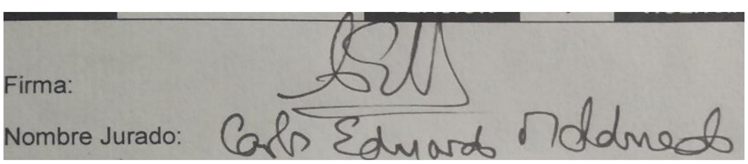
The current thesis is supported in the tacit and urgent necessity to introduce some elements of complexity in the school Math curriculum at Claretiano Gustavo Torres Parra educational institution located in the city of Neiva.

This thesis reifies three fundamental axes which are considered of utmost importance in this study to break the scheme of the linear curriculum which is fragmented, outdated and still in use due to tradition. Thus, this contribution may allow the possible evolution of the curriculum based on complexity. The first axis deals with the introduction of two key concepts in the curriculum which features a complex system. These concepts are fractality and chaos and they are estimated to have emerged in the XX century. The second axis encompasses the methodology being used in the learning process – the Teaching of Math through the means of a learning community in which the main character is not necessarily the teacher. Finally, the third axis states the unavoidable necessity of the use of Model generated means Based on Agents (NetLogo®) which allow the analysis and understanding of some complex phenomena.

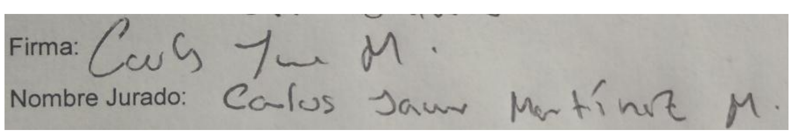
Thus, after the diagnosis of a Math curriculum envisaged for the ninth grade and the pertaining thorough analysis of the standards and curricular guidelines for this level, it was feasible to design seven didactic units which were meant to develop the competencies expected for this level of education departing from fractality, the theory of chaos and the use of NetLogo® Language.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: **Carlos Eduardo Maldonado**



Nombre Jurado: **Carlos Martínez**



UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
NIT: 891180084-2

ACREDITADA DE ALTA CALIDAD
Resolución 11233 / 2018 - MEN

MAESTRÍA EN ESTUDIOS INTERDISCIPLINARIOS DE LA COMPLEJIDAD

TESIS

FRACTALIDAD, CAOS Y EL LENGUAJE NETLOGO COMO AGENTES INTEGRADORES DEL CURRÍCULO DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

POR:

SIXTO HERNÁNDEZ VALENCIA

COD. 20181170623

LUIS GABRIEL VIDAL ROJAS

COD. 20181170688

ASESOR

MAURO MONTEALEGRE CÁRDENAS

COASESOR

EDGAR MONTEALEGRE CÁRDENAS

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

NEIVA, DICIEMBRE DE 2019

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación se desarrolla dentro de la Maestría en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad ofrecida por la Universidad Surcolombiana de la ciudad de Neiva y se inscribe dentro de la línea de investigación Ciencias de la Complejidad en Educación, Ciencias Sociales y Humanas, Ciencias Naturales y Matemáticas.

El punto de partida es el análisis del currículo de matemáticas de los ciclos de educación básica y media diseñado y de alguna manera impuesto por el Ministerio de Educación Nacional, en cuanto a los contenidos, componentes y competencias. En la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, éste es un currículo netamente lineal, asumido con una postura analítica, toda vez que se descompone en una serie de partes cada vez más pequeñas (temas) que los profesores deben enseñar y los estudiantes deben aprender. Una muestra de ello es la reciente serie de libros que dicho ministerio distribuyó gratuitamente en los colegios oficiales del país, para todos los grados, desde primero hasta undécimo, tanto para profesores como para estudiantes. En el libro del estudiante se ve claramente una parcelación de los contenidos a enseñar y una falta de interrelación de unos contenidos con otros. Por su parte, el libro del profesor, plantea una serie de sugerencias metodológicas para enseñar cada uno de los temas. En síntesis, dichos libros de texto, plantean, el qué enseñar en matemáticas y el cómo enseñarlo. Y esto sucede con la mayoría de libros de texto que promocionan las editoriales en el país y que en la mayoría de los casos son asumidos por los docentes como la carta de navegación que guía su colosal responsabilidad de enseñar matemáticas.

Por otro lado, históricamente, en la segunda mitad del siglo pasado y gracias a los trabajos pioneros de grandes científicos y pensadores como, I. Prigogine, E. Lorenz y D. Ruelle, B. Mandelbrot, R. Thom, L. Barabasi, S. Strogatz, D. Watts y otros, se logran consolidar unas "nuevas" ciencias, como respuesta a la crisis de la ciencia clásica. Estas "nuevas" ciencias se agrupan bajo la denominación de Ciencias de la Complejidad y son cronológicamente, correspondientemente a los autores mencionados: la Termodinámica del no-equilibrio, Caos, Fractales, Teoría de catástrofes, Ciencia de redes y Lógicas no-clásicas. (C. E. Maldonado, 2012). A pesar de ser unas ciencias tan recientes, estas ciencias de la complejidad contemporáneas no fueron tenidas en cuenta por el Ministerio de Educación Nacional en el diseño del currículo de matemáticas.

Por otro lado, David Perkins plantea que, en un mundo caracterizado por el cambio , la globalización, la complejidad, las interconexiones sociales, económicas y políticas, fuertemente mediadas por las nuevas tecnologías, ya no es suficiente con seguir enseñando lo mismo que se enseñaba hace décadas, es decir, educando para lo conocido, sino que por el contrario debemos plantearnos el reto de dar el paso de educar para lo desconocido. Es pertinente reemplazar la pregunta de ¿Cómo aprender? (metodología) por ¿Qué aprender? (nuevos contenidos). Y en este qué aprender juega un papel preponderante el uso de la tecnología como herramienta para poder visualizar el conocimiento de manera activa (David Perkins, 2015).

Teniendo en cuenta estos referentes, la presente tesis plantea la posibilidad de abordar, con los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, algunos conceptos fundamentales de fractalidad y el caos, dos de las ciencias de la complejidad, teniendo en cuenta: (1) el desarrollo de competencias según lo planteado en los lineamientos curriculares y los estándares de matemáticas, a la vez que se abarcan los diferentes sistemas (numérico, geométrico, métrico, aleatorio y variacional), (2) el uso de una metodología basada en entornos virtuales que promuevan el aprendizaje autónomo y la comunicación entre estudiantes y profesor, dentro y fuera del aula de clase y (3) el uso de un software (NetLogo®) que permita la modelación de situaciones y conceptos propios de la fractalidad y el caos (simulación basada en agentes ABM) , que a partir del uso de solamente lápiz y papel, es imposible desarrollar.

Metodológicamente, se plantean siete secuencias didácticas para desarrollar con los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra del Municipio de Neiva, a saber: (1) Concepto de fractalidad, (2) Nociones básicas de NetLogo®, (3) Análisis aritmético y algebraico de fractalidad, (4) Fractalidad matemática y su dimensión, (5) Concepto de caos, (6) Fractalidad, caos e interdisciplinariedad y (7) Fractalidad con NetLogo®. Estas secuencias didácticas son desarrolladas por los estudiantes durante el tercer y cuarto periodo académico.

Las secuencias didácticas mencionadas, se colocan en una plataforma WEB previamente diseñada, para que los estudiantes las desarrollen de manera autónoma, permitiendo que sean ellos los protagonistas de su propio proceso y restándole preponderancia al docente. Cada uno de los conceptos de fractalidad y caos desarrollados, están acompañados de una práctica manual, seguida de una práctica computacional en NetLogo®. Esto exige por parte de los estudiantes y del docente la adquisición de conocimientos básicos en programación computacional.

En síntesis la tesis a desarrollar es mostrar que, con la introducción de estos nuevos conceptos de fractalidad y caos, es posible desarrollar capacidades matemáticas, al tiempo que se innova metodológicamente y se adopta la computación como una herramienta para el trabajo con sistemas complejos, como es el caso de fractalidad y caos.

Finalmente, en los resultados se hace un esbozo que relaciona los conceptos de fractalidad y caos desarrollados, con las competencias y componentes definidos en los lineamientos y estándares de matemáticas definidos por el Ministerio de Educación Nacional.

2. JUSTIFICACIÓN

La presente tesis busca mostrar la posibilidad latente y urgente de introducir las ciencias de la complejidad en la Educación Básica Secundaria y Media, a partir de un diseño adecuado del currículo de matemáticas.

El currículo de las matemáticas escolares en Colombia, está orientado por dos documentos importantes, producto de una construcción colectiva de grandes pensadores, liderados por el Dr. Carlos Eduardo Vasco, a saber: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Los pensamientos y sistemas que se proponen en estos dos documentos son: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Históricamente el pensamiento matemático occidental nació en la cultura griega, quienes privilegiaron el cultivo del pensamiento numérico (aritmética) y geométrico, además de la lógica formal. Posteriormente, con la aparición cronológica de nuevas formas de pensamiento y disciplinas como la física, la topología, la probabilidad y el cálculo diferencial, se hizo necesario ampliar ese horizonte matemático a otros tipos de pensamiento como son el pensamiento métrico, aleatorio y variacional. Esta evolución deja entrever que la subdivisión del pensamiento matemático en pensamientos y sistemas, obedece básicamente a razones históricas. Siguiendo esa tendencia histórica, creemos que es necesario y oportuno, actualizar y organizar el currículo de matemáticas, pero esta vez agregando un sexto pensamiento: el **pensamiento complejo y sistemas complejos.**

Desde la década del 70 del siglo pasado, la teoría de la complejidad y las ciencias de la complejidad (caos, fractalidad, teoría de catástrofes, redes complejas y lógicas no clásicas) han venido abriéndose camino vertiginosamente, como una nueva manera de entender los fenómenos del mundo y de la naturaleza, constituyéndose así en una novedosa y ágil perspectiva para producir pensamiento científico de punta (Carlos Eduardo Maldonado, Alfonso, & Cruz, n.d.).

Estas nuevas ciencias de la complejidad reclaman ser tenidas en cuenta en el desarrollo del currículo de matemáticas escolares, si se pretende pasar de una antigua visión reduccionista y lineal de los fenómenos del mundo, propia del pensamiento occidental, a una visión de sistemas complejos más cercana a la realidad. Es así como lo plantea Antoni J. Colom en su libro la (de)construcción del conocimiento pedagógico (Colom, 2002).

En este sentido, pensamos que los conceptos concernientes a la fractalidad (geometría no euclidiana) y la teoría del caos, se constituyen en un eje central articulador, alrededor del cual se pueden **integrar** conceptos propios de los cinco tipos de pensamiento y sistemas, esbozados anteriormente.

Por otro lado, y de acuerdo a la teoría de complejidad, la tesis que se propone busca también mostrar la posibilidad de crear nexos entre fractalidad y caos y temas que comúnmente se consideran que son exclusivos de otras ciencias y disciplinas como la física, la biología, las artes y las finanzas.

Para lograr los dos objetivos mencionados, se tendrán en cuenta dos líneas de trabajo. La primera se refiere al abordaje del caos y la fractalidad desde dos perspectivas: el enfoque determinista y el enfoque estocástico (probabilístico). Se pretende aquí el diseño de actividades y experimentos (secuencias didácticas) para desarrollar con los estudiantes dentro y fuera del aula de clase, donde se logre la integración de la fractalidad y el caos con temas diversos de aritmética, grafos, criptografía, sucesiones y funciones. La segunda línea de trabajo está centrada en tomar algunos problemas y temas tradicionalmente considerados del dominio de otras ciencias y disciplinas y mostrar su relación con el caos y la fractalidad. Se busca así, dar un primer paso hacia la interdisciplinariedad.

Es importante resaltar que, en ambos casos, se usará el computador (software) como herramienta que permite generalizar los procesos iterativos con gran eficiencia y rapidez, permitiendo así ver y analizar comportamientos caóticos que con sólo el uso de lápiz y papel no es posible. En este sentido, podemos decir que se usarán las herramientas informáticas y tecnológicas como un **mediador** para la consecución de los objetivos.

Pensamos que nuestra tesis es un primer esfuerzo que aporta a una reestructuración significativa del currículo de las matemáticas escolares, teniendo en cuenta que incorpora, a un nivel elemental, fundamentos propios de la teoría del caos y la fractalidad y los relaciona de manera **práctica** con los pensamientos y sistemas ya existentes y con temas y problemas de otras áreas del conocimiento.

A futuro y siguiendo esta misma línea de investigación, bien vale la pena enfrentar el reto del diseño de un currículo de matemáticas integrado que abarque toda la educación básica primaria, secundaria y media. Creemos que para esto es necesario comenzar a trabajar desde la educación básica primaria, conceptos fundamentales de la teoría del caos como son la auto semejanza, la dimensión no entera, la iteración, los sistemas no lineales, los sistemas dinámicos, matemática computacional y programación, entre otros.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Descripción del Problema

En la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, el currículo de matemáticas que se orienta en los diferentes grados de la Educación Básica Secundaria, muestra las siguientes características:

(1) No contempla ninguno de los conceptos propios de las contemporáneas Ciencias de la Complejidad, ya que está alineado con los programas, lineamientos curriculares y competencias dictadas por el Ministerio de Educación Nacional. Esto conlleva a que su estructura sea analítica, es decir fragmentada en partes (unidades, temas y subtemas) y lineal, carente de una complejidad que le permita establecer conexiones de unos temas con otros, dentro de las mismas matemáticas y con temas propios de otras áreas del conocimiento (comúnmente llamadas asignaturas).

(2) Es un currículo que está profundamente centrado en el profesor, como protagonista del proceso enseñanza – aprendizaje y en los conocimientos matemáticos (aspectos meramente cognitivos) que deben aprender los estudiantes, desconociendo otros aspectos importantes a tener en cuenta en el proceso de desarrollo de las capacidades de cualquier área, como son los aspectos práxicos y valorativos que le deben ser propios, según plantea Julián de Zubiría en su libro ”Cómo diseñar un currículo por competencias” (de Zubiria Samper, 2013).

(3) Es un currículo nulamente mediado por herramientas digitales, la computación matemática y, en general, por la tecnología. Desde esta perspectiva, se concibe el currículo como algo estático (detenido en el tiempo y en el espacio), como una serie de temas “áridos” que hay que enseñar y aprender, carentes de una dinámica que permita el desarrollo de los conceptos y el establecimiento de conexiones con otras áreas del conocimiento, con el mundo y con la vida misma.

Por lo anterior, se puede inferir que el currículo de matemáticas de la Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, **no es pertinente.** A partir de este diagnóstico y considerando el importante giro que, a finales del siglo pasado, tuvo el currículo de matemáticas en España y en nuestro país, pasando de un enfoque netamente estructuralista, alimentado desde principios del siglo XX por el grupo Bourbakista desde Francia, a un enfoque de matemática aplicada, donde el computador juega un papel trascendental, como medio (herramienta) para desarrollar conocimiento y pensamiento complejo en el desarrollo del currículo de matemáticas con los estudiantes (Martín, 1998), es evidente la necesidad de actualizar el currículo de matemáticas, introduciendo temas propios de las Ciencias de la Complejidad, implementando el uso de herramientas digitales en cuanto a la metodología se refiere y usando la Modelación Basada en Agentes (lenguaje de programación NetLogo®), para saltar a una concepción del currículo de matemáticas como un sistema complejo que es dinámico y está interconectado con conceptos y problemas de las mismas matemáticas y de otras ciencias.

El Anexo A muestra la matriz diagnóstico del problema. Para la elaboración de esta matriz se hizo un análisis a profundidad de los elementos más importantes del currículo de matemáticas de nuestra institución, en los niveles de Educación Básica Secundaria y Media, tomando como referentes: las programaciones ya existentes, el criterio de los profesores y los textos guías utilizados por estudiantes y profesores.

3.2. Sistematización del Problema

Para la sistematización del problema de investigación se hace necesario, en primera medida, determinar cuáles son los temas de la teoría del caos y la fractalidad que permitirían desarrollar las competencias definidas en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, de tal manera que se pueda evidenciar una relación directa entre el tema a desarrollar y la competencia específica. Es de resaltar que esta relación se logrará con el diseño de secuencias de aprendizaje sobre conceptos específicos de fractalidad y el caos, para desarrollar con los estudiantes. Lo anterior da pie al siguiente interrogante:

¿De qué manera es posible introducir, en el currículo de matemáticas, la fractalidad y el caos para desarrollar capacidades matemáticas en los estudiantes de grado 9° de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra?

Por otro lado, es pertinente también, proponer un cambio en la metodología para orientar el proceso enseñanza - aprendizaje de las matemáticas. Esto implica el uso de nuevas tecnologías que faciliten la interconexión y comunicación entre profesores y estudiantes, a manera de una comunidad de aprendizaje. En este sentido el interrogante sería:

¿Cómo podrían vincularse las herramientas digitales actuales, para que actúen como agente mediador entre estudiantes y profesores en el desarrollo del currículo de matemáticas del grado 9° de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra?

Finalmente, teniendo en cuenta que uno de los propósitos de esta investigación es vincular la tecnología y específicamente la programación computacional como medio para el estudio de temas propios del caos y fractalidad, es pertinente explorar la Modelación Basada en Agentes (ABM) con algún software que permita la iteración rápida de procesos un número grande de veces, para determinar de qué manera esto puede contribuir al desarrollo de pensamiento complejo e interdisciplinariedad con otras ciencias. En consonancia, formulamos la siguiente pregunta:

¿Hasta dónde es posible implementar la Modelación Basada en Agentes (ABM) como herramienta computacional para el desarrollo de capacidades matemáticas e interdisciplinariedad con otras ciencias, a partir de la fractalidad y el caos, en los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra?

3.3. Enunciación del Problema

¿Cómo rediseñar el **currículo** de matemáticas escolares, para potenciar el desarrollo de **capacidades** matemáticas de los estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra de la ciudad de Neiva, a partir de la introducción de la **fractalidad** y el **caos,** usando como herramienta computacional la **Modelación Basada en Agentes** (lenguaje **NetLogo®)**?

En la enunciación de este problema se tienen las siguientes palabras clave: currículo, capacidades, caos, fractalidad, Modelación Basada en Agentes, NetLogo.

4. ANTECEDENTES

4.1. Antecedentes Internacionales

4.1.1. Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II) (REDONDO Buitrago Anonia & HARO Delicado María José, 2005)

En este artículo las autoras hacen una breve descripción de los sistemas L, como un mecanismo para generar fractales, a partir de un elemento inicial, al que se le van aplicando una serie de reglas, como son rotaciones y reflexiones. Esta forma de generar fractales resulta útil para generar modelos que pueden describir plantas y árboles.

Seguidamente se hace una confrontación entre los fractales deterministas y los fractales aleatorios. Para dilucidar esta diferencia, para el caso de los fractales deterministas no lineales, se toma como ejemplo el modelo para el estudio de la evolución de una población de insectos, propuesto por Robert May en 1976 y una descripción breve de los conjuntos de Julia y Mandelbrot. Para el caso de los fractales aleatorios, proponen su generación a partir de transformaciones sencillas a una figura geométrica como lo es el triángulo. Esta manera de generar fractales, permiten generar modelos que se aproximan bastante a superficies reales como la erosión de las montañas, las fallas tectónicas y los movimientos de las placas oceánicas y continentales.

Finalmente, se hace mención a las aplicaciones más comunes de la geometría fractal como son: los sistemas dinámicos asociados a las turbulencias atmosféricas y corrientes marinas (atractor de Lorenz), las variaciones observadas recientemente en las órbitas de algunos cuerpos celestes (atractor de Henon), la medición de la longitud de una costa y las estructuras fractaliformes del sistema arterial y venoso del cuerpo humano.

4.1.2. Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I) (Antonia Redondo Buitrago, 2004)

En este trabajo se ofrece una visión general de la geometría fractal y sus aplicaciones. Se hace un análisis de sus posibilidades didácticas mediante una recopilación, síntesis y adaptación de sus principales conceptos, de forma que sean asequibles a los estudiantes de secundaria. Esta primera parte se dedica fundamentalmente al concepto de fractal, su dimensión y la generación de algunos tipos de fractales, a través de actividades pensadas especialmente para los estudiantes de esta etapa escolar.

4.1.3. Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de fractales (Figueiras, Molero, Salvador, & Zuasti, 2000)

En este artículo las autoras consideran que la geometría en la escuela se puede enseñar y enriquecer a partir del estudio de los fractales, logrando la motivación y facilitando el aprendizaje de los estudiantes. Tradicionalmente las matemáticas se han enseñado basándose en la geometría euclidiana, lo que exige un alto grado de reduccionismo de las formas que vemos en la naturaleza. Dada la aplicabilidad de los fractales a diversos fenómenos naturales, se convierten en trampolín para articular la interdisciplinariedad, con otras ciencias como la biología, geología, economía, medicina, geografía, entre otras.

Luego de esbozar el surgimiento y la historia de los fractales y de precisar el concepto de dimensión de semejanza, se proponen una serie de actividades de aula con fractales clásicos, a saber: conjunto de Cantor, el conjunto de Besicovitch, la curva del copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpinski y el tetraedro de Sierpinski. Todo ello, haciendo énfasis en la aplicación del concepto de homotecia a estos fractales y su correspondiente construcción y desarrollo con el software Cabri. Finalmente, como una aplicación de los números complejos propone una práctica con el fractal tipo Newton y su correspondiente construcción con el software Fractint.

Cabe resaltar que, en todas las actividades propuestas, rescata la importancia de aplicar homotecias (de razón menor que la unidad) reiteradamente hasta obtener el fractal deseado, concluyendo que un fractal viene a ser el producto final de una iteración infinita de un proceso geométrico muy simple.

4.1.4. La teoría del caos. Introducción a la matemática de lo incierto en el currículo de secundaria

(Concepción, 1998)

Teniendo en cuenta que la asignatura de matemáticas en el sistema educativo español presenta un bajo rendimiento académico y baja motivación hacia su estudio por parte de los estudiantes (según la evaluación desarrollada por el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación de España), la autora considera que la teoría del caos ofrece buenas posibilidades didácticas para desarrollar el currículo de matemáticas de secundaria.

Comienza criticando la corriente estructuralista que ha permeado las matemáticas desde la época de la escuela bourbakista y que ha hecho de las matemáticas escolares un proceso netamente algebraico, simbólico y abstracto que no motiva hacia su cultivo a los estudiantes. Siendo que la reciente teoría del caos permite mostrar aplicaciones prácticas en el estudio de fenómenos reales y naturales cercanos a la cotidianidad del estudiante, considera que ésta se puede constituir en un excelente recurso didáctico para la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y además permitir la conexión de las matemáticas con otros campos del saber, lo que posibilitaría el desarrollo de un currículo interdisciplinar, teniendo en cuenta los contextos diversos en los que ha nacido la teoría del caos como el estudio del clima, la evolución de poblaciones, fenómeno de la turbulencia, los ritmos cardiacos, la mecánica cuántica y los fenómenos económicos.

Rescata la posibilidad de usar las nuevas tecnologías en la clase de matemáticas, especialmente el ordenador que, con su enorme capacidad de cálculo, nos permite generar procesos iterativos complejos, como son los fractales, que se asemejan bastante a muchas de las formas que se encuentran en la naturaleza, así como las ecuaciones recursivas de la forma $x_{t+1} = f(x_t)$, los sistemas de evolución no lineal y de sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

Por todo lo anterior, la autora propone la tesis de la necesidad del diseño de una unidad didáctica para introducir la teoría del caos (caos determinista y fractales) en el currículo de secundaria. Para su desarrollo se requiere que los estudiantes tengan conocimientos previos en el manejo de funciones y ecuaciones lineales y cuadráticas.

Los conceptos correspondientes a la teoría del caos que se enuncian en el desarrollo de una unidad didáctica están en consonancia con las orientaciones didácticas expuestas en el Diseño Curricular Base y son: ecuaciones recursivas o iterativas, evolución de la dinámica lineal, dinámica no lineal, la función logística y la evolución de las poblaciones, características del caos determinista, conjuntos fractales en la naturaleza y su generación. Finalmente se presentan algunas cuestiones relacionadas con los procedimientos a seguir para lograr la implementación de la propuesta, algunos beneficios que se obtendrían con su implementación y algunos materiales didácticos que podrían ser útiles.

4.2. Antecedentes nacionales

4.2.1. Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica

La tesis se denomina “Elementos de la geometría fractal como estrategia didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes de la Media Básica del C.E. Bachillerato en Bienestar Rural Sede Ciato en el Municipio de Pueblo Rico mediante elementos de la naturaleza”, desarrollado en la Universidad Tecnológica de Pereira.

La tesis, aplicada al grado décimo, abarca conceptos básicos de la geometría fractal como estrategia didáctica apoyados en elementos de la naturaleza y describe su impacto en el aprendizaje (Cardona Grisales, 2017). Se interpretan los fractales como un recurso que posibilite identificar y comparar las semejanzas del mundo natural con la geometría aplicada. Utiliza como recurso pedagógico el enfoque basado en la enseñanza de competencias (conjunto de saberes que permitan llevar una vida plena en un mundo complejo y de continuo cambio) y la enseñanza por indagación (proviene del constructivismo en donde se ofrecen oportunidades continuas a los estudiantes que los involucren activamente desde el punto de vista de la actividad intelectual).

Los fractales pueden ser vistos por los estudiantes de bachillerato usando un lenguaje fácil para ellos, basados en conceptos matemáticos que ya han sido apropiados en el trascurrir académico. Se enfatiza en la no correspondencia de la geometría euclidiana, la cual es desarrollada por el sistema educativo colombiano, ya que la naturaleza carece de elementos como círculos, rectángulos, triángulos y líneas lo cual limita el entendimiento del mundo físico.

Genera etapas de ejecución:

- Sondeo para conocer conceptos previos. Acá encuentra total desconocimiento acerca de los fractales y opta por dar una introducción al particular.
- Implementación de actividades (conjunto de Cantor, triángulo y tarjeta de Sierpinski) para entrar en contacto con los conceptos adquiridos en pro de comprender situaciones y luego resolver problemas.
- Aplicación de encuesta para determinar apropiación de los contenidos.

Se logra un interés notorio en lo referente al contacto del estudiante con la geometría logrando articular de mejor manera el manejo de conceptos de la misma.

4.2.2. Geometría fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales

El libro presenta una propuesta para introducir los conceptos y procedimientos básicos de la geometría fractal en el bachillerato (Estrada William Fernando, 2004). Muestra la aplicación en diversos campos de la ciencia y la tecnología con el apoyo y desarrollo de los computadores. Implementa el concepto de recursividad para generar figuras con características de autosimilitud y dimensión no entera. Se apoya en nuevos contenidos didácticos que aportan nuevos contextos de enseñanza con el fin de enriquecer los cursos normales de matemáticas y direccionando hacia la oportunidad de reforzar los conocimientos a transmitir.

Familiariza a los estudiantes con temas científicos muy recientes lo que aumenta la probabilidad de hacer avanzar la ciencia y la tecnología. De forma paralela ayuda al docente a ponerse al tanto de los avances de su propia disciplina y en general, enriquecer su actividad intelectual.

Consta de los siguientes ítems: construcción de fractales (métodos estáticos y dinámicos) y autosimilitud (procesos recursivos), dimensión fractal (homotecia, método del compás, recubrimiento), transformación afín (rotación, dilatación, contracción, reflexión, traslación, combinación), proceso de Barnsley, fractales tridimensionales (plegados), teoría fractal (estructuras biológicas, economía, estructuras en ingeniería y comprensión de imágenes).

4.2.3. Una introducción a la geometría fractal a través del tratamiento de la autosimilitud integrando un ambiente de geometría dinámica.

Desarrollada en la Universidad del Valle siendo aplicada al grado noveno y que busca relacionar estructuras fractales y su influencia en el pensamiento del estudiante a partir de la visualización (Garzón Castro & Cabezas Esterilla, 2016). Utiliza como primer paso el abordaje del problema y su contextualización, formulando el mismo y generando situaciones de diseño. Luego se genera un acercamiento a la geometría de los fractales desde el punto de vista didáctico, cognitivo y tecnológico para culminar con el diseño de situaciones particulares.

A partir de un proceso de comparación genera un paralelismo entre la geometría euclidiana y fractal para abordar la iteración como un concepto de implementación y apoyado en software (Cabri) lograr plasmar recursos visuales. El trabajo metodológico se aborda en fases comenzando por el análisis preliminar y terminando con una conclusión que se torna en contundente: "la práctica en geometría en forma visual y manipulativa para construcciones generadas desde determinadas consignas que fueron propuestas, pueden contribuir a la motivación de los estudiantes frente a un tema".

4.2.4. Didáctica en la enseñanza de la "fractalidad" en educación básica desde un modelo interdisciplinar macta

La tesis da a conocer los principios básicos de la geometría fractal (Desde, Modelo, Macta, & Rodriguez, 2018) implementando aplicaciones en torno a una secuencia didáctica interdisciplinar para fortalecer el pensamiento geométrico-métrico en un curso de básica secundaria (noveno). Hace hincapié en la limitación que presenta la geometría tradicional o euclidiana partiendo del hecho de que en la naturaleza se carece de figuras que ahí se incorpora (líneas, conos, esferas, circunferencias, etc.) y por el contrario la dimensión puede tomar valores decimales que interpretan de mejor manera las situaciones que nos rodean, apareciendo la fractalidad como elemento integrador. Generan una articulación con la programación del sistema educativo en básica y media para incorporar la geometría fractal como parte fundamental del conocimiento.

Implementa el software (Geogebra) como un elemento de apoyo para la comprensión de los contenidos y se adentra en otras disciplinas como las ciencias naturales, el universo, física, matemáticas, artes, tecnología. Presenta como objetivo general fortalecer el pensamiento geométrico-métrico a través del diseño de una estrategia didáctica, basada en un enfoque interdisciplinar, para aplicar conceptos básicos de la teoría fractal con una comunidad educativa. Es un trabajo con enfoque cualitativo y de carácter experimental.

Utiliza mecanismos como encuestas de tipo diagnóstico, sesiones de trabajo de tipo expositivo, aplicación de secuencias didácticas que permite interactuar con estudiantes, el uso de recursos informáticos y la modelación y simulación de modelos fractales. Se extrae como primera medida el desconocimiento del tema fractal que se compensa en el hecho de generar interés cuando se involucra en el contenido temático y la mejora en lo concerniente a los promedios de notas después de su implementación. Con base a lo expresado y sumado al agrado por parte del estudiantado, sugieren crear estrategias en los contenidos en donde intervenga de manera más directa la geometría fractal.

5. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

5.1. Marco teórico

5.1.1. El currículo de las matemáticas escolares en Colombia

Son dos los documentos que definen los ejes del currículo de matemáticas en Colombia, respecto a las matemáticas escolares que se orientan en las instituciones educativas de Educación Básica Secundaria y Media, a saber: Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), promulgados por el Ministerio de Educación Nacional.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se hace una revisión histórica y reflexiva de los elementos que debe abarcar el currículo de matemáticas escolares y se definen: los procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje de las matemáticas, los conocimientos básicos de matemáticas a ser enseñados y el contexto o ambientes en los que ocurre el aprendizaje.

En cuanto a los Procesos generales se definen los siguientes:

La formulación, tratamiento y resolución de problemas: considerado como el eje articulador del conocimiento matemático escolar, permite que el estudiante ponga a prueba diferentes conceptos, estrategias y procedimientos con el objetivo de resolver una situación problema que puede tener su origen en el contexto del estudiante, en otras ciencias o en las propias matemáticas.

La modelación: entendido como el proceso que permite generar una estructura o sistema figurativo mental (representación mental) que reproduce o representa la realidad en forma esquemática, para hacerla más comprensible. Una vez construidas estas representaciones mentales, es posible efectuar sobre ellas transformaciones, procedimientos, conjeturas o razonamientos que nos permitan aproximarnos a la demostración.

La comunicación: hace referencia a las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos, como un proceso intrínseco y radicalmente ligado al quehacer matemático y que da cuenta del grado de comprensión de los conceptos matemáticos.

El razonamiento: relacionado con la capacidad para percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar esas conjeturas, dar explicaciones coherentes, proponer interpretaciones posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Este proceso abarca tanto el razonamiento inductivo y abductivo, al formular hipótesis y conjeturas, como el razonamiento deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos.

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos: este proceso se refiere a la capacidad de construir y ejecutar, de manera rápida y segura, procedimientos mecánicos de rutina o “algoritmos” para facilitar el desarrollo de una tarea. Cabe resaltar que estos algoritmos son simples herramientas que no pueden eclipsar los conceptos matemáticos implícitos en una situación matemática específica. Para comprender la contribución de los procedimientos en la actividad matemática, deben considerarse los mecanismos cognitivos de alternación, automatización y reflexión. La alternación permite ir del conocimiento conceptual al conocimiento procedimental para encontrar sentido a los resultados obtenidos. La automatización, aunque no aporta al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático, permite mediante la práctica repetida la obtención de resultados rápidos, seguros y efectivos. Por su parte, la reflexión, exige entender y explicar los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz.

La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos es de capital importancia para que los estudiantes comprendan el uso y el manejo de calculadoras, hojas de cálculo (Microsoft Excel), la programación computacional (software Scratch) y el lenguaje de programación NetLogo.

En cuanto a los conocimientos básicos, los documentos mencionados, definen cinco pensamientos y sistemas a saber:

Pensamiento numérico y sistemas numéricos: Asociado a la comprensión del número, su representación, las relaciones que existen entre ellos y las operaciones que con ellos se efectúan en cada uno de los sistemas numéricos. Este pensamiento también abarca el cálculo mental y el uso de los números en estimaciones y aproximaciones.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos: Referido al examen y análisis de las propiedades de los espacios en dos y en tres dimensiones, y las formas y figuras que estos contienen. Involucra las transformaciones, traslaciones, reflexiones, rotaciones, homotecias y simetrías, además de las relaciones de congruencia y semejanza entre formas y figuras, y las nociones de perímetro, área y volumen.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas: Abarca la comprensión de las características mensurables de los objetos tangibles y de otros intangibles como el tiempo; trata las unidades y patrones que permiten hacer las mediciones y de los instrumentos utilizados para hacerlas. Involucra también el cálculo aproximado o estimación para casos en los que no se dispone de los instrumentos necesarios para hacer una medición exacta y su correspondiente margen de error.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos: Involucra situaciones susceptibles de análisis a través de la recolección sistemática y organizada de datos, la ordenación y presentación de dicha información, así como los gráficos y su interpretación. También abarca métodos estadísticos de análisis, nociones de probabilidad, relación de la aleatoriedad con el azar y noción del azar como opuesto a lo deducible, como un patrón que explica los sucesos que no son predecibles o de los que no se conoce la causa. Analiza también las tendencias en un conjunto de datos, con el propósito de hacer predicciones y conjeturas.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: Relacionado con los procesos de cambio, el concepto de variable y el álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio. Abarca las Relaciones y las funciones con sus correspondientes propiedades y representaciones gráficas. Busca modelos matemáticos para representar situaciones reales o hipotéticas.

Por último, el contexto hace referencia a los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Se diferencian tres tipos de contexto, a saber: contexto inmediato o contexto de aula, contexto escolar o contexto institucional y el contexto extraescolar o contexto sociocultural (lo que pasa fuera de la institución: en el ambiente de la comunidad local, de la región, el país, el mundo y el universo en general).

Estos tres elementos articuladores del currículo de matemáticas escolares, se pueden representan en el siguiente diagrama.

Figura 1. *Ejes articuladores de las matemáticas escolares, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998)*

Una característica desfavorable de esta organización curricular del MEN es su marcada visión analítica, como se puede observar, al tratar de particionar el currículo en partes más pequeñas para su estudio y análisis (reduccionismo clásico). Desde la fractalidad y el caos se busca dar una visión holística y sintética al currículo de matemáticas, reconociendo la complejidad que posee. A través de la fractalidad se pretenden trabajar el entrecruzamiento de procesos generales y los pensamientos y sistemas expuestos anteriormente. En cuanto al contexto, se tomará la naturaleza y el entorno que rodea a los estudiantes.

Por otro lado, Julián de Zubiría en su libro "Cómo diseñar un currículo por competencias" (de Zubiria Samper, 2013), nos aclara cuestiones de capital importancia en torno al currículo y al currículo diseñado desde el concepto de competencia, en toda la acepción de la palabra. Además de esbozar los fundamentos del currículo y los principios para su diseño, plantea también que abordar un currículo desde el concepto de competencia, requiere de una interpretación adecuada de este concepto. Es así como plantea que la competencia debe ser entendida como un proceso de desarrollo humano, de carácter general, flexible y contextual (contexto personal, familiar, institucional y sociocultural de la persona que aprende)

Por tanto, si el currículo por competencias debe privilegiar el desarrollo de la persona, es pertinente que una competencia abarque tres dimensiones fundamentales del ser humano: la cognitiva, la valorativa - actitudinal y la práxica o procedimental. En la mayoría de nuestras escuelas se da énfasis a la dimensión cognitiva, subvalorando o ignorando las otras dos dimensiones, que son igual o más importantes que la primera.

La dimensión cognitiva hace referencia a los conceptos propios de cada área y grado y que deben ser aprendidos por los estudiantes. La dimensión valorativa hace referencia a la valoración justa del conocimiento aprendido al descubrir que ese conocimiento es significativo y útil, al tiempo que hace parte de un proceso histórico de construcción de la humanidad (trascendencia).

Por su parte, la dimensión práxica hace referencia a que la persona que aprende un determinado concepto sea capaz de usarlo y aplicarlo en situaciones y contextos diferentes a aquel donde fue aprendido inicialmente.

Lo anterior se evidencia claramente cuando afirma (de Zubiria Samper, 2013, p.178): trabajar por competencias exige abordar las diversas dimensiones humanas de manera integral y emergente, y dejar atrás el predominio que alcanzó la dimensión cognitiva. Trabajar por competencias implica abordar los contenidos en contextos diversos. Frente al aprendizaje descontextualizado y desarticulado que ha venido privilegiando la escuela desde tiempos inmemoriales, trabajar por competencias implica privilegiar el desarrollo. Y frente a una escuela que ha secuenciado y evaluado de una manera esencialmente arbitraria, rutinaria y descontextualizada, trabajar, mediar y evaluar por competencias exige organizar el currículo y las evaluaciones por niveles de complejidad creciente. Y todo ello hay que hacerlo teniendo en cuenta el contexto sociocultural, institucional y personal en el que nos desenvolvemos.

Por otro lado, plantea que los principios que deben orientar el diseño curricular son: el desarrollo, la integralidad, la generalización, la contextualización, la flexibilidad y la profundidad (en contraposición a la extensión).

Respecto al último de los principios enunciados (la profundidad) se observa cómo hoy en la mayoría de las instituciones educativas de educación básica, secundaria y media, la carta de navegación curricular de los profesores de matemáticas es un texto guía de alguna editorial (en muchas ocasiones, la que otorgue más dádivas y privilegios económicos), o en el mejor de los casos el texto guía editado por el propio Ministerio de Educación Nacional y que se convirtió prácticamente en el único elemento orientador del proceso de enseñanza de las matemáticas escolares. Esta situación trae dos inconvenientes mayores. Por un lado, desconoce por completo los contextos propios de cada institución y por otro lado muestra el currículo de matemáticas como una secuencia de temas desconectados unos de otros, dando así prioridad a la extensión y no a la profundidad, tal como lo plantea Julián de Zubiría, en su último principio.

Cabe resaltar, cómo en el principio de integralidad, de Zubiría propone que, para la formación integral del individuo, la escuela debe proponer un currículo no solamente centrado en lo académico (como hasta ahora lo ha venido haciendo, en la mayoría de los casos), sino que debe involucrar las dimensiones ética, estética, social, comunicativa y práxica del ser humano.

La ausencia de estos elementos ha conducido a una fragmentación del conocimiento, a tal punto que se habla de asignaturas, desconectadas unas de otras, sesgándose así la relación de unas con otras, esto es, una nula oportunidad para la interdisciplinariedad, entendida como la posibilidad de resolución de problemas del contexto y problemas dentro de las mismas ciencias, a partir de una integración de saberes.

La integralidad como principio orientador del currículo debe provocar el paso de una educación centrada en la reproducción y reiteración a una educación de la producción, el paso de una educación de la imitación a una educación de la creación, de una educación centrada en el aprendizaje a una educación centrada en el desarrollo. Esto significa que la escuela debe procurar un currículo dispuesto a desarrollar la creatividad de los estudiantes, esto es, un currículo provocador de la aparición de emergencias, la emergencia entendida como novedad.

En este sentido, de Zubiría, apoyándose en autores como Maturana, Varela y Llinás (de Zubiria Samper, 2013, pp. 189 - 190) define la emergencia como una nueva realidad surgida de las características particulares de los elementos constitutivos; y por ende esta emergencia ni es independiente de las interacciones ni es reductible a ellas. Los autores mencionados proponen que la novedad hace parte de la actividad cerebral. Para Llinás lo que hace el cerebro es modelar y predecir, de tal manera que la conciencia es una emergencia del cerebro y la mente una emergencia de la evolución, ya que no hace parte de los elementos que lo constituyen, sino que es la propia actividad cerebral la que genera esta novedad. Otro ejemplo de emergencia es el "yo", al considerar que somos más que la suma de nuestros actos, más que la suma de nuestros órganos y de nuestras ideas.

En síntesis, el currículo de matemáticas de la escuela debe erradicar la fragmentación y favorecer la interdisciplinariedad con otras áreas del conocimiento, pues solo así podrá emerger la novedad y la emergencia que se traduce en el desarrollo de la creatividad.

5.2. Marco conceptual

5.2.1. Fractales

Para definir un fractal es ineludible referenciar al creador de este neologismo: Benoît Mandelbrot. Él, en su ensayo científico (como él mismo lo llama) "La geometría fractal de la naturaleza" (Mandelbrot, 1997) plantea que la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, que la geometría euclidiana no puede a explicar, sino que ésta se da a un nivel completamente diferente. El número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos, infinito. Él acuñó el término fractal a partir del adjetivo latino *fractus* o el verbo *frangere* que significa "romper en pedazos", aunque para él también significa "irregular", confluyendo ambos significados en el término $fragmento$.

Para la creación de la geometría fractal, Mandelbrot acudió a estructuras "patológicas" creadas por los matemáticos modernos hacia finales del siglo XIX y comienzos del XX (y que no encajaban en los patrones clásicos de Euclides y Newton), como Cantor, Peano, Hausdorff, Besicovitch, Koch, Sierpinski, Fatou y Julia, entre otros.

"Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff – Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica." (Mandelbrot, 1997, p. 32).

Por su parte Rubiano (2009), nos ofrece una definición más asequible e intuitiva de lo que es un fractal, a saber: un fractal es una estructura que posee dos propiedades: autosimilitud y dimensión no entera.

Ser autosimilar significa que, cuando examinamos pequeñas porciones del objeto, la imagen que vemos no es más que una copia de nuestro objeto inicial. Dicho de otra manera, al ampliar partes de un fractal, emergen estructuras que parecen ser idénticas al original. Son ejemplos de fractales de la naturaleza, el brócoli y la hoja del helecho.

Por su parte el concepto intuitivo, y por lo mismo obvio, de dimensión viene desde los tiempos de Euclides. Para esta visión clásica de la geometría, una línea o un segmento de recta son de dimensión uno (uno-dimensional) ya que solo podemos desplazarnos de izquierda a derecha, En el caso de un punto o un conjunto finito de puntos, la dimensión que se le adjudica es cero, ya que la movilidad no existe. Por su parte un cuadrado es de dimensión dos ya que en el desplazamiento de uno de sus puntos necesitamos tanto del largo como del ancho para su descripción. De manera similar a lo anterior, al espacio en que habitamos le adjudicamos la dimensión tres (largo, ancho y alto).

Sin embargo, la dimensión de un fractal, escapa a este modelo clásico simplista y adopta otras definiciones, de las cuales rescatamos dos, en concordancia con nuestros propósitos.

“Definimos la dimensión autosimilar de X como el único valor d que satisface la ecuación $N(k) = k^d$, i.e., $d = \frac{\log N}{\log(k)}$” (Rubiano O. Gustavo N., 2009, p. 21)

“Definimos $D(A)$, la dimensión por cajas de la figura A como $D(A) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln N_\delta(A)}{\ln \frac{1}{\delta}}$, donde $N_\delta(A)$ es el número de cuadrados de lado $\delta > 0$ que cubren a A.” (Rubiano O. Gustavo N., 2009, p. 23).

A continuación se describe un fractal matemático siendo uno de los más comunes y que, de acuerdo a los objetivos de esta investigación, sirve de ejemplo para lo expresado. En las secuencias didácticas que son parte del contenido de la presente tesis (Sección Anexos), se explora a mayor profundidad y con detalle muchos otros más.

5.2.2. El conjunto de Cantor

Este fractal creado por George Cantor (St. Petersburgo, Rusia 1845- Halle, Alemania 1918) se construye a partir de un segmento de recta en un proceso llevado hasta el límite, es decir, el conjunto de Cantor es el objeto que está al final de aplicar **reiteradamente** nuestro proceso. Los elementos básicos del proceso son los siguientes:

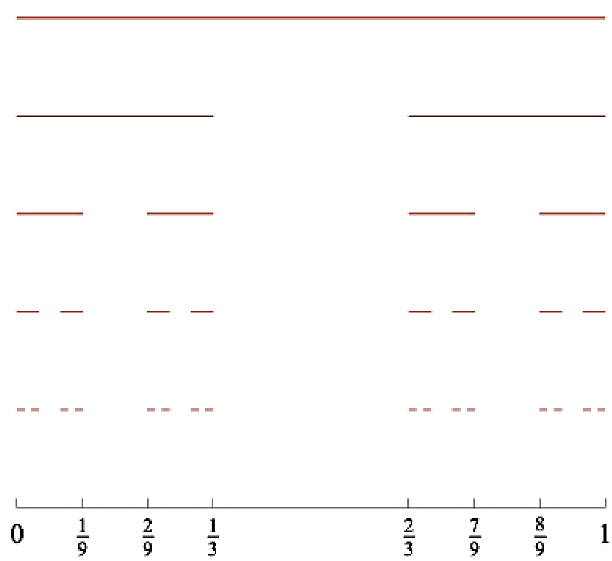


Figura 2. *Construcción del con junto de Cantor. Recuperado de Iteración y Fractales (con Mathematica) (Rubiano O. Gustavo N., 2009)*

Paso 1. Dado el segmento de recta constituido por el intervalo cerrado [0 , 1], extraemos de él la tercera parte central, es decir, el intervalo abierto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Este primer paso nos deja ahora con dos segmentos de recta, cada uno en escala tres veces menor que el inicial.

Paso 2. Tomamos los segmentos de recta producidos en el paso anterior, esto es, los segmentos cerrados $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ y sobre cada uno de ellos efectuamos nuevamente el proceso indicado en el paso 1.

Paso 3. El paso anterior produce ahora cuatro intervalos y sobre cada uno de ellos volvemos a efectuar el paso 1. Continuamos este proceso de manera indefinida.

Los puntos del intervalo inicial [0, 1] que nos quedan al final de estas infinitas extracciones forman el llamado conjunto de Cantor denotado por C.

5.2.3. Caos

Formalmente, el caos se refiere al problema matemático de la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales (Reynoso, 2006). En otras palabras, se llama caótico a todo sistema en el cual la relación entre los valores iniciales y valores de su trayectoria ulterior no es proporcional. Las herramientas matemáticas que se ocupan de las aplicaciones son las ecuaciones de diferencia: un conjunto de fórmulas que, juntas, expresan los valores del siguiente paso en función de los valores actuales. Las herramientas para estudiar los flujos, en cambio, son las ecuaciones diferenciales: un conjunto de fórmulas que constantemente expresan las tasas de cambio de las variables en función de los valores actuales de las variables. En una aplicación, una secuencia de período tres es aquella en la que cada estado es idéntico al que se dio tres pasos antes, pero no al estado de uno o dos pasos anteriores.

A fin de explorar las estructuras matemáticas propias del caos en un caso práctico, se propone analizar inicialmente una entidad cuantitativa bien conocida, la ecuación logística, también llamada mapa logístico, mapa cuadrático, mapa de Feigenbaum, parábola logística de Robert May o ecuación de [Pierre] Verhulst. Es la forma más simple conocida del caos. La ecuación logística es familiar, bajo distintas expresiones matemáticas, para quienes han trabajado con dinámica de poblaciones o epidemiología. Uno de los estudiosos que estableció que expresiones matemáticas muy simples podrían desencadenar dinámicas muy complicadas fue el matemático australiano Sir Robert May (1973; 1976), uno de los pioneros de la ciencia del caos, por aquel entonces en la Universidad de Princeton. May descubrió además que en los márgenes de determinados rangos, la dinámica de una población a lo largo del tiempo puede fluctuar caóticamente: las diferencias que median entre el mantenimiento del equilibrio, la periodicidad y el caos puede ser del orden de los decimales.

La ecuación logística describe la dinámica de una población, así como otros fenómenos que responden a los mismos principios. Quien la formuló tuvo en cuenta los efectos de saturación de un ecosistema, que hacen que cuando una población llega al máximo posible que el medio ambiente puede sustentar, el parámetro que determina el crecimiento deba disminuir; eso equivale a considerar este parámetro como una función del número de individuos. Hay que señalar sin embargo que la ecuación logística describe cualquier sistema de una sola variable con potencialidades caóticas: puede ser el ritmo de los chorros que salen de un grifo por unidad de tiempo, el comportamiento de un gas en función de la temperatura, o lo que fuere. Que haya un parámetro de control que mantenga los valores en un rango involucra retroalimentación negativa; utilizar el valor actual como base del cálculo del momento siguiente implica no sólo iteración, sino recursividad.

La ecuación logística tiene la forma: $x_{t+1} = kx_t(1 - x_t)$. La variable a examinar es el valor x. El parámetro o valor de límite de la fórmula es una constante, k. El subscripto t representa al tiempo y es el valor actual de la variable x. El subscripto $t + 1$ representa un período de tiempo de la variable x que sigue a la anterior, x_t. El factor $(1 - x_t)$ implementa el efecto de recursos finitos. Para mapear la fórmula se requiere un valor inicial, que coincide con lo que en teoría del caos se denomina condiciones iniciales, y que se representa como el primer valor de x_t, o sea x_0. En las secuencias didácticas propuestas y que se encuentran en la sección Anexos se trabaja con mayor ahínco el témino Caos y sus representaciones.

5.2.4. El lenguaje NetLogo®

Un modelo es una descripción abstracta de un proceso, objeto o evento (Rand, n.d.), no es una representación perfecta, no encaja exactamente con el mundo real y lo importante es que se exageran algunos aspectos en detrimento de otros. De hecho, George Box, un famoso estadístico, tiene una frase que dice "Esencialmente todos los modelos están equivocados, pero algunos son útiles". El modelo perfecto no es el que mejor representa el mundo que lo rodea, sino el que en algún sentido exagera los aspectos del mundo en los que hay interés y que ayuda a resolver los problemas que se tienen. Exageran algunas variables al mismo tiempo que ocultan otras para así hacer posible concentrar básicamente en los aspectos que realmente interesan.

Un MBA (Modelo Basado en Agentes) es un modelo compuesto por agentes, entendiendo como agente un elemento autónomo e individual que tiene propiedades y que puede realizar acciones en una simulación computarizada. Un MBA está vinculado a la idea de que el mundo mismo puede ser modelado utilizando agentes, un medio ambiente y una descripción de las interacciones agente - agente y agente - medio ambiente. En sus consideraciones sociales, se puede decir que es una de las mejores formas de describir los sistemas complejos que vemos a nuestro alrededor. Generalmente cuando se piensa en agentes, se direcciona hacia humanos individuales en determinado contexto, pero un agente no tiene porqué ser necesariamente un humano individual, puede ser por ejemplo una empresa, en cuyo caso el MBA puede ser la modelización de las interacciones entre las diferentes compañías. Otros ejemplos de MBA pueden ser: agentes humanos, como el estudio de la propagación de una enfermedad en las personas, de tipo biológico, como el avance y reproducción de un virus, de tipo gubernamental, como las interacciones entre agentes del gobierno. Muchos MBA tratan de caracterizar sobre un patrón de conductas y cuando se tiene un solo individuo que de muchas formas es errático, es diferente de la conducta general, es muy difícil predecir o entender qué es lo que va a hacer ese individuo.

Hay dos cuestiones básicas, una es construir un propio modelo completamente desde el comienzo, como con cualquier otro programa de computador, pero también hay otra forma que mucha gente está empezando a utilizar que es usar una caja de herramientas (Software) que permite crear el MBA como NetLogo®. Hay otras herramientas disponibles para ejecutar determinados procesos como por ejemplo el ancestro de todos los paquetes para MBA desarrollado en el Instituto de Santa Fe en los tempranos años 90, que es el Swarm desarrollado en un lenguaje que se llama Objective C que está obteniendo alguna popularidad debido al hecho de que es la base para correr en MAC y desarrollar apps. Swarm todavía existe y está en uso, de hecho, hay un congreso que se denomina Swarm Fest que se hace todos los años y se puede ir para ver los desarrollos en Swarm y en forma más general, los modelos basados en agentes. Repast, que es una herramienta construida en el Argonne National Lab, está escrito en varios lenguajes, pero más popularmente implementado en JAVA y ya tiene varios años desde comienzos del 2000. Es muy popular aún, se usa mucho. Tenemos a Ascape, en parte desarrollado en el Brookings Institute con base en el modelo sugarscape que fue creado por Joshua Epstein y Robert Axtell en su libro fundacional sobre modelado basado en agentes, tiene ya 20 años. Está también Mason, que fue desarrollado por la Universidad George Mason por Sean Luke es muy rápido y eficiente con los algoritmos de los MBA. El Mass, es una caja de herramientas que proviene de Hungría desarrollado por Laszlo

Gulyas y colegas es una suite para simulaciones multiagentes. Brave es un programa interesante para simulaciones de MBA ya que nos permite explorar los aspectos físicos de los modelos basados en agentes.

Net Logo, que es un lenguaje orientado a los MBA fue diseñado por Uri Wilensky en la Universidad de Northwestern siendo el entorno para MBA más usado y es también el más sencillo de aprender en muchos aspectos obteniendo un aprendizaje rápido. Tiene un principio para el diseño que realmente facilita su manejo. El primero de todos es que posee un umbral muy bajo pudiendo construir modelos simples desde la primera vez que se usa y tiene forma muy sencilla de comprender, pero al mismo tiempo tiene un techo muy alto, el lenguaje es lo suficientemente expresivo para crear modelos altamente complejos. Los investigadores pueden leer y escribir, así como publicar los modelos. En muchos softwares de modelado tradicionales el modelador conceptual está por un lado y por el otro existe el ingeniero de software que implementa, siendo dos personas diferentes. La idea detrás del Net Logo es que estas dos personas puedan ser la misma. Esto permite angostar o aún eliminar la distancia que existe entre el modelador y el programador permitiendo crear un entorno interactivo e iterativo de desarrollo. El desarrollador del modelo y el desarrollador del programa pueden comunicarse en forma constante acerca del modelo que están creando. También tiene la posibilidad de compartir el modelo muy fácilmente ya que puede ser entendido en una forma muy sencilla y debido a estos hechos, la eliminación de la distancia entre el modelador y el programador, hace muy sencillo verificar y desafiar al modelo que es muy importante para el progreso de la ciencia y el modelado.

Hay un aspecto muy interesante del Net Logo, es una gran historia, en cualquier caso. Logo fue por primera vez desarrollado cerca del año 1969 por Seymour Papert y sus colegas. Logo es de hecho el lenguaje madre detrás de NetLogo. En Logo, que no fue desarrollado como un lenguaje multiagentes sino como un lenguaje para un solo agente, esencialmente controla una pequeña tortuga, un robot que realiza acciones en el mundo. Seymour Papert desarrolló esto con sus colegas para ayudarles a los niños a aprender cómo son las cosas desde una perspectiva computacional. Y cuando presentó el Logo a la clase muchas veces utilizaba uno de estos robots para que los niños interactuaran más con el robot a quien denominó tortuga, ya que a los niños les gusta jugar con dicho animal. Como un resultado de todo esto la primera visualización del agente del robot físico, también fue llamado tortuga. Net Logo es un descendiente directo del lenguaje de programación Logo en concordancia también se refiere a todos los agentes como tortugas. Esto no significa que los agentes sean lentos o algo así, es simplemente como llamamos a la clase básica de agentes en el entorno de programación Net Logo.

6. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

6.1. Objetivo general

Plantear un diseño curricular que posibilite la introducción de la fractalidad y el caos, como ejes integradores del currículo de matemáticas del grado 9° de Educación Básica Secundaria, de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra, a partir de una metodología apoyada en el uso de la tecnología y la Modelación Basada en Agentes (lenguaje de programación computacional NetLogo®) y que permita concebir el currículo de matemáticas como un sistema complejo, interconectado con otras áreas del conocimiento.

6.2. Objetivos Específicos

- Hacer un diagnóstico del currículo de matemáticas del ciclo de Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra.
- Diseñar una serie de secuencias didácticas a partir de la introducción de la fractalidad y el caos, que permitan integrar el currículo de matemáticas del grado 9° de Educación Básica

Secundaria y que simultáneamente promuevan el desarrollo de capacidades matemáticas en los estudiantes.

- Proponer una metodología basada en el uso de herramientas digitales que faciliten la comunicación entre estudiantes y profesores dentro y fuera del aula de clase, para restarle protagonismo al profesor y aumentárselo a los estudiantes.
- Implementar el uso de la Modelación Basada en Agentes (lenguaje de programación NetLogo®) como herramienta para el desarrollo de la fractalidad y el caos y su conexión con otras áreas del conocimiento, como la biología.

7. METODOLOGIA

De acuerdo a las líneas de investigación ofrecidas por el programa de Ciencias Exactas y Naturales, durante la elaboración de la presente tesis, ésta se enmarca en la línea de Ciencias de la Complejidad en Educación, Ciencias Sociales y Humanas, Ciencias Naturales y Matemáticas.

7.1. Tipo y enfoque de la investigación

De acuerdo a Hernández Sampieri (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2006), la presente tesis tiene un enfoque cualitativo, que va de lo particular a lo general (proceso inductivo), teniendo en cuenta que se pretende plantear una serie de secuencias didácticas sobre fractalidad, caos y Modelación Basada en Agentes, que se pondrán en práctica con los estudiantes de grado Noveno de Educación Básica Secundara para posteriormente establecer, de manera general, hasta qué punto, es posible desarrollar los pensamientos matemáticos y las capacidades correspondientes de una manera integrada, buscando la interdisciplinariedad con otras áreas.

Tiene un alcance exploratorio y correlacional. Exploratorio ya que no existen investigaciones, teorías o experiencias concretas previas enfocadas al desarrollo de capacidades matemáticas (cognitivas, valorativas y actitudinales) y a la integración curricular, a partir de la fractalidad y el caos y el uso de la Modelación Basada en Agentes (ABM) en la Educación Básica Secundaria. Es correlacional porque después de la aplicación de las secuencias didácticas mencionadas, se buscará cómo relacionarlas con el desarrollo de pensamientos matemáticos y capacidades matemáticas.

Para logar nuestro objetivo, diseñaremos una muestra de secuencias didácticas para ilustrar cómo se pueden desarrollar algunos temas propios del caos y la fractalidad en algunos grados de la educación básica secundaria y media y que permiten integrar los cinco pensamientos mencionados y el desarrollo de las capacidades pertinentes

7.2. Universo de estudio, población y muestra

El universo para el desarrollo de esta investigación son algunos agentes de la Institución Educativa Claretiano Gustavo Torres Parra: Currículo de matemáticas, docentes, estudiantes. La población son los estudiantes de Educación Básica Secundaria. La muestra está conformada por los estudiantes de los grados 9° (901, 902 y 903), ya que se considera que los estudiantes de este grado tienen un mayor desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, lo que facilita el trabajo con fractalidad, caos y programación computacional. El grado 9° está conformado por 107 estudiantes, entre hombres y mujeres, que oscilan entre los 14 y 16 años de edad.

7.3. Estrategias Metodológicas

La estrategia metodológica se fundamenta en las siguientes fases:

1. Diagnóstico del currículo actual de matemáticas del grado noveno.

2. Diseño de secuencias didácticas para introducir y desarrollar la fractalidad y el caos.
3. Diseño de secuencias didácticas para programar en NetLogo® procedimientos lógicos que permitan recrear los conceptos asociados a fractalidad y caos.
4. Diseño de una plataforma educativa donde se colocan las secuencias didácticas mencionadas y que facilitan la comunicación entre profesores y estudiantes.
5. Implementación de las secuencias didácticas con los estudiantes.
6. Definición de relaciones conceptuales entre pensamientos, sistemas y competencias matemáticas con los conceptos desarrollados en las secuencias didácticas mencionadas.

7.4. Técnicas e instrumento de Investigación

Respecto a la introducción de la fractalidad y el caos en el currículo, se utilizan las secuencias de aprendizaje para desarrollar con los estudiantes. Estas secuencias son las siguientes:

1. CONCEPTO DE FRACTALIDAD (Anexo D).
2. ANÁLISIS ARITMÉTICO Y ALGEBRAICO DE FRACTALIDAD (Anexo E)
3. FRACTALIDAD MATEMÁTICA Y SU DIMENSIÓN (Anexo G)
4. CONCEPTO DE CAOS (Anexo I)
5. FRACTALIDAD, CAOS E INTERDISCIPLINARIEDAD (Anexo J)

Las secuencias didácticas diseñadas para el desarrollo del Lenguaje NetLogo® son las siguientes:

1. NOCIONES BÁSICAS DE NETLOGO® (Anexo F)
2. FRACTALIDAD CON NETLOGO (Anexo H)

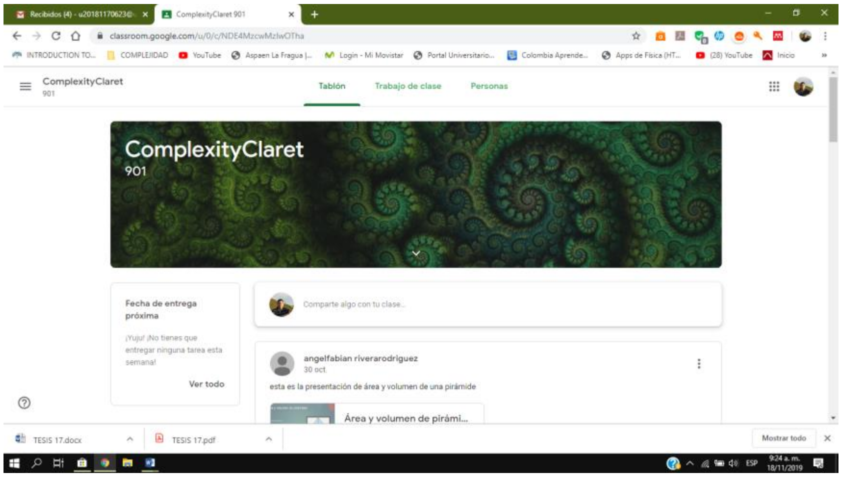
Por otro lado, la metodología a implementar está basada en el uso de una plataforma virtual (Classroom de Google), para conformar una comunidad de aprendizaje en la que participen profesores, estudiantes y padres de familia.

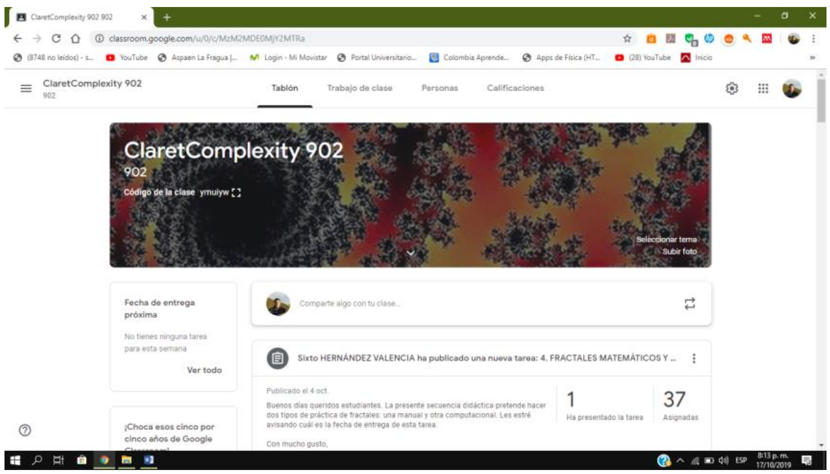
8. RESULTADOS

En esta sección se describen los hallazgos obtenidos, producto de la aplicación de la metodología descrita en el capítulo anterior. Los resultados se presentan desde tres perspectivas, a saber: en cuanto a los conceptos de las ciencias de la complejidad, factibles de abordar en el currículo de matemáticas de grado 9° y que potencian el desarrollo de capacidades matemáticas definidas por el Ministerio de Educación Nacional; en cuanto a la metodología sugerida que involucra el uso de herramientas tecnológicas y que busca descentralizar el proceso enseñanza - aprendizaje y en cuanto a la vinculación al currículo de la Modelación Basada en Agentes (NetLogo®), como agente dinamizador.

Respecto a los conceptos propios de fractalidad y caos, se diseñaron las secuencias de aprendizaje denominadas: Concepto de fractalidad (Anexo D), Análisis aritmético y algebraico de la fractalidad (Anexo E), Fractalidad matemática y su dimensión (Anexo G), Concepto de caos (Anexo I) y Caos e interdisciplinariedad (Anexo J).

Para el caso de la metodología, se diseñaron tres plataformas a partir de la herramienta Classroom de Google, una para cada uno de los cursos que conforman el grado Noveno (901, 902 y 903). Estas tres plataformas, se ilustran en la figura 3.





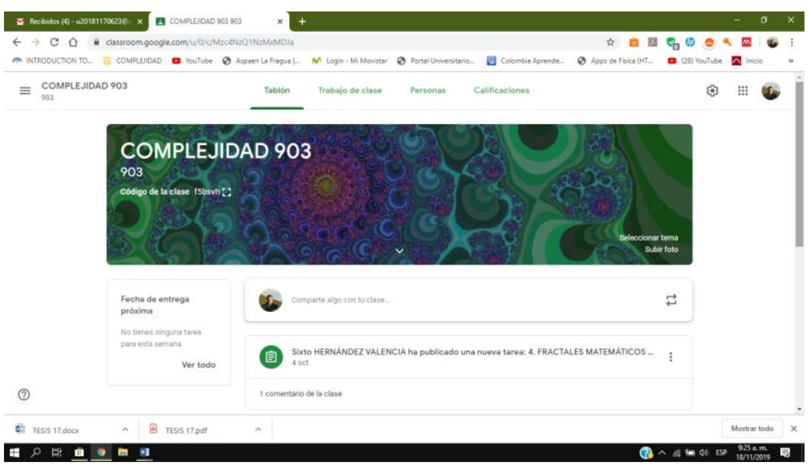


Figura 3. *Plataformas virtuales usada por profesores y estudiantes del grado Noveno para conformar una comunidad de aprendizaje alrededor de la fractalidad y el caos*

El uso de estas plataformas permitieron la comunicación oportuna entre profesores, padres de familia y estudiantes. A través de ellas se compartieron documentos, actividades, tareas, evaluaciones, preguntas y respuestas. Permitió además hacer seguimiento y valoración de los experimentos desarrollados por los estudiantes. Los estudiantes y padres de familia, por su parte, pudieron hacer preguntas y manifestar sus inquietudes sobre las activiaddes planteadas por los docentes, las cuales eran respondidas por los mismos profesores u otros estudiantes.

Respecto a la implementación de la Modelación Basada en Agentes, se usó el lenguaje NetLogo®, a partir del diseño de unas secuencias de aprendizaje adecuadas que permitieran a los estudiantes y profesores su introducción paulatina en este tipo de programación, teniendo en cuenta que es un lenguaje que permite crear modelos desde los más simples hasta los más complejos, en diferentes áreas del conocimeinto. Las secuencias de aprendizaje para tal fin fueron: Nociones básicas de NetLogo® (Anexo F), Fractalidad con NetLogo® (Anexo H).

Como plus adicional se ha diseñado una página WEB que muestra el compendio del trabajo efectuado sumando además noticias, información, imágenes, fotos, videos, vículos y demás, para hacer más atractiva el descubrir la temática relacionada con la complejidad y las ciencias que la componen. Debido a la situación particular, refleja una ventaja sustancial en torno a la edición continua de la misma superando con rigor un texto impreso lo que facilita una retroalimentación continua de contenidos y nuevas experiencias. A continuación se da una muestra primaria y sintética a modo de visualización del gran contenido que verá el usuario final.

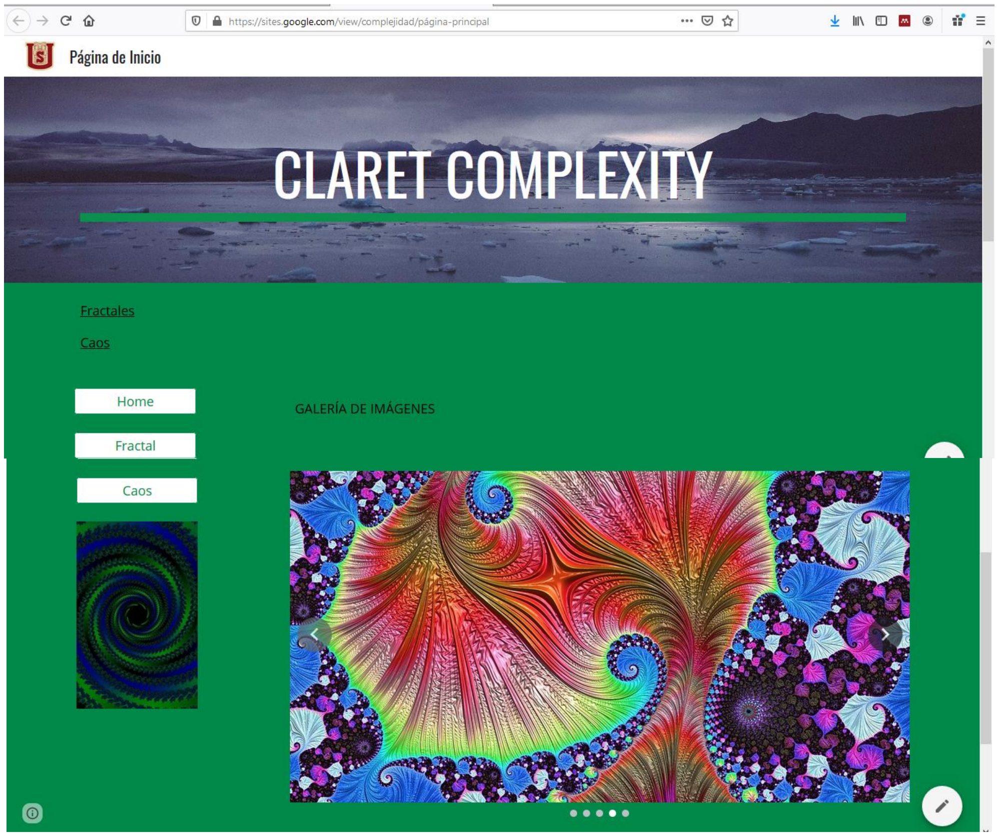


Figura 4. *Página WEB complementaria diseñada por los autores*

8.1. Análisis de resultados

8.1.1. En cuanto a los conceptos propios de las ciencias de la complejidad implementadas: fractalidad y caos.

En este apartado, se muestra cómo a través de dos conceptos propios de la ciencias de la complejidad: fractales y caos, es posible desarrollar capacidades matemáticas en los estudiantes. La siguiente figura muestra la relación entre los conceptos desarrollados con los estudiantes en las secuencias de aprendizaje 1 y 2 (anexos D a J) con los estándares, pensamientos matemáticos y competencias definidos por el Ministerio de Eduacación Nacional para el grado Noveno de Educación Básica Secundaria.

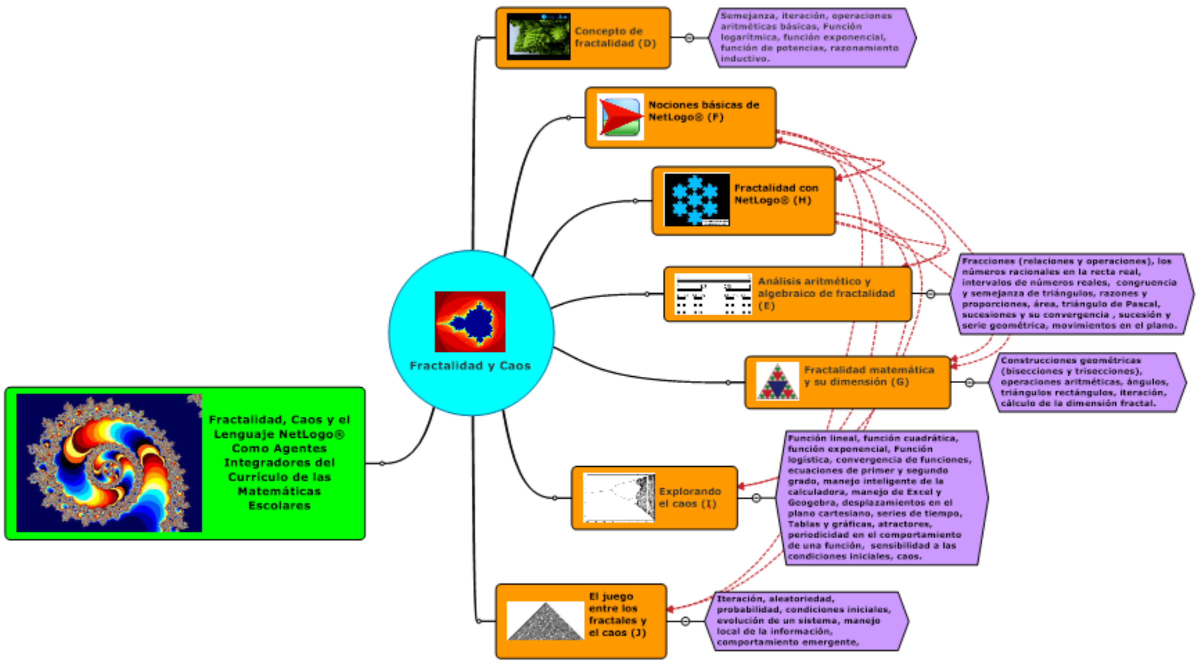


Figura 5. *Relación entre las secuencias didácticas desarrolladas, los pensamientos y estándares de matemáticas para grado 9°*

8.1.2. En cuanto a la implementación basada en agentes (NetLogo®)

Inicialmente se publica en la plataforma ClaretComplexity (herramienta Classroom de Google) un manual de NetLogo® en español, desde el enlace: https://sites.google.com/site/manualnetlogo/home. Este manual busca hacer una introducción inicial de los estudiantes y profesores al ambiente de programación NetLogo®, para familiarizarse con su apariencia y funcionalidad. Se inicia indicando la manera de descargar el software desde http://ccl.northwestern.edu/netlogo/ y se permite a los estudiantes y profesores que exploren aspectos fundamentales de NetLogo® como: introducción al escenario de simulación, vistas, primitivas básicas en la ventana de comandos, procedimientos, botones, agentes y sus propiedades, variables globales, locales y de entrada, sentencias condicionales y ejemplos de aplicación, entre otros. Paralelamente también se publica, en la misma plataforma, un diccionario de NetLogo®, tomado de https://ccl.northwestern.edu/netlogo/resources/diccionario.pdf que contiene las principales primitivas (comandos) en orden alfabético y también agrupadas por categorías, para que sea consultado por cualquier miembro de la comunidad de aprendizaje.

Posteriormente se diseña la secuencia didáctica: Nociones Básicas de NetLogo® (Anexo F), donde se presentan una serie de ejercicios ilustrativos, que muestran ejemplos de cómo se programa el código a partir de las primitivas básicas. Adicionalmente se propone a manera de ejercicio, a los estudiantes, cinco evidencias de a prendizaje, para ser subidas posteriormente a la plataforma mencionada. Durante todo este proceso los estudiantes tienen la oportunidad de hacer preguntas en la plataforma, a manera de un foro virtual.

En la secuencia de aprendizaje: Fractalidad matemática y su dimensión (Anexo G), se busca, a manera de experimentos, hacer un paralelo entre la generación de fractales de forma manual, con lápiz y papel, y la generación de fractales a partir de la programación en NetLogo®, a partir de la iteración de procedimientos simples. Los fractales matemáticos desarrollados en esta secuencia didáctica son: el conjunto de Cantor, la curva de Koch, el triángulo de Sierpinski, la curva de Levy y el árbol. Para cada uno de estos fractales se calculó la dimensión de maner manual y con NetLogo®. Como evidencias de aprendizaje, los estudiantes, una vez desarrollaban las actividades planteadas, debian subir a la plataforma un documento que mostrará el código programado en NetLogo® y la correspondiente imagen obtenida después de un cierto número de iteraciones.

8.2. Discusión de resultados

Finalmente se publica en la plataforma ClaretComplexity una encuesta de valoración de todo el proceso desarrollado con los estudiantes, para conocer sus percepciones y apreciaciones, respecto de los tres compenentes que dan unidad a la presente investigación: en cuanto a la metodología utilizada, en cuanto a los conceptos de fractalidad y caos y en cuanto al uso de la computación (NetLogo®) como herramienta didáctica y de modelación (Anexo K). Esta encuesta también se encuentra disponible en:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSc1yjE6Qe_Bong_8qJwu4S7ZvzlyvGRJJ1KNaylfviH1FZN9A/viewform

Las respuestas dadas por los estudiantes, se tabularon y se graficaron usando un modelo estadístico simple. Para ello se toma una muestra significativa de 24 agentes (22,4%). Estos resultados se muestran a continuación.

La figura 6 denota las respuestas dadas en torno a la metodología:

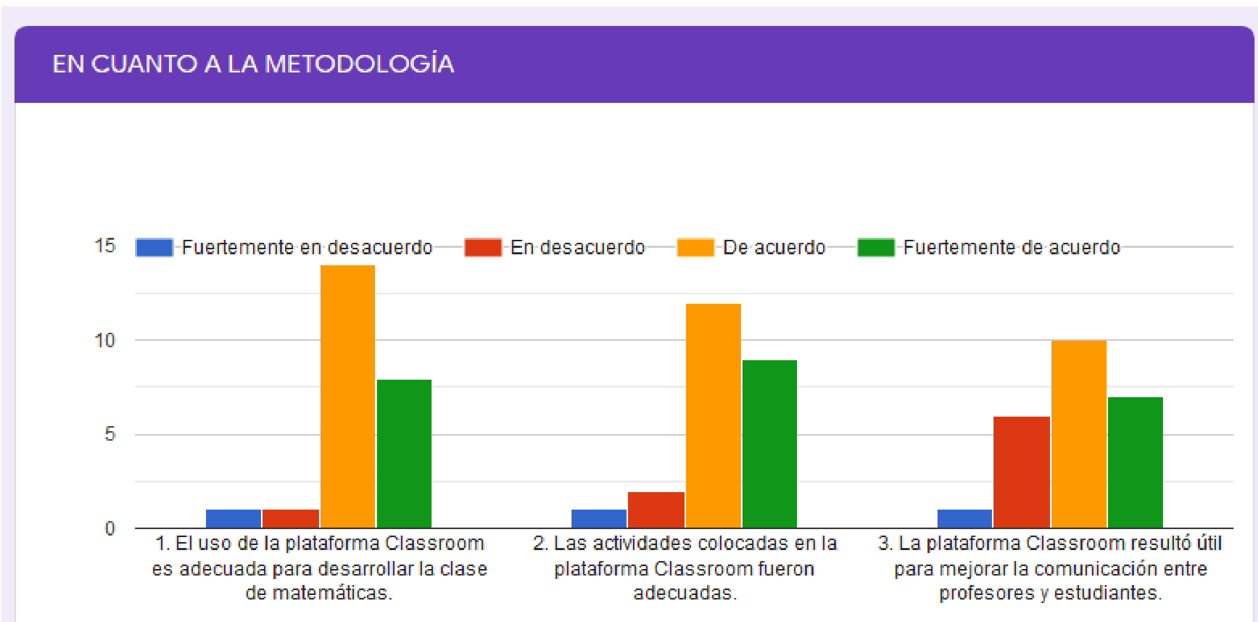


Figura 6. *Resultados sobre la Metodología*

Es posible rescatar que en cuanto a la metodología la misma ha sido de buena recepción por parte del estudiante que ha sabido sacar provecho de ella. Es un resultado esperado ya que se sabía desde un comienzo que el uso de las herramientas tecnológicas posibilitan un mejor desempeño y se utiliza para provecho del proceso. La capacidad mayúscula que tienen los alumnos en el manejo de software, redes y comunidades virtuales de aprendizaje es una alternativa que notamos obligatoria para el fin presupuestado. De forma paralela se logra que la comunidad educativa total hiciera parte del proceso integrando inclusive a los padres de familia quienes hacen aportes que la misma plataforma permite en su sección de comentarios. Se tiene tambien apreciaciones negativas al particular lo que propone un trabajo de reforzamiento, consolidación, análisis, interpretación e implementación de nuevos mecanismos para reforzar el medio utilizado en la metodología.

La figura 7 denota las respuestas dadas en torno a los conceptos estudiados:

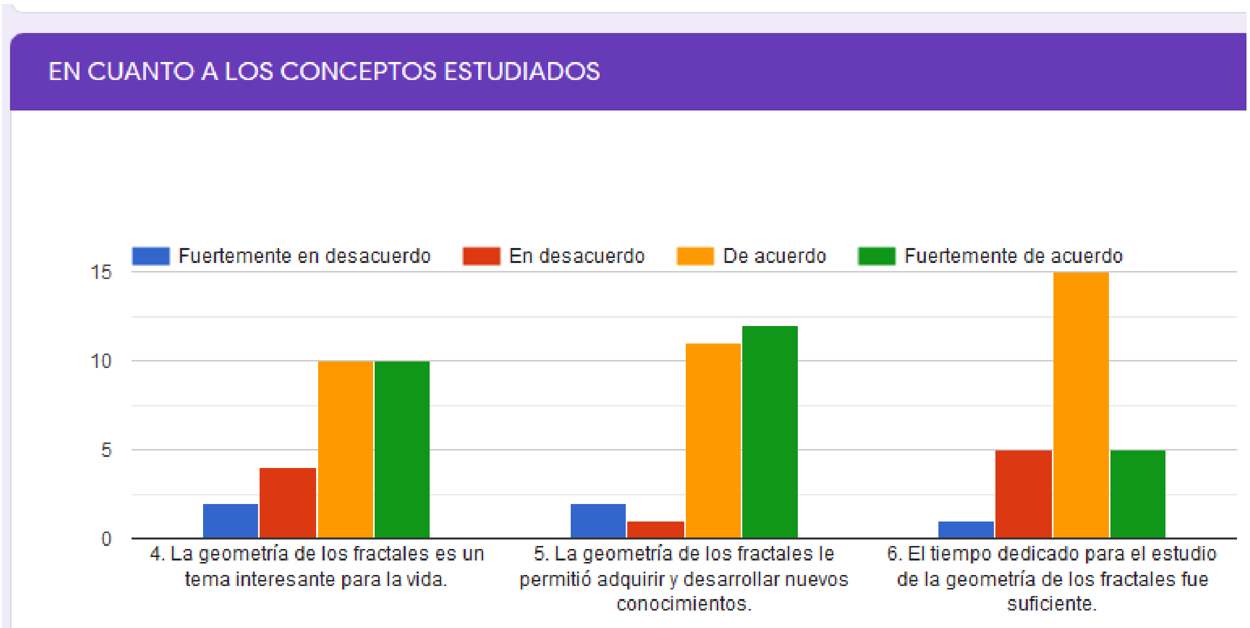


Figura 7. *Resultados sobre los Conceptos*

A partir del compilado que se precede es posible determinar que un tema desconocido por la mayoría se convierte en no solo algo novedoso e interesante sino pertienente ya que explica de mejor forma el mundo existente. Los estudiantes pudieron manipular tanto manualmente como con sistemas computacionales la temática propuesta teniendo una introducción al contenido programático estipulado pero desde otra perspectiva que es un objetivo propuesto. Se considera que los fractales son importantes debido a la autogestión generada y el descubrimiento de alternativas más reales con la vida misma sugiriendo otros puntos de vista en donde el alumno reconoce es mas dinámico y constructor de nociones y conceptos propios. En torno a los resultados negativos se extrapola que la asignatura no genera entusiasmo a algunos estudiantes pareciéndole difícil, aburridora y de trámite, por consiguiente la actitud ante el nuevo desafío no logra calar positivamente en ellos deduciendo por ende que la fractalidad no concibe una invitación hacia el logro de resultados mejores. Cabe resaltar que, como se notifica en la figura 7, el porcentaje de satisfacción es importante y se nota de forma directa por medio de la observación que se tuvo durante todo el proceso.

La figura 8 denota las respuestas dadas en torno a la computación (NetLogo®):

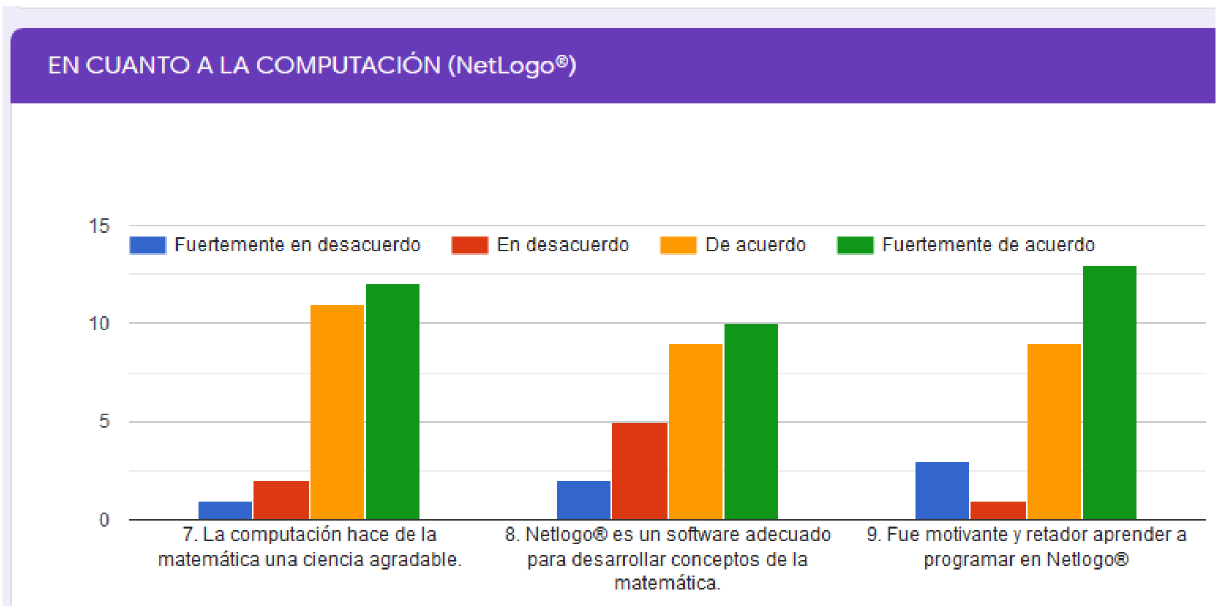


Figura 8. *Resultados sobre la Computación (NetLogo, plataformas, recursos WEB)*

El uso de herramientas computacionales es una cierto desde todo punto de vista. A través de la implementación de NetLogo® se logra articular diversas aristas que confluyen hacia fines previstos y en muchas ocasiones hacia la creación de modelos interesantes en donde los autores son los mismos estudiantes. El arte de programar un procedimiento en cualquier lenguaje diseñado para dicha tarea no es del todo fácil generando un reto interesante que fue asumido por los estudiantes e inclusive los docentes. A través de los resultados presentados se logra concluir que es muy satisfactoria la implementación, tal cual lo expresan los actores principales y se compila en la figura 8, ya que las realizaciones y productos finales superaron las expectativas logrando inclusive asombrar a los tutores. El estudiante muestra mucha destreza para la ejecución de tareas propuestas y además de manejar muy bien los sistemas informáticos, indican y expresan con su semblante agrado en torno a la estrategia, los medios y las herramientas sugeridas. En un trato directo con el alumno éste dice que se aprende más y mejor cuando ellos mismos se encargan de generar resultados solicitados y deducir situaciones particulares.

Por último se hace una pregunta "abierta" (¿Qué recomendación o sugerencia hace usted para mejorar la experiencia desarrollada en la clase de matemáticas, durante el cuarto periodo?) para recopilar datos sobre puntos de vista, sugerencias, recomendaciones y/o aportes sustanciales que buscan la optimización del trabajo propuesto y que se convierte en el insumo fundamental hacia la consolidación de una alternativa hacia el currículo y su abordaje actual. Se muestran algunas respuestas obtenidas:

- La sugerencia que hago para mejorar la experiencia en la plataforma y en la clase de matemáticas es poner en práctica mas actividades en netlogo para tener un buen futuro en la tecnología y la práctica de sistemas informaticos
- Ninguna, unos profesores maravilloso, les deseo lo mejor en sus vidas, atentos, responsables, buenas personas etcétera. Gracias por su empeño y dedicación hacía nosotros los estudiantes se agradece éxitos profesores Luis Gabriel y profesor Sixto.
- Ninguna me parecieron muy buena las clases
- La verdad fue muy divertido, fue una nueva manera de aprender, muy motivacional usando la tecnología
- Me parece que durante el cuarto periodo, las clases de matemáticas en cuanto a este tema fueron muy completas, si acaso un poco más de comunicación entre profesor y

estudiantes. Pero en términos generales todo fue muy bueno y en opinión personal, aprendimos mucho.

- Que si se puede que las clases de Netlogo se haga en vivo en una sala de informática donde el docente aclare dudas en vivo y les presente el programa de una manera mas dinámica. Donde los estudiantes también en la clase, manejen el software en vivo y compartan sus inquietudes y entre todos se complementen.
- En realidad nada, está muy bien explicado, la otra parte va por el estudiante que tiene estudiar y profndizar el tema.
- ninguna , para mi la experiencia fue muy buena .
- que tuvieramos mas tiempo para poder aprender un poco mas del programa
- pues la verdad me pareció interesante manejar el sistema netlogo pues por que ahí podíamos manejar mejores las cosas aunque a algunos se le dificultaba aprender a como usar netlogo
- Mi recomendación seria que hubiese sido bueno que trabajáramos este tema desde el primer periodo
- Que hubieramos tenido mas tiempo para Desarrollar mas cosas en Netlogo
- Que antes de usar el programa se de una explicación de los temas los cuales se van a tratar, muchas veces se me hizo confuso al realizar este tipo de actividades
- Muy buena estrategia aplicada, sería ideal tener más tiempo para utilizarla a plenitud y que más profesores utilizaran la misma metodología. Gracias.
- Se debe reformular todo el currículo de matemáticas en todos los niveles educativos (Básica y Media), incluyendo las ciencias de la complejidad, de tal manera que se

deje de aprender para lo conocido y se comience a aprender para lo desconocido, ya que nos encontramos en una era en la que el mundo cambia rápidamente.

- la verdad todo estuvo bien, solo que falto mas tiempo. de resto todo estuvo interesante

Es de resaltar la gran acogida obtenida y se extrae información de suma importancia para la ejecución futura que se desea implementar.

9. CONCLUSIONES

Como punto de partida se denota que el abordaje y análisis de los lineamientos establecidos para el currículo de matemáticas se torna en esencial con miras hacia la propuesta de un currículo alternativo que complemente al tradicional e inclusive lo transforme con propuestas innovadoras. Se percibe una deficiencia cuando al desmenuzar lo planteado se converge hacia una idea contundente y es el abordaje teórico del estudiantado y su mundo orbitante, llamado contexto, que en la realidad queda corto. La aplicación de aspectos propios de complejidad y sus ciencias inherentes lograron una positiva respuesta en cuanto a la formulación y resolución de problemas obteniendo una idónea articulación según lo planteado por Julián de Zubiría y que se logra, para el caso actual, en gran medida. La escogencia de la fractalidad y el caos para llevar a las aulas de clase originaron una inquietud en los estudiantes que pasa de ser curiodidad para convertirse en acción. El modelamiento basado en agentes y su integrador NetLogo es adecuado en cuanto a la disposición del receptor para comprenderlo y es en respuesta al óptimo suministro de información otorgado ya que siendo algo totalmente desconocido por todos, se tomó como método de abordaje al particular de forma escalonada empezando por lo básico y culminando en la autogeneración de códigos programables. Autores como Mandelbrot, Rubiano, Reynoso, se tornaron en acierto ya que la Fractalidad y el Caos son ciencias que pueden ser expresadas en téminos escolares y de manera secuencial, el uso de NetLogo significó un punto alto de implementación y la convergencia hacia “Santa Fe Institute” y su ítem “Complexity Explorer” insertan las tecnologías actuales para el desarrollo de procedimientos con la oferta de cursos virtuales.

El uso de las redes de información generan un adecuado medio para el trabajo ejecutado pues incide significativamente en el interés del estudiante por conocer nuevos escenarios propuestos. El cambio de rol del docente hacia un estilo más orientador y de acompañamiento posibilita mejores resultados personales y se descubren capacidades y cualidades que antes eran desapercibidas o estaban rezagadas. El concepto general por parte del agente estudiante se orienta hacia la aceptabilidad de la nueva estrategia metodológica y didáctica lo cual se detecta a través de la observación directa, las evidencias mostradas y los comentarios expresados. Términos como fractales, caos y complejidad junto a todo el universo que los componen son necesarios introducirlos en la etapa escolar, ojalá desde primaria, basado en el principio de coherencia pues aporta elementos pertinentes y actuales como son: geometría fractal que es representada en la naturaleza, complejidad que hace un giro hacia nuevas visiones, caos que arroja elementos impredecibles y no lineales, los cuales son acordes a la dinámica de la sociedad y las capacidades que se obtienen, de manera paralela, permiten una mejor profundización. El contexto se torna esencial en el aula de clase lo que es de destacar deduciendo como producto final del trabajo efectuado aspectos como una mejor postura del estudiante que se convierte en generador de conocimiento, una actitud de agrado y gusto cuando conoce temáticas novedosas, las manipula y las entiende por sí mismo, un docente que elimina la tradición remota y se convierte en un motivador más que en un reproductor y/o transmisor de teoría, una contextualización de la matemática generando interdisciplinariedad cuando se abordan espacios diversos de discusión. Se logra integrar estudiantes que antes no incursionaban en el desarrollo de la clase motivándolos a ser originadores de cuestionamientos que enriquecieron la labor ejecutada, sin embargo la falta de compromiso en pocos educandos se convierte en el reto que se presenta para futuras aplicaciones.

Los resultados finales son muy satisfactorios y la continua retroalimentación presentada son las pautas más impotrtantes a tener en cuenta para ir amoldando el currículo propuesto acorde a las exigencias presentes y futuras.

La capacidad de utilizar las herramientas computacionales y sus similares (tablets, celulares) es una virtud mayúscula de los estudiantes siendo una adecuada forma de aplicar la propuesta que se presenta en ésta tesis. Permite un trabajo en dos vías de forma inmediata involucrando inclusive a los padres de familia y denota un trato mas directo rompiendo barreras invisibles entre educador y educando. La plataforma Classroom genera una puesta en marcha adecuada de los temas a seguir y comprende una comunidad con la figura pregunta/respuesta en donde los roles individuales se vuelven globales sindo un ente alumno pero docente al mismo tiempo. Una página WEB conlleva a la universalización de lo proyectado donde se muestra la actividad en su plenitud y crea una particularidad de edición que rompe esquemas tradicionales de trabajos impresos para convertirla en una muestra continua de nuevos elementos. Durante el periodo de aplicación el estudiante ingresó a las plataformas sugeridas y en un tiempo relativamente rápido aprendió a utilizarlas siendo una fortaleza el empleo de las mismas. Lograr representar el modelamiento basado en agentes con NetLogo conlleva al mejor entendimiento de las situaciones y se puede visualizar al notar cómo manipulan de ágil y eficaz un software gracias a la influencia que reciben a diario por parte de dispositivos informáticos. Los retos sugeridos fueron simulados, los propuestos creados y de iniciativa propia de forma autónoma algunos estudiantes programaron sus propios códigos que muestran resultados a rescatar. Una situación a resolver, para la futura aplicación proyectada, es la falta de una sala de cómputo matemática en el establecimiento educativo que no obstaculizó, como se esperaba, el trámite normal del cronograma establecido pero que otorgaría un escenario acorde a lo planteado. La limitante comentada otorga un valor agregado satisfactorio, para nuestro caso, ya que el interés y responsabilidad por llevar a cabo las evidencias solicitadas no es perturbado en demasía, confluyendo hacia un cambio de mentalidad estudiantil gracias a lo atractivo del proyecto.

Se concluye que el currículo de matemática actual puede ser abordado por los temas propios de la Complejidad en donde se desarrollan las mismas secuencias pero dando unos valores agregados sustanciales como: matemática pertienete que va de la mano con la naturaleza, creación de códigos de software mostrando lógica computacional, abordaje de nuevos conceptos desconocidos pero apropiados concebidos de manera personal con base en el trabajo secuencial ejecutado, cambio de actitud en torno a la aceptación de la matemática siendo más atractiva en su estudio, diversidad de roles proyectando una persona que muestra una actitud solidaria y de reconocimiento, integración de varias disciplinas rompiendo paradigmas establecidos de singularidad concibiendo el sentido y significado de la interdisciplinariedad, trabajo que sale del aula de clase y se ilustra en diversos estados y lugares, énfasiz en las capacidades articulando el conocimiento con la práctica y los valores, el despertar la curiosidad lo cual arroja una ayuda importante al cumplimiento de objetivos propuestos. Finalmente queda como trabajo a futuro la constante adquisisción de alternativas aplicadas para ser usadas gracias a la naturaleza de los medios utilizados y que pueden ser editados constantemente (supremacía sobre un texto escrito) para conservar lo positivo logrado y poder involucrar los estudiantes que no dieron un resultado solicitado sino que fueron apáticos a la estrategia concebida.

Tal cual lo reseñado, la complejidad es posible introducirla en el nivel de bachillerato gracias al inmenso mundo que la compone y que permite acoplarla a la edad y nivel del estudiante logrando potenciar las capacidades que se buscan desarrollar. Las herramientas digitales suministran un aporte significativo en cuanto al abordaje del proyecto convirtiéndose no solo en ayuda sino en una puesta en marcha fundamental conforme al mundo actual que nos rige. El diseño, modelación y simulación de situaciones ofrece un amplio panorama de uso siendo ya establecido que se complementa articuladamente con los conceptos concebidos y ofrece algo atrayente conforme el que crear códigos programables computacionales deja abierta la posibilidad de que un educando origine sus propios modelos informáticos. Lo anterior se logró con muchos de los alumnos quienes de manera personal lo hicieron mostrando que la incursión de un currículo alternativo como el que proponemos puede generar resultados sobresalientes tal cual lo indicado.

BIBLIOGRAFÍA

Cardona, L. A. (2017). *ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL*. *Tesis de grado*. Universidad Tecnológica de Pereira.

Colom, A. J. (2002). *La (de) construcción del conocimiento pedagógico: Nuevas perspectivas en teoría de la educación*. *Ediciones Paidós*.

Colom, A. J. (2002). *La construcción del conocimiento pedagógico: Nuevas perspectivas en teoría de la educación*. *Ediciones Paidós*.

Complexity Explorer Santa Fe Institute (2019). *Fractals and Scaling.* Recuperado de https://www.complexityexplorer.org/courses/93-fractals-and-scaling-winter-2019

Complexity Explorer Santa Fe Institute (2019). Fundamentals of NetLogo. Recuperado de https://www.complexityexplorer.org/courses/84-fundamentals-of-netlogo

Concepción, G. (1998). La teoría del caos. Introducción a la matemática de lo incierto en el currículo de secundaria2016.

De Zubiría, J. (2013). *¿Cómo diseñar un currículo por competencias? Fundamentos, lineamientos y estrategias. Coop. Editorial Magisterio*.

Estrada W. F., (2004). Geometría Fractal: Conceptos y procedimientos para la construcción de fractales. Bogotá: Coop. Editorial Magisterio.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A., & Zuasti, N. (2000). *Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales*. *SUMA 35*, 45–54.

Garzón, D. (2016). Una introducción a la geometría fractal a través del tratamiento de la autosimilitud integrando un ambiente de geometría dinámica. Recuperado de http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/9633?mode=full

Hernández S., Fernández R., Baptista L., (2006). *Metodología de La Investigación*. https://doi.org/- ISBN 978-92-75-32913-9

Maldonado C. E., Alvarado M., Andrade E., Gómez N. A., Lareo L., Villamil J. E. (2012). *Derivas de Complejidad Fundamentos Científicos y Filosóficos.* Bogotá, D. C., Colombia: Editorial Universidad del Rosario.

Maldonado, C. E. (2012). *¿Qué son las ciencias de la complejidad? In Derivas de Complejidad. Fundamentos científicos y filosóficos* (pp. 7–102).

Maldonado, C. E., Alfonso, N., & Cruz, G. (n.d.). *El mundo de las ciencias de la complejidad*.

Mandelbrot, B. (1997). La geometría fractal de la naturaleza. Tusquets Editores.

Martín, M, (1998). *Iniciación al caos: Sistemas Dinámicos* (Primera). Madrid: Ed Síntesis.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*.

Montealegre, M. *Matemáticas para la creatividad IV. Plus*. Neiva, Colombia.

Montealegre, M. *Matemáticas para la creatividad V. Plus*. Neiva, Colombia.

Perkins D., (2015). *Educar para un mundo cambiante*. (SM, Ed.) (Ediciones).

Perkins, D. (2015). *Educar para un mundo cambiante*. (SM, Ed.) (Ediciones).

Rand, B. (n.d.). Complexity Explorer Santa Fe Institute. Recuperado de https://www.complexityexplorer.org/courses/84-fundamentals-of-netlogo

Redondo A., Haro M. J., (2005). *Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II). Revista SUMA N° 48*, 15–21.

Redondo, A. (2004). Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (I). *Suma*, (I), 19–28.

Reynoso, C. (2006*). Complejidad y caos: una exploración antropológica. Anales de Antropología*, *40*(2), 250–259. Recuperado de http://www.journals.unam.mx/index.php/antropologia/article/viewFile/8642/pdf_267

Rodríguez, A. S. (2018). *Didáctica en la enseñanza de la "fractalidad" en educación básica desde un modelo interdisciplinar macta*. Universidad Surcolombiana.

Rubiano G., (2009). *eBook Iteración y fractales (con mathematica ®) Universidad Nacional de Colombia*. (Editorial Universidad Nacional de Colombia, Ed.) (Primera). Bogotá.

Silvestre, M. (2017). *Fractales y caos la aventura de la complejidad.* (Guadalmazán, Ed.) España: Guadalmazán.

Wilensky, U. NetLogo (versión 6.1.0) [software de cómputo]. Evanston, Estados Unidos: Universidad Northwestern.

ANEXOS

Anexo A. Matriz diagnóstico del problema

SÍNTOMAS	CAUSAS	CONSECUENCIAS	PRONÓSTICO
1. Desconocimiento por parte de la mayoría de los docentes sobre el modelo pedagógico propio de la institución.	• La parte humana del educador en donde se refleja inconvenientes para adquirir nuevas metodologías y cambiar paradigmas de enseñanza. Poco interés por actualizar los procesos establecidos de una forma más acorde a la realidad que nos rodea. Falta de una directriz institutional en donde se rijan parámetros y criterios claros de ejecución.	• Estudiantes errantes entre diversos modos de enseñanza. Nula captación en la concepción de integralidad entre las asignaturas en donde es imposible develar la correspondencia entre ellas y por ende su aporte general. El asignaturismo se torna aún más como espacios reservados y altamente delimitados.	Una institución sin rumbo definido y con problemas en articular procesos comunes. Desconocimiento total de otras áreas demostrando una separación sólida y desembocando en la individualización de los logros obtenidos. Estudiantes sin capacidad de discernir sobre un modelo de enseñanza claro y perdidos entre los cambios de asignaturas debido a la no relación que encuentra entre ellas.
2. Escasa interdisciplinariedad entre las áreas para resolver problemas comunes.	• La naturaleza humana que genera de manera inmediata rechazo hacia nuevos estilos y trabajo adicional. Falta de una organización regida desde las directivas para generar espacios de intercambio de planteamientos entre las diversas áreas y proyectar estrategias	• Desligamiento de las asignaturas desconociendo la relación innata que las precede. El abarcar un problema específico desde diversos puntos de vista y poderlos analizar desde ópticas diferentes, se muestra utópico con el estilo individual que predomina. Nula continuidad en los procesos en donde se	Una educación en donde los estudiantes se muestran como ejecutores de problemas ya solucionados desembocando sobre la incapacidad de tomar posturas y sugerir soluciones nuevas e innovadoras. Es casi inexistente la búsqueda autónoma de nuevas estrategias y no se determina la relación conjunta de todas las

	conjuntas ante una determinada situación.	acaba con la situación cuando termina la hora asignada para determinada área, se imposibilita el abordaje con ayuda de un nuevo tutor y otro estilo de manejo particular.	áreas para un único estado de análisis.
3. Planeación de la asignatura matemática para los diferentes grados a partir de los estándares básicos de matemáticas y los derechos básicos de aprendizaje.	• Unificación de los currículos, de acuerdo a lineamientos de orden internacional (OCDE) • Directriz emanada del ministerio de educación en donde se indica a la institución educativa los temas y competencias que serán evaluados en el orden nacional mediante pruebas estandarizadas.	• Docente limitado en la puesta en marcha de temáticas asociadas a su quehacer. Displicencia y aceptación de lo asignado sin generar espacios críticos de discusión. Ignorar al estudiante como un agente autónomo y singular desconociendo posturas personales e innatas.	Deserción escolar debido al no acoplamiento de los lineamientos instruidos. Mayúscula pérdida por causas inherentes a la no comprensión de aspectos determinados y delimitados. El perfil del alumno es único ignorando otro tipo de habilidades desconocidas y que no son exploradas.
4. División del currículo en asignaturas, desconectadas unas de otras	• Políticas administrativas del Consejo Directivo y de los entes que manejan la educación en el municipio de Neiva	• Visión fragmentada de los saberes de cada asignatura. Escasa visión de conjunto	• Escasa visión sistémica y desadaptada a las circunstancias reales de la vida. La complejidad no es el derrotero que marque la pauta en el diseño del currículo
5. Escasa innovación pedagógica de los docentes del área de	• Poco interés y motivación por la actualización pedagógica y desconocimiento del pensamiento	• Poca concordancia con los cambios actuales del contexto. • Deficiente relación entre situaciones	• Desarticulación de criterios de enseñanza actuales. Poca transmisión de conceptos con origen de auto-

matemáticas, en cuanto a metodologías modernas, diferentes a las tradicionales.	complejo y teoría del caos	problémicas abstractas y la correspondencia entre variaciones de su estructura organizativa.	gestión estudiantil y consignas de generación personal de conocimiento. No concordancia de la escuela con el contexto.
6. Nula aplicación del pensamiento complejo y teoría del caos, para el desarrollo curricular de los saberes matemáticos con los estudiantes en la clase de matemáticas.	● Desconocimiento de la teoría del caos y del pensamiento complejo, por parte de estudiantes y profesores. Los libros de texto utilizados no se valen del pensamiento complejo y la teoría del caos para la construcción del conocimiento en los estudiantes. Su enfoque es lineal y fragmentado (según el enfoque tradicional: por temas)	● Uso de metodologías y didácticas obsoletas, poco adaptadas a los cambios sociales y tecnológicos en el mundo globalizado en el que se desarrolla la vida actual. Escasa innovación pedagógica y poco desarrollo del pensamiento crítico y hermenéutico	● Desadaptación de los estudiantes y profesores ante los nuevos cambios sociales, políticos, tecnológicos.
7. Utilización de un texto guía de matemáticas, asignado por el Ministerio de Educación Nacional	● Políticas de orden nacional. Necesidad de estandarizar la educación.	● Encajamiento en un determinado estilo de enseñanza en donde se cohíbe el proceso de descubrimiento autónomo del educando y el docente depende del libro asignado sin capacidad de extrapolar nuevas visiones.	Aprendizaje mecánico y de iteración de contenidos sin profundización en su concepción. Limitada condición de investigar e indagar nuevos enfoques de estudio.

Anexo B. Estándares y componentes de matemáticas para los grados 8° y 9°

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS
• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. • Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. • Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales). • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. • Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. • Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. • Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

• Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. • Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).	• Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. • Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales. • Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Anexo C. Cronograma de la investigación

	2018 a Marzo 2019	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Sept	Oct	Nov	Dic
Elección tema										
Introducción										
Justificación										
Planteamiento del problema										
Antecedentes y justificación										
Marco teórico										
Objetivos de la investigación										
Metodología										
Diseño secuencias didácticas										
Resultados y análisis										
Sustentación del proyecto										

Anexo D. Secuencia didáctica: Concepto de fractalidad

CONCEPTO INTUITIVO DE FRACTALIDAD

Los fractales son estructuras que cumplen dos condiciones fundamentales: son auto-similares y su dimensión es fraccionaria, es decir no es un número entero.

La autosimilitud

Para entender la autosimilitud, observa detenidamente a tu alrededor y verás que existen en la naturaleza objetos que tienen esta propiedad, es decir que al tomar una fracción de ellos (cambiar de escala) se obtiene una figura similar (parecida) al objeto inicial; y si volvemos a tomar una fracción de esa fracción, obtenemos nuevamente una figura similar a la fracción anterior y al objeto inicial completo. Si se sigue repitiendo (iterando) el mismo proceso se obtiene el mismo resultado. Es el caso de las costas de los países, como se puede observar en las secuencias de la figura 1.

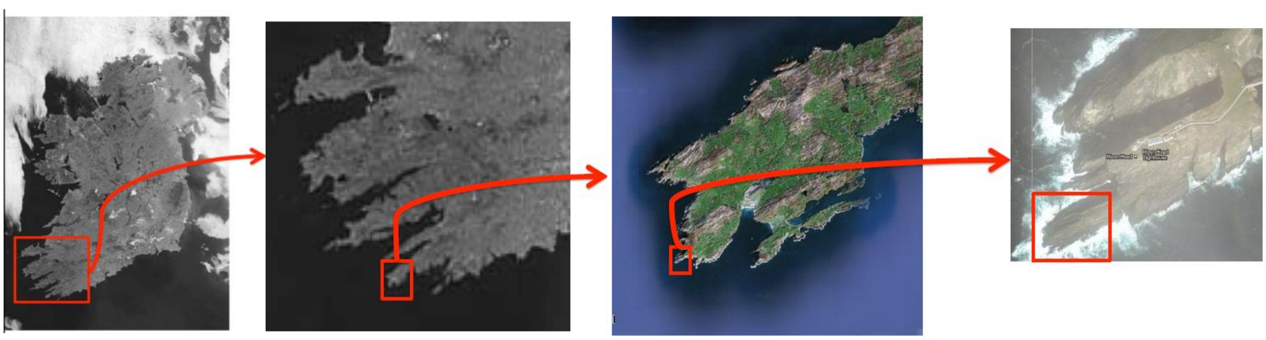


Figura 1. Autosimilitud de la costa de un país[1]

EXPERIMENTO 1

Toma una rama de un helecho y comienza a descomponerla (desgajarla) de las partes más grandes a las partes más pequeñas. ¿Qué observas con cada una de las partes obtenidas, si la comparas con la parte que obtuviste en el paso anterior?

[1] Tomado de https://www.complexityexplorer.org/courses/97-introduction-to-complexity

EXPERIMENTO 2

Con cada una de las imágenes dadas, haz el siguiente procedimiento:

1. Copia en la aplicación Word o Paint la imagen inicial dada y llámala imagen 1.
2. Copia la imagen 1 y recorta una fracción de esta imagen. Dale el mismo tamaño de la imagen 1 y llama a esta nueva imagen: imagen 2.
3. Copia la imagen 2 y recorta nuevamente una fracción de ésta y dale el mismo tamaño de las dos primeras imágenes. Llama a ésta nueva imagen: imagen 3.
4. Repite **(itera)** este procedimiento hasta que generes por lo menos las 5 primeras imágenes.
5. Para cada imagen dada, arma una secuencia de imágenes en una hoja tamaño carta e imprímela. ¿Cómo son las figuras obtenidas en cada una de las secuencias?




Figura 2. Algunos fractales naturales[2]

[2] Tomado de https://www.complexityexplorer.org/courses/97-introduction-to-complexity

Por otra parte, también existen fractales matemáticos que tienen esta propiedad de autosimilitud. Los fractales matemáticos son fractales determinísticos, es decir son obtenidos a partir de la **iteración** de un **proceso**, un número infinito de veces. Dentro de este grupo, los fractales más conocidos son: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, la curva de Levy, la curva Dragón, la curva de Hilbert y el árbol.

EXPERIMENTO 3

1. Coloca cada una de las siguientes imágenes, que corresponden a fractales matemáticos, en la aplicación Paint o Word y luego aplícale un proceso análogo al que aplicaste en el experimento
2. Coloca las imágenes obtenidas en una hoja tamaño carta e imprímela. ¿Cómo son las imágenes obtenidas en cada una de las secuencias?

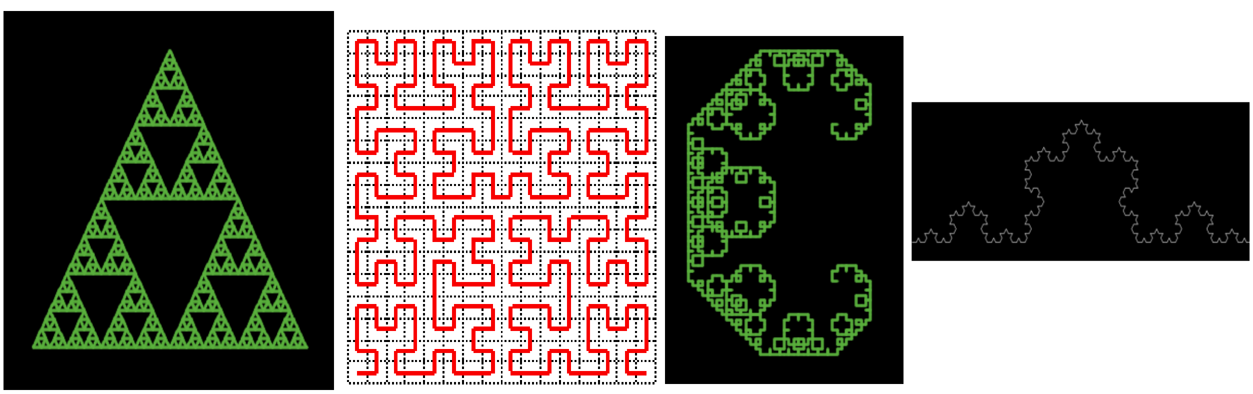


Figura 3. Algunos fractales matemáticos[3]

Ahora veamos como construir un fractal de forma manual.

EXPERIMENTO 4: FRACTAL CON ORIGAMI

Observa el video: https://www.youtube.com/watch?v=4YDHsMUQbVg&t=3s

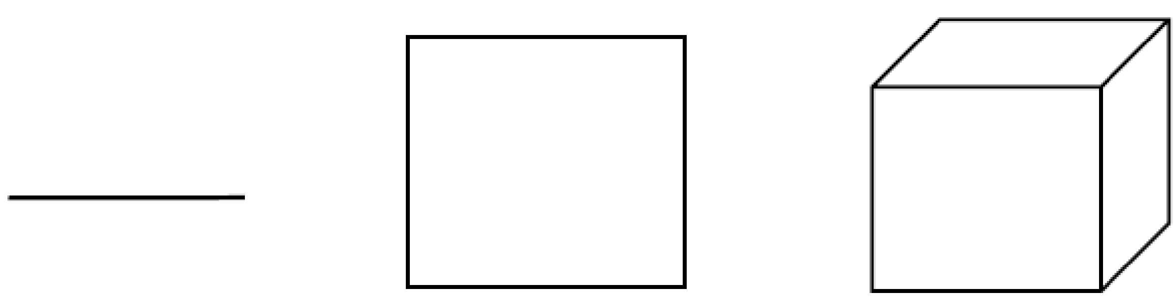
[3] Tomado de https://www.complexityexplorer.org/courses/97-introduction-to-complexity

Usando papel origami tamaño carta, construye el fractal del video y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántas iteraciones (repeticiones) hiciste para construir el fractal?
2. ¿Qué ocurre con el número de cortes de tijera a medida que vas construyendo el fractal?
3. ¿Qué ocurre con el número de figuras que van apareciendo a medida que construyes el fractal?
4. ¿Qué ocurre con el tamaño de las figuras que van apareciendo a medida que construyes el fractal?
5. ¿Este fractal es una superficie o es un sólido? ¿Crees que este fractal existe en dos dimensiones o en tres dimensiones?
6. Asóciate con otros tres compañeros que hayan construido el fractal y construye tu árbol de navidad para que vivas una navidad fractal.

Dimensión fractal

Las dimensiones que generalmente se trabajan en la geometría euclidiana son las dimensiones enteras: uno, dos y tres. Un segmento, un cuadrado y un cubo son fieles representantes de estas dimensiones, como lo muestra la figura 4.



Dimensión 1 Dimensión 2 Dimensión 3

Figura 4. Dimensión entera de algunos objetos geométricos euclidianos[4]

[4] Tomado de https://www.complexityexplorer.org/courses/97-introduction-to-complexity

Un acercamiento intuitivo al concepto de dimensión en estos objetos matemáticos, es pensar en una hormiga que tiene la posibilidad de moverse sobre ellos. En el caso del segmento o línea recta, la hormiga puede moverse hacia la derecha o hacia la izquierda, es decir en una sola dirección (una dimensión). En el cuadrado tiene la posibilidad de moverse hacia la derecha – izquierda o arriba - abajo, es decir en dos direcciones (dos dimensiones) y en el caso del cubo, la hormiga tiene la posibilidad de moverse en tres direcciones (tres dimensiones): derecha – izquierda, arriba – abajo y adelante – atrás.

Sin embargo, existe la posibilidad de partir o fraccionar los tres objetos mostrados anteriormente, en dos, tres partes, cuatro partes, etc. y observar que sucede con el número de partes que van apareciendo y la longitud de cada una de esas partes. A continuación, se muestran cada uno de estos experimentos.

EXPERIMENTO 5: Bisección en dimensiones 1, 2 y 3

1. Toma un segmento de longitud arbitraria una unidad y divídelo en dos segmentos de igual longitud (bisección). A cada una de los dos segmentos resultantes, divídelos nuevamente en dos segmentos de igual longitud. Nuevamente, cada uno de los cuatro segmentos resultantes, divídelos en dos segmentos de igual longitud y así sucesivamente. La figura 5 ilustra los primeros pasos del proceso.

Figura 5. Bisección de un segmento

Ahora, completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta el número de copias y el tamaño de cada copia.

Bisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias					
Tamaño de la copia					

Tabla 1. Comportamiento de la bisección de un segmento

De acuerdo al comportamiento observado en el experimento, completa las siguientes frases:

Cada nivel está compuesto por ________ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

2. Toma un cuadrado de lado una unidad, halla los puntos medios de cada lado y une estos puntos medios para obtener cuatro cuadrados de igual área. A continuación, halla nuevamente los puntos medios de cada uno de los lados de estos cuatro cuadrados y únelos para obtener 16 cuadrados de igual área, tal como se muestra en la figura 6. Itera dos veces más este proceso y completa la siguiente tabla, de acuerdo al comportamiento observado.

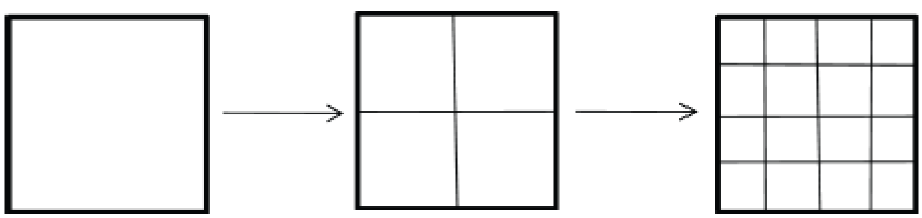


Figura 6. Bisección de un cuadrado

Bisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias					
Tamaño de la copia					

Tabla 2. Comportamiento de la bisección del lado de un cuadrado

A continuación, completa las siguientes frases:

Cada nivel está compuesto por ________ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

3. Análogamente, toma un cubo de arista una unidad, halla los puntos medios de cada arista y une estos puntos medios para obtener ocho cubos de igual volumen. A continuación, halla nuevamente los puntos medios de cada uno de estos ocho cubos y únelos para obtener 64 cubos de igual volumen. Itera dos veces más este proceso y completa la siguiente tabla, de acuerdo al comportamiento observado (Figura 7).

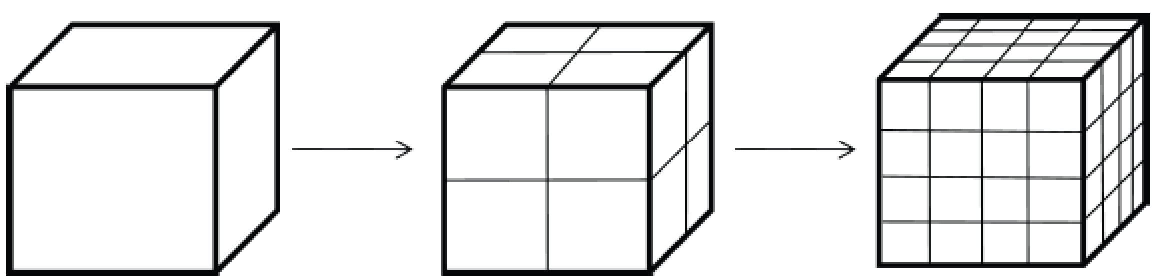


Figura 7. Bisección de un cubo

Bisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias					
Tamaño de la copia					

Tabla 3. Comportamiento de la bisección de la arista de un cubo

A continuación, completa las siguientes frases:

Cada nivel está compuesto por ___________ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

4. De manera análoga, si pudiéramos manipular un objeto de 4 dimensiones, entonces al bisecar los lados de este objeto, tendríamos que:

Cada nivel está compuesto por _______ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

Y así podemos seguir haciéndolo para las dimensiones siguientes. Por ejemplo, para la dimensión 20, al bisecar tendríamos que:

Cada nivel está compuesto por _______ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

Así, al generalizar este comportamiento, podemos completar la siguiente tabla:

Dimensión	Número de copias N respecto al nivel anterior (como potencias de 2)	Tamaño de cada copia, respecto al nivel anterior (como potencias de 2)
1		
2		
3		
4		
5		
…		
20		
…		
D		

Tabla 4. Generalización de las bisecciones

EXPERIMENTO 6: Trisección en dimensiones 1, 2 y 3

Repite los mismos pasos del experimento 5, pero esta vez en vez de bisecar, triseca el segmento, el lado del cuadrado, la arista del cubo, etc. Los primeros pasos de estos procesos se muestran en la imagen de abajo.

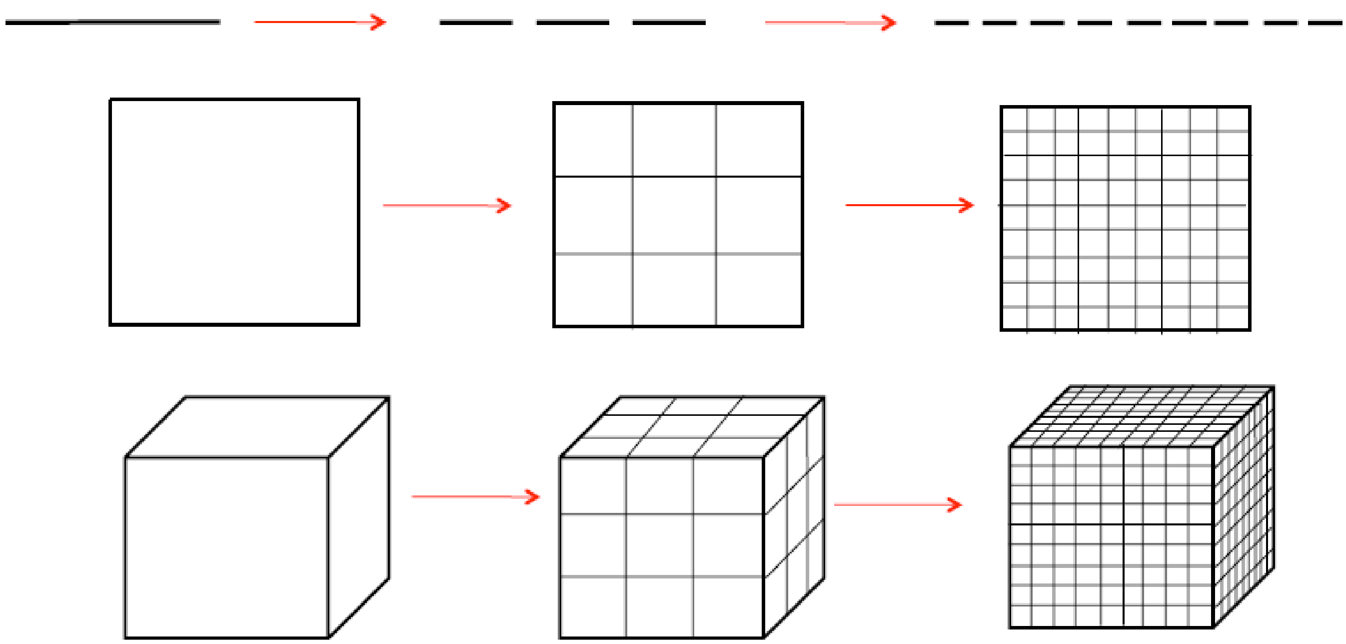


Figura 8. Trisección del segmento, el cuadrado y el cubo

A continuación, de acuerdo a lo observado, completa las tablas, para cada caso y las conclusiones correspondientes.

Trisección del segmento:

Trisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias					
Tamaño de la copia					

Tabla 5. Comportamiento de la trisección de un segmento

Cada nivel está compuesto por ________ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

Trisección del lado del cuadrado:

Trisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias					
Tamaño de la copia					

Tabla 6. Comportamiento de la trisección del lado de un cuadrado

Cada nivel está compuesto por ________ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

Trisección de la arista del cubo:

Trisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias					
Tamaño de la copia					

Tabla 7. Comportamiento de la trisección de la arista de un cubo

Cada nivel está compuesto por ________ copias del nivel inmediatamente anterior.

El tamaño de cada copia es ________ del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.

Finalmente, para el caso de la trisección, sintetiza los comportamientos observados en la siguiente tabla:

Dimensión	Número de copias N respecto al nivel anterior (como potencias de 3)	Tamaño de cada copia, respecto al nivel anterior (como potencias de 3)
1		
2		
3		
4		
5		
…		
20		
…		
D		

Tabla 8. Generalización de las trisecciones

Hasta ahora hemos realizado procesos de bisección $(M = 2)$ y trisección $(M = 3)$. Podríamos seguir haciendo el proceso de dividir cada segmento, lado, arista, etc. en cuatro partes $(M = 4)$, cinco partes $(M = 5)$, seis partes $(M = 6)$ y en general, dividir en M partes.

La tabla 9 muestra la generalización de todos estos procesos. Para facilitar la comprensión de lo realizado hasta el momento, se adoptará la siguiente notación:

- D: Dimensión en la que se hace el proceso
- N: Factor que determina el número de copias que van apareciendo durante el proceso, respecto al nivel inmediatamente anterior.

- M: Número de partes en que se divide el segmento, el lado del cuadrado, la arista del cubo, etc. Es decir M representa el proceso en sí mismo (Bisecar, trisecar, M-secar)

Completa la tabla teniendo en cuenta de expresar los resultados obtenidos en términos de potencias de 2, de 3, de 4, de 5, etc., generalizando hasta obtener una ecuación que permita expresar el número de copias (N) en función del proceso realizado (M) y de la dimensión (D).

Dimensión D	**Bisección $M = 2$**		**Trisección $M = 3$**		**Dividir en cuatro partes iguales $M = 4$**			**Dividir en M partes iguales**	
	Número de copias N	**Tamaño de cada copia**	**Número de copias N**	**Tamaño de cada copia**	**Número de copias N**	**Tamaño de cada copia**		**Número de copias N**	**Tamaño de cada copia**
1							…		
2							…		
3							…		
4							…		
5							…		
…							…		
10							…		
…							…		
20							…		
D							…		

Tabla 9. Generalización de todos los procesos

Después de analizar la tabla podemos concluir que, en general:

$$\boldsymbol{N\acute{u}mero\ de\ copias\ (respecto\ al\ nivel\ anterior)} \\ \boldsymbol{= Proceso^{Dimeni\acute{o}n}}$$

Y en términos de la notación adoptada: $\boldsymbol{N = M^D}$

Si en esta ecuación, despejamos D, obtenemos:

$$\log N = \log M^D$$

$$D.\log M = \log N$$

$$D = \frac{\log N}{\log M}$$

Esta última expresión se denomina la dimensión (D) de la figura sobre la que se hace el proceso (segmento, cuadrado, cubo, etc.).

Para una mejor comprensión de la definición de dimensión, comprobemos la dimensión de un segmento, de un cuadrado y de un cubo.

Para un segmento:

$$D = \frac{\log N}{\log M} = \frac{\log 2}{\log 2} = \frac{\log 3}{\log 3} = \frac{\log 4}{\log 4} \ldots = 1$$

Para la bisección

Para la trisección

Para la cuadrisección

Para un cuadrado:

$$D = \frac{\log N}{\log M} = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log 16}{\log 4} \ldots = 2$$

Para la bisección | Para la trisección | Para la cuadrisección

Para un cubo:

$$D = \frac{\log N}{\log M} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\log 27}{\log 3} = \frac{\log 64}{\log 4} \ldots = 3$$

Para la bisección | Para la trisección | Para la cuadrisección

Estos resultados coinciden con lo explicado anteriormente, respecto de que las formas trabajadas en geometría euclidiana tienen una dimensión entera: $D = 1$, $D = 2$, $D = 3$.

Pero pueden existir procesos o procedimientos diferentes a bisecciones, trisecciones, cuadrisecciones, etc., en los que el número de nuevas partes que van apareciendo siguen comportamientos diferentes a los vistos hasta el momento.

EXPERIMENTO 7

1. En una hoja de papel, realiza el siguiente **proceso**. Asegúrate de tener las **herramientas adecuadas**:

- **Paso 1:** Traza un segmento de longitud 1
- **Paso 2:** Triseca el segmento y remueve la tercera parte central, reemplazando esta parte removida por dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$, conectados en un punto común.
- **Paso 3:** A los cuatro segmentos iguales obtenidos, aplícale nuevamente el proceso descrito en el paso 2
- **Paso 4:** Itera el proceso las veces que más puedas.

La siguiente figura muestra los primeros pasos del proceso.

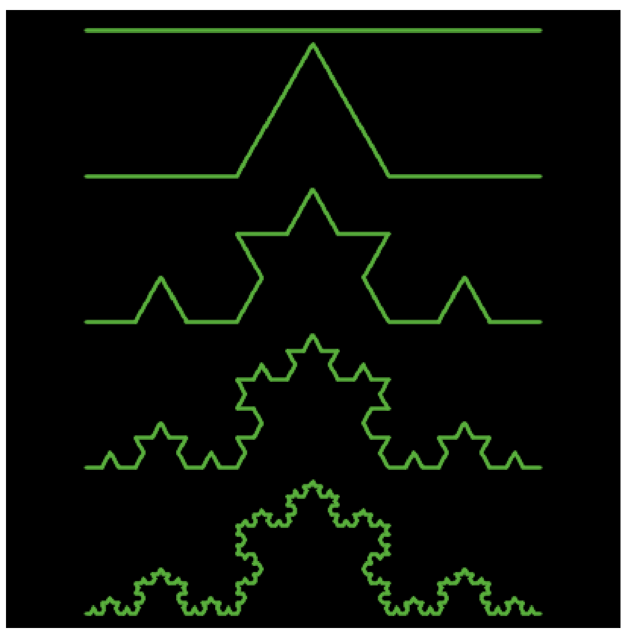


Figura 9. Construcción de un fractal por iteración[5]

2. Calcula la dimensión de la figura obtenida en estos primeros pasos.

[5] Fractal elaborado con NetLogo®

Como se puede observar el proceso subyacente es la trisección de un segmento $(M = 3)$ y en cada paso se obtiene el cuádruple de segmentos del nivel inmediatamente anterior $(N = 4)$. Por lo tanto, la dimensión (D) de la imagen obtenida después de infinitos pasos está dada por:

$$D = \frac{\log N}{\log M} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.26$$

Observa que el valor de la dimensión D no corresponde un número entero. Objetos como estos, cuya dimensión no corresponde a un número entero se denomina **Fractal** (de dimensión fraccionaria). Intuitivamente podemos considerar que el objeto obtenido tiene una dimensión mayor que la de in segmento $(D = 1)$, pero menor que la de un cuadrado o un rectángulo $(D = 1)$, como se puede apreciar en la figura 10.

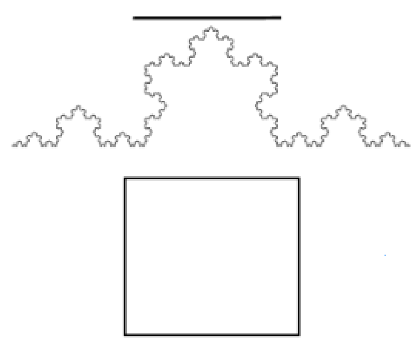


Figura 10. Dimensión fractal entre uno y dos[6]

De acuerdo a los experimentos realizados construye tu propia definición de fractal y escríbela en el recuadro.

[6] Tomado de https://www.complexityexplorer.org/courses/97-introduction-to-complexity

Anexo E. Secuencia didáctica: Análisis aritmético y algebraico de fractalidad

ANÁLISIS ARITMÉTICO Y ALGEBRAICO DE FRACTALES

Objetivo: lograr una definición intuitiva de fractal, desde los conceptos de autosimilitud y dimensión no entera.

La serie geométrica

Una progresión o sucesión geométrica es una sucesión, donde cada término, excepto el primero (a_1), se puede obtener multiplicando el término inmediatamente anterior por una cantidad constante, denominada, **razón común** $(\boldsymbol{r})$.

La suma de todos los términos de una progresión geométrica infinita se puede calcular con la fórmula: $\boldsymbol{S = \frac{a_1}{1-r}}$ **(1)**

…

EXPERIMENTO 8

Ingresa a:

https://www.geogebra.org/m/fk3k3c3a
https://www.geogebra.org/m/Hgg9j6Tn
https://www.geogebra.org/m/DF7CjYRW

Interactúa con las actividades y responde las siguientes preguntas.

a) En cada progresión geométrica, encuentra el primer término y la razón común

b) Comprueba en cada caso la suma con la fórmula (1)

c) ¿En qué casos es posible encontrar la suma de una progresión geométrica infinita?

d) ¿En qué casos NO es posible encontrar la suma de una progresión geométrica infinita?

e) Crea en Geogebra un diseño que permita ver la suma de una serie geométrica infinita.

Algunos fractales clásicos

Las características de un fractal son dos: la autosimilaridad y la dimensión fraccionaria. La **autosimilaridad** significa que, cuando examinamos pequeñas porciones del objeto (fractal), la imagen que vemos no es más que una copia (réplica) de nuestro objeto inicial. Por ejemplo, el brócoli romanesco y la hoja del helecho.

Esta propiedad la abstraemos definiendo **autosimilaridad:** al ampliar partes de un fractal, emergen estructuras que parecen ser idénticas al original.

El conjunto de Cantor

Este fractal creado por George Cantor (St. Petersburgo, Rusia 1845- Halle, Alemania 1918) se construye a partir de un segmento de recta en un proceso llevado hasta el límite, es decir, el conjunto de Cantor es el objeto que está al final de aplicar **reiteradamente** nuestro proceso. Los elementos básicos del proceso son los siguientes:

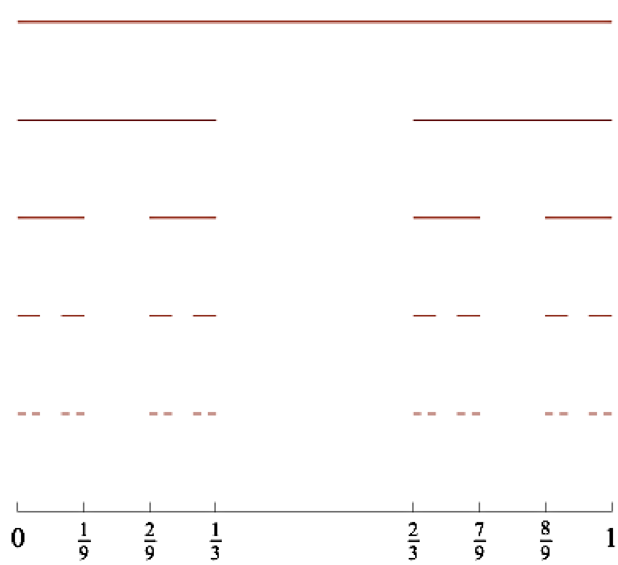


Figura 1. Construcción del conjunto de Cantor
Tomado de Iteración y fractales (con mathematica)
(Rubiano O. Gustavo N., 2009)

- Dado el segmento de recta constituido por el intervalo cerrado [0, 1], extraemos de él la tercera parte central, es decir, el intervalo abierto $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Este primer paso nos deja ahora con dos segmentos de recta, cada uno en escala tres veces menor que el inicial.
- Tomamos los segmentos de recta producidos en el paso anterior, esto es, los segmentos cerrados $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},1]$ y sobre cada uno de ellos efectuamos nuevamente el proceso indicado en (i).
- El paso anterior produce ahora cuatro intervalos y sobre cada uno de ellos volvemos a efectuar el paso (i). Continuamos este proceso de manera indefinida.

Los puntos del intervalo inicial [0, 1] que nos quedan al final de estas infinitas extracciones forman el llamado conjunto de Cantor denotado por C.

Desarrollando el pensamiento numérico y variacional

EXPERIMENTO 9

Reconstruye usando lápiz y papel y a una escala adecuada, los primeros 8 pasos para la construcción del conjunto de Cantor. Puedes usar papel milimetrado si es necesario. Analizando el proceso de construcción completa la siguiente tabla:

Paso	Número de segmentos suprimidos (Como potencias de 2)	Número de segmentos que van quedando (Como potencias de 2)	Longitud de los segmentos suprimidos (Como potencias de 2 y de 3)	Longitud de los segmentos que van quedando. (Como potencias de 2 y de 3)
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
…				
n				
…	El proceso se extiende hasta infinito			

Tabla 1. Análisis del conjunto de Cantor
Creación propia

De acuerdo al análisis hecho sobre la tabla, responde:

a) ¿Cuál es la sucesión que permite calcular la longitud de total de todos los segmentos suprimidos (hasta infinito)?

b) Si es posible, calcula esta suma infinita. ¿Te sorprende el resultado?

c) ¿Cuál sería entonces la longitud del conjunto de Cantor?

d) ¿Qué pasa cuando n tiende a infinito (se hace tan grande como se quiera) en la expresión que obtuviste en la columna 5 de la tabla anterior?

e) ¿Cuántos puntos crees que tenga finalmente el conjunto de Cantor? Enumera por lo menos diez números que pertenezcan al conjunto de Cantor.

f) Si te fijas en la longitud de los segmentos del extremo izquierdo de cada paso de la construcción, notarás que cada uno de ellos es una reducción del segmento del extremo izquierdo del paso inmediatamente anterior. ¿Cuál sería la razón de semejanza en este caso?

El conjunto de Cantor así construido tiene las siguientes características:

- Es un conjunto **No numerable,** esto significa que sus elementos no se pueden contar como se cuentan los números naturales (o los pupitres de tu aula de clase), pues dado un elemento del conjunto de Cantor, existen puntos de este conjunto tan cercanos a él como queramos; esto es, sus infinitos puntos no están aislados como granos, sino juntos como una polvareda. (Rubiano O. Gustavo N., 2009 p. 22)
- El conjunto de Cantor tiene tantos elementos como elementos tiene el intervalo $[0,1]$, es decir una cantidad infinita no numerable. (Silvestre, 2017 p.30)
- Es un conjunto autosimilar, es decir cada segmento de la izquierda (por ejemplo) se obtiene multiplicando por $\frac{1}{3}$ la longitud del segmento del paso inmediatamente anterior.
-

EXPERIMENTO 10

Simula en un software apropiado (Netlogo) la construcción del conjunto de Cantor y verifica en él todas sus propiedades.

La curva de koch

Este fractal data de 1904, cuando lo creó el matemático sueco N. F. Helge von Koch (Estocolmo 1870–1924). A diferencia del conjunto de Cantor, se genera por una sucesión infinita de adiciones de segmentos de recta a un segmento inicial, lo cual hace que al final obtengamos una curva y no una polvareda de puntos como en el conjunto de Cantor.

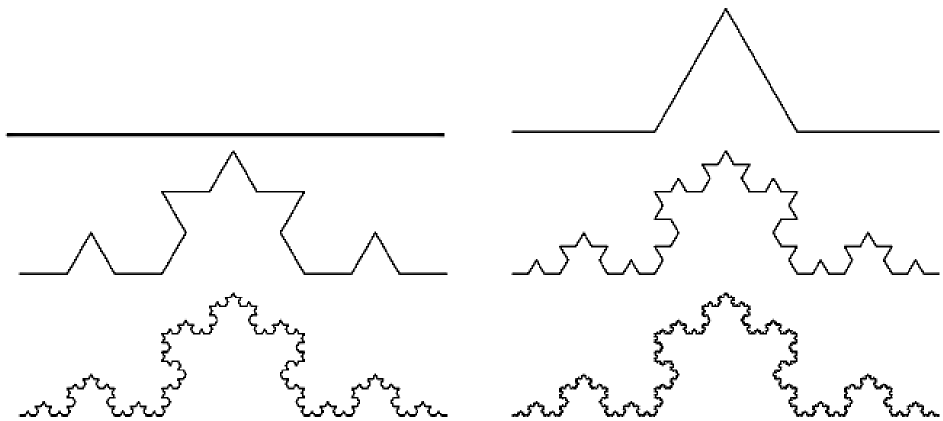


Figura 2. Construcción de la curva de Koch

- Iniciamos nuestro proceso con un segmento de recta de longitud 1 (por supuesto, la longitud en cualquier caso es irrelevante, tan solo es cuestión de comodidad al calcular). Este objeto se conoce como el **iniciador**. El primer paso consiste en remover la tercera parte central, pero en esta ocasión la reemplazamos por un triángulo equilátero con lados de longitud $\frac{1}{3}$, al cual le hemos suprimido la base. Este proceso será el tema central de la construcción y es llamado el **generador**.
- Por el paso anterior hemos obtenido cuatro segmentos iguales. A cada uno de ellos le aplicamos el proceso descrito en (i), esto es, aplicamos el generador, siempre por encima de la recta.

El proceso anterior se repite hasta el infinito o hasta donde haya resolución en la pantalla del computador. Lo que quede al final del proceso será la curva de Koch, K (Rubiano O. Gustavo N., 2009 p.7). La pregunta a responder en este fractal es:

¿Qué tan larga es la curva de Koch cuando el proceso iterativo se extiende hasta infinito?

Desarrollando el pensamiento numérico y variacional

EXPERIMENTO 11

- Reconstruye usando lápiz y papel y a una escala adecuada, los primeros 5 pasos para la construcción de la curva de Koch. Puedes usar papel milimetrado si es necesario. Analizando el proceso de construcción completa la siguiente tabla:

Paso	Número de segmentos (como potencia de 2)	Longitud de cada segmento (como potencia de 3)	Longitud total (como potencia de 2 y de 3)
1			
2			
3			
4			
5			
…			
$\boldsymbol{n}$			
…	El proceso se extiende hasta infinito		

Tabla 2. Análisis de la longitud de la curva de Koch creación propia

a) Escribe la serie geométrica que permite calcular la longitud de la curva de Koch, identificando en ella la razón común.

b) Encuentra la suma de la serie del ejercicio anterior.

c) En el quinto paso que hiciste en el papel milimetrado, dibuja media circunferencia tomando como puntos extremos los extremos izquierdo y derecho de la curva en ese paso. Si comparas las longitudes de dicha semicircunferencia con la de la curva de Koch, ¿qué puedes intuir o concluir?

d) Analizando los pasos sucesivos de la construcción que hiciste, ¿cuál sería el factor de escala que define la autosimilaridad de la curva de Koch?

El hecho curioso aquí es que la curva de Koch es una curva de longitud infinita, que sin embargo nos cabe en la palma de la mano.

EXPERIMENTO 12

Usando el software Netlogo, crea un programa que te permita generar la curva de Koch para un número grande de pasos.

Una variación de la curva de Koch: el copo de nieve

A partir de la curva de Koch es posible crear un objeto que nos evoca a un copo de nieve. Se obtiene fijando tres curvas de Koch rotadas adecuadamente para que se unan formando una especie de triángulo equilátero. Tal como muestra la figura 3.

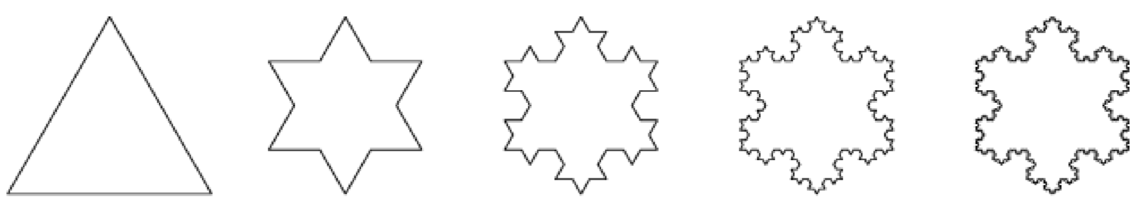


Figura 3. Copo de nieve de Koch

EXPERIMENTO 13

- Reconstruye usando lápiz y papel y a una escala adecuada, los primeros 5 pasos para la construcción del copo de nieve de Koch. Puedes usar papel milimetrado si es necesario. Analizando el proceso de construcción completa la siguiente tabla:

Paso	Número de nuevos triángulos (como potencia de 3 y 4)	Área de cada nuevo triángulo (como potencia de 9)	Área total del copo (como potencia de 3, 4 y 9)
1			
2			
3			
4			
5			
…			
$\boldsymbol{n}$			
…	El proceso se extiende hasta infinito		

Tabla 3. Análisis del área del copo de nieve de Koch
Creación propia

- Suponiendo que el área del triángulo equilátero inicial es 1, plantea una serie geométrica que permita calcular el área del copo de nieve cuando el número de pasos es infinito.
- En el paso 5 de la construcción que hiciste, dibuja un círculo con centro en el centro del triángulo equilátero inicial y que pase por los vértices de este triángulo. ¿Qué puedes concluir respecto a las áreas del círculo y al área del copo de nieve, cuando el proceso se extienda hasta infinito?
- Verifica si el copo de nieve es un fractal a la luz de la propiedad de autosimilaridad.

EXPERIMENTO 14

Usando el software Netlogo, crea un programa que te permita generar el copo de nieve de Koch para un número grande de pasos.

El triángulo de Sierpinski, carpetas y la esponja

El matemático polaco Waclaw Sierpinski (Varsovia 1882-1969) creó varios objetos fractales, entre ellos el conocido triángulo de Sierpinski. De manera análoga al conjunto de Cantor, este fractal puede ser obtenido por medio de una sucesión infinita de extracciones. La construcción procede como sigue:

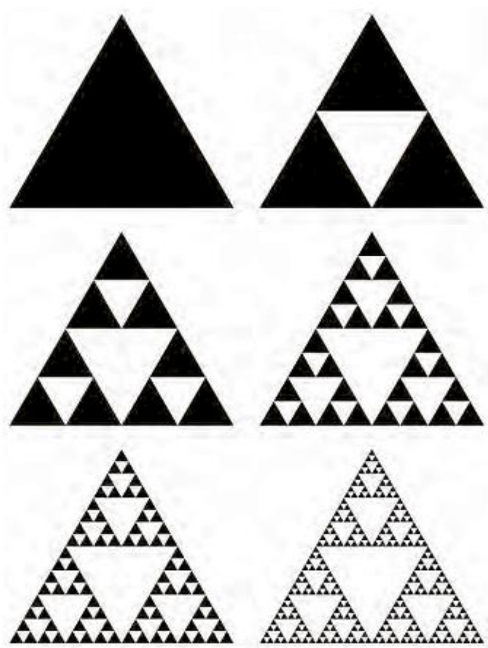


Figura 4. Construcción del triángulo de Sierpinski

- A partir de un triángulo rectángulo inicial, con lados de longitud 1 por comodidad, unimos los puntos medios de cada lado y extraemos el triángulo central interno. Después de este primer paso obtenemos tres triángulos iguales, cada uno equilátero y con longitudes que son exactamente la mitad del triángulo inicial. Como en los casos anteriores, es preciso que descifremos cuál es el objeto **iniciador** y cuál el proceso **generador**.

- Con los tres triángulos producidos por el paso anterior, procedemos de igual manera a aplicar el proceso generador en cada uno de ellos, para así obtener tres nuevos triángulos por cada uno, lo cual produce finalmente 9 triángulos equiláteros, cada uno a escala $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ del inicial.
- Continuamos el proceso anterior en cada uno de los nuevos triángulos que se van generando, hasta llegar al límite del proceso. La figura ***última*** es conocida como el triángulo S de Sierpinski.

EXPERIMENTO 15

- Reconstruye usando lápiz y papel y a una escala adecuada, los primeros 6 pasos para la construcción del triángulo de Sierpinski. Puedes usar papel milimetrado si es necesario. Analizando el proceso de construcción completa la siguiente tabla:

Paso	Número de triángulos que quedan (negros)	Número de triángulos extraídos (como potencia de 3)	Área de un triángulo extraído (como potencia de 4)	Área de todos los triángulos extraídos (como potencia de 3 y de 4)
1				
2				
3				
4				
5				
…				
$\boldsymbol{n}$				
…	El proceso se extiende hasta infinito			

Tabla 2. Análisis del área del triángulo de Sierpinski creación propia

- Escribe la serie geométrica que permite calcular el área de todos los triángulos extraídos, identificando en ella la razón común.
- Encuentra la suma de todos los triángulos extraídos, cuando el proceso se extiende hasta infinito.

- Cuándo el proceso se lleva al infinito, crees que todavía quedan triángulos (puntos) negros en el arreglo.
- Crees que hay una contradicción entre los resultados de los incisos c y d. Elabora una conclusión.
- Analiza en detalle la figura obtenida en el paso 5 y encuentra en ella la autosimilaridad. Comparando dos pasos consecutivos, ¿cuál es la razón de semejanza?

EXPERIMENTO 16

Usando el software Netlogo, crea un programa que te permita generar el triángulo de Sierpinski, para un número grande de pasos.

Las carpetas de Sierpinski

Hay muchos fractales que pueden construirse siguiendo el patrón con el que se generó o el triángulo de Sierpinski; esto es, tocamos variaciones sobre un mismo tema. Las carpetas son un ejemplo de estos fractales y a continuación veremos el caso cuando comenzamos con un cuadrado. Recordemos que en el triángulo de Sierpinski iniciamos con un triángulo; ahora actuamos sobre el cuadrado: lo subdividimos en nueve pequeños cuadrados, para extraer el cuadrado central, y en cada uno de los ocho restantes volvemos a efectuar este proceso, hasta obtener al final la llamada **carpeta de Sierpinski**. En este caso la escala es de $\frac{1}{3}$ n en cada una de las longitudes y se generan 8^n cuadrados en el paso n-ésimo.

EXPERIMENTO 17

- Usando el software Netlogo, crea un programa que te permita generar la carpeta de Sierpinski descrita en el párrafo anterior, para un número grande de pasos.

- Usando una serie geométrica, calcula el área de todos los cuadrados extraídos en la carpeta de Sierpinski descrita anteriormente. ¿Qué puedes concluir?
- Usando otras figuras como iniciador, crea un programa que te permita observar la evolución de un proceso similar a la construcción del triángulo y la carpeta de Sierpinski.

L System fractals

Actividad: construcción de un árbol de navidad Sierpinski.

Ideas a desarrollar posteriormente:

- El caos con la calculadora
- La conjetura de Richardson aplicada a la costa colombiana
- El juego del caos (el determinismo detrás de la supuesta aleatoriedad)

BIBLIOGRAFÍA

Rubiano O. Gustavo N. (2009). *eBook Iteración y fractales (con mathematica ®) Universidad Nacional de Colombia*. (Editorial Universidad Nacional de Colombia, Ed.) (Primera). Bogotá.

Silvestre, M. V. B. F. P. (2017). *Fractales y caos la aventura de la complejidad*. (Guadalmazán, Ed.) (Primera). España: Guadalmazán.

Anexo F. Secuencia didáctica: Nociones básicas de NetLogo®

EXPLORANDO CON NETLOGO (PROGRAMACIÓN COMPUTACIONAL)

Iniciando NetLogo:

Reto # 1: interactuar con el software NetLogo y poder ingresar al mismo desde un equipo de cómputo (portátil, pc de escritorio, celular, Tablet,..). Identificar los elementos que lo componen y poder distinguirlos para su implementación dentro de un modelo. Recuerde que es necesario haber leído el Manual de NetLogo que ha sido subido a la plataforma para poder avanzar significativamente en la presente secuencia didáctica.

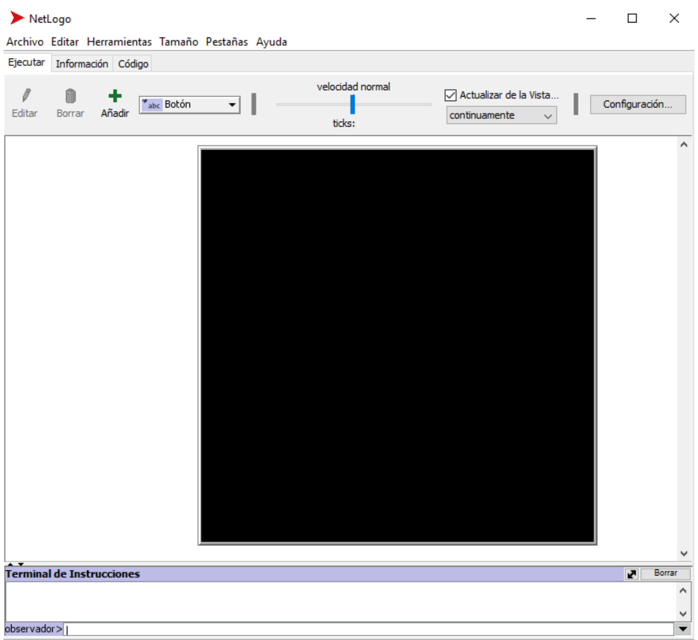
IDENTIFICACIÓN: Buscar el software NetLogo en el equipo asignado. Hacer doble clic (o seleccionar el logo + enter) para ingresar a programa y poder trabajar en él.

VISUALIZACIÓN: Cuando se ha ejecutado el paso anterior se procede a mostrar el aspecto inicial del software NetLogo. Consta de elementos comunes a diversos programas como lo es Archivo, Editar, Herramientas, Tamaño, Pestaña, Ayuda (se sugiere ingresar a cada uno y conocer los aspectos que lo componen). En la parte superior se identifican tres pestañas: Ejecutar, Información, Código.

Ejecutar: se observa el mundo (es donde ocurren las interacciones programadas) y ocurren las características del proyecto creado.

Información: Se muestra las características, datos, función, utilidad, del proyecto creado. Lo hace el programador como fuente de información para el usuario final.

Código: es donde se escribe los comandos lógicos que promueven el proyecto. Aquí es donde el programador genera secuencias de tipo programación que se verán reflejadas en la pestaña Ejecutar.



PESTAÑA EJECUTAR: Acá se puede observar los siguientes aspectos:

Insertar elementos: se puede escoger componentes para usar en la interfaz y hacer práctico el programa creado: botón, deslizador, interruptor, seleccionador, entrada…

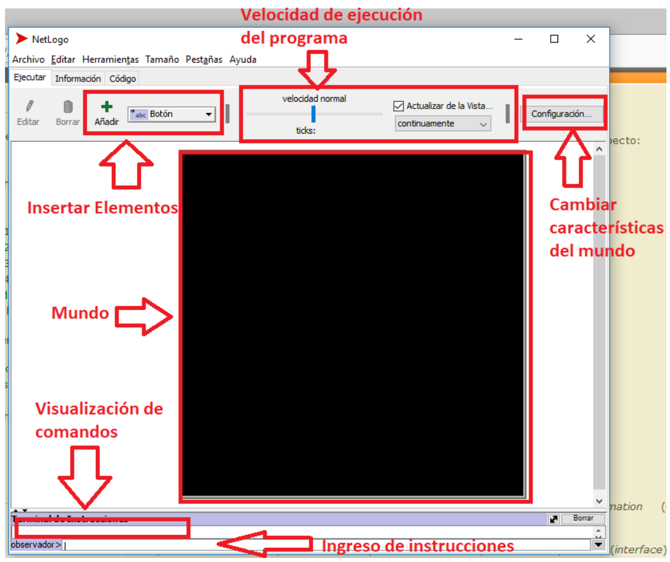
Mundo: es donde se observa el programa generado. Ahí ocurre lo que se ha creado y de manera interactiva se presenta al usuario.

Velocidad de ejecución del programa: se puede establecer la rapidez con que se desea ver las diversas interacciones entre los agentes.

Visualización de comandos: se guarda el historial de instrucciones escritas. Al hacer clic en la flecha doble al final, aparece el recuadro a la derecha del mundo para una mejor visualización.

Ingreso de instrucciones: es donde se insertan los comandos respectivos.

Cambiar características del mundo: el mundo en sí es un plano cartesiano. A través de *Configuración* se puede cambiar sus características iniciales: ubicación del origen, coordenadas máximas tanto en *x* como en *y*, poner límites a los ejes (o imaginar un cilindro que se une cuando el mundo es enrollado), tamaño de las parcelas o patchs (es un recuadro que está ubicado en una determinada coordenada, el mundo está recubierto de parcelas). Como actividad es necesario cambiar datos y observar comportamiento.



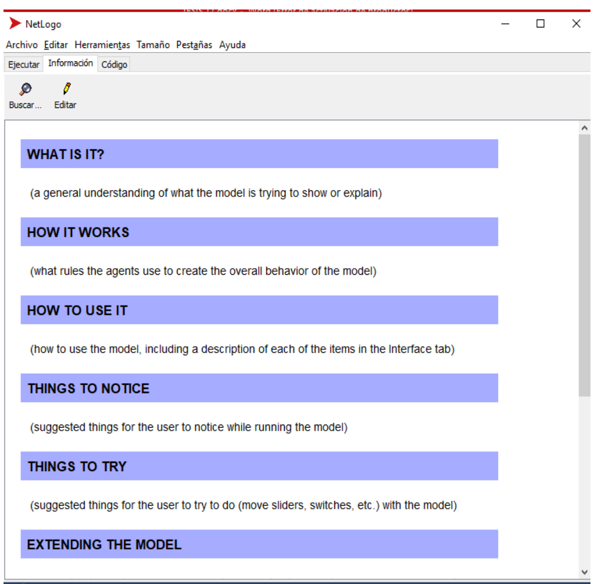
PESTAÑA INFORMACIÓN: Es donde se redacta aspectos propios del programa para ser leídos por el usuario final y entender el objetivo del proyecto. Aunque es opcional, se recomienda diligenciar la información presentada.

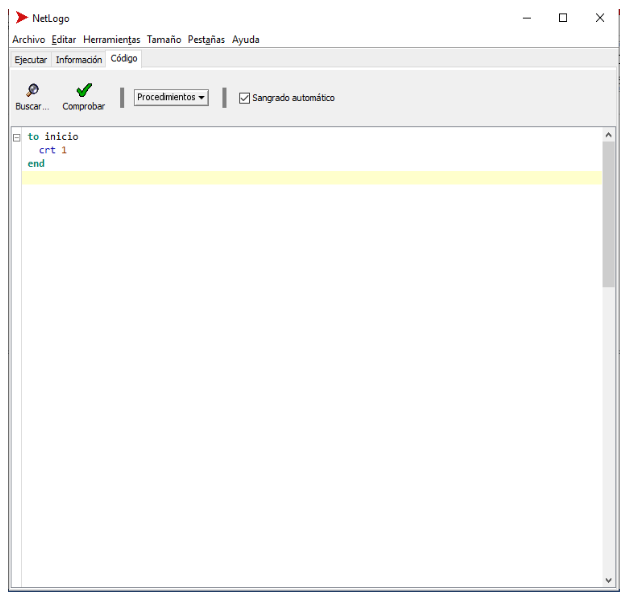
Referente al trabajo programado se solicita, entre otros: ¿Qué es? ¿Cómo funciona? ¿Cómo se usa?

PESTAÑA CÓDIGO: En este apartado se escribe el código de programación del proyecto creado. Las instrucciones, comandos, relaciones, funciones, iteraciones vienen sistemáticamente redactadas en el espacio de trabajo.

Es posible ***Buscar*** una palabra dentro del código, ***Comprobar*** que no existen errores de sintaxis (lógicos) en el código establecido, establecer ***Procedimientos*** o funciones creados por el programador y ***Sangrado Automático*** para que el escrito se vea ordenado y coherente.

Escriba el código que aparece en la imagen como paso inicial hacia el mundo de programar modelos que se va a convertir en un objetivo personal.





Primeros desarrollos en NetLogo:

Reto # 2: A partir de unos códigos sencillos empezar a familiarizarse con el entorno de programación NetLogo y hacer los primeros programas personales. Visualizar en pantalla una secuencia lógica de instrucciones y ser un punto de partida para la generación de productos finales adecuados.

Ejercicio ilustrativo # 1: crear cinco tortugas y desplazarlas una distancia.

En la pestaña código se escriben las instrucciones:

```
to prueba
  ca
  crt 5
  ask turtles [fd 10]
end
```

Explicación:

to prueba: la palabra *to* indica que se va a iniciar un procedimiento que se llama prueba (éste nombre puede ser cualquiera escogido por el programador).

ca: abreviatura de clear-all y lo que hace es limpiar el mundo, dejarlo listo para la simulación.

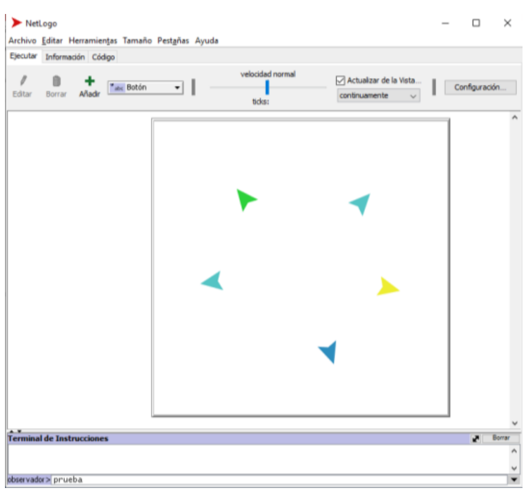
crt 5: abreviatura de create-turtles y lo que hace es crear tortugas en el mundo, para el caso presente, cinco. Ellas se generan en el origen de coordenadas (0,0).

ask turtles: se prepara para dar instrucciones a las tortugas.

fd 10: abreviatura de forward e indica que avancen 10 pasos hacia adelante.

end: se cierra el procedimiento.

Nota: para ver el resultado de lo programado nos dirigimos a la pestaña Ejecutar y en la línea de comandos donde dice Observador escribir el nombre del procedimiento (prueba) y luego enter. ¡¡¡¡Listo!!! Ya hicimos el primer programa en NetLogo.



Ejercicio ilustrativo # 2: crear una tortuga y hacer un polígono.

Código (instrucciones):

```
to poligono
  ca
  crt 1
  ask turtles [pd fd 5 rt 60 fd 5 rt 60 fd 5 rt 60
fd 5 rt 60 fd 5 rt 60 fd 5  pu]
end
```

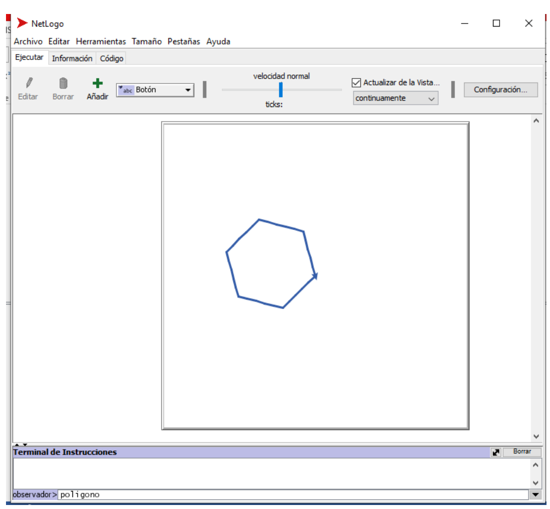
Explicación:

pd: abreviatura de pen-down que simula tener listo un lápiz para empezar a dibujar. Si no se escribe esta instrucción, la tortuga hace el recorrido que le indiquemos pero no genera ningún trazo en el mundo.

rt: abreviatura de right que traduce giro hacia la derecha. Indica una rotación el ángulo que se ordene. Para el caso actual, 60 grados.

pu: abreviatura de pen-up que indica levantar el lápiz para no dejar huella cuando el agente tortuga se desplace.

Nota: no importa si las instrucciones se escriben en el mismo renglón o diferente mientras entre cada una de ellas exista mínimo un espacio que las separe.



Vigilada Mineducación

Ejercicio ilustrativo # 3: utilizar el concepto de iteración para implementar en el proyecto.

En muchas ocasiones dentro de un conjunto de instrucciones hay algunas que se repiten a partir de un cambio inicial. En el ejemplo anterior todos los segmentos (fd 5) son iguales solo que antes de empezar a trazar uno de ellos, se debe hacer un giro de 60° (rt 60). Lo anterior se conoce como iteración y es muy utilizado en los fractales.

Código:

```
to iteración
  ca
  crt 1
  ask turtles [pd repeat 6 [fd 5 rt 60]  pu]
end
```

Explicación:

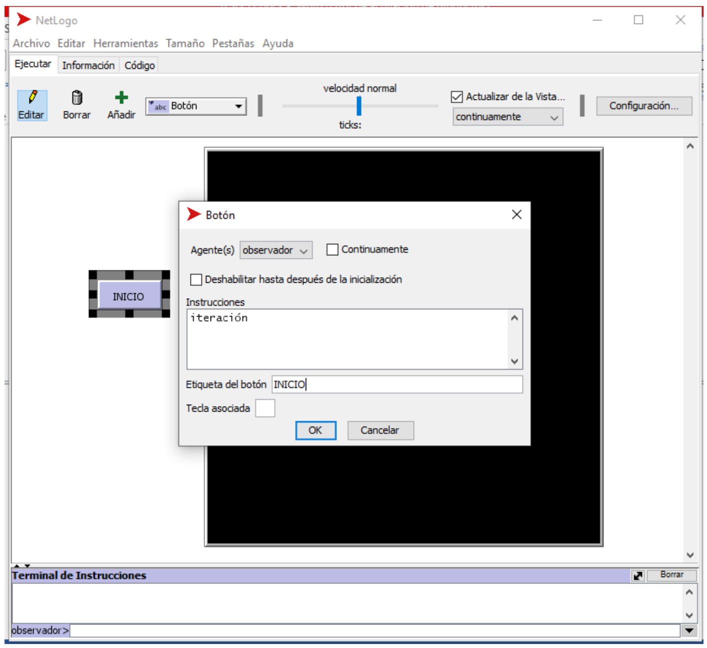
repeat 6: como la figura es un hexágono regular se conforma por seis lados iguales. El comando repeat indica que lo que va a venir enseguida, encerrado entre corchetes [ ], se debe iterar seis veces.

El resultado final es el mismo del ejercicio anterior. Como caso particular reduzca la velocidad de ejecución del programa (Pestaña Ejecutar) y visualice cómo la tortuga hace el polígono.

Siempre que exista iteraciones se debe utilizar esta manera de programación ya que es más simple, ordenada y clara. No saturar el código con instrucciones es aconsejable.

Ejercicio ilustrativo # 4: usar botones para ejecutar procedimientos.

En vez de estar escribiendo el procedimiento en la línea de comandos, es posible crear un botón que al presionarlo lo ejecute. Para ello se selecciona Botón en la pestaña Ejecutar, luego clic en Añadir (signo de suma) y por ultimo clic en el lugar donde se desea quede el botón. Aparece el cuadro de diálogo siguiente:



Agente: Observador (es la persona que está haciendo el programa).

Continuamente: si se selecciona esta opción el programa se ejecuta hasta que se presione de nuevo el botón respectivo. Al no marcarla lo hace solo una vez.

Instrucciones: se escribe el nombre del procedimiento creado.

Etiqueta del botón: nombre visible para el usuario final.

Tecla asociada: se puede seleccionar una tecla cualquiera que al ser presionada ejecute el botón y por ende el procedimiento.

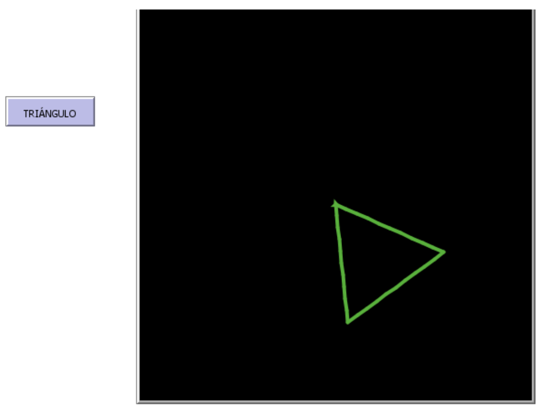
Deshabilitar hasta después de la inicialización: si se selecciona, el botón deja de funcionar luego de que se ejecute por primera vez.

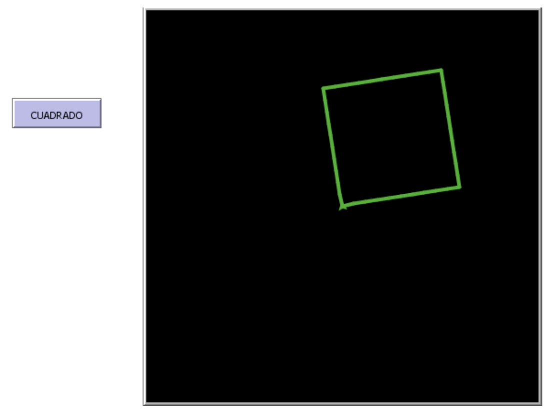
El resultado final es el mismo de los ejercicios anteriores pero de una manera práctica para el usuario final.

Evidencia de aprendizaje # 1:

Nota: Recuerde descargar la hoja de respuestas del sitio web classroom para luego de ser contestada pueda ser subida a la misma plataforma para la evaluación de los avances.

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un programa personal en donde se muestre la destreza adquirida. Como trabajo de ejecución se solicita crear el código para que en NetLogo se vea lo siguiente:



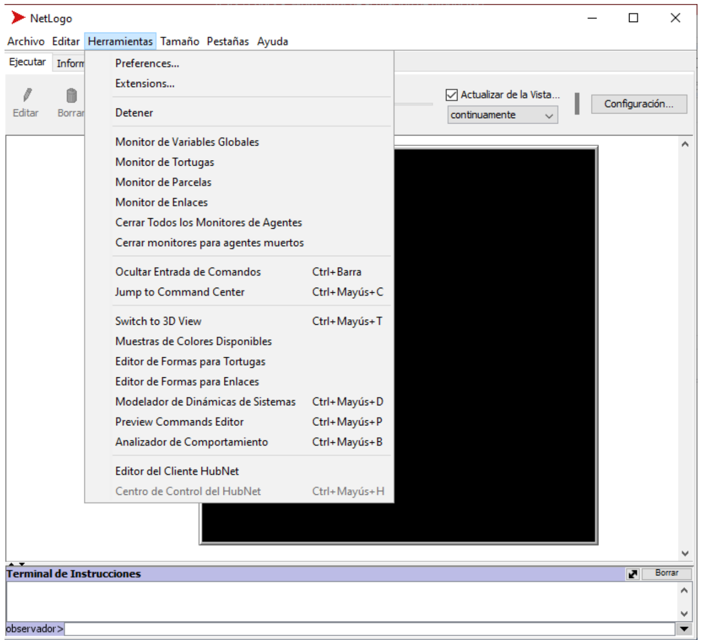


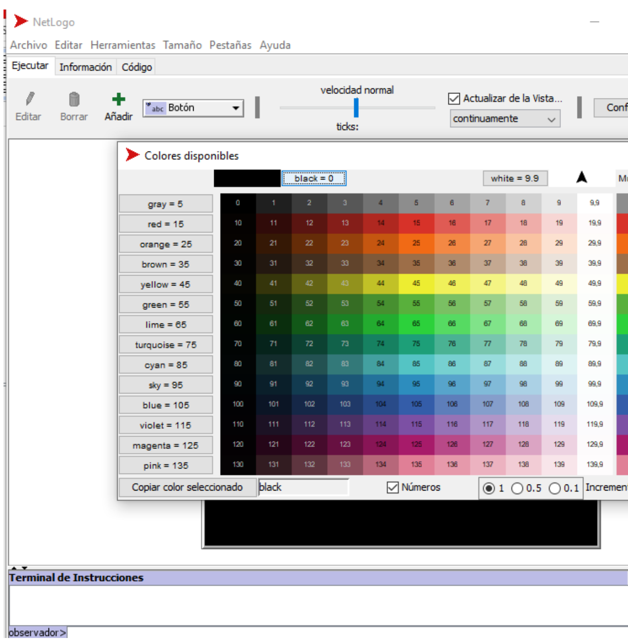
Apariencia y funcionalidad de los agentes en NetLogo:

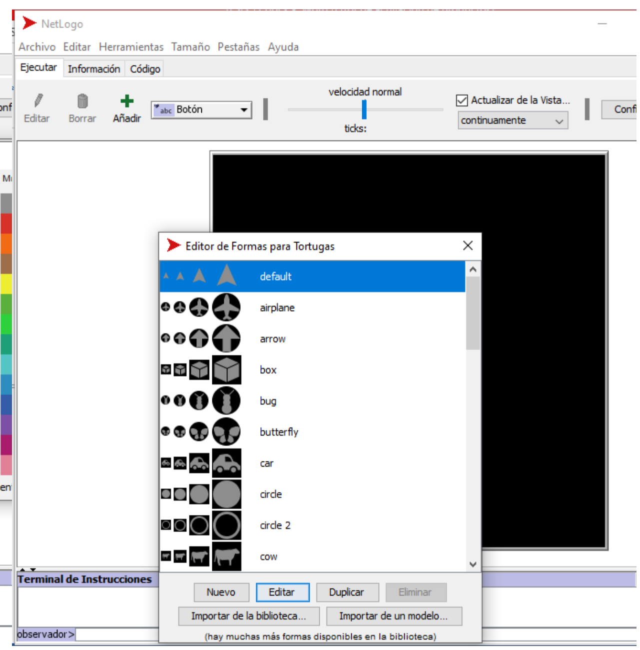
Reto # 3: Generar modificaciones en los agentes hasta el punto de poder personalizarlos para uso adecuado del programador, su respectivo proyecto y el usuario final.

Ejercicio ilustrativo # 5: se desea crear una tortuga (agente) que tenga las siguientes propiedades: color “amarillo”, orientación “hacia el norte”, coordenada (-5,3), forma “casa”, tamaño “mediano”.

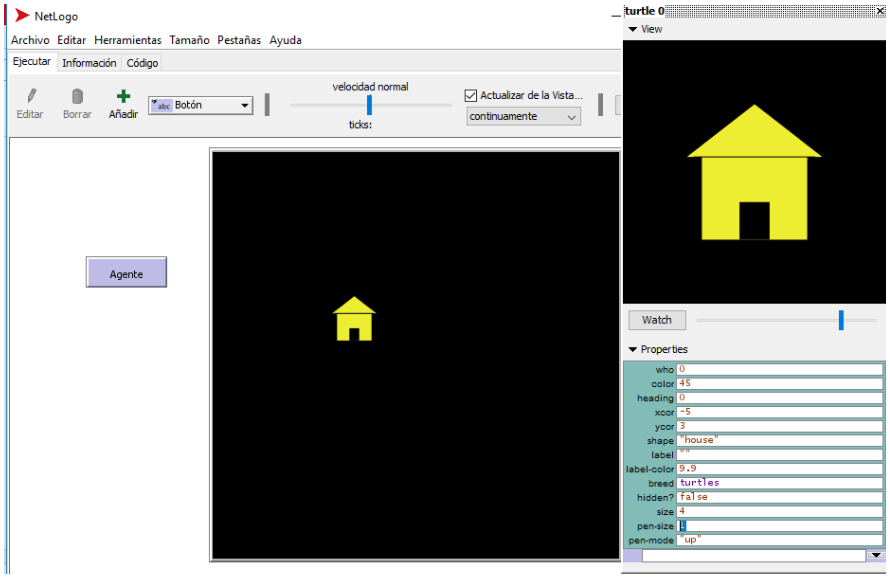
Nota: NetLogo permite conocer los códigos o nombres de las propiedades escogidas para el agente de la siguiente manera:







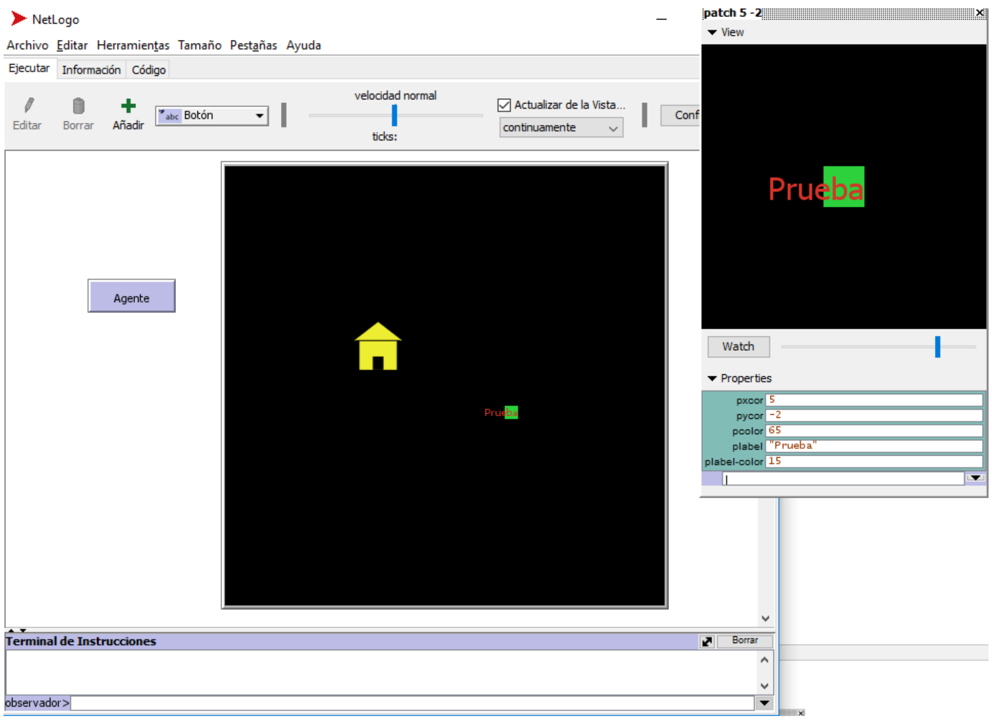
Al hacer clic derecho sobre la tortuga que aparece en el mundo, es posible acceder a sus propiedades siguiendo luego la ruta turtle → inspect turtle. Resultado final:



Si alguna propiedad no es comprendida solo basta hacer clic derecho en el espacio correspondiente y NetLogo direcciona hacia una ayuda práctica para saber lo que se puede escribir como atributo. Por ejemplo si no se sabe qué hacer en “heading” se hace clic en el recuadro que está al frente y se ingresa a la opción ayuda donde se explica el funcionamiento. Queda como trabajo personal hacer todo tipo de combinaciones y ver los resultados aplicados a la tortuga.

Ejercicio ilustrativo # 6: se desea cambiar la apariencia de un patch (porción del mundo) ubicado en la coordenada (5,-2) para que se vea verde y con el nombre “Prueba” de color rojo.

Nota: recuerde hacer clic en cualquier parte del mundo (no sobre una tortuga) para que aparezca el cuadro de diálogo.



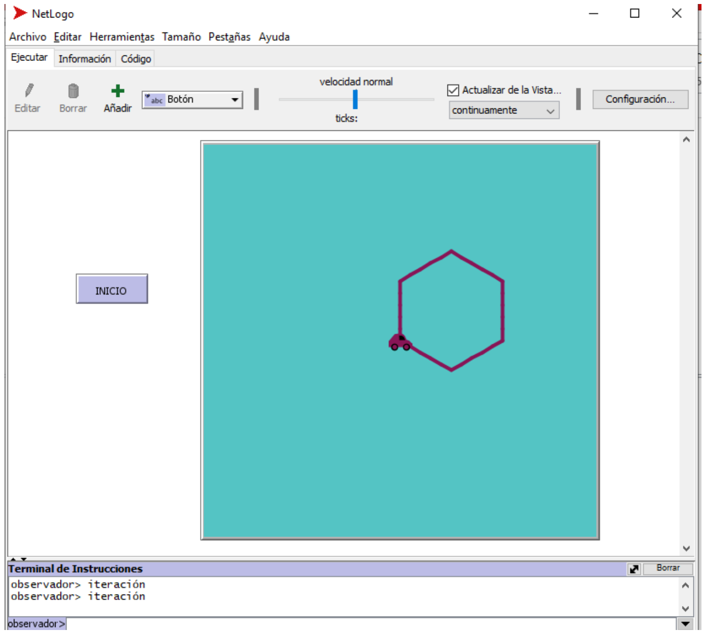
Ejercicio ilustrativo # 7: utilizar la pestaña código para hacer las modificaciones anteriores a través de instrucciones.

Código:

```
to iteración
  ca
  ask patches [set pcolor 85 ]
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color 124 set shape "car" set heading 0 set size 2]
  ask turtles [pd repeat 6 [fd 5 rt 60]  pu]
end
```

Nota → set se escribe antes del cambio a ejecutar. Otra forma podría ser:

```
to iteración
  ca
  ask patches [set pcolor 85 ]
  crt 1 [set pen-size 4 set color 124 set shape "car" set heading 0 set size 2]
  ask turtles [pd repeat 6 [fd 5 rt 60]  pu]
end
```

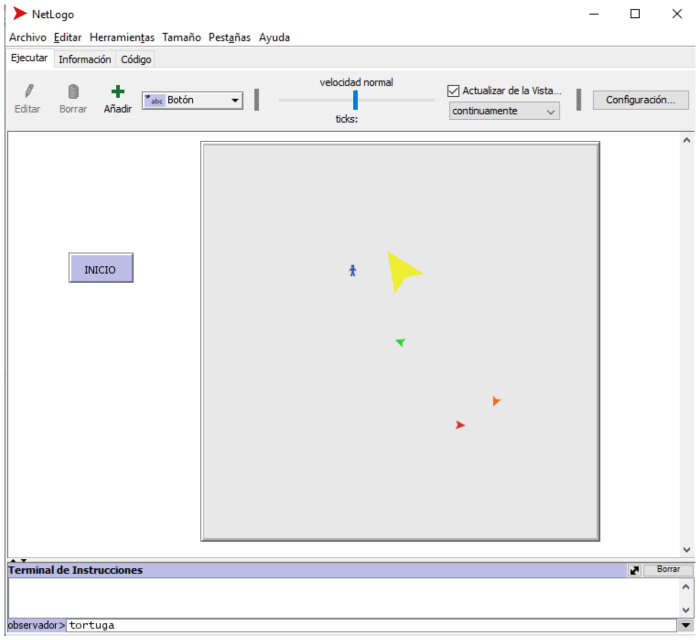


Ejercicio ilustrativo # 8: utilizar la pestaña código para hacer modificaciones individuales a cada agente (tortuga) a través de instrucciones.

Código:

```
to tortuga
  ca
  ask patches [set pcolor 9]
  crt 5
  ask turtle 0 [set xcor 5 set ycor -7]
  ask turtle 1 [set xcor -4 set ycor 6 set shape "person"]
  ask turtle 2 [set xcor 8 set ycor -5 set color 25]
  ask turtle 3 [set xcor 0 set ycor 6 set size 4]
end
```

Resultado visible:

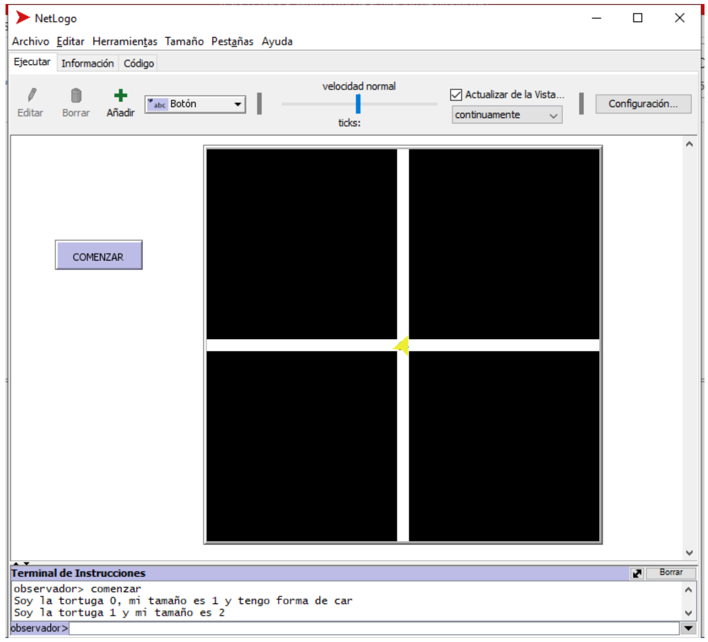


Ejercicio ilustrativo # 9: utilizar la pestaña código para conocer las propiedades de un agente y poder dar instrucciones a un conjunto de agentes que compartan propiedades comunes.

Código:

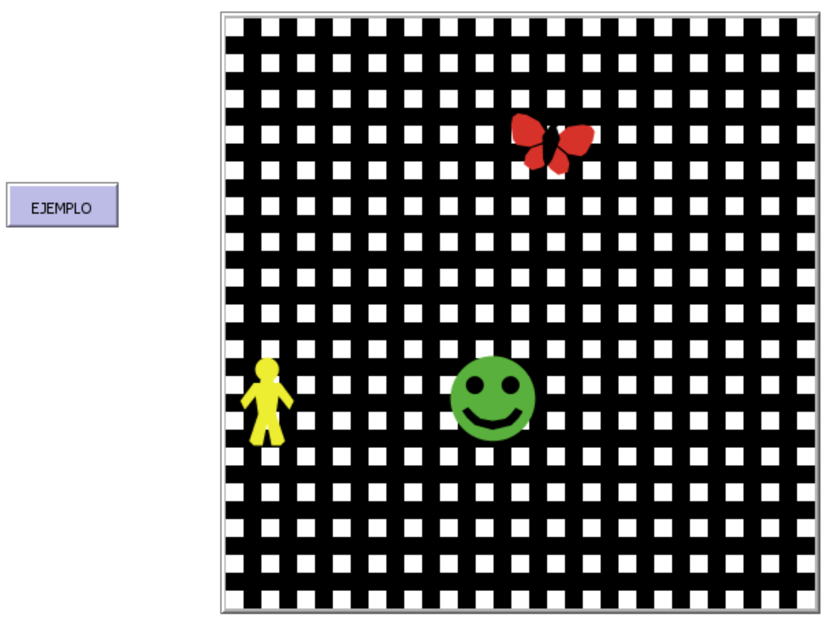
```
to comenzar
    ca
    crt 2
    ask turtle 0 [set size 1 set shape "car"]
    ask turtle 1 [set size 2]
    type "Soy la tortuga " type [who] of turtle 0 type ", mi tamaño es " type [size] of turtle 0
    type " y tengo forma de " print [shape] of turtle 0
    type "Soy la tortuga " type [who] of turtle 1 type " y mi tamaño es " print [size] of turtle 1

  ask patches with [pxcor = 0 or pycor = 0][set pcolor white]
end
```

Muestra las propiedades de las dos tortugas creadas y cambia a blanco los patches cuya coordenada sea cero en *x* o cero en *y*.



Evidencia de aprendizaje # 2:

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un programa personal en donde se muestre la destreza adquirida. Como trabajo de ejecución se solicita crear el código para que en NetLogo se vea lo siguiente (se sugiere utilizar el operador ***mod*** de NetLogo y los agentes no necesariamente deben quedar en los lugares mostrados):



Parámetros de entrada en NetLogo:

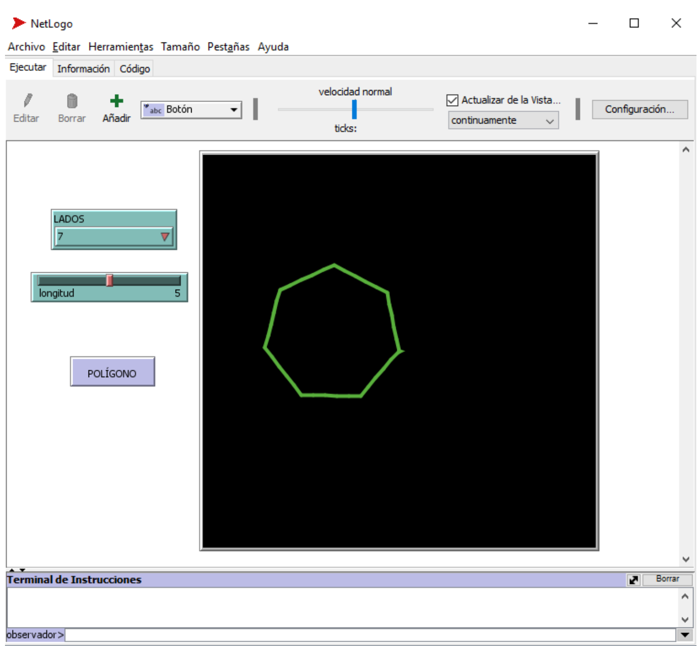
Reto # 4: Crear procedimientos dinámicos con el uso de herramientas que ofrece el Software NetLogo y poder introducir variables de entrada de manera adecuada para el usuario final.

Ejercicio ilustrativo # 10: utilizar la pestaña código para generar un programa que desarrolle un polígono regular cuyos datos de longitud y número de lados sea dinámico y sea ingresado por el usuario final.

Código:

```
to poligono
  ca
  crt 1 [set pen-size 4 set color green
    repeat lados [pd fd longitud rt 180 - ( 180 * (lados - 2)  / lados ) pu ]]
end
```

Análisis: con el anterior código se puede hacer cualquier polígono regular usando la fórmula para distinguir el valor de los ángulos internos. El valor de longitud de los lados y el número de lados se ha ingresado en la ventana ejecutar con un deslizador y un seleccionador.

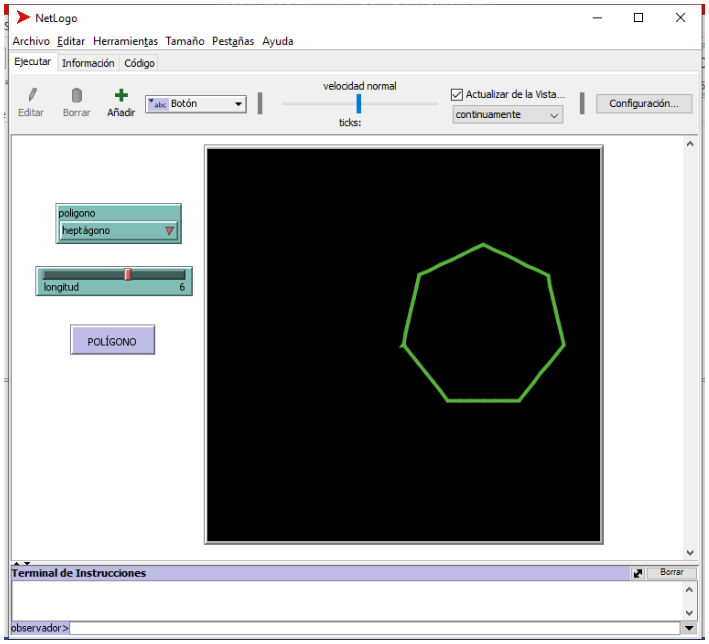


Ejercicio ilustrativo # 11: utilizar la pestaña código para generar un programa que desarrolle un polígono regular cuyos datos de longitud y el nombre del polígono sea ingresado por el usuario final.

Instrucciones:

```
globals [n]

to poligono1
   ca

if poligono = "triangulo"
[set n 3]
if poligono = "cuadrado"
[set n 4]
if poligono = "pentágono"
[set n 5]
if poligono = "hexágono"
[set n 6]
if poligono = "heptágono"
[set n 7]
if poligono = "octágono"
[set n 8]
if poligono = "nonágono"
[set n 9]
if poligono = "decágono"
[set n 10]

let angulo 180 - ( 180 * (n - 2)  / n )

   crt 1 [set pen-size 4 set color green repeat n [pd fd longitud rt angulo pu ]]

end
```

Análisis: se define una variable global que puede ser usada en todo el programa (n) y una variable local utilizada en el procedimiento (angulo). Con if que traduce si, se verifica la opción ingresada y se asigna el número de lados.

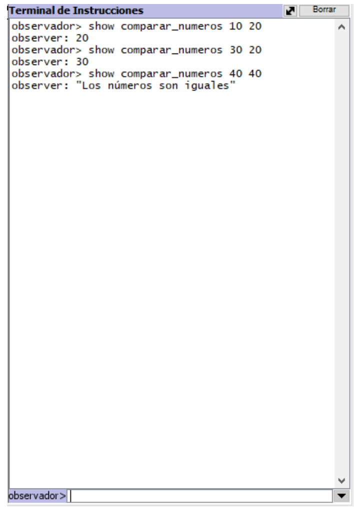


Ejercicio ilustrativo # 12: generar un procedimiento usando ifelse y retorno de valores.

Código:

```
to-report comparar_numeros [numero1 numero2]

    ifelse numero1 > numero2
    [
    report numero1
    ]

  [ifelse numero2 > numero1
    [
    report numero2
    ]

  [
    report "Los números son iguales" ]]
end
```

Análisis: ifelse indica que si no se cumple la condición entonces se salta la instrucción a la próxima y cuando encuentre similitud devuelve un valor con report.



Ejercicio ilustrativo # 13: crear propiedades personales a los agentes y poder cambiar sus atributos a concepto del programador.

Código:

```
turtles-own [estatura]
to propiedad
ca
crt 1 [set estatura 180]
crt 1 [set estatura 120]
ask turtles [show estatura]

end
```

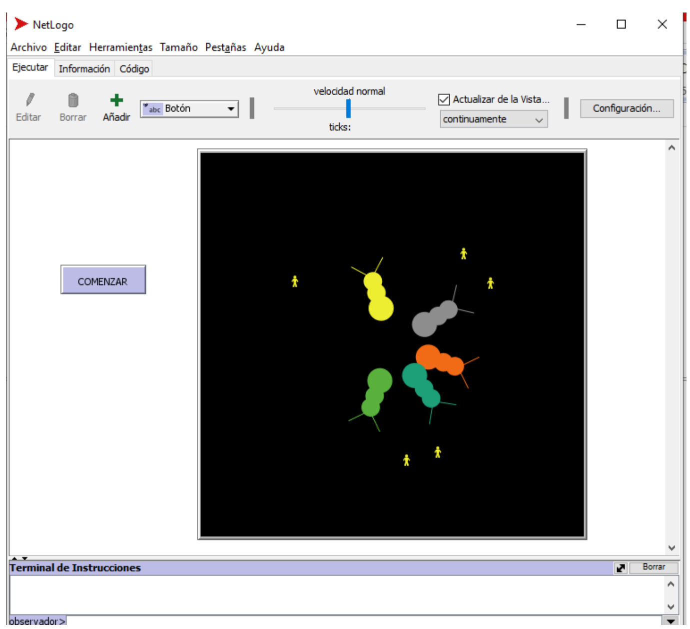
Análisis: la propiedad estatura es aplicada a dos agentes.

Ejercicio ilustrativo # 14: crear diferentes tipos de agentes y asignarles propiedades personales a cada grupo según conveniencia del programador y necesidad del usuario final.

Código:

```
breed [personas persona]
breed [gusanos gusano]
breed [arboles arbol]

to comenzar
    ca
    set-default-shape personas "person"
    set-default-shape gusanos "bug"

    create-personas 5
    create-gusanos 5

    ask personas [set color 45]
    ask gusanos [set size 6]

    ask personas [fd 10]
    ask gusanos [fd 5]

end
```

Análisis: se generan dos grupos de agentes con su respectiva forma y a uno se le modifica el color, al otro, el tamaño.

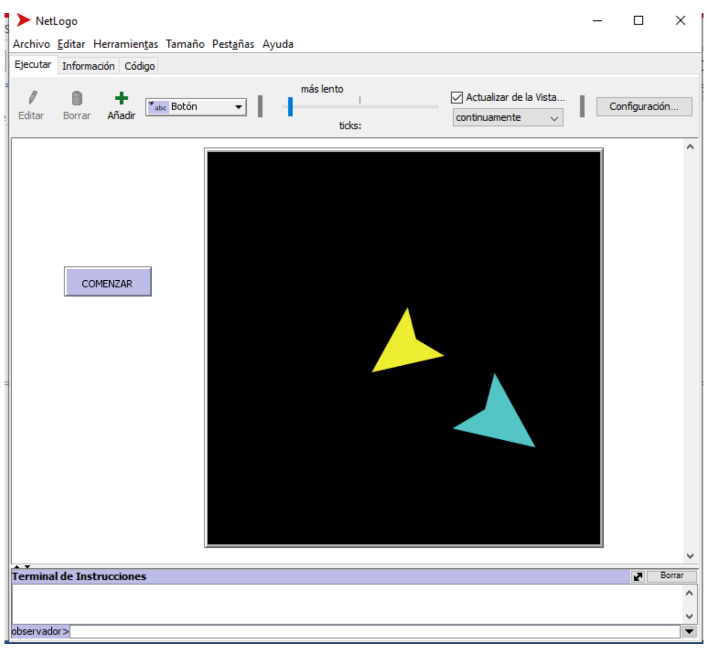


Ejercicio ilustrativo # 15: utilizar el bucle while en la creación de programas condicionales.

Código:

```
to setup
  ca
  crt 2
  ask turtle 0 [set size 8 fd 10]
  ask turtle 1 [set size 1]

  let tamaño [size] of turtle 0
  let tamaño1 [size] of turtle 1

  while [tamaño > tamaño1]
  [
    ask turtle 1 [set size tamaño1]
    set tamaño1 tamaño1 + 1
  ]
end
```

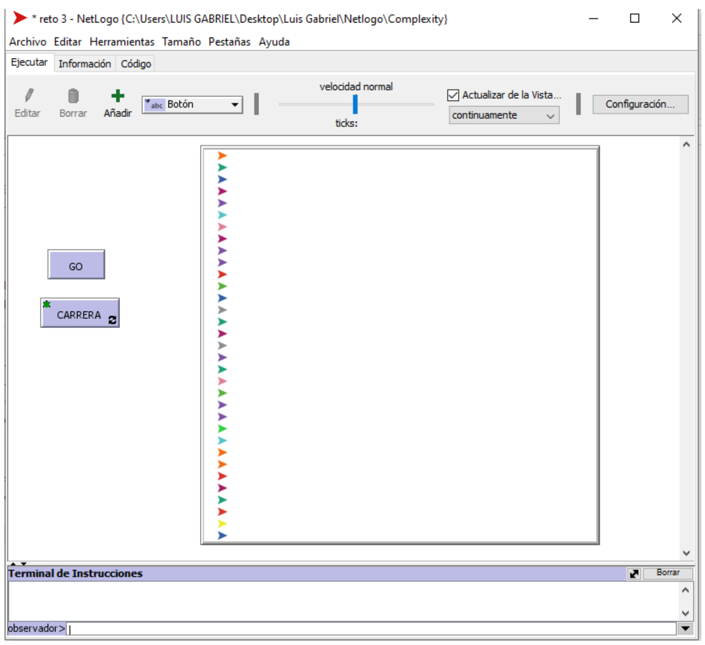
Análisis: se crean dos tortugas de diferente tamaño y la más pequeña va creciendo hasta alcanzar el tamaño de la más grande. Para poder ver la transformación es necesario reducir la velocidad de ejecución del programa.



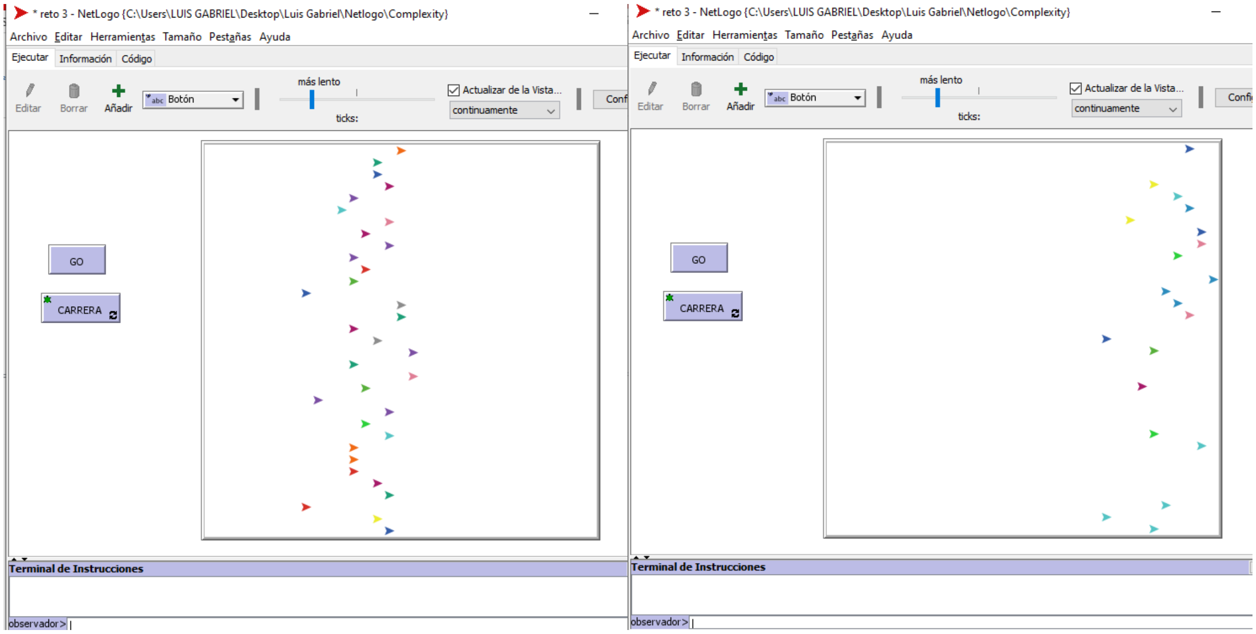
Evidencia de aprendizaje # 3:

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un programa personal en donde se muestre la destreza adquirida. Como trabajo de ejecución se solicita crear el código para que en NetLogo se efectúe lo siguiente:

Crear un procedimiento que limpie el mundo y lo convierta en color blanco, genere 33 tortugas (agentes) y las ubique de manera vertical al lado izquierdo del mismo quedando orientadas hacia la derecha. Sugerencia: identificar comandos como max-pycor, while.



Ahora mover las tortugas hacia la derecha (como en una carrera) con velocidad aleatoria y cuando llegue al final del mundo que desaparezca. Sugerencia verificar comandos como random, hide-turtle, ifelse. Recuerde reducir la velocidad de ejecución para poder observar la situación programada.



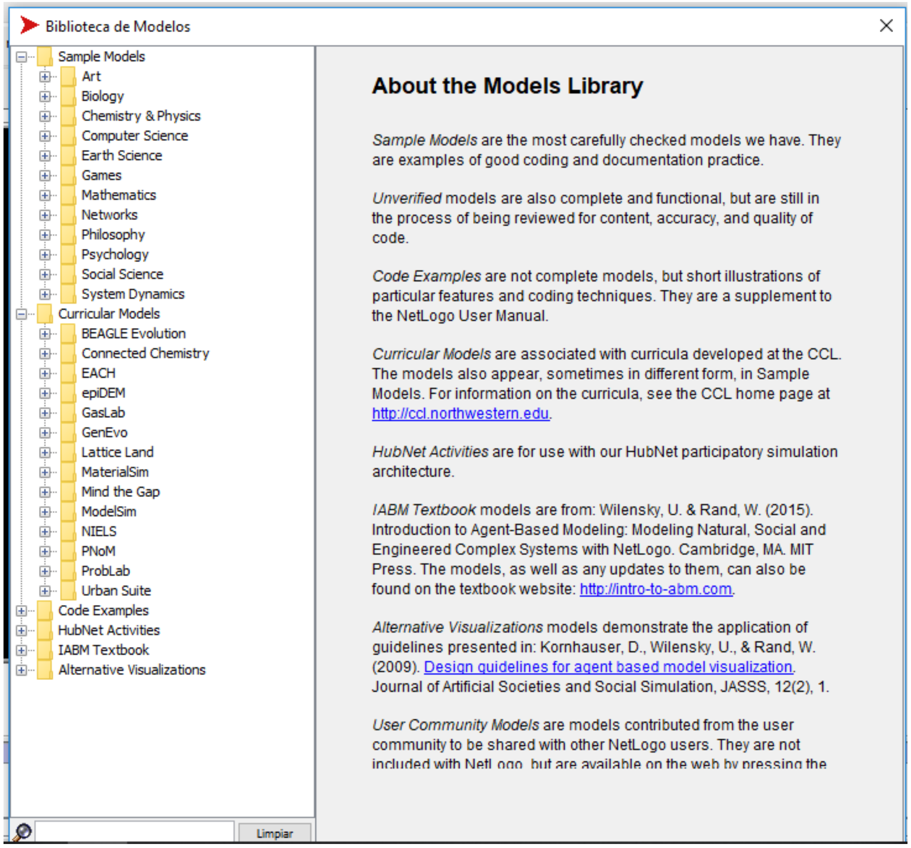
Evidencia de aprendizaje # 4:

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un programa personal en donde se muestre la destreza adquirida. Como trabajo de ejecución se solicita crear un código en NetLogo que sea de su propia autoría y muestre un compendio de lo aprendido hasta el momento.

Biblioteca de modelos en NetLogo:

Reto # 5: Explorar las simulaciones y modelos que trae incorporado NetLogo como punto de partida para proyectos personales de gran contenido sistemático.

Para acceder a la biblioteca de NetLogo se sigue la ruta: Archivo → Biblioteca de modelos.



Se pueden encontrar programas de diversas áreas del conocimiento (es necesario explorar algunas como parte del proceso de aprendizaje del Software por parte autónoma del estudiante). Para nuestro caso vamos a analizar una llamada ***The Fire Model.***

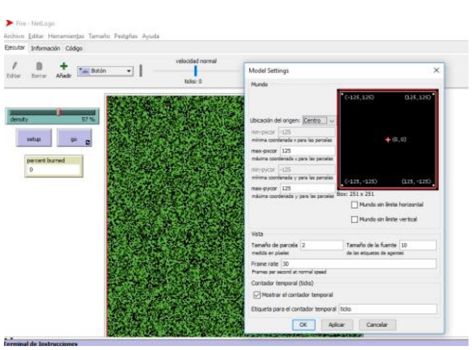
Ejercicio ilustrativo # 16: The Fire Model es muy simple de entender.

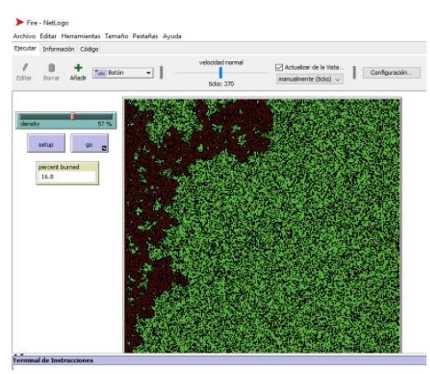
Ruta: Abrir NetLogo, archivo, Librería de Modelos (Biblioteca de modelos), Ciencias de la Tierra (Earth Science), Fire.

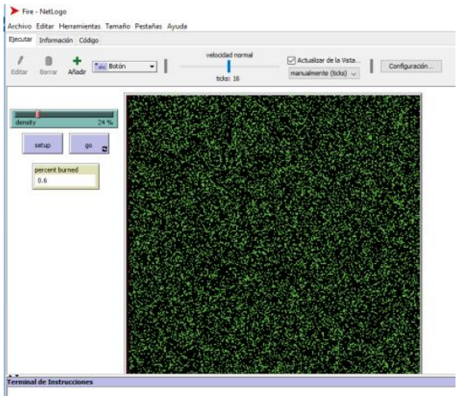
Aparece una pantalla negra en la interfaz del usuario en la cual se puede correr modelos e interactuar con ellos. Al hacer clic en el botón ***setup*** se muestran unos puntos verdes que representa un árbol y los puntos negros un lugar vacío. Al lado izquierdo hay una línea roja que es el fuego. Las reglas del modelo son: si un agente de fuego, en este caso toca uno de los puntos verdes, es decir un árbol, ese punto se vuelve rojo, el fuego se dispersa desde los puntos rojos hacia los puntos verdes. Una vez que el fuego se dispersa deja atrás un punto gris que es un área ya quemada. El deslizador por defecto inicia en 57% indicando cuántos árboles hay en el mundo. En configuración se muestra las características de dicho mundo en términos de coordenadas cartesianas de tal manera que tiene alrededor de 251 por 251 píxeles o cuadrados o parcelas para éste caso particular. Los árboles aparecen al azar tanto en el eje ***X*** como el eje ***Y*** en una parcela en particular. Para correr el modelo se hace clic en ***setup*** el cual crea el mundo y luego en ***go*** para ejecutarlo. El fuego irá del lado izquierdo al lado derecho del mundo quemando árboles según las reglas. El fuego se dispersa pero lentamente se observa que queda atascado y se detiene. En el indicador de la izquierda aparece el porcentaje de árboles quemados. Al subir el deslizador de árboles solo cinco puntos dejándolo en 62% y correr el modelo se deduce que el fuego ahora quema más árboles dispersándose por el mundo inclusive llegando al lado derecho del mismo. La probabilidad de que el fuego atraviese todo el mundo es del 0% cuando la cantidad de árboles es del 57%, del 100% cuando se sube a 62% y moderado entre los dos límites.

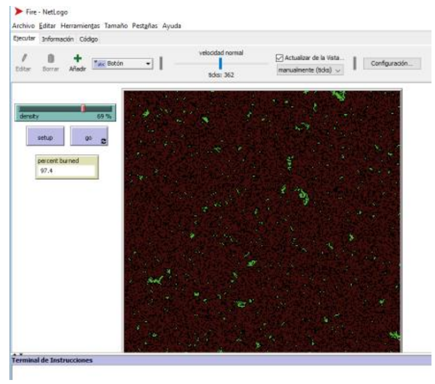
Conclusión: Se presenta una transición de fase en el cual un pequeño cambio en uno de los parámetros de entrada puede dramáticamente cambiar las salidas del sistema. Éste es un principio de la ciencia del Caos que se aplica a la complejidad.

“Pantallazos” cambiando variables de entrada (se sugiere efectuarlo en su dispositivo de cómputo para un mejor entendimiento):









Evidencia de aprendizaje # 5:

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un análisis del modelo ***Segregation***.

Información para desarrollar el trabajo propuesto:

Modelo de inflexión o segregación de Shelling: uno de los primeros modelos basados en agentes que realmente explora una cuestión social importante. Publicado originalmente en 1972 para discutir la cuestión de segregación.

Ruta en NetLogo: Archivo, biblioteca de modelos, Social Science, Segregation.

Al oprimir el botón ***setup*** el mundo se cubre de cuadrados de colores que representan personas, específicamente personas viviendo en casas, es una representación ficticia de un patrón urbano de viviendas. Los dos colores denotan dos grupos diferentes de personas y pretende verificar la segregación de individuos de piel blanca y de piel oscura. La pregunta que se explora es si la segregación de estos grupos de personas es producto del racismo entre ellos, donde personas de un grupo se niegan a vivir al lado de personas del otro grupo o bien es resultado de un conjunto de acciones individuales.

El modelo maneja una simple regla: mientras que las personas a tu alrededor, al menos 30% sean similares a ti entonces te encuentras feliz y no deseas cambiar de residencia, no quieres mudarte. Si, por el contrario, si más del 70% son distintos a ti entonces ya no eres feliz y deseas mudarte a otro lugar. En el mundo, los cuadrados sin una ***X*** sobre ellos corresponden a personas felices y los que tienen una **X** sobre ellos se encuentran infelices con su situación residencial en este momento. Se escoge la regla por una razón fundamental: ese 30% significa que se está satisfecho de vivir cerca de personas que son en un 70% diferente a uno mismo, es lo que llamamos una ligera preferencia o un leve sesgo de querer estar con personas similares.

En el modelo hay dos entradas: una barra deslizante para seleccionar la densidad y otra para el porcentaje de similitud que ya se mencionó. Los agentes se mudan a uno de los espacios vacíos al azar. En realidad los agentes no están tratando de buscar el mejor lugar para vivir, sólo se mueven a cualquiera de los espacios vacíos.

Al presionar ***go*** se puede ver que eventualmente el modelo ya no cambia, todos son felices. Esto ocurre cuando claramente se han formado patrones de segregación residencial. Cuando se ve dinámica de la gráfica de porcentaje de vecinos similares, que muestra el promedio del porcentaje para todos los agentes del modelo, es un valor que creció con el tiempo y alcanzó su máximo en 76%. Con esta premisa tan sencilla, partiendo de un sesgo pequeño hacia personas similares, se produce un patrón de conducta segregada. Schelling concluyó a partir de esto que no es necesaria una gran intolerancia entre grupos en la población para producir segregación.

Por último, ¿por qué se le llama 'Modelo de Inflexión'?. Si se hacen varias simulaciones del modelo podemos ver que siempre produce patrones de conducta similares. La razón para llamarlo el modelo de inflexión se debe a que si bajamos la velocidad de las simulaciones, podrán notar cuando corramos el modelo que muchos de los vecindarios están de hecho bastante felices, son grupos de individuos que viven felizmente juntos. Y lo que pasa es que un solo individuo se muda al vecindario, o un solo individuo se muda a otro vecindario, y eso causa que toda el área se vuelva menos feliz. Esos eventos son los puntos de inflexión del vecindario, entre un vecindario armonioso y un vecindario segregado. Si reducen la densidad, ¿cómo se afecta el resultado del modelo? Se darán cuenta que mientras reducen la densidad, la cantidad de segregación que se produce disminuye un poco, pero no es una disminución rápida, como podríamos pensar, y eso se debe parcialmente a que el valor de porcentaje de vecinos similares se basa en los individuos vecinos (no cuenta espacios vacíos). También podemos manipular la otra barra deslizante, podemos jugar con el porcentaje de vecinos similares que los individuos necesitan para ser felices. Cuando reducen ese valor, aunque sea por muy poco, se pueden percatar que los vecindarios se mantienen bastante integrados. Así que el valor de 30% es un punto clave. Menos que 30 y prácticamente no ocurre segregación. Más que 30 resulta en otro problema. Se produce un mundo en el cual nunca son felices todos, en este caso parece que podrían dejar de mudarse, pero ¡no fue así!, sigue el movimiento en los bordes, pero obtuvimos un patrón muy, muy segregado en este caso particular.

Actividad: cambie los valores primarios del modelo (density, % similar wanted) y determine lo que ocurre en cada caso. Escriba un texto con las conclusiones que usted determina. Adjunte pantallazos de cada etapa del proceso.

Recuerde que todas las evidencias deben ser subidas a la plataforma Classroom para poder ser analizadas y evaluadas. No es difícil solo basta dedicación y entusiasmo para poder desarrollar las evidencias solicitadas. Estaremos atentos al apoyo adecuado ante cualquier eventualidad. Para ello todas las preguntas, inquietudes, aportes, dudas, valoraciones, se deben hacer por la plataforma Classroom como comentario. Cualquier persona, estudiante o docente, puede responder y/o ayudar a un compañer@ a través del mismo medio.

Anexo G. Secuencia didáctica: Fractalidad matemática y su dimensión

FRACTALIDAD MATEMÁTICA Y SU DIMENSIÓN

Los fractales matemáticos son fractales determinísticos, es decir son fractales obtenidos a partir de la iteración de un proceso, un número infinito de veces. Dentro de este grupo, los fractales más conocidos son: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Koch, la curva de Levy, la curva Dragón, la curva de Hilbert y el árbol.

Construcción de fractales con lápiz y papel

A continuación, se ilustrarán los pasos necesarios para la construcción de cinco de los fractales matemáticos más importantes que han sido creados a lo largo de la historia por eminentes matemáticos. Constrúyelos con lápiz y papel, usando un **proceso iterativo** y las **herramientas adecuadas.**

EXPERIMENTO 1
El conjunto de Cantor

1. **Generación del fractal**

   a) Toma un segmento de longitud 1

   b) Divide el segmento en tres partes iguales (Hazle una trisección)

   c) Extrae el segmento central

   d) A cada uno de los dos segmentos que quedan, aplícale nuevamente los pasos b y c

   e) Continúa repitiendo (iterando) el proceso hasta donde sea posible

La figura 1, muestra los primeros pasos de la construcción.

Figura 1. Primeros pasos en la generación del conjunto de Cantor[7]

2. Cálculo de la dimensión

Para calcular la dimensión del Conjunto de Cantor, recordemos que esta se define así:

$$D = \frac{\log N}{\log M}$$

Donde N representa el factor por el que se multiplica el número de copias obtenidas en un nivel cualquiera para obtener el número de copias del siguiente nivel y M representa el proceso realizado, es decir el número de partes en que se divide un segmento de un nivel cualquiera para obtener las copias del siguiente nivel.

En el recuadro, realiza el cálculo y determina si la dimensión corresponde a un número entero o a un número fraccionario.

[7] Imagen generada con NetLogo®

EXPERIMENTO 2
La curva de Koch

1. Generación del fractal

a) Dibuja un segmento de longitud 1 unidad

b) Triseca el segmento

c) Remueve el segmento central y reemplázalo por dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$ conectados por un punto común.

d) Con cada uno de los cuatro segmentos obtenidos, repite los pasos b y c.

e) Itera este proceso la mayor cantidad de veces posible.

La figura 2 muestra los primeros pasos de este proceso.

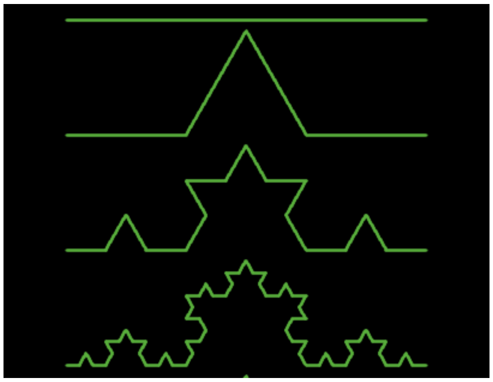


Figura 2. Primeros pasos en la generación de la curva de Koch[8]

2. Cálculo de la dimensión

Teniendo en cuenta la definición de dimensión, calcula en el recuadro, la dimensión de la curva de Koch. ¿Esta dimensión corresponde a un número entero o a un número fraccionario?

[8] Imagen generada con NetLogo®

EXPERIMENTO 3
El triángulo de Sierpinski

1. Generación del fractal

a) Dibuja un triángulo de lado 1 unidad

b) Biseca cada lado del triángulo y une los puntos medios obtenidos

c) Extrae el triángulo central

d) En cada uno de los tres triángulos de las esquinas, repite los pasos b y c

e) Itera este procedimiento el mayor número de veces posible

La figura 3 muestra los primeros pasos de la construcción.

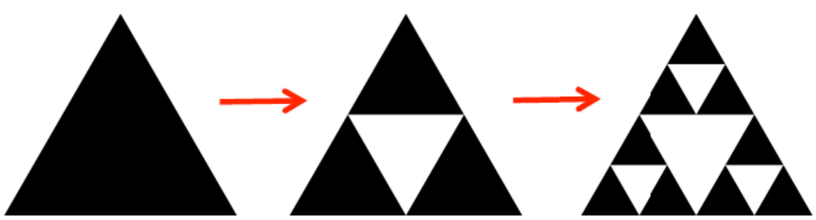


Figura 3. Primeros pasos en la construcción del triángulo de Sierpinski[9]

2. Cálculo de la dimensión

Teniendo en cuenta la definición de dimensión, calcula en el recuadro, la dimensión del triángulo de Sierpinski. Ten en cuenta que debes tener en cuenta de un nivel a otro el número de

[9] Imagen tomada de: https://www.complexityexplorer.org/courses/97-introduction-to-complexity

triángulos negros que van apareciendo. ¿Esta dimensión corresponde a un número entero o a un número fraccionario?

EXPERIMENTO 4
La curva de Levy

1. Generación del fractal

a) Dibuja un segmento de recta vertical de longitud 1

b) Tomando el segmento anterior como la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, reemplaza este segmento por los dos catetos (segmentos) de dicho triángulo rectángulo isósceles.

c) A cada uno de los dos segmentos obtenidos en el paso anterior, aplícale el mismo proceso descrito en el paso b.

d) Itera este proceso el mayor número de veces que sea posible.

La figura 4 muestra los primeros pasos de este proceso.

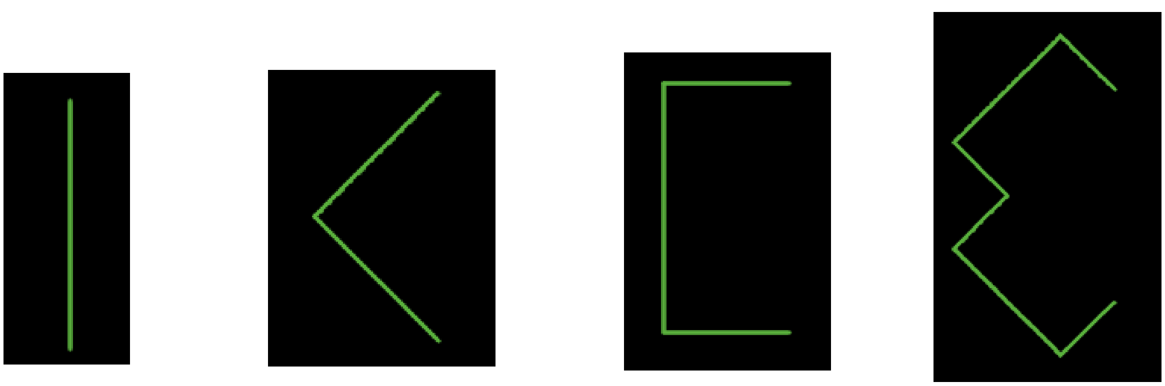


Figura 4. Primeros pasos de la construcción de la curva de Levy[10]

[10] Imágenes generadas con NetLogo®

2. Cálculo de la dimensión

Teniendo en cuenta la definición de dimensión, calcula en el recuadro, la dimensión de la curva de Levy. ¿Esta dimensión corresponde a un número entero o a un número fraccionario?

EXPERIMENTO 5
El árbol

1. Generación del fractal

Observa la secuencia de imágenes que se muestran en la figura 5 y escribe los pasos para la construcción del árbol.

a) …
b) …
c) …

Figura 5. Primeras iteraciones de la construcción del árbol[11]

[11] Imágenes generadas con NetLogo®

2. Cálculo de la dimensión

Teniendo en cuenta la definición de dimensión, calcula en el recuadro, la dimensión del árbol. ¿Esta dimensión corresponde a un número entero o a un número fraccionario?

Construcción de fractales con lenguaje NetLogo®

EXPERIMENTO 6

El conjunto de Cantor con NetLogo®

Usando lenguaje NetLogo, escribe en el recuadro de la izquierda, el código necesario para generar el Conjunto de Cantor. En el recuadro de la derecha, copia la figura obtenida después de un número grande de iteraciones.

EXPERIMENTO 7
La curva de Koch con NetLogo®

Usando lenguaje NetLogo, escribe en el recuadro de la izquierda, el código necesario para generar la curva de Koch. En el recuadro de la izquierda, copia la figura obtenida después de un número grande de iteraciones.

EXPERIMENTO 8
El triángulo de Sierpinski con NetLogo®

Usando lenguaje NetLogo, escribe en el recuadro de la izquierda, el código necesario para generar el triángulo de Sierpinski. En el recuadro de la izquierda, copia la figura obtenida después de un número grande de iteraciones.

EXPERIMENTO 9
La curva de Levy con NetLogo®

Usando lenguaje NetLogo, escribe en el recuadro de la izquierda, el código necesario para generar la curva de Levy. En el recuadro de la izquierda, copia la figura obtenida después de un número grande de iteraciones.

EXPERIMENTO 10
El árbol con NetLogo®

Usando lenguaje NetLogo, escribe en el recuadro de la izquierda, el código necesario para generar el árbol. En el recuadro de la izquierda, copia la figura obtenida después de un número grande de iteraciones.

EXPERIMENTO 11
Fractales, creatividad y NetLogo®

1. Usando lenguaje NetLogo®, consulta sobre los siguientes fractales y escribe el código para cada uno de ellos. Pega una imagen de la figura obtenida después de muchas iteraciones.

a) Copo de nieve de Koch

b) Curva de Peano

c) Alfombra de Sierpinski

d) Curva del dragón

e) Esponja de Menger

f) Curva de Hilbert

2. Es posible con NetLogo®, a partir de reglas iterativas muy sencillas, generar figuras fractales, tan llamativas como los que se muestran en la figura 6, que fueron construidas con pequeñas variaciones en el proceso de construcción del copo de nieve de Koch. Todo depende de la figura inicial y de tu creatividad.

Figura 5. Diferentes variaciones en la construcción de un fractal[12]

Dale rienda suelta a tu creatividad y crea por lo menos tres diseños propios. En equipo, con tus compañeros de clase, realicen una exposición con todos los diseños construidos.

[12] Tomado de Rubiano Rubiano O. Gustavo N., 2009, p.12

Anexo H. Secuencia didáctica: Fractalidad con NetLogo®

PROGRAMACIÓN CON NETLOGO (FRACTALES)

1. Fractales en NetLogo:

Reto: A partir de unos códigos sencillos generar fractales como punto de partida para desarrollos personales. Los procedimientos creados deben ser sintéticos a partir del concepto de iteración y su símil con bucles.

Ejercicio ilustrativo # 1: curva de KOCH

Instrucciones:

```
to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set color green set pen-size 4 set xcor -15 set heading 90 ]
end


to koch [ long nivel ]
  pd
  ifelse (nivel = 1)
  [fd long]
  [koch (long / 3) (nivel - 1)
    lt 60
    koch (long / 3) (nivel - 1)
    rt 120
    koch (long / 3) (nivel - 1)
    lt 60
    koch (long / 3) (nivel - 1) ]
    pu
end
```

Explicación:

Existen dos procedimientos denominados setup y koch los cuales generan un resultado conforme a la necesidad del programador; se interpretan así:

setup: se "limpia el mundo", luego se genera un agente (tortuga) la cual es posicionada en el lado izquierdo coordenada (-15,0), con orientación hacia la derecha con trazo número 4 y color verde. Es necesario ejecutar el procedimiento como agente "observador".

koch: requiere dos entradas (long y nivel) para poder ejecutarse. Con long se indica la longitud de la curva (como el mundo en la fase inicial mide 32 de ancho y largo, se sugiere tomar como punto de entrada el valor de 30 para que ocupe el espacio disponible) y con nivel se muestra las iteraciones presentes. Recuerde que los fractales se basan en el concepto de iteración lo cual es análogo al término bucle en programación computacional. Es necesario ejecutar el procedimiento como agente "tortuga".

Análisis:

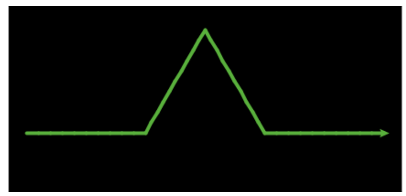
Si el nivel es uno (1) hace un segmento de recta continuo de longitud establecida por el programador. Si el nivel es dos (2) hace el nivel anterior (para el caso particular el nivel 1) con la salvedad que ahora la longitud se divide en tres (3) partes iguales en cuyo caso cada una de ellas será desviada un ángulo establecido para formar el fractal. Si ahora el nivel escogido es el tres (3) entonces hace el nivel anterior (para nuestro caso el nivel 2) pero ahora cada uno de los segmentos formados se van a dividir en tres partes iguales para luego tener un ángulo que los demarca y se sigue la misma lógica detallada. Listo, el fractal está terminado.

Setup:

Se recomienda ejecutarlo siempre antes de activar el proceso koch para una mejor visualización.

Koch:

Para el caso que se presenta, la longitud se ha establecido en 30 y el nivel en uno (1). Para una mejor visualización se recomienda reducir la velocidad de ejecución.

Nivel 1	
Nivel 2	
Nivel 3	
Nivel 4	
Nivel 5	

Ejercicio ilustrativo # 2: generar una modificación al fractal del ejercicio anterior para que ahora se pueda crear un polígono cualquiera y sobre cada uno de sus lados desarrollar la curva de Koch.

Código:

```
to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color green]
end


to koch [ long nivel ]
  pd
  ifelse (nivel = 1)
  [fd long]
  [koch (long / 3) (nivel - 1)
    lt 60
    koch (long / 3) (nivel - 1)
    rt 120
    koch (long / 3) (nivel - 1)
    lt 60
    koch (long / 3) (nivel - 1) ]
    pu
end


to poligono-koch [num-lados long nivel]
  pd
  repeat num-lados
  [ koch long nivel
    rt 360 / num-lados ]
  pu
end
```

Explicación:

Existen tres procedimientos denominados setup, koch y polígono-koch los cuales generan un resultado conforme a la necesidad del programador; se interpretan así:

setup: igual al del ejemplo anterior pero se eliminan órdenes determinadas con ask-set (solo predominan pen-size y color) ya que ahora puede hacerse la figura en el centro del mundo. Es necesario ejecutar el procedimiento como agente "observador".

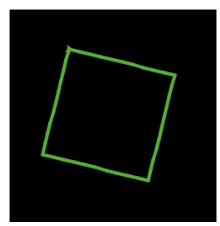
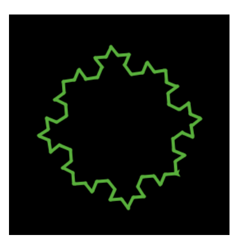
koch: sin cambios con respecto al ejercicio anterior.

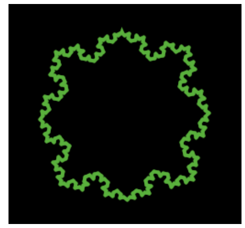
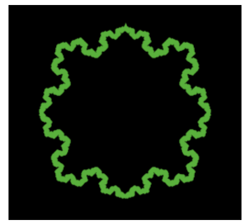
polígono-koch: requiere tres (3) entradas. num-lados determina el número de lados de la figura y por ende el polígono regular formado, long es la longitud de cada lado y nivel se muestra la iteración que se desea ejecutar.

Análisis:

Al llamar al procedimiento polígono-koch e introducir los datos de entrada se invoca al procedimiento koch para crear el primer lado con base en los requerimientos solicitados, luego se hace el giro dependiendo los grados que posea el polígono creado para que a continuación el segundo lado sea establecido con la misma lógica. Lo anterior se desarrolla el número de veces como lados tenga el polígono. Listo, el fractal está terminado.

Ejemplo: crear un cuadrado con una longitud de 10 unidades de longitud e ir verificando el aspecto cuando a cada lado se le aumente el nivel de la curva de koch.

Nivel 1	
Nivel 2	
Nivel 3	

Nivel 4	
Nivel 5	

Ejercicio ilustrativo # 3: generar un nuevo fractal con una circunferencia y, a partir del concepto estudiado, crear otras en su contorno exterior.

Código:

```
to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color green]
end


to circ-fractal [radio nivel]

  ifelse (nivel = 1)[
  fd radio
  rt 90
  pd
  repeat 360
  [ fd 2 * pi * radio / 360
    rt 1 ]
  pu
      lt 90
    bk radio
     ]


  [ circ-fractal (radio) ( 1 )
    repeat 4 [
    fd radio
    circ-fractal (radio / 2) (nivel - 1)
    bk radio
      rt 90 ]
    ]
end
```

Explicación:

Existen dos procedimientos denominados setup y circ-fractal los cuales generan un resultado conforme a la necesidad del programador; se interpretan así:

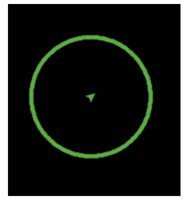
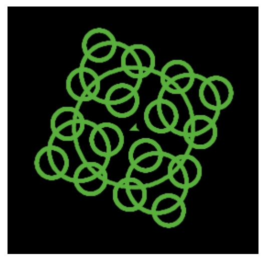
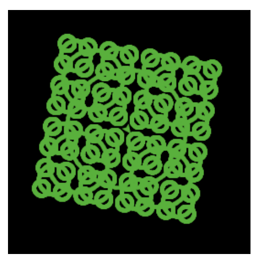
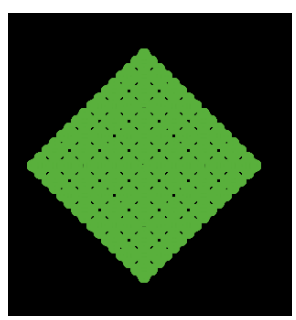
setup: igual al del ejemplo anterior. Es necesario ejecutar el procedimiento como agente "observador".

circ-fractal: requiere dos entradas. radio indica el radio de la circunferencia y nivel determina la iteración presente.

Análisis:

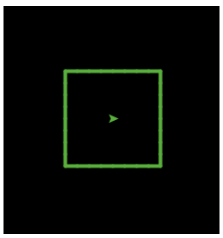
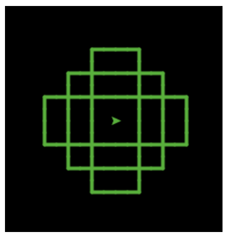
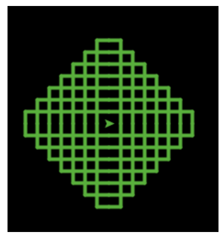
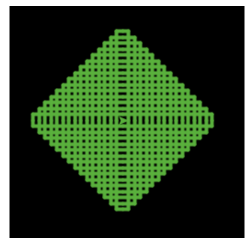
Primero se llama a setup para crear un agente tortuga. Al invocar el procedimiento circ-fractal, se usa el bucle ifelse lo que bifurca la ejecución del programa según el nivel ingresado. Si el nivel es igual a uno (1) se hace la circunferencia primaria y se retorna al centro de la misma. Si el nivel es diferente a uno (1) los comandos a ejecutar serán los determinados por else (conceptos analizados en "*Nociones Básicas de NetLogo"* estudiado con anterioridad) en donde se hace de nuevo la circunferencia primaria, luego el agente tortuga se ubica en un punto de la misma y creará otra con la mitad del radio de la original. A continuación retorna al lugar de origen (centro) para dirigirse 90° hacia otro punto de la circunferencia y ejecutar el mismo proceso. Lo anterior se repite cuatro (4) veces. Cada vez que se escriba un nivel se hace los niveles anteriores y se le añade uno nuevo basado en los principios explicados y el concepto de iteración.

Nota: para ver claramente el proceso es necesario reducir la velocidad de ejecución del programa, de dicha manera es posible observar la tortuga trazando el fractal diseñado.

Nivel 1	
Nivel 2	
Nivel 3	
Nivel 4	
Nivel 5	

Evidencia de aprendizaje # 1:

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un programa personal en donde se muestre la destreza adquirida. Como trabajo de ejecución se solicita crear el código para que en NetLogo se muestre el fractal anterior (circ-fractal) pero en vez de circunferencias se usen cuadrados. Se debe visualizar lo siguiente:

Ejercicio ilustrativo # 4: crear un fractal llamado árbol-fractal dinámico en donde sea posible ingresar las pautas iniciales de funcionamiento (datos de entrada, como en los ejercicios anteriores). Comparar con la naturaleza y el mundo que nos rodea para encontrar similitudes de iteración (repetición) a escalas diferentes.

Código:


```
to arbol-fractal [longitud nivel]
  ifelse (nivel = 1)[
  pd
    fd longitud
    pu
    bk longitud
  ]

  [ arbol-fractal (longitud)(1)
  fd longitud
  lt 45
    arbol-fractal (longitud / 2)(nivel - 1)
    rt 90
    arbol-fractal (longitud / 2)(nivel - 1)
    lt 45
    bk longitud
  ]

  end


to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color green set ycor -15 set heading 0]
end
```

Explicación:

Existen dos procedimientos denominados setup y arbol-fractal los cuales generan un resultado conforme a la necesidad del programador; se interpretan así:

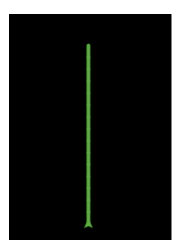
setup: se limpia el mundo, se crea una tortuga, se ubica en la parte inferior centrada en el eje x y se le asigna orientación norte con trazado 4 y color verde.

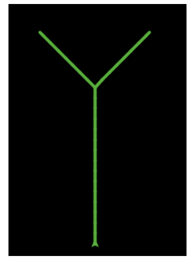
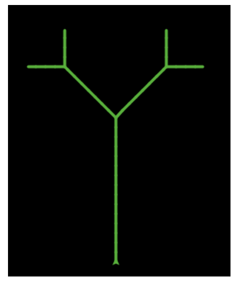
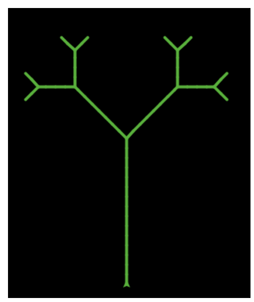
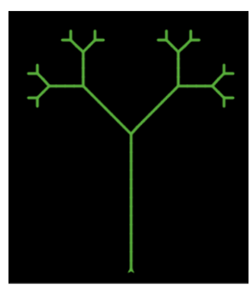
arbol-fractal: requiere dos entradas. longitud indica la medida del segmento creado y nivel determina la iteración presente.

Análisis:

Primero se llama a setup para crear un agente tortuga y posicionarla en el mundo. Al invocar el procedimiento arbol-fractal, se usa el bucle ifelse lo que bifurca la ejecución del programa según el nivel ingresado. Si el nivel es igual a uno (1) se hace el segmento que simboliza el tronco del árbol y se retorna al punto inicial del mismo. Si el nivel es diferente a uno (1) los comandos a ejecutar serán los determinados por else en donde se hace de nuevo el segmento inicial, luego el agente tortuga se ubica en el otro extremo del segmento y con un giro angular creará un segmento con longitud media con respecto al tronco, a continuación retorna al punto inicial para hacer otra variación angular y traza un nuevo segmento (simulando ramas) de medida media con respecto al nivel anterior. Cada vez que se introduce un nuevo nivel, hará los anteriores y generará una nueva rama con la mitad de longitud de la hecha en el nivel inmediatamente anterior. Recuerde que todos los ítems como la medida de las ramas en comparación con el tronco y los ángulos utilizados los puede cambiar de manera autónoma para observar nuevos diseños.

Puede encontrar en el contexto donde habita casos reales de éste fractal reflejados en árboles y plantas en la naturaleza. A continuación un ejemplo en donde se utilizará el programa árbol-fractal con una longitud inicial de 15 unidades.

Nivel 1	

Nivel 2	
Nivel 3	
Nivel 4	
Nivel 5	

Ejercicio ilustrativo # 5: crear una malla estilo estrella de mar que cumpla con el concepto fractal y su término inherente de iteración.

Código:

```
to malla [longitud nivel]
  ifelse (nivel = 1)[
  repeat 6 [
  pd
  fd longitud
  pu
  bk longitud
      rt 60]]

  [
    malla (longitud)(1)
    repeat 6[
  fd longitud
    rt 45
    malla (longitud / 3)(nivel - 1)
    lt 45
    bk longitud
    rt 60]
  ]
end

to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color green]
end
```

Explicación:

Existen dos procedimientos denominados setup y malla los cuales generan un resultado conforme a la necesidad del programador; se interpretan así:

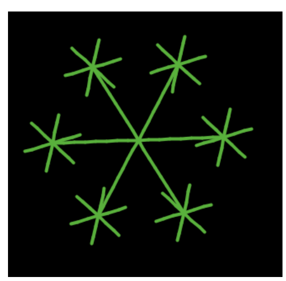
setup: se limpia el mundo, se crea una tortuga con trazo 4 y color verde.

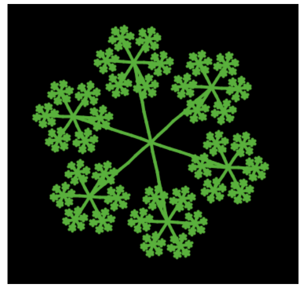
malla: requiere dos entradas. longitud indica la medida de las aspas creadas y nivel determina la iteración presente.

Análisis:

Primero se llama a setup para crear un agente tortuga y posicionarla en el mundo. Al invocar el procedimiento malla, se usa el bucle ifelse lo que bifurca la ejecución del programa según el nivel ingresado. Si el nivel es igual a uno (1) se hacen seis aspas (segmentos) dejando entre ellos 60° de orientación desde el punto central tal cual radios de una circunferencia. Si el nivel es diferente a uno (1) los comandos a ejecutar serán los determinados por else en donde se hace de nuevo el segmento inicial, luego el agente tortuga se ubica en el extremo de cada aspa y genera otra estrella cuyas aspas son la tercera parte de la original. Se hace un giro de 45° para que sea mejor visto al momento de dibujar. Cada vez que se introduce un nuevo nivel, hará los anteriores y generará una reciente distribución de aspas con la tercera parte en longitud respecto al nivel inmediatamente anterior. Recuerde que todos los ítems como el número de segmentos, la longitud de ellos, los ángulos de orientación y la subdivisión en niveles superiores de la longitud de cada segmento los puede cambiar de manera autónoma para observar nuevos diseños.

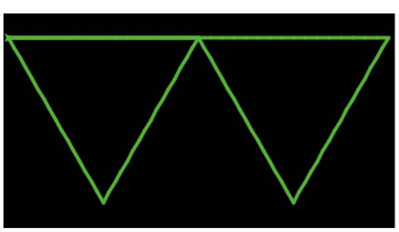
Como ejemplo se utilizará el programa malla con una longitud inicial de 8 unidades para las aspas.

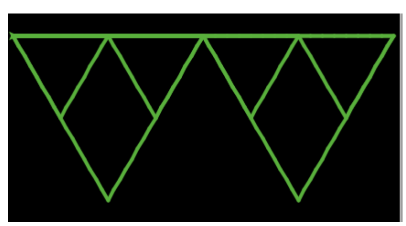
Nivel 1	
Nivel 2	
Nivel 3	

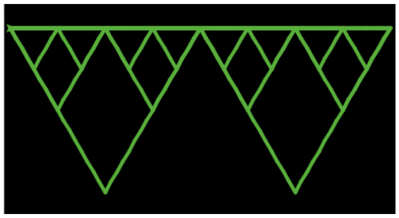
Nivel 4	
Nivel 5	

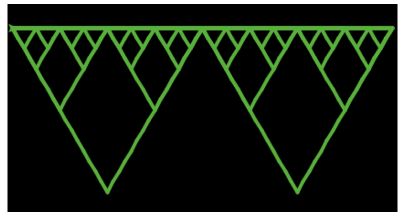
Evidencia de aprendizaje # 2:

Para conocer el nivel obtenido hasta el momento, es necesario generar un programa personal en donde se muestre la destreza adquirida. Como trabajo de ejecución se solicita crear el código para que en NetLogo se muestre el fractal siguiente que utiliza el concepto de iteración, ya que son dos triángulos equiláteros dentro de otros semejantes pero con doble longitud de sus lados. Recuerde que los bucles generan códigos de programas breves y concisos. Se debe observar lo siguiente al ejecutar los comandos:









Evidencia de aprendizaje # 3:

Hasta el momento hemos generado fractales diversos en NetLogo por ende es el instante para crear un fractal de su propia autoría teniendo en cuenta los conceptos estudiados y aplicados. Imagine una aplicación cualquiera y hágala en NetLogo en donde se demuestre la capacidad de hacer fractales y la percepción artística para desarrollar aplicaciones agradables y estéticas.

Ejercicio ilustrativo # 6: programar el fractal denominado Cantor o conjunto de Cantor y poder visualizar al mismo tiempo los cambios en la estructura del segmento original.

Código: ver página siguiente.

Explicación:

Existen dos procedimientos denominados setup y cantor los cuales generan un resultado conforme a la necesidad del programador; se interpretan así:

setup: se limpia el mundo, se hace un trazo 4 color verde, se crea una tortuga y se instala en un lugar específico (para una mejor visual del resultado final se sugiere arriba a la izquierda).

cantor: requiere dos entradas. longitud indica la medida del segmento inicial y nivel determina la iteración presente.

```
to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color green set xcor -15 set ycor 8 set heading 90]
end


to cantor [longitud nivel]
  ifelse (nivel = 1)[
  pd
  fd longitud
  pu
bk longitud

 ]

  [ cantor (longitud)(1)
     pu
 rt 90
 fd 3
 lt 90
    cantor (longitud / 3)(nivel - 1)
    pu
    fd 2 * longitud / 3
    cantor (longitud / 3)(nivel - 1)
    pu
    bk  2 * longitud / 3
     lt 90
    fd 3
    rt 90
    ]
end
```

Análisis:

Primero se llama a setup para crear un agente tortuga y posicionarla en el mundo con la orientación adecuada. Al invocar el procedimiento cantor, se usa el bucle ifelse lo que bifurca la ejecución del programa según el nivel ingresado. Si el nivel es igual a uno (1) se hace un segmento horizontal de medida igual a longitud. Si el nivel es diferente a uno (1) se hace de nuevo el segmento inicial, luego el agente tortuga se ubica una posición hacia abajo para trazar los nuevos segmentos de recta y procede a dividir en tres partes iguales el segmento primario trazando el primero y tercero; obviando el segundo. Esta lógica se aplica a todos los niveles de los procedimientos programados. Cada nuevo nivel desarrolla los preliminares y subdivide el segmento inmediatamente anterior en tres partes iguales para trazarlos según lo explicado.

Observe que la sintaxis y modo de generar los fractales son muy similares en su interpretación y la lógica computacional es muy relacionada. Como ejemplo se utilizará el programa cantor con una longitud inicial de 30 unidades para el segmento primario.

Nivel 1	
Nivel 2	
Nivel 3	
Nivel 4	
Nivel 5	

Ejercicio ilustrativo # 7: programar el fractal denominado Sierpinski y denotar con mayor profundidad la iteración de sus partes subyacentes.

Código:

```
to setup
  ca
  crt 1
  ask turtles [set pen-size 4 set color green set xcor -15 set heading 90 set ycor -11]
end

to sierpinski [longitud nivel]
  pd
   ifelse (nivel = 1)[
    fd longitud / (nivel * 2)  lt 60  pd  fd longitud / 2  lt 120  repeat 2 [
    fd longitud / 2
      lt 120
    ]
  rt 60  pu  bk longitud / (nivel * 2)
]

  [
    sierpinski (longitud)(1)
    sierpinski (longitud / 2)(nivel - 1)
    fd longitud / 2
    sierpinski (longitud / 2)(nivel - 1)
    lt 60  fd longitud / 2  rt 60 bk longitud / 2  sierpinski (longitud / 2)(nivel - 1)
    rt 60  fd longitud / 2  lt 60  bk longitud / 2
    ]
end


to sierpinski_final [longitud nivel]
  pd fd longitud  lt 120  repeat 2[fd longitud  lt 120]
    sierpinski (longitud)(nivel)
end
```

Explicación:

Existen tres procedimientos denominados setup, sierpinski y sierpinski_final los cuales se integran entre sí para generar el fractal diseñado; se interpretan así:

setup: se limpia el mundo, se crea una tortuga verde con trazo 4, se le da la orientación y se instala en un lugar específico (para una mejor visual del resultado final se sugiere abajo a la izquierda).

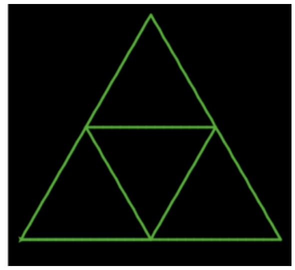
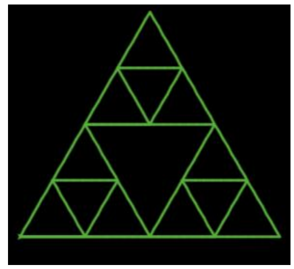
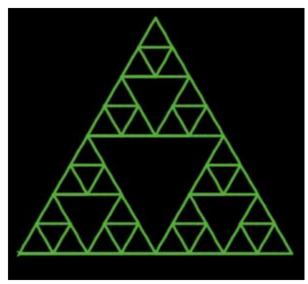
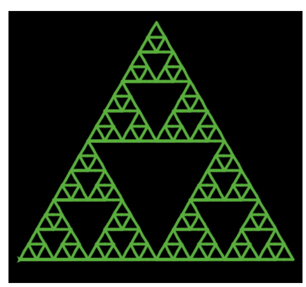
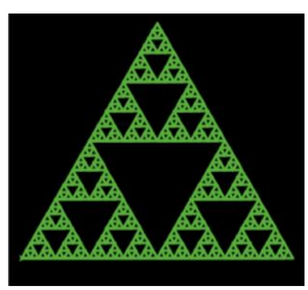
sierpinski: requiere dos entradas. longitud indica la medida de cada lado del triángulo implementado y nivel determina la iteración presente.

sierpinski_final: solicita dos entradas que cumplen la misma tarea del proceso anterior. Acá se genera el triángulo mayor contenedor y dentro de él se instalan los demás triángulos por medio del procedimiento sierpinski.

Análisis:

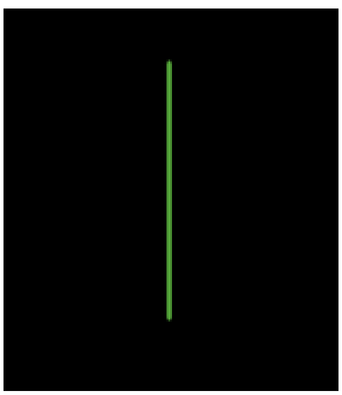
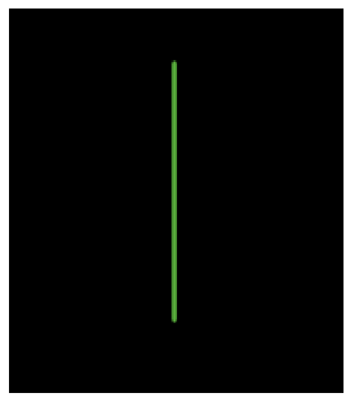
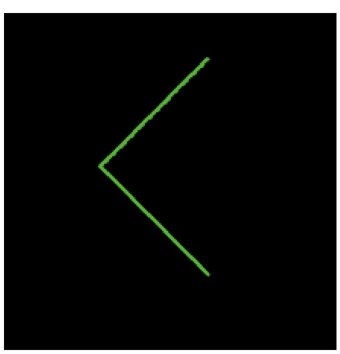
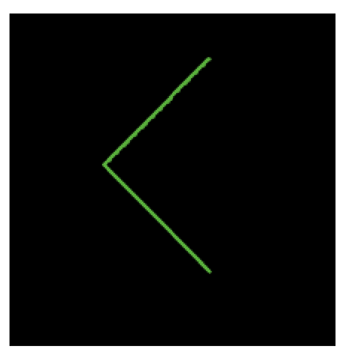
Primero se llama a setup para crear un agente tortuga y posicionarla en el mundo con la orientación adecuada. El procedimiento sierpinski usa el bucle ifelse lo que bifurca la ejecución del programa según el nivel ingresado. Si el nivel es igual a uno (1) se hace un triángulo "viendo hacia abajo" con longitud media en comparación al triángulo contenedor. Si el nivel es diferente a uno (1) se hace de nuevo el paso anterior, luego el agente tortuga genera los triángulos que se encuentran a la derecha, izquierda y arriba del trazado anteriormente para terminar dicha etapa. De aquí en adelante se cumple la misma lógica pero cada nivel superior difiere con el anterior en que la longitud de los lados varía a la mitad en medida con respecto al polígono desarrollado inmediatamente antes. Por último se invoca a sierpinski_final en donde se hace el triángulo mayor (contenedor) "viendo hacia arriba" y luego se llama al procedimiento sierpinski para desarrollar las figuras que van en su interior.

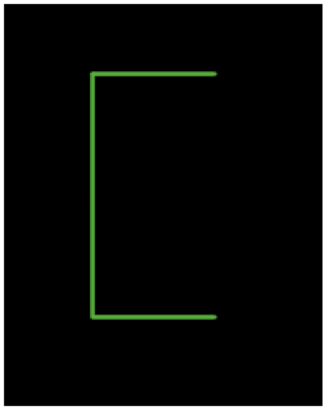
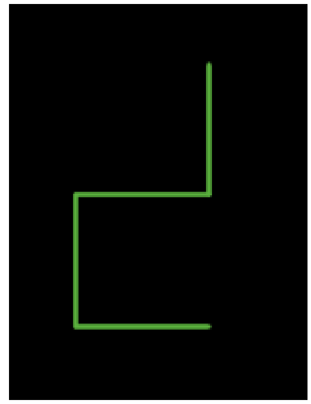
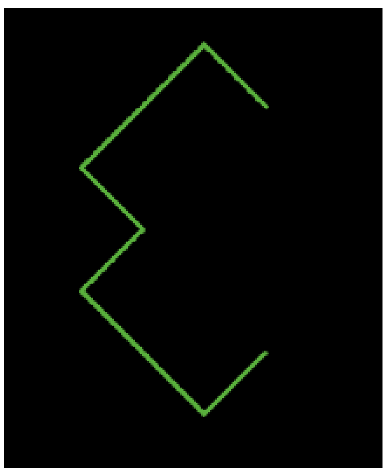
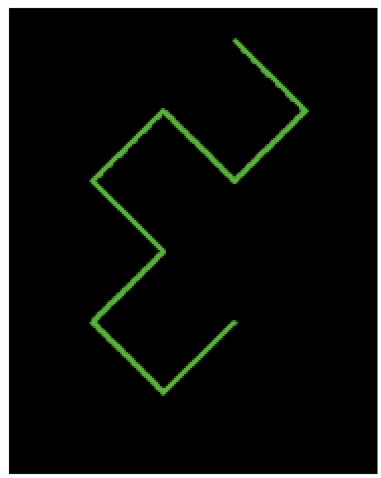
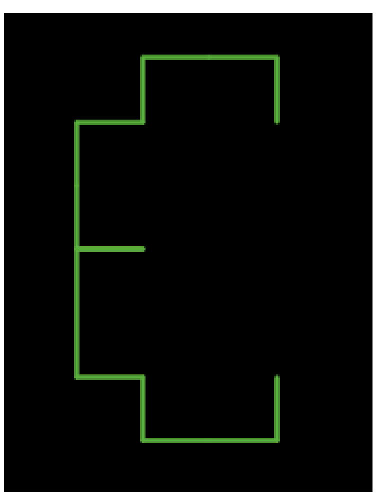
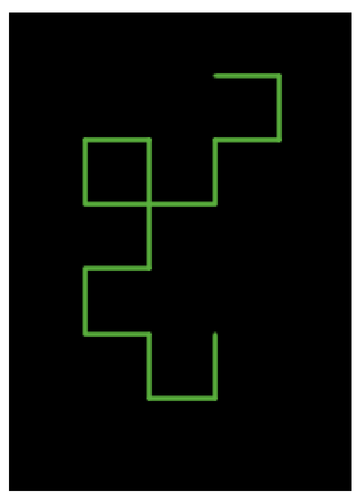
Hay muchas alternativas de programar una misma situación, en la presente se ha tratado de usar longitudes y ángulos pero no necesariamente deba ser así. Esa es una característica de un programador, para una misma respuesta pueden existir varios caminos que conducen hacia ella. Como ejemplo se utilizará el procedimiento sierpinski_final con una longitud inicial de 30 unidades para el lado del triángulo contenedor.

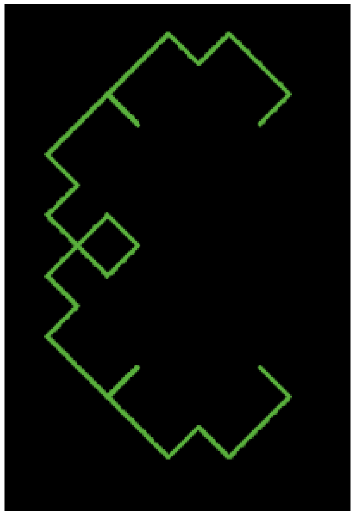
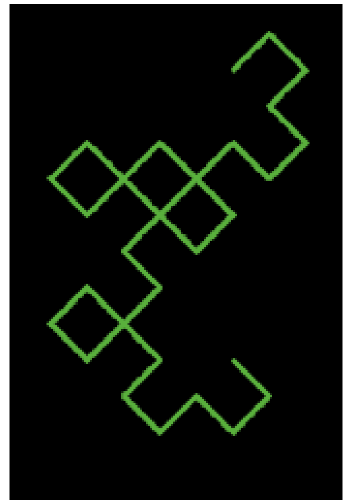
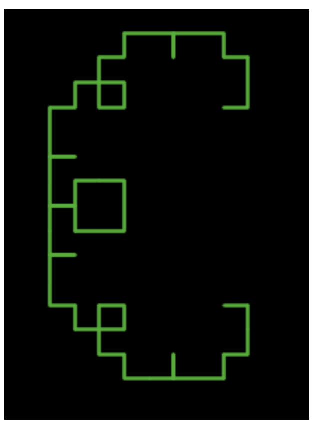
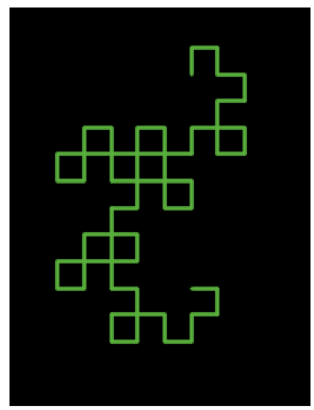
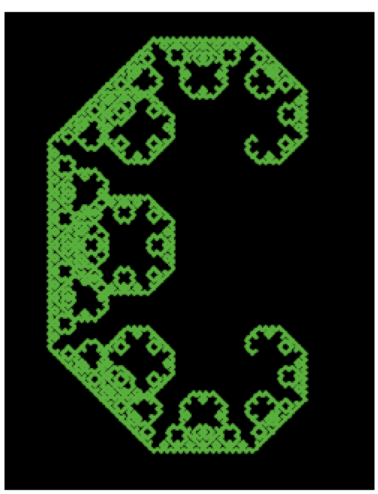
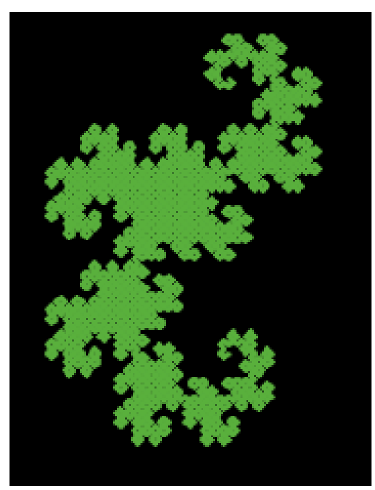
Nivel 1	
Nivel 2	
Nivel 3	
Nivel 4	
Nivel 5	

Evidencia de aprendizaje # 3:

Es el instante de efectuar un fractal a partir de una imagen inicial y su continua evolución. A continuación se plasman dos desarrollos, escoja el que quiera (ojalá los dos), y proceda a ejecutarlos generando el código correspondiente en NetLogo para su visualización final. Puede consultar mucha más información en la plataforma diseñada o páginas web (se sugiere: https://www.complexityexplorer.org/). No olvide que es capaz de hacer el fractal que desee aplicando los conceptos vistos, le invitamos a crear muchos más de su propia autoría.

CURVA LEVY	CURVA DRAGÓN
	
	

	
	
 **Resultado luego de varias iteraciones**	 **Resultado luego de varias iteraciones**

Anexo I. Secuencia didáctica: Explorando el Caos

1. ITERACIÓN Y ÓRBITA DE UNA FUNCIÓN

Iterar, en general, consiste en hacer un mismo proceso una y otra vez, usando el resultado obtenido en el paso inmediatamente anterior. Por ejemplo, si escribes en la calculadora científica un número, como, por ejemplo $x_0 = 2$ y ejecutas repetidamente la tecla x^2, vemos que el resultado se va haciendo cada vez más grande hasta que, al final, después de varias iteraciones la pantalla muestra "Math ERROR". Esto significa que el resultado es tan grande que la calculadora no lo puede escribir (mostrar). Podemos representar el proceso iterativo hecho por la calculadora mediante la siguiente secuencia:

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 256 \rightarrow 65536 \rightarrow 4294967296 \rightarrow \cdots \text{ Math ERROR} \rightarrow \cdots$$

Este modo de representación se denomina la **órbita** de la función. En el fondo, lo que se está aplicando, de manera iterativa, es la función de "elevar al cuadrado", tomando como **condición inicial** el número $x_0 = 2$. La **función** de elevar al cuadrado se expresa simbólicamente como $f(x) = x^2$. Luego, la órbita la podemos reescribir como:

$$2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 256 \xrightarrow{f} 65536 \xrightarrow{f} 4294967296 \xrightarrow{f} \ldots \text{ Math ERROR} \xrightarrow{f} \ldots$$

la cual no **converge** a un valor fijo (**punto fijo**), si no que, por el contrario, **diverge** a infinito.

Si ahora en vez de usar la función de elevar al cuadrado, usamos la función de extraer raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$ y la aplicamos iterativamente con la misma condición inicial $x_0 = 2$, obtenemos la siguiente órbita de la función:

$$2 \rightarrow 1.4142\ldots \rightarrow 1.1892\ldots \rightarrow 1.0905\ldots 1.0442\ldots \rightarrow 1.0221\ldots \rightarrow 1.0108\ldots \longrightarrow 1.0054\ldots \longrightarrow 1.0027\ldots \longrightarrow \cdots \longrightarrow 1$$

Como se puede observar la órbita converge a un **punto fijo** que es 1.

Para mostrar gráficamente cómo se comporta la órbita de una función iterada $f(x)$, una vez que se halla graficado y tomando la condición inicial dada x_0 (input), sobre el eje x, nos desplazamos verticalmente hacia la gráfica de la función y luego horizontalmente hacia el eje y, para encontrar la imagen $f(x_0)$ (output). Teniendo en cuenta que esta imagen se convierte automáticamente en la nueva entrada para el siguiente paso, debemos ubicar este nuevo valor en el eje x y repetir el proceso anterior, las veces que se requiera.

EXPERIMENTO 1

Usando la calculadora, para cada una de las siguientes funciones, escriba la órbita y determine si es convergente o divergente, según la condición inicial x_0 dada. Para aquellas que sean convergentes determine hacia qué **punto fijo** converge. Finalmente, construya en Excel o Geogebra la gráfica de la función y explique sobre ella, la convergencia o divergencia de la órbita de la función, para la condición inicial dada.

1) $f(x) = x^2$, condición inicial $x_0 = 1$
2) $f(x) = x^2$, condición inicial $x_0 = 0.5$
3) $f(x) = \sqrt{x}$, condición inicial $x_0 = 0.5$
4) $f(x) = 3x - 1$, condición inicial $x_0 = 1$
5) $f(x) = 2x(1 - x)$, condición inicial $x_0 = 1$, $x_0 = 1.5$, $x_0 = 2$

Otra manera alterna y práctica de analizar la órbita de una función, es a través de la función idéntica $f(x) = x$, también denotada como $y = x$ (llamada función idéntica). Recordemos que la gráfica de esta función es una línea recta, donde para todo valor de x, le corresponde el mismo en y, tal como se muestra en la figura 1.

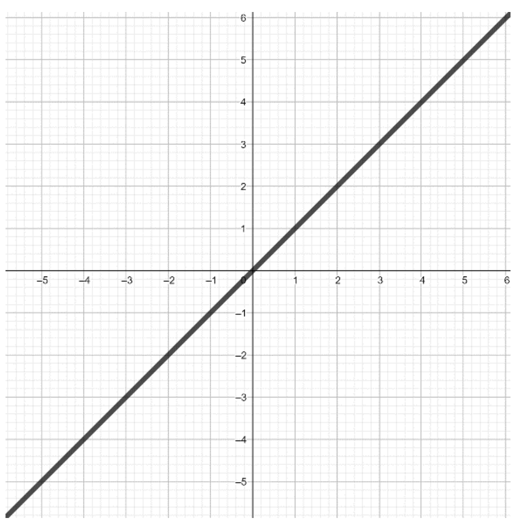


Figura 1. La función idéntica $y = x$

Para hacerlo, se grafican en el mismo plano cartesiano la función dada $f(x)$ y la función idéntica $y = x$. Seguidamente se efectúan los siguientes pasos:

1) Desplazamiento vertical desde la condición inicial x_0 hacia la gráfica de la función.
2) Desplazamiento horizontal hacia la recta $y = x$.
3) Desplazamiento vertical hacia la gráfica de la función
4) Desplazamiento horizontal hacia la recta $y = x$.

5) … y así sucesivamente las veces que se requiera.

Este proceso se ilustra en la figura 2, tomando, a manera de ejemplo, la función $f(x) = -(x-2)^2 + 4$, con condición inicial $x_0 = 0.5$ y por supuesto la recta $y = x$.

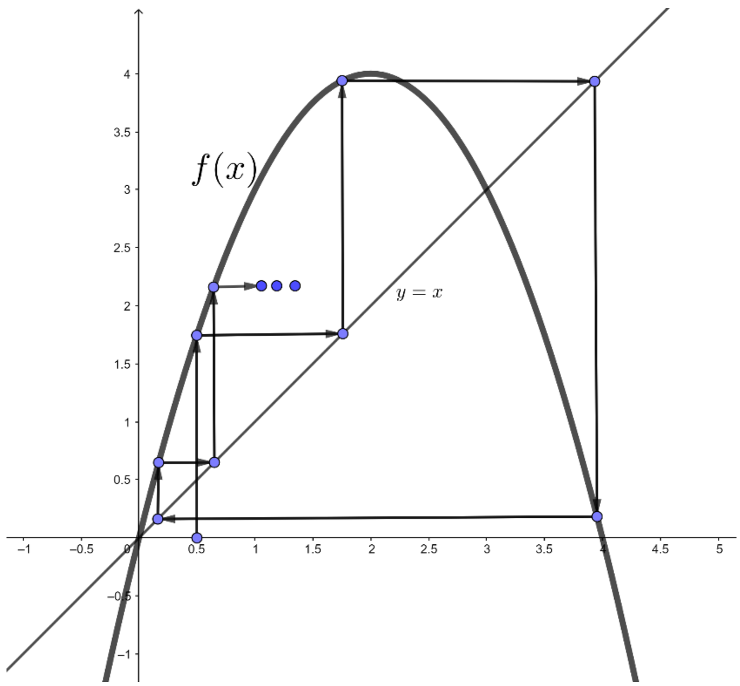


Figura 2. Método gráfico para hallar la órbita de una función, basado en la recta $y = x$

EXPERIMENTO 2

Usando Excel o Geogebra, grafique las siguientes funciones y con la ayuda de la recta $y = x$, decida si la órbita de la función diverge, o por el contrario, converge a algún **punto fijo**, de acuerdo a la condición inicial dada. De ser posible, aproxime el valor del **punto fijo**.

1) $f(x) = -\frac{3}{4}x - 1$, para tres condiciones iniciales (x_0) diferentes
2) $f(x) = 1.5x(1-x)$, para: $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.8$, $x_0 = 0.3$
3) $f(x) = 3.2x(1-x)$, para: $x_0 = 0.1$, $x_0 = 0.8$, $x_0 = 0.7$
4) $f(x) = x^2 - 3$, para: $x_0 = 1$, $x_0 = 0.5$, $x_0 = 1.5$
5) $f(x) = x - 2$, para tres condiciones iniciales (x_0) diferentes

Algebraicamente es posible hallar el punto fijo de una función, hallando el punto de corte de la función con la recta $y = x$. Es decir, los puntos fijos son aquellos valores de x, para los que se cumple que: $f(x) = x$. Esto permite entonces hallar los puntos fijos de manera algebraica, igualando la función dada con la función idéntica. Por ejemplo si se desean hallar los puntos fijos de la función $f(x) = 7x + 4$, basta con resolver la ecuación: $7x + 4 = x$, lo cual nos da como solución $x = -\frac{2}{3}$. Esto significa que si reemplazamos este valor en la función $f(x) = 7x + 4$, obtendremos como imagen, nuevamente, $-\frac{2}{3}$. Es decir $x = -\frac{2}{3}$, es el punto fijo de la función.

EXPERIMENTO 3

Teniendo en cuenta la definición anterior, halla algebraicamente los puntos fijos de las funciones del experimento 2.

Una manera útil de mostrar la evolución de la órbita de una función, para una condición inicial dada es la **gráfica de serie de tiempo.** Una gráfica de serie de tiempo está conformada por un par de ejes coordenados. En el eje horizontal se coloca el tiempo t, con valores discretos $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ y en el eje vertical, los valores x_t, es decir los valores que va tomando la función, a medida que se va iterando, de tal manera que:

- x_0, corresponde a la condición inicial,
- x_1, corresponde al valor que toma la función en la primera iteración
- x_2, corresponde al valor que toma la función en la segunda iteración
- x_3, corresponde al valor que toma la función en la tercera iteración
  … y así sucesivamente.

A manera de ejemplo consideremos la función $f(x) = \sqrt{x}$, y construyamos una tabla en la que se muestre t contra x_t, tal como se explicó anteriormente, para una condición inicial $x_0 = 4$.

t	x_t
0	2,0000
1	1,4142
2	1,1892
3	1,0905
4	1,0443
5	1,0219
…	…

Tabla 1. Tabla para la serie de tiempo de la función $f(x) = \sqrt{x}$

Ahora, elaboremos la serie de tiempo t contra x_t, tal como se muestra en la figura 3.

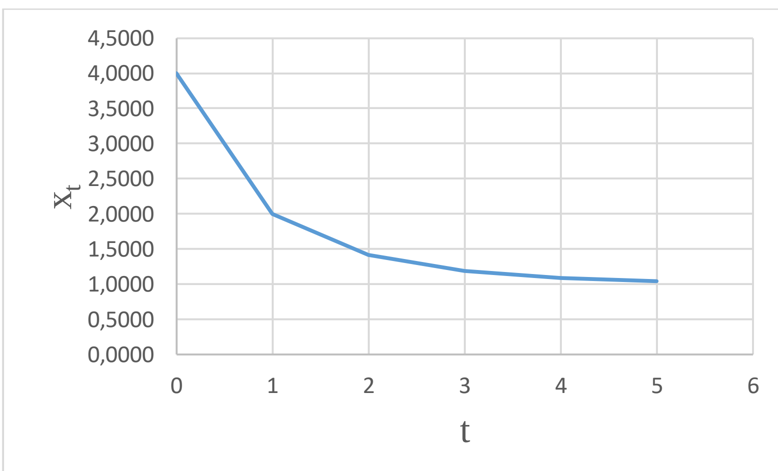


Figura 3. Gráfica de serie de tiempo para $f(x) = \sqrt{x}$ y condición inicial $x_0 = 4$

Es importante notar que esta gráfica de serie de tiempo, muestra claramente como la órbita de la función, para una condición inicial $x_0 = 4$, converge al punto fijo $x = 1$. Además, podemos graficar en una misma gráfica de series de tiempo, la órbita para diferentes condiciones iniciales.

En la figura 4 se puede apreciar cómo, para diferentes valores de condiciones iniciales (4.0, 2.0, 0.5, 0.0625), la órbita de la función converge, a diferentes ritmos, al punto fijo $x = 1$.

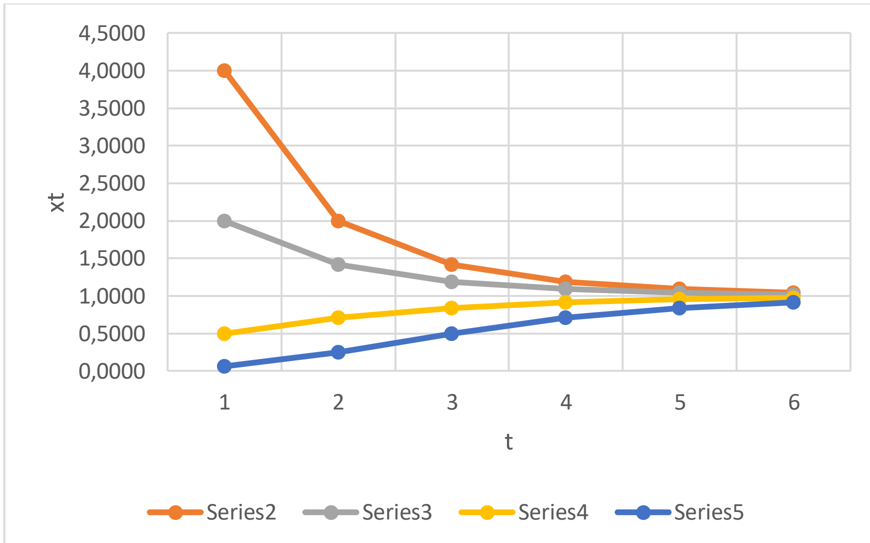


Figura 4. Gráfica de serie de tiempo para $f(x) = \sqrt{x}$ con diferentes condiciones iniciales

EXPERIMENTO 4

Usando Excel, elabore la gráfica de la serie de tiempo, para las siguientes funciones, según las condiciones iniciales dadas.

1) $f(x) = x^2$, para $x_0 = 0.8$, $x_0 = 0.9$, $x_0 = 1.1$, $x_0 = 1.2$
2) $f(x) = x^3$, para $x_0 = 0.8$, $x_0 = 0.9$, $x_0 = 1.1$, $x_0 = 1.2$
3) $f(x) = 2x - 1$, para $x_0 = 0.8$, $x_0 = 0.9$, $x_0 = 1.1$, $x_0 = 1.2$
4) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, para $x_0 = -3.9$, $x_0 = -4.1$
5) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, para tres condiciones iniciales arbitrarias

2. SISTEMAS LINEALES

Consideremos el crecimiento de una población de conejos en una isla. Es natural pensar que la población de conejos de un año determinado, depende de la población de conejos en el año inmediatamente anterior. Supongamos que la población de conejos de un año al siguiente se duplica y supongamos que hay una población inicial, en el año cero, de 1 conejo. Podemos representar el comportamiento del crecimiento de la población de conejos, mediante la siguiente tabla:

Año	0	1	2	3	4	5	…
Población	1	2	4	8	16	32	…

Tabla 2. Población de conejos en función de tiempo.

Una manera de definir algebraicamente la función es notar que, según la tabla, el número de conejos en cada año es una potencia de 2, es decir, la población para cada año se puede escribir de la siguiente manera:

$$1 = 2^0$$
$$2 = 2^1$$
$$4 = 2^2$$
$$8 = 2^3$$
$$16 = 2^4$$
$$32 = 2^5$$

Y así sucesivamente. Esto da origen a una **función exponencial** (modelo matemático), de tal manera que la población de conejos, para un año cualquiera, se puede escribir como:

$$\boldsymbol{n = 2^t}$$

Donde,

$\boldsymbol{n}$**:** representa el número de conejos en cualquier año

$\boldsymbol{t}$**:** representa el número de años transcurridos

La representación gráfica de esta función exponencial se muestra en la figura 6.

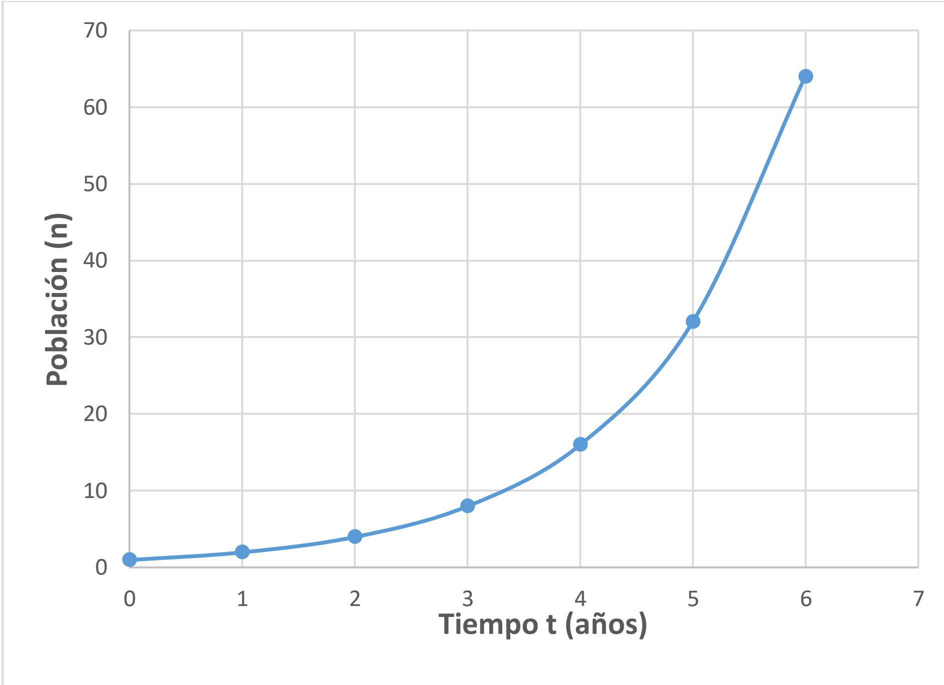


Figura 6. Población de conejos vs tiempo

Por otro lado, y de acuerdo con la tabla 2, se puede inferir que la población, en un año cualquiera, es igual la población del año inmediatamente anterior, multiplicada por 2. Es decir, la función **recursiva** que **modela** este comportamiento es:

$$\boldsymbol{n_{t+1} = 2.n_t}$$

Donde,

n_{t+1}: representa la población de conejos en este año y

n_t: representa la población de conejos en el año inmediatamente anterior (último año)

Así que la tabla que corresponde a esta ecuación es:

Población en el último año	0	1	2	4	8	16	…
Población en este año	1	2	4	8	16	32	…

Tabla 3. Forma recursiva en que crece la población de conejos.

Y la gráfica correspondiente es la que se muestra en la figura 5.

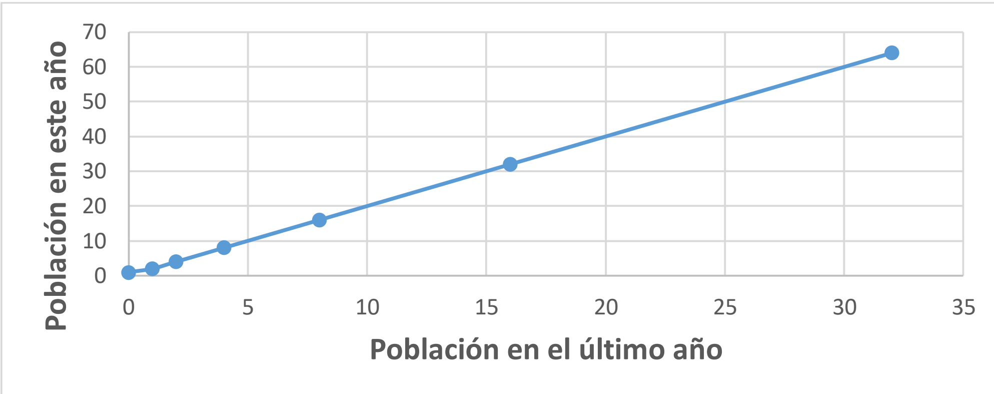


Figura 5. Población de conejos en este año vs población en el último año

Como se puede observar esta es una función lineal y la ecuación que la representa es una **ecuación recursiva**, ya que, para calcular la población de conejos de un año cualquiera, es necesario conocer la población del año inmediatamente anterior.

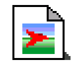
Este modo de crecimiento de población se considera un **sistema lineal**, en el sentido de que los cambios en la variable de entrada (el tiempo t, en este caso), produce **cambios proporcionales** en la variable de salida (el número de conejos n). Concretamente en nuestro caso, por cada año que pasa, la población de conejos se va duplicando, respecto a la población de conejos del año inmediatamente anterior. Esto se evidencia al observar que la pendiente de la recta de la figura 5 es 2.

EXPERIMENTO 5

Suponga que la población inicial de conejos es 1 y que la tasa de nacimiento de conejos es 3. Es decir que cada año el número de conejos se triplica respecto al año inmediatamente anterior.

a) Elabora una tabla que muestre la cantidad de conejos durante los primeros ocho años

b) Encuentra una función que modele algebraicamente la población de conejos vs tiempo
c) Usando Excel elabore la gráfica que corresponde a la función del ítem b

Usando el modelo de NetLogo®  SimplePopulationGrowth.nlogo experimente para diferentes valores de población inicial (initial population) y tasas de nacimiento (birthrate), observando y analizando en cada caso la manera en que crece la población (número de conejos). Para cada caso, analice las gráficas Población vs Tiempo y Población de este año vs Población del último año y elabore una conclusión.

De acuerdo a la gráfica de la figura 6, se puede observar que, de acuerdo al modelo exponencial $\boldsymbol{n = 2^t}$, la población crecería de manera desproporcionada hasta infinito, llagando a lo que se denomina "**sobrepoblación**". Esto en la realidad es poco probable que suceda, ya que en la realidad existen factores que regulan el crecimiento de la población, como son: la cantidad de alimento disponible, los depredadores que se alimentan de conejos, la competencia entre los conejos para conseguir el alimento, factores genéticos asociados a la reproducción de los conejos, entre otros.

1. SISTEMAS NO LINEALES

Una forma no lineal del crecimiento de una población se obtiene teniendo en cuenta, además de la tasa de nacimiento, la tasa de mortalidad (debido a la sobrepoblación, por ejemplo) y la población máxima que puede soportar el medio donde crece la población (debido a la cantidad de alimento disponible, por ejemplo). A través de la historia, algunos biólogos han encontrado un mejor **modelo** que explica, de manera más cercana a la realidad, el crecimiento de una población. La ecuación para este modelo es llamada la **función logística** y tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{n_{t+1} = (tasa\ de\ nacimiento - tasa\ de\ mortalidad)\left[n_t - \frac{{n_t}^2}{población\ máxima}\right]}$$

Llamando:
R: tasa de nacimiento – tasa de mortalidad
k: población máxima

La ecuación se convierte en:

$$\boldsymbol{n_{t+1} = R\left[n_t - \frac{{n_t}^2}{k}\right]}$$

Dividiendo ambos miembros por k, se obtiene:

$$\boldsymbol{\frac{n_{t+1}}{k} = R\left[\frac{n_t}{k} - \frac{{n_t}^2}{k^2}\right]}$$

Y llamando $x_t = \frac{n_t}{k}$, se obtiene como ecuación logística final:

$$\boldsymbol{x_{t+1} = R[x_t - {x_t}^2]}$$

Como puede observarse, esta ecuación depende del valor de la constante R y de la población inicial x_0.

EXPERIMENTO 6

Para la función logística $x_{t+1} = R[x_t - {x_t}^2]$, suponga que $R = 2$ y que $x_0 = 0.2$, es decir que inicialmente se tiene una población del 20%, respecto a la máxima población posible. A continuación, haz lo siguiente:

1. Con la ayuda de la calculadora científica o Excel, encuentra las primeras diez iteraciones de la función logística.
2. ¿Existe un **punto fijo atractor** al cual converge la órbita de esta función? ¿Cuál es ese punto?
3. Representa en Geogebra la gráfica de la función logística. Describe su comportamiento comparándola con la gráfica de la función exponencial de la figura 6.
4. Realiza los ejercicios 1 a 3, pero ahora con condiciones iniciales $R = 2.5$ y que $x_0 = 0.2$

De acuerdo a los resultados del experimento 6, podemos concluir que, para diferentes condiciones iniciales, existen diferentes **puntos fijos atractores**.

Podemos entonces asumir la siguiente definición: **Un punto fijo es un valor de x para el cual $x_t = x_{t+1}$**

Otra forma algebraica más simple de escribir la función logística $x_{t+1} = R[x_t - x_t^2]$, al factorizar x_t en el miembro derecho, es:

$$\boldsymbol{x_{t+1} = Rx_t[1 - x_t]}$$

EXPERIMENTO 7

Usando el modelo en NetLogo® LogisticMap.nlogo sobre la función logística, complete la siguiente tabla, para diferentes valores de R y x_0.

Valor de R	**Valor de x_0**	**Número de iteraciones t para alcanzar el punto fijo**	**Punto(s) fijo(s) atractor(es)**
2.0	0.20000		
	0.90285		
	0.01143		
2.5	0.20000		
	0.94286		
	0.01143		
2.8	0.20000		
	0.90285		
	0.01143		
3.1	0.20000		
	0.94286		
	0.01143		
3.2	0.20000		
	0.90285		
	0.01143		
3.5	0.20000		
	0.94286		
	0.01143		
4.0	0.20000		
	0.90285		
	0.01143		

Observando la tabla. se puede concluir que:

- Para los valores de $R = 2.0$. $R = 2.5$ y $R = 2.8$. la función tiene un solo punto fijo (**período 1**).
- Para los valores de $R = 3.1$ y $R = 3.2$ la función tiene dos puntos fijos (**período 2**).
- Para el valor $R = 3.5$, la función tiene cuatro puntos fijos (**período 4**).

- Para el valor $R = 4.0$ la función no se estabiliza alrededor de un número determinado de puntos fijos. Se dice entonces que la función logística entra en un estado de **caos**, porque es **sensible a las condiciones iniciales.**

EXPERIMENTO 8

Para mostrar que la función logística es **sensible a las condiciones iniciales,** usa el modelo SensitiveDependence.nlogo de NetLogo®, con valor $R = 4.0$ y las condiciones iniciales simultáneas: $x_0 = 0.20000$ y $x_0 = 0.20001$. Itera paso a paso, la función y te darás cuenta que a partir de $t = 14$, la función sigue trayectorias completamente diferentes, a pesar de que las condiciones iniciales de x_0 (porcentaje de población inicial) son muy, pero muy parecidas, ya que solo difieren en 0.00001.

El anterior experimento nos permite concluir que existen fenómenos que son **impredecibles,** como es el caso del crecimiento de una población, modelado mediante la función logística. Para explicarlo en la realidad, imaginemos que se quiere predecir mes a mes, la población de conejos de una isla hasta el año 2030, a partir de la población inicial de conejos de enero de 2020. El más pequeño error en el conteo de la población inicial de conejos en enero de 2020, producirá predicciones completamente diferentes para el año 2030, pues la función que expresa su crecimiento es **sensible a las condiciones iniciales.**

De acuerdo al experimento 7 y 8, define qué es el **caos** en el siguiente recuadro.

Anexo J. Secuencia didáctica: El juego entre los fractales y el caos

1. EL JUEGO DEL CAOS

En esta sección trataremos de ver qué relación existe entre el caos y los fractales. En las secuencias didácticas anteriores vimos como los fractales surgen de la iteración infinita de reglas determinísticas muy simples. Consideremos ahora "el juego del caos", que nace de un proceso aleatorio, pero que desemboca en un fractal muy conocido, estudiado en las secuencias didácticas anteriores.

A continuación, se muestran los pasos a seguir para el denominado juego del caos:

1. En una hoja de papel, dibuja un triángulo equilátero de vértices L, R, T
2. Dibuja un punto cualquiera dentro del triángulo LRT y llámalo: x_o
3. Lanza un dado y muévete en línea recta hacia alguno de los tres vértices, de acuerdo a las siguientes reglas:
   - Si sale 1 o 2, muévete en línea recta hacia R y marca el punto medio entre x_o y R.
   - Si sale 3 o 4, muévase en línea recta hacia L y marca el punto entre x_o y L.
   - Si sale 5 o 6, muévase en línea recta hacia T y marca el punto entre x_o y T.
4. Con cada medio punto marcado, repita (itere) el proceso indefinidamente, siguiendo las mismas reglas del paso anterior.
   Nota: Adopta la notación sucesiva para cada nuevo punto medio: x_1, x_2, x_3, x_4, etc

La figura 1 muestra un ejemplo de los primeros pasos del proceso descrito en los pasos anteriores.

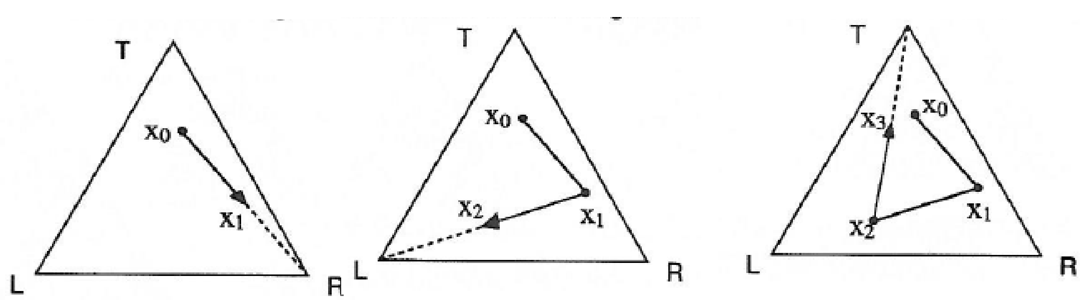


Figura 1. Primeros pasos del juego del caos

¿Después de un número grande de iteraciones, que figura aparece?

EXPERIMENTO 1

En un software de ordenador como NetLogo® o Geogebra, crea un programa que permita iterar el proceso anterior un número grande de veces (mayor a 1000) y confirma tus predicciones.

2. EL JUEGO DE LA VIDA (John Horton Conway)

Para el siguiente juego necesitarás, un plano cuadriculado y unas fichas similares al del juego de dama china. Cada una de las cuadrículas se llamarán **célula**. Una célula (cuadrícula) puede estar viva o muerta. Se llamarán **células vecinas** a las ocho celdas que rodean a una célula en particular (ver figura 2).

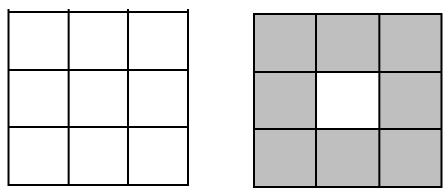


Figura 2. Células y células vecinas en el juego de la vida

Las tres simples reglas genéticas que se deben seguir en el juego de la vida para decidir si una célula sobrevive, muere o nace, para la próxima generación, son:

1. **Células que sobreviven**: Toda célula viva con exactamente dos o tres células vecinas vivas sobrevive.

2. **Células que mueren:** Toda célula viva con cuatro o más células vecinas vivas, muere por superpoblación y toda célula viva con una o ninguna célula vecina viva muere por aislamiento o soledad.

3. **Células que nacen**. Toda célula muerta, con exactamente tres células vecinas vivas, nace y vive para la próxima generación.

A manera de ejemplo, consideremos algunas configuraciones de tres células iniciales vivas y aplicando las reglas del Juego de la Vida, observemos el destino que les depara en las siguientes generaciones, tal como se muestra en la figura 3.

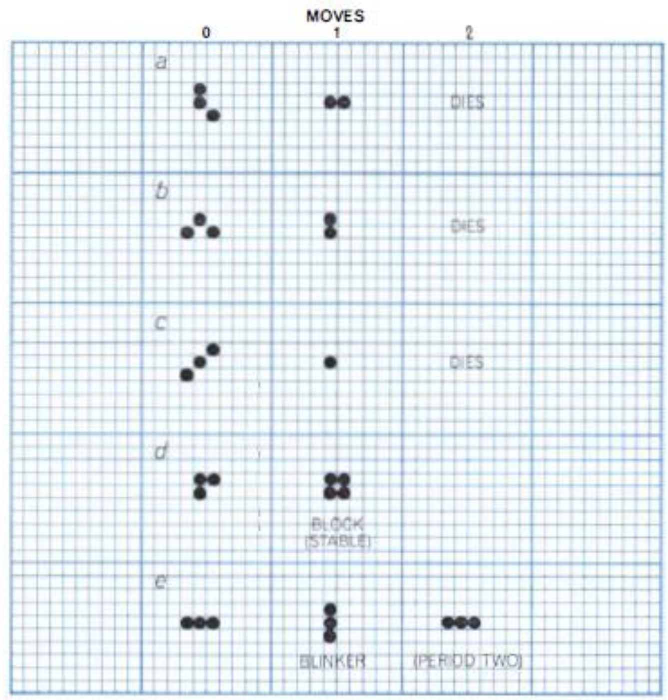


Figura 3. Destino de tres células vivas iniciales, en el juego de la vida

Análogamente, podemos hacer diferentes configuraciones para un conjunto inicial de cuatro células vivas, observando que pasa con ellas al aplicarle las tres reglas del Juego de la Vida, tal como muestra la figura 4.

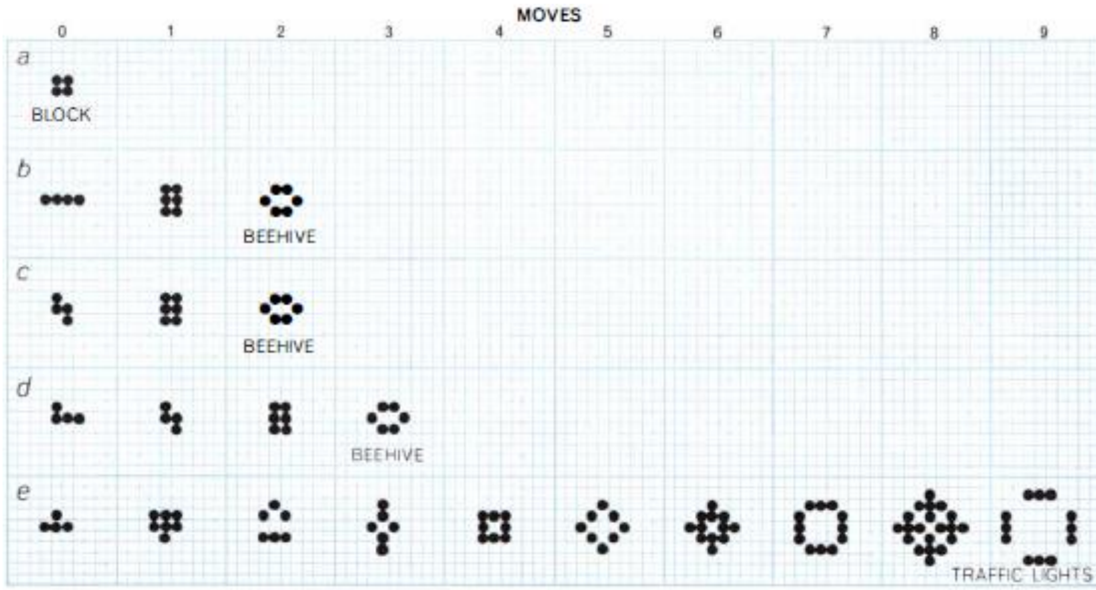


Figura 4. Destino de cuatro células vivas iniciales, en el juego de la vida

EXPERIMENTO 2

1. Con un tablero y fichas de dama china de dos colores, entrénate en el juego de la vida, usando diferentes configuraciones y diferente número de células iniciales vivas. Puedes, con tus compañeros de clase, organizar un concurso para premiar al estudiante campeón en el Juego de la Vida.

2. Verifica si las reglas del juego de la vida se cumplen en las tres configuraciones de la figura 5. Justifica por qué cada célula vive, muere o nace de una generación a otra.

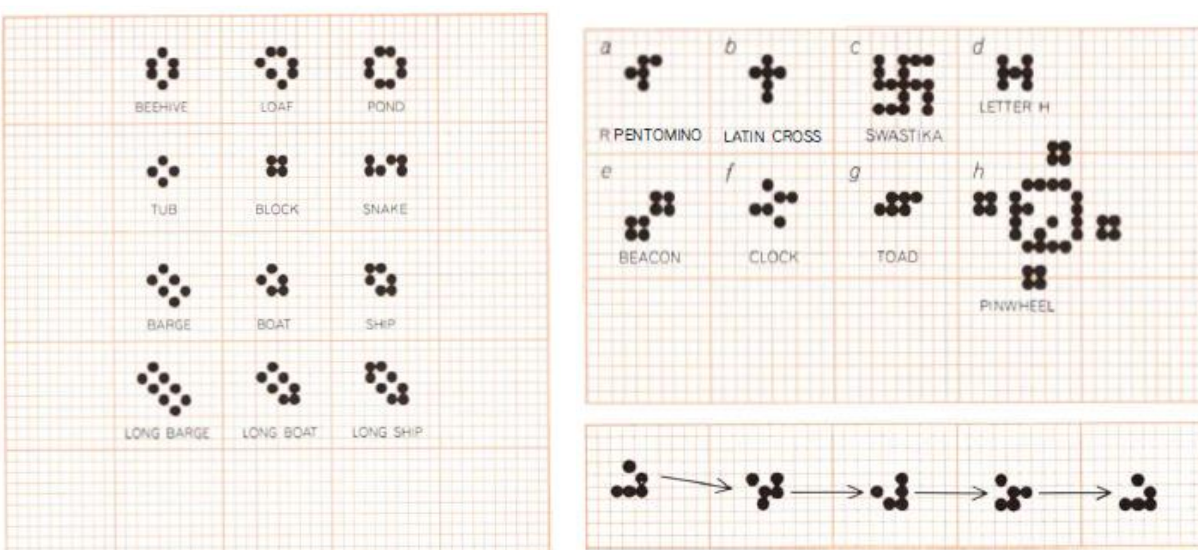


Figura 5. Diferentes configuraciones del juego de la vida para el ejercicio 1

3. Descarga el Juego de la Vida, en tu computador o en tu celular, desde la dirección: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.baiels.gameoflife&hl=es y diviértete juagando y apostando con tus compañeros.

4. Observa las figuras 4 y 5. Analizando el número de células vivas y su configuración inicial, determina cuáles de ellas permiten que la población de células inicial sobreviva el mayor número de generaciones.

5. **Reto:** Encuentra una configuración de células vivas inicial que permita su sobrevivencia siempre, es decir, que sobreviva para un número infinito de generaciones. Para lograr resolver el reto, puedes usar los siguientes enlaces de NetLogo®

GameOfLife.nlogo   Mini-Life.nlogo

Anexo K. Encuesta de valoración por parte de los estudiantes

INSTITUCIÓN EDUCATIVA CLARETIANO GUSTAVO TORRES PARRA
VALORACIÓN DE LA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN
ESTUDIANTES GRADO 9°

Buenos días queridos estudiantes. Como parte final de nuestro trabajo de investigación, se hace necesario que ustedes valoren, de la manera más honesta posible, la experiencia desarrollada en la clase de matemáticas, en cuanto a fractales y NetLogo, durante el cuarto periodo académico.

Exprese su opinión (percepción) utilizando las siguientes categorías:

- Completamente en desacuerdo
- En desacuerdo
- De acuerdo
- Completamente de acuerdo

Observación: La valoración suministrada por usted en este instrumento es confidencial y sólo se usará para fines investigativos. De antemano, agradecemos su participación.

EN CUANTO A LA METODOLOGÍA

1. El uso de la plataforma Classroom es adecuada para desarrollar la clase de matemáticas.
2. Las actividades colocadas en la plataforma Classroom fueron adecuadas.
3. La plataforma Classroom resultó útil para mejorar la comunicación entre profesores y estudiantes.

EN CUANTO A LOS CONCEPTOS ESTUDIADOS

4. La geometría de los fractales es un tema que permite una mejor percepción de la naturaleza.
5. La geometría de los fractales le permitió adquirir y desarrollar nuevos conocimientos.
6. El tiempo dedicado para el estudio de la geometría de los fractales fue suficiente.

EN CUANTO A LA COMPUTACIÓN (NetLogo®)

7. La computación hace de la matemática una ciencia agradable.
8. Netlogo® es un software adecuado para desarrollar conceptos de la matemática.
9. Fue motivante y retador aprender a programar en Netlogo®

10. ¿Qué recomendación o sugerencia hace usted para mejorar la experiencia desarrollada en la clase de matemáticas, durante el cuarto periodo?

Anexo L. Evidencia final de aprendizaje aplicada a los estudiantes

GRADO: ___________ FECHA:________________ CALIFICACIÓN:___________

N°	ESTUDIANTE	N° LISTA
1		

NOTA: Para respoder cada pregunta, debe mostrar un procedimiento que justifique su respuesta. NO SE PERMITE EL USO DE DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS.

PREGUNTAS DE OPCIÓN MÚLTIPLE CON ÚNICA RESPUESTA

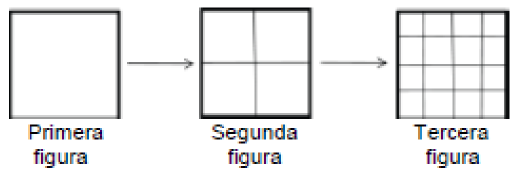
1. De los siguientes, no se puede considerar un fractal
A. El cerebro humano
B. Un árbol
C. La costa de un país
D. Una zanahoria

2. De los siguientes, se puede considerar un fractal
A. Una línea recta
B. Un cubo
C. Un cúmulo de galaxias
D. Un libro

3. ¿Cuál de las siguientes frases describe mejor lo que es un fractal?
A. Objeto que tiene dimensión entera y autosimilitud
B. Objeto que no se puede descomponer en figuras más pequeñas
C. Objeto que tiene dimensión no entera y es autosimilar
D. Objeto que está compuesto por partes más pequeñas

RESPONDA LAS PREGUNTAS 4 Y 5 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE SITUACIÓN.

Se toma un cuadrado y se divide sucesivamente en cuadrados más pequeños, tal como muestra la siguiente figura.

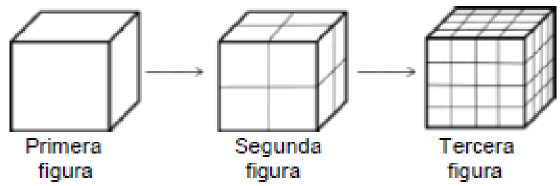


4. El número de cuadrados pequeños que van apareciendo en cada nueva figura, se puede describir mediante una progresión geométrica de razón
A. $r = 1$
B. $r = 2$
C. $r = 3$
D. $r = 4$

5. Si se continúa iterando este proceso, el número de cuadrados pequeños, del mismo tamaño, que se obtienen en la décima figura de la secuencia es
A. 4^9
B. 2^9
C. 9^4
D. 10

RESPONDA LAS PREGUNTAS 6 Y 7 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE SITUACIÓN.

Se toma un cubo y se divide sucesivamente en cubos más pequeños, tal como muestra la siguiente figura.



6. El número de cubos pequeños que van apareciendo en cada nueva figura, se puede describir mediante una progresión geométrica de razón

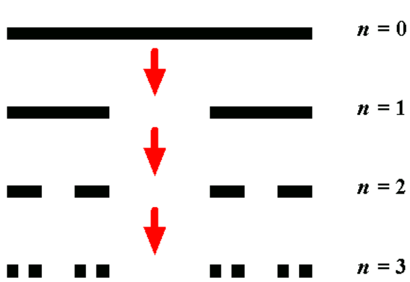
A. $r = 2$
B. $r = 8$
C. $r = 4$
D. $r = 6$

7. Si se continúa iterando este proceso, el número de cubos más pequeños, del mismo tamaño, que se obtienen en la décima figura de la secuencia es

A. 4^9
B. 6^9
C. 2^{27}
D. 30

RESPONDA LAS PREGUNTAS 8 A 11 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE SITUACIÓN.

La siguiente figura muestra un fractal conocido como el Conjunto de Cantor, donde n representa el nivel de cada iteración. Suponga que la longitud del segmento inicial es 1 unidad.



8. El número de segmentos del Conjunto de Cantor, para cualquier iteración n está definida por la fórmula

A. 2^{n-1}
B. 2^n
C. $(\frac{1}{2})^n$
D. 3^n

9. La fórmula que permite calcular la longitud de todos los segmentos de cualquier nivel n, es

A. $\frac{1}{3^n}$
B. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$
C. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$
D. 2^n

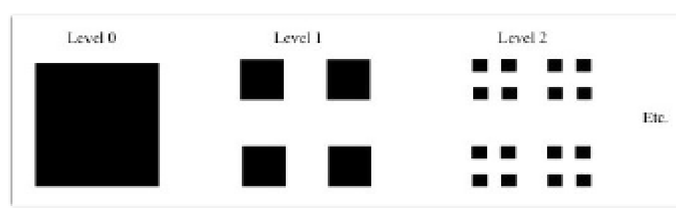
10. La longitud de uno de los pequeños segmentos en la quinta iteración ($n = 5$) es

A. $\left(\frac{3}{2}\right)^5$
B. $\frac{1}{3^5}$
C. $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
D. 3^5

11. La dimensión del Conjunto de Cantor es

A. $D = \frac{\log 3}{\log 4}$
B. $D = \frac{\log 4}{\log 3}$
C. $D = \frac{\log 3}{\log 2}$
D. $D = \frac{\log 2}{\log 3}$

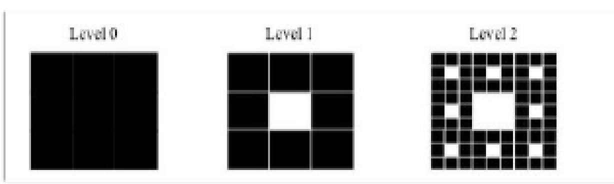
12. ¿Cuál es la dimensión del fractal que se muestra a continuación?



A. $D = \frac{\log 3}{\log 4}$
B. $D = \frac{\log 2}{\log 3}$
C. $D = \frac{\log 4}{\log 3}$
D. $D = \frac{\log 3}{\log 2}$

RESPONDA LAS PREGUNTAS 13 Y 14 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

La carpeta de Sierpinski es un fractal que se define de la siguiente manera: comienza con un cuadrado negro de lado L (nivel 0). En cada nivel siguiente, se reemplaza cada cuadrado negro por 8 cuadrados negros más pequeños, cada uno con lado de longitud $\frac{1}{3}$ del cuadrado negro del nivel inmediatamente anterior, tal como muestra la figura.

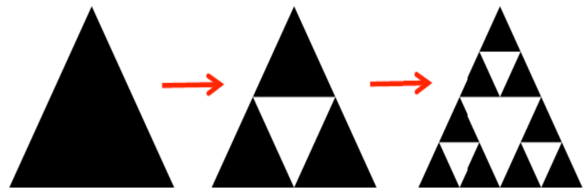


13. ¿Cuántos cuadrados negros hay en el nivel 10 ($n = 10$)?
A. 4^{10}
B. 8^{10}
C. 2^{10}
D. 10^{8}

14. ¿Cuál es la dimensión de la carpeta de Sierpinski?
A. $D = \frac{\log 8}{\log 2}$
B. $D = \frac{\log 3}{\log 8}$
C. $D = \frac{\log 2}{\log 8}$
D. $D = \frac{\log 8}{\log 3}$

RESPONDA LAS PREGUNTAS 15 A 17 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

El siguiente fractal se conoce como el triángulo de Sierpinski. Analice su construcción y responda las siguientes preguntas:



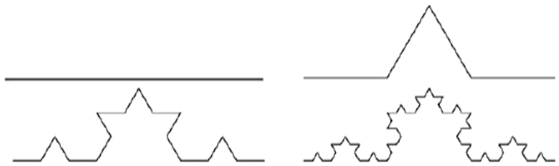
15. El número de triángulos negros en la decimosegunda iteración es
A. 2^{12} triángulos
B. 12^{3} triángulos
C. 3^{12} triángulos
D. 4^{12} triángulos

16. La fórmula que permite calcular el número de triángulos negros en cualquier iteración n esta dada por
A. 3^{n} triángulos
B. 2^{n}triángulos
C. n^{3} triángulos
D. 4^{12} triángulos

17. La dimensión del triángulo de Sierpinski es
A. $D = \frac{\log 2}{\log 3}$
B. $D = \frac{\log 9}{\log 3}$
C. $D = \frac{\log 3}{\log 2}$
D. $D = \frac{\log 4}{\log 3}$

RESPONDA LAS PREGUNTAS 18 A 21 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

El siguiente fractal es conocido como la curva de Koch. Analice su construcción y responda las siguientes preguntas:



18. Si la longitud del segmento inicial es de 3 cm, la longitud de la curva de Koch en la quinta iteración es

A. $\frac{1024}{81}$ cm
B. $\frac{1024}{81}$ cm
C. $\frac{1024}{81}$ cm
D. $\frac{1024}{81}$ cm

19. Suponga que el nivel 0 la curva de Koch, comienza con un segmento de longitud 10 centímetros. ¿Cuál es la longitud de esta curva de Koch en el nivel 4 (en centímetros)?

A. $10.\left(\frac{4}{3}\right)^4$
B. $10^4.\left(\frac{4}{3}\right)$
C. $10.\left(\frac{3}{4}\right)^4$
D. $10^4.\left(\frac{3}{4}\right)$

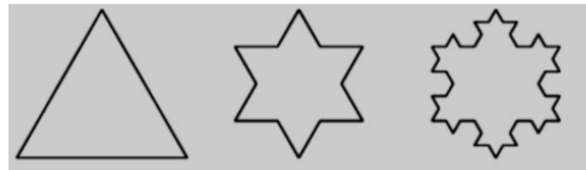
20. La dimensión de la curva de Koch es

A. $D = \frac{\log 2}{\log 3}$
B. $D = \frac{\log 3}{\log 2}$
C. $D = \frac{\log 3}{\log 4}$
D. $D = \frac{\log 4}{\log 3}$

21. Respecto a la curva de Koch se puede afirmar correctamente que

A. Es una curva de longitud infinita
B. Su longitud es menor que 1
C. Su dimensión está entre 0 y 1
D. No se puede generar en NetLogo®

22. El fractal que se muestra en la siguiente figura se conoce como el Copo de Nieve de Koch.

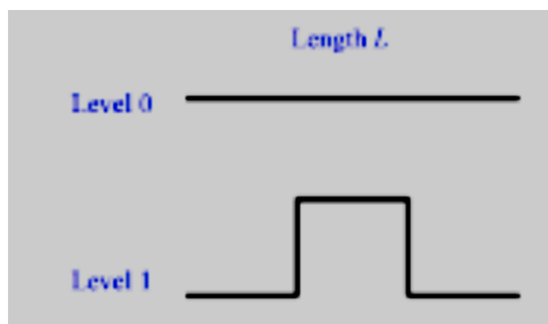


La dimensión de este fractal es

A. $D = \frac{\log 2}{\log 3}$
B. $D = \frac{\log 4}{\log 3}$
C. $D = \frac{\log 3}{\log 2}$
D. $D = \frac{\log 3}{\log 4}$

RESPONDA LAS PREGUNTAS 23 A 25 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN.

La siguiente figura muestra el nivel inicial y el primer nivel de un fractal, haciéndole una pequeña variación a la curva de Koch.



23. Si el segmento inicial mide $5\,cm$, la longitud del fractal en la tercera iteración $(n = 3)$ es

A. $\frac{5^4}{3^3}$
B. $\frac{5^3}{3^4}$
C. $\frac{3^4}{5^3}$
D. $\frac{5}{3}$

24. La expresión que permite calcular la longitud del fractal en cualquier nivel n, si la longitud del segmento inicial es 1, es

A. $\left(\frac{3}{5}\right)^n$

B. $\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$

C. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$

D. $\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$

25. La dimensión de este fractal es

A. $D = \frac{\log 3}{\log 5}$

B. $D = \frac{\log 4}{\log 3}$

C. $D = \frac{\log 5}{\log 3}$

D. $D = \frac{\log 3}{\log 4}$

26. De los siguientes fractales, ¿cuál tiene mayor dimensión?

A. El conjunto de Cantor
B. la curva de Koch
C. el triángulo de Sierpinski
D. La carpeta de Sierpinski

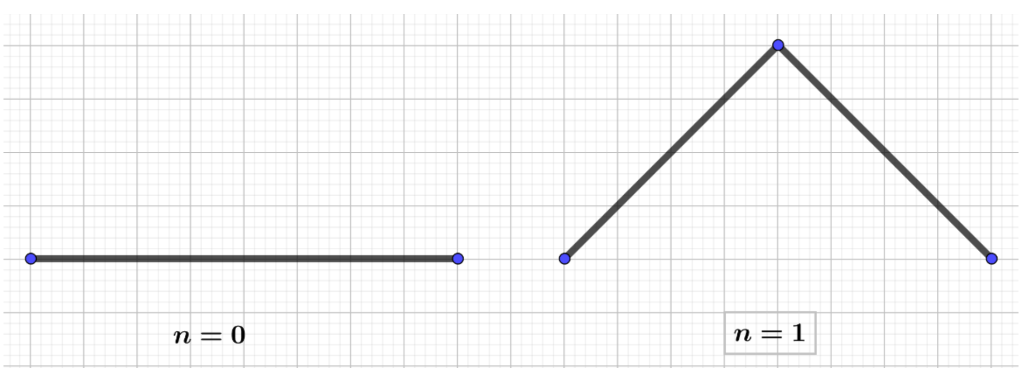
27. De los siguientes fractales, ¿cuál tiene una dimensión mayor que cero y menor que 1 (entre 0 y 1)?

A. Conjunto de Cantor
B. Curva de Koch
C. Triángulo de Sierpinski
D. Carpeta de Sierpinski

LA CURVA DE LEVY

La curva de Levy es un fractal descrito por primera vez por Ernesto Cesàro en 1906 y lleva el nombre del matemático francés Paul Pierre Lévy quien, en 1938, fue el primero en exhibir sus propiedades de autosimilaridad y proveer una construcción geométrica. La también llamada curva del dragón es un fractal que se construye siguiendo los siguientes pasos:

1) Se dibuja un segmento de longitud una unidad ($n = 0$).
2) Considerando que el segmento anterior es una hipotenusa, se dibuja a partir de él un triángulo rectángulo isósceles (catetos de igual longitud).
3) Se borra la hipotenusa dibujada en el paso 1
4) Para cada uno de los segmentos obtenidos en el paso anterior, se iteran los pasos 2 y 3.



28. Dibuje las siguientes tres iteraciones de este fractal.

29. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión que representa el número de segmentos en cada nivel.

30. Halle la longitud de la curva de Levy en el nivel $n = 2$

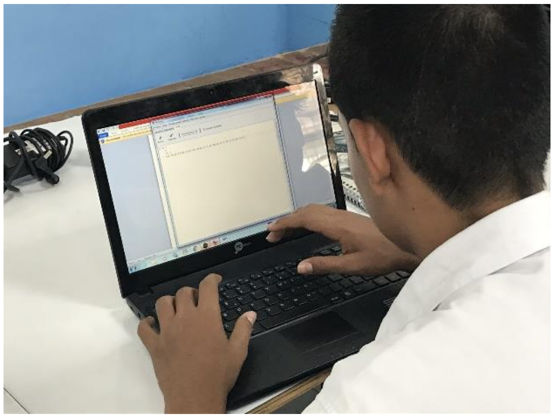
CUADRO DE RESPUESTAS

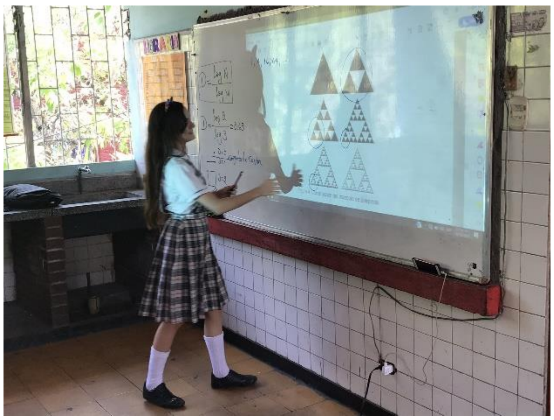
ESTUDIANTE: ____

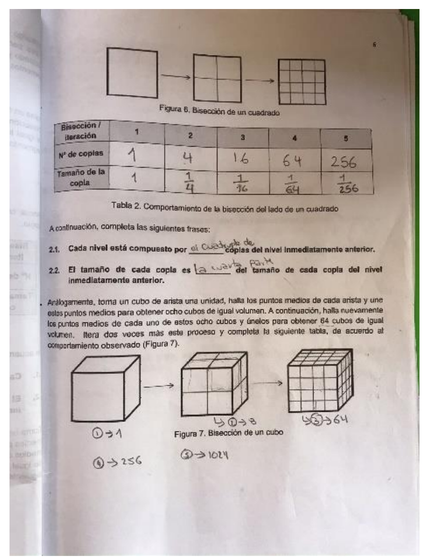
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
A	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
B	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
C	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
D	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Anexo M. Registro fotográfico.







6

Figura 6. Bisección de un cuadrado

Bisección / iteración	1	2	3	4	5
N° de copias	1	4	16	64	256
Tamaño de la copia	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$

Tabla 2. Comportamiento de la bisección del lado de un cuadrado

A continuación, completa las siguientes frases:

2.1. Cada nivel está compuesto por el cuadruple de **copias del nivel inmediatamente anterior.**

2.2. El tamaño de cada copia es la cuarta parte **del tamaño de cada copia del nivel inmediatamente anterior.**

Análogamente, toma un cubo de arista una unidad, halla los puntos medios de cada arista y une estos puntos medios para obtener ocho cubos de igual volumen. A continuación, halla nuevamente los puntos medios de cada uno de estos ocho cubos y únelos para obtener 64 cubos de igual volumen. Itera dos veces más este proceso y completa la siguiente tabla, de acuerdo al comportamiento observado (Figura 7).

1 → 1   2 → 8   3 → 64

Figura 7. Bisección de un cubo

4 → 256   5 → 1024