Neiva, Enero 30 del 2017

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Las suscritas:

Maria Mercedes Coronado Casallas, con C.C. No. 1075261562 y Luz Dany Puentes Carvajal, con C.C. No. 1075260377, autoras del trabajo de grado titulado Cuadraturas y Construcciones con regla y compás, presentado y aprobado en el año 2017 como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Luz Dany Puentes C.

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Cuadraturas y construcciones con regla y compás

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Coronado Casallas Puentes Carvajal	Maria Mercedes Luz Dany

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva Penagos	Augusto Mauricio

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciada en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2017 **NÚMERO DE PÁGINAS: 39**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general _X_
Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___
Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Construcción	Constructions	6. Rectángulo	Rectangles
2. Compas	Compass	7. Trapecio	Trapezes
3. Regla	Rule	8. Lúnula	Lunettes
4. Griega	Greek	9. Matemáticas	mathematics
5. Circulo	Circle	10. Geometría	Geometry

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Las cuadraturas está relacionada con la construcción con regla y compas que hacen parte de la matemática clásica griega, temas de los cuales ocuparon Arquímedes, Euclides, Hipócrates, aristarcos y pappus entre otros. Estas construcciones dieron origen a los tres problemas clásicos de la matemática griega los cuales fueron resueltos muchos siglos después de haber sido propuestos, gracias a la aparición de nuevas herramientas, métodos y procedimientos desarrollados en la rama de la matemática que hoy se conoce como algebra moderna. Las cuadraturas de figuras planas es un tema que está emparentado con el problema de la cuadratura del círculo, muy de cerca con el problema de la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates.

El trabajo presenta construcciones con regla y compas de algunas cuadraturas como son las cuadraturas de un rectángulo, triangulo, dos cuadrados, trapecio y polígonos regulares. Dejando sobre cada uno varias ilustración de ejemplos.

El trabajo contempla la destreza manual en la utilización de instrumentos como la regla, el compás, la escuadra y el transportador de ángulo la cual debe desarrollar el profesor de matemáticas.

El trabajo da elementos muy eficientes para resolver geométricamente problemas relacionados con áreas y además para generalizar algunos resultados como el teorema de Pitágoras

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

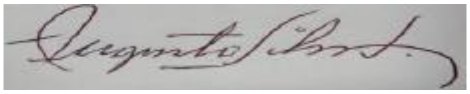
The constructions with rule and compass do part of the Classic Greek mathematics and with them many scientists of the epoch deal, like Arquimedes, Euclid, Hippocrates, Aristarco and Pappus, among others. This thematic gave origin to three Classic problems of the Greek mathematics which could be solved rigorously many centuries later by the support of what today is known as Modern Algebra.

Moreover, the topic of the constructions with rule and compass is intimately related to the squarings. The work presents the usual techniques to carry out the squaring of rectangles, triangles, trapezes and regular polygons. It is stood out in this aspect, the squaring of some lunettes raised by Hippocrates, which are supremely important for their relation with the squaring of the circle.

This work also presents some additional results that allow to solve in a very simple way problems of areas and to generalize some results of the elementary geometry.

APROBACIÓN DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Augusto Silva Silva

Firma: 

Nombre Jurado: Mauricio Penagos

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Cuadraturas y Construcciones con Regla y Compás

María Mercedes Coronado Casallas
Luz Dany Puentes Carvajal

Neiva, Huila
2017

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Cuadraturas y Construcciones con Regla y Compás

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al Título de Licenciadas en Matemáticas

María Mercedes Coronado Casallas
2009287870
Luz Dany Puentes Carvajal
2009287507

Asesor:
Augusto Silva Silva

Neiva, Huila
2017

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Enero de 2017

AGRADECIMIENTOS

Al culminar esta etapa de nuestra vida queremos AGRADECER:

Ante todo a Dios por habernos dado la vida y las fuerzas necesarias para alcanzar esta meta.

A nuestros padres por su apoyo incondicional en todas las etapas de nuestra existencia.

A la Universidad Surcolombiana por habernos dado la oportunidad de ingresar a sus aulas a alcanzar el título profesional que quisimos.

A los profesores de la Licenciatura en Matemáticas que con su ejemplo y dedicación contribuyeron a nuestra formación como licenciadas.

A nuestro Asesor de Trabajo de Grado profesor Augusto Silva Silva por su visión crítica de muchos aspectos cotidianos de la vida, por su rectitud en su profesión como docente, por sus consejos, que ayudaron a formarnos como persona.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Grado, denominado Cuadraturas y Construcciones con Regla y Compás pretende hacer un aporte para rescatar en la educación media el olvidado tema del manejo, con cierto grado de habilidad, de la regla y el compás.

El trabajo consta de tres capítulos así:

- **Capítulo 1.** Construcciones Elementales: En el que se hace una presentación de la temática en general; incluye una reseña breve de los tres problemas Clásicos de la Matemática Griega. Se presentan además las construcciones más elementales que son posibles con la regla y el compás como son: punto medio y mediatriz de un segmento, trazo de perpendiculares y paralelas a una recta dada; suma, resta, multiplicación y división de segmentos y la raíz cuadrada de un segmento dado.

- **Capítulo 2.** Otras Construcciones: Por considerarlo de interés general, se incluye en éste capítulo la construcción del Decágono regular, del Pentágono regular, del Hexágono regular y del Número de Oro.

- **Capítulo 3.** Cuadraturas: Es el capítulo central del trabajo. Como se sabe el tema de las cuadraturas esta íntimamente relacionado, con las Construcciones con Regla y Compás. Se dan los métodos para hacer la cuadratura de varios polígonos. El capítulo termina con una presentación de las cuadraturas de Lúnulas de Hipócrates tema emparentado, con la Cuadratura del Círculo.

  El trabajo termina con la formulación de algunas conclusiones derivadas de su elaboración.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Recrear las orientaciones e instrucciones elementales que son necesarias y suficientes para hacer con Regla y Compás las Cuadraturas de algunos polígonos y de algunas Lúnulas.

Objetivos Específicos

- Hacer una presentación general de la problemática de las construcciónes con regla y compás incluyendo una breve reseña de los Tres Problemas Clásicos de la Matemática Griega.

- Presentar la forma de llevar a cabo algunas construcciones elementales con regla y compás: perpendiculares, paralelas, mediatrices, bisectices, suma, resta, multiplicación y división de segmentos y de la raíz cuadrada.

- Presentar la forma de llevar a cabo cuadraturas de rectángulos, triángulos, polígonos y trapecios.

- Presentar la cuadratura de algunas Lúnulas de la forma como lo hizo el científico griego Hipócrates y algunos otros resultados relacionados con esta temática.

JUSTIFICACIÓN

La realización de este Trabajo de Grado se justifica por las siguientes razones:

1. Las construcciones con regla y compás hacen parte de la matemática clásica griega, temas de los cuales se ocuparon Arquimedes, Euclides, Hipócrates, Aristarco y Pappus entre otros.

2. Las construcciones con regla y compás dieron origen a los tres problemas clásicos de la Matemática Griega, los cuales fueron resueltos, muchos siglos después de haber sido propuestos, gracias a la aparición de nuevas herramientas, métodos y procedimientos desarrollados en la rama de la matemática que hoy se conoce como Álgebra Moderna; poniendo en evidencia la imposibilidad de realizar algunas de ellas con regla y compás.

3. El trabajo contempla para su realización el desarrollo de la destreza manual en la utilización de instrumentos como la regla, el compás, la escuadra y el transportador de ángulos la cual debe desarrollar el profesor de Matemáticas.

4. La cuadratura de figuras planas, es un tema estrechamente relacionado con los tres problemas clásicos de la Matemáticas Griega y con las construcciones con regla y compás. Más aún: el problema de la cuadratura del círculo esta emparentado, muy de cerca, con el problema de la cuadratura de las lúnulas de Hipócrates.

5. Algunas cuadraturas permiten resolver, en forma muy simple, problemas relacionados con áreas.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

1.1. Los Tres problemas Clásicos de la Matemática Griega

Las construcciones con regla y compás fueron una actividad privilegiada de los matemáticos griegos, razón por la cual han hecho presencia en el desarrollo de las matemáticas durante los siglos posteriores.Vale la pena mencionar que el uso de los mencionados instrumentos estaban sujetos a restricciones muy severas, las cuales limitaban considerablemente las construcciones que podían hacerse. Las restricciones son las siguientes:

1) La regla usada por los griegos, solo podía emplearse para trazar el segmento de recta determinado por dos puntos. La regla no tenía marcas, luego no podía usarse para medir; la regla no podía deslizarse en el plano para trazar paralelas ni tampoco podía rotarse.

2) El compás solo se podía usar para trazar circunferencias (o arcos de circunferencia) con centro en un punto y cualquier radio. Tampoco podía usarse el compás para medir segmentos, ni para dividir segmentos, circunferencias o arcos en partes iguales.

Las anteriores restricciones dieron origen a tres problemas de construcción con regla y compás los cuales se conocen como Problemas Clásicos de la Matemática Griega. Ellos son:

a) Duplicación del Cubo: Se conoce con el nombre de Problema Deliano, por su relación con la antigua ciudad griega de Delfos, situada al pie del monte Parnaso, en donde se encontraba el más importante de los oráculos griegos puesto bajo el patrocinio de Apolo, divinidad griega, dios del día, de la poesía, de la música y de las artes. El problema consiste, en construir con regla y compás la arista de un cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado.

b) Trisección del ángulo: Dado un ángulo cualquiera se trata de dividirlo en tres ángulos iguales usando sólo la regla y el compás.

c) Cuadratura del círculo: Dado cualquier círculo, se trata de construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área que el círculo.

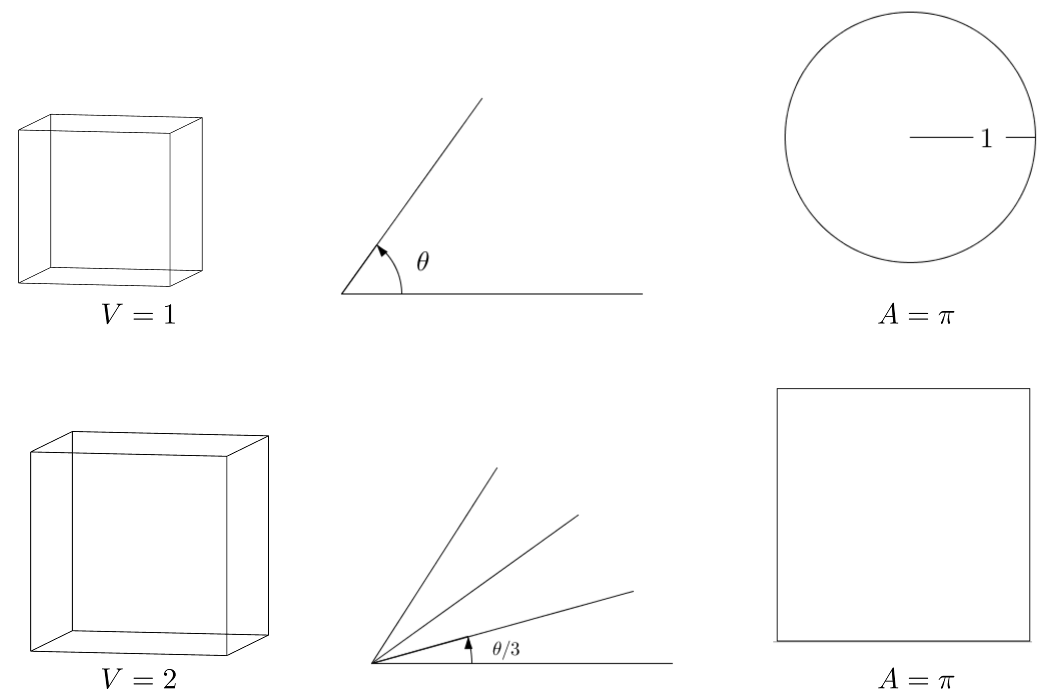


Figura 1.1

Los tres problemas clásicos griegos fueron motivo de controversia, debate y discusión entre la comunidad matemática por mas de dos mil años. La respuesta durante ese tiempo fue que ninguno de los tres se puede resolver por medio de construcciones con regla y compás en el sentido de la matemática griega.

La solución definitiva a éstos problemas debió esperar avances significativos en el desarrollo de la matemática, particularmente en las ramas de la Teoría de Grupos, de Anillos, de Cuerpos y la elaboración de una teoría consistente sobre números construibles, algebráicos y trascendentes; éstas ramas forman parte de lo que hoy se conoce con el nombre de Álgebra Moderna.

Es de anotar que aunque los tres problemas no pueden resolverse con regla y compás, los mismos matemáticos griegos desarrollaron otras técnicas que les permitieron hallar soluciones para cada uno de ellos. Consisten fundamentalmente en darle a la regla y al compás otros usos como medir, alinear puntos, deslizar un segmento o en la elaboración de instrumentos diseñados con propósitos específicos. Estas construcciones se conocen como Construcciones Neusis y, Arquímedes fué uno de los primeros en usarlas.

En el presente trabajo, usaremos la regla y el compás en la forma establecida por los griegos para las construcciones más elementales: punto medio, mediatriz, perpendiculares, paralelas y bisectriz de un ángulo. Para otras construcciones como suma, resta, producto, cociente y raíz cuadrada usaremos también el compás para transportar segmentos.

1.2. Punto medio y Mediatriz de un segmento

Dado un segmento $\overline{AB}$ su punto medio y su mediatriz se construyen de la siguiente forma:

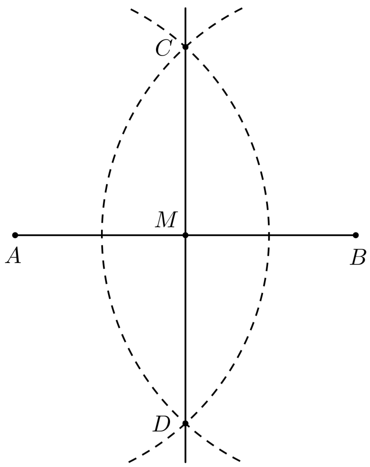


Figura 1.2

i) Con centro en A y en B y un radio conveniente se trazan arcos para determinar los puntos C y D.

ii) Trazar con la regla la recta CD.

El punto M donde ésta recta corta al segmento $\overline{AB}$ es el punto medio y la recta determinada por C y D es la mediatriz. Es de anotar que todos los puntos de la mediatriz equidistan de A y B

1.3. Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella

Dada una recta r y un punto A, fuera de ella, la perpendicular a r por el punto A se construye así:

i) Con centro en A y un radio conveniente se traza un arco que determine en r, los puntos P y Q.

ii) Con centro en P y Q, con un radio conveniente, se trazan arcos (con la misma abertura) para determinar el punto B.

La recta s determinada por A y B es la recta perpendicular deseada.

Una ligera modificacón de ésta construcción, permite trazar la perpendicular a r, sobre un punto A, que esté en r.

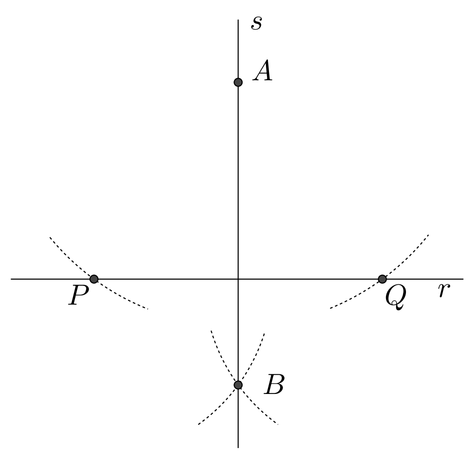
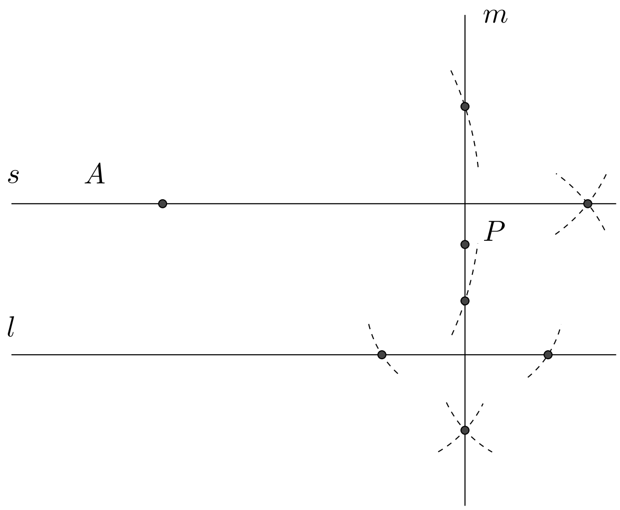


Figura 1.3

1.4. Paralela a una recta por un punto dado.

Dada una recta l y un punto A fuera de ella, la recta paralela a l y que pasa por A se construye así:



i) Escogemos un punto P, distinto de A y que no esté en l.

ii) Construimos una recta m perpendicular a l y que pase por P

iii) Luego construimos una recta s, perpendicular a m y que pase por A. La recta s es paralela a l.

Figura 1.4

1.5. Bisectriz de un ángulo.

Dado un ángulo NAM, su bisectriz se construye de la siguiente forma:

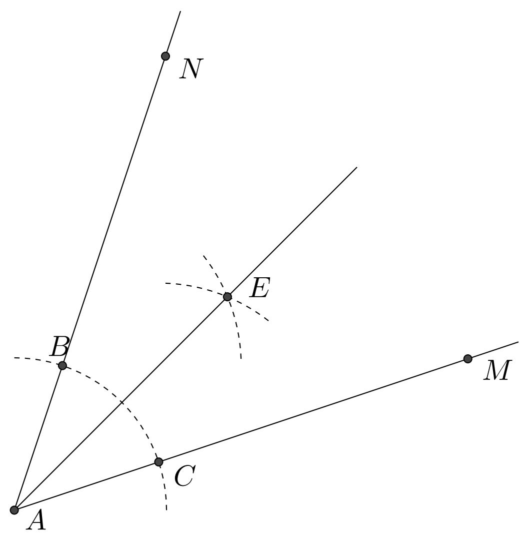


Figura 1.5

i) Con centro en el vértice A y cualquier radio se traza un arco para determinar los puntos B y C sobre los lados AN y AM del ángulo dado.

ii) Con centro en los puntos B y C se trazan arcos con la misma abertura para determinar el punto E.

iii) La recta determinada por A y E es la bisectriz del ángulo.

1.6. Construcción de un ángulo igual a uno dado.

Dado un ángulo AOB, la construcción de un ángulo igual al dado se hace así:

i) Se traza un recta s y sobre ella se marca un punto O'

ii) Con centro en O y cualquier radio, se traza un arco para determinar los puntos P y Q sobre los lados del ángulo dado.

iii) Se transporta sobre s el segmento $\overline{OP}$, para obtener $\overline{O'P'}$ y con ese radio se traza un arco con centro en O'

iv) Sobre el arco trazado en *iii*) se transporta el segmento $\overline{PQ}$, a partir de P', para obtener el punto Q'

v) Se traza el segmento $\overline{O'Q'}$. El ángulo $Q'O'P'$ es igual al ángulo dado.

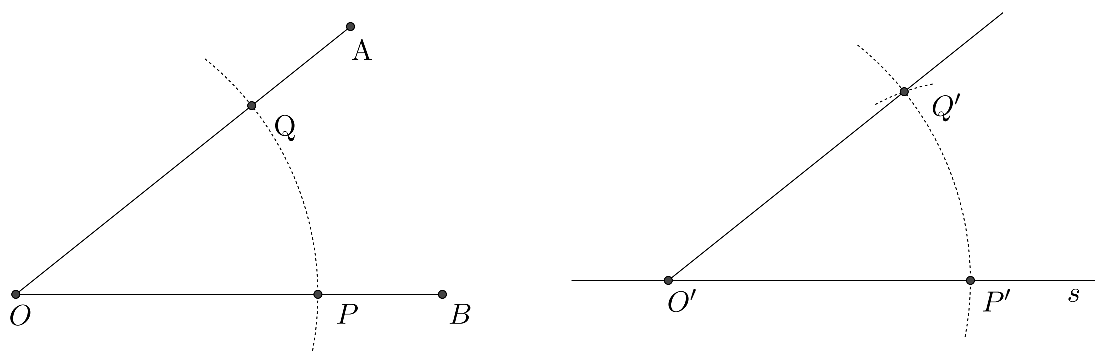


Figura 1.6

1.7. Construcción de un triángulo congruente a uno dado

Dado un triángulo ABC, la construcción de un triángulo congruente al dado se hace así:

i) Se traza una recta r y sobre ella se transporta el segmento $\overline{AB}$, para obtener el segmento $\overline{A'B'}$

ii) Se traza un arco con centro en A' y de radio el segmento $\overline{AC}$

iii) Se traza un arco con centro en B' y radio el segmento $\overline{BC}$

iv) El punto de intersección C' de los arcos anteriores es vertice del triángulo buscado.

El triángulo $A'B'C'$ es congruente al triángulo dado.

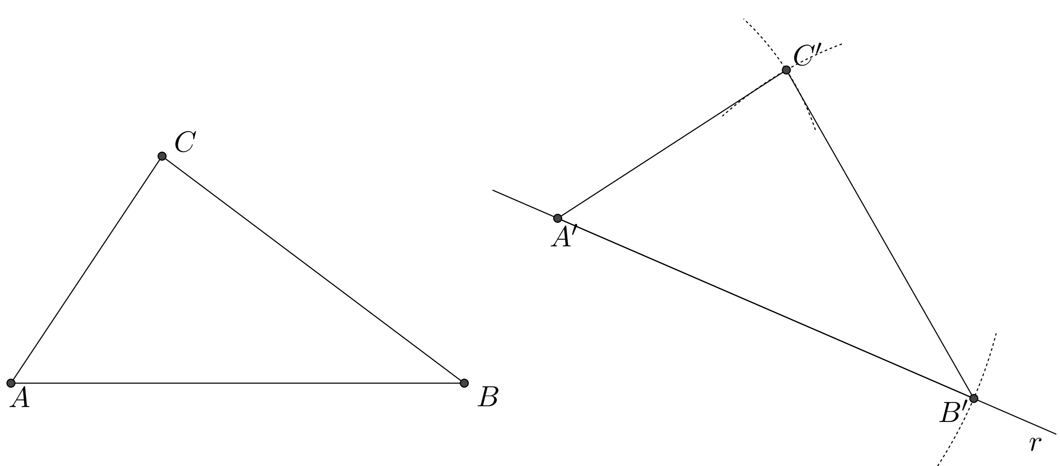


Figura 1.7

1.8. Construcción de un polígono congruente a uno dado.

Dado un polígono $ABCDE$, la construcción de un polígono congruente al dado se hace así:

i) Se escoge un vértice, digamos A, del polígono dado y se trazan diagonales a los otros vértices.

ii) Se traza una recta l, sobre ella se transporta el lado $\overline{AB}$ del polígono dado para obtener el lado $\overline{A'B'}$

iii) Sobre el segmento $\overline{A'B'}$ se construye el triángulo $A'B'C'$, luego sobre $\overline{A'C'}$ se construye el triángulo $A'C'D'$, y así sucesivamente.

El polígono $A'B'C'D'E'$ es congruente al polígono dado.

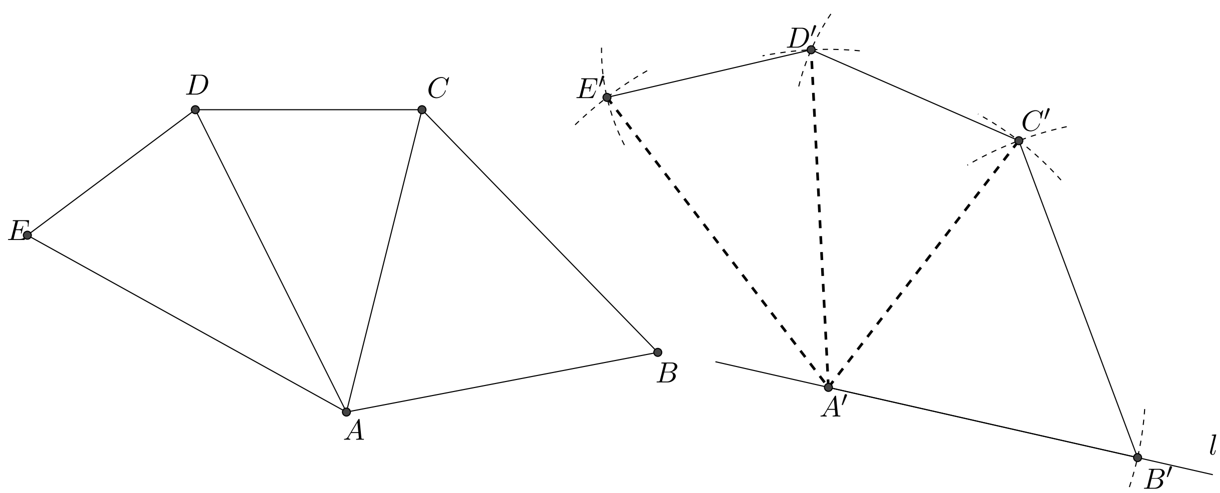
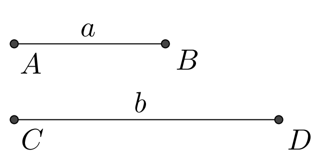


Figura 1.8

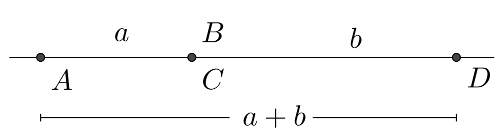
1.9. Construcción de la suma y la resta de dos segmentos

Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de longitudes a y b respectivamente la suma se construye así:



i) Sobre una recta s, transportamos el segmento $\overline{AB}$

ii) Sobre la misma recta s y a continuación de $\overline{AB}$, transportamos el segmento $\overline{CD}$.

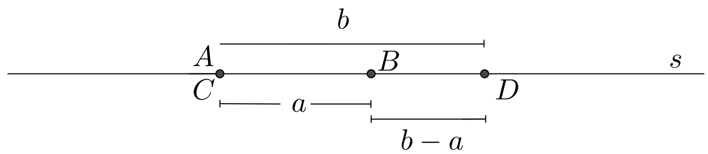


iii) El segmento $\overline{AD}$, de longitud $a + b$ es la suma de los segmentos.

La resta se construye de la siguiente manera:

i) Sobre una recta s transporte el segmento mayor $\overline{CD}$

ii) Sobre el segmento $\overline{CD}$, sobreponga el segmento $\overline{AB}$, haciendo coincidir C con A.



iii) El Segmento $\overline{BD}$ es $b - a$

1.10. La Multiplicación y la División mediante construcciones con regla y compás

Para las construcciones hechas hasta el momento no se ha necesitado establecer una unidad de medida. Para las construcciones siguientes, es necesario de antemano establecer una unidad de media, para tal efecto cualquier segmento puede escogerse como tal.

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de longitudes a y b respectivamente y una unidad de medida, el producto se construye así:

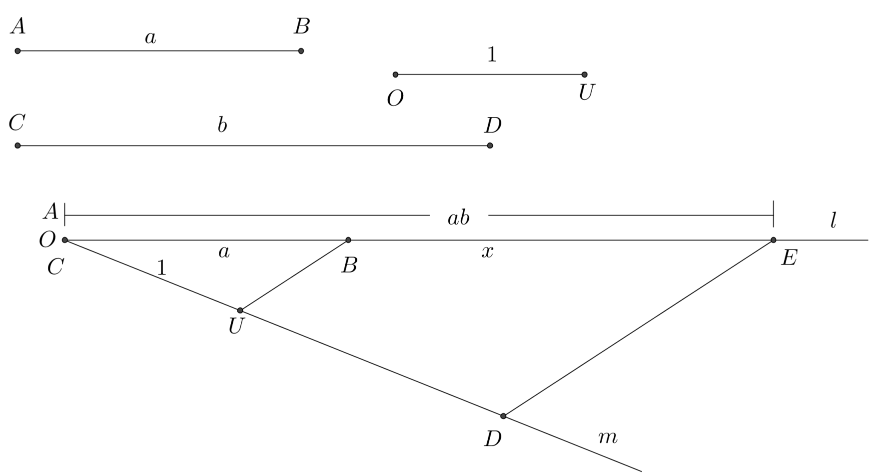


Figura 1.9

i) Trazamos dos rectas l y m partiendo de un punto común, digamos O

ii) Transportar sobre l el segmento $\overline{AB}$ de longitud a

iii) Transportar sobre m el segmento $\overline{CD}$ de longitud b.

iv) Transportar sobre m el segmento unitario $\overline{OU}$.

v) Trazar la recta $\overline{UB}$.

vi) Trazar por D la paralela a $\overline{UB}$, para encontrar el punto E.

vii) El segmento $\overline{AE}$ es el producto de los dos segmentos dados.

Esta afirmación se fundamenta en lo siguiente: Por semejanza de triángulos tenemos: $\frac{a}{1} = \frac{a+x}{b}$, luego: $a + x = ab$. Osea $\overline{AE}$ es el producto de los dos segmentos. Obsérvese que el segmento unitario puede transportarse sobre la recta l, obteniéndose el mismo resultado.

Para construir la división de dos segmentos, se procede igual que para la multiplicación hasta la instrucción (*iv*).

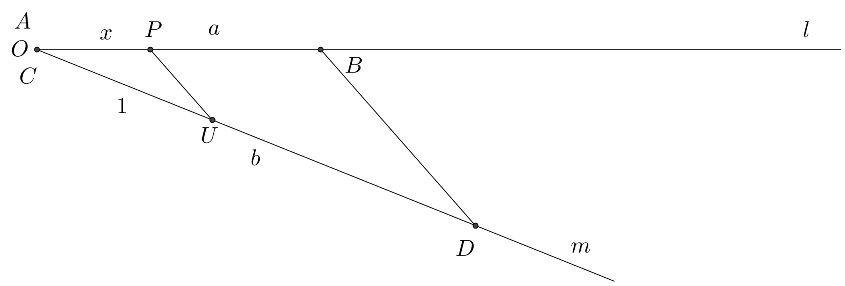


Figura 1.10

Seguidamente,

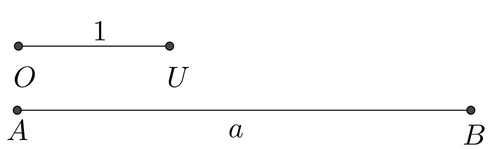
i) Trace el segmento $\overline{BD}$.

ii) Trazar por U, la paralela a $\overline{BD}$ para determinar sobre l el punto P. El segmento $\overline{AP}$ es el cociente entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. La razón es la siguiente:

Por semejanza de triángulos tenemos que: $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, luego $x = \frac{a}{b}$.Observe que para construir $\frac{b}{a}$, debe transportarse la unidad sobre la recta l.

1.11. Construcción de la raíz cuadrada de un segmento.

Dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud a, su raíz cuadrada se construye de la siguiente forma:



i) Sobre una recta s, transportar el segmento $\overline{AB}$ y a continuación el segmento unitario $\overline{OU}$.

ii) Encontrar el punto medio M del segmento $\overline{AU}$.

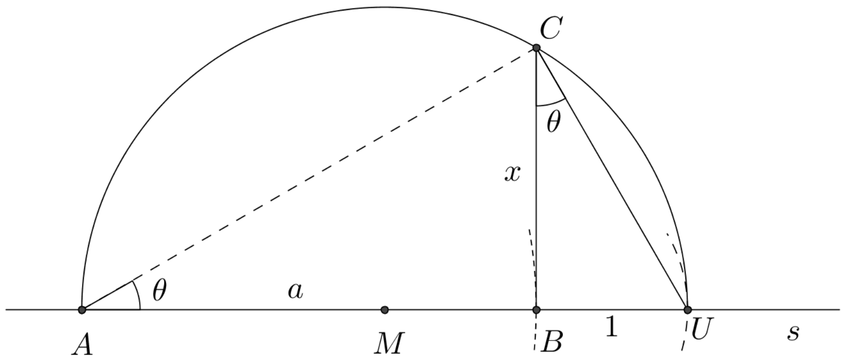


Figura 1.11

iii) Con centro en M, trazar un semicírculo de radio $\overline{AM}$.

iv) Construir la perpendicular a s por el punto B para determinar el punto C sobre el semicirculo.

v) Trazar el segmento $\overline{BC}$. Este segmento es la raíz cuadrada de $\overline{AB}$.

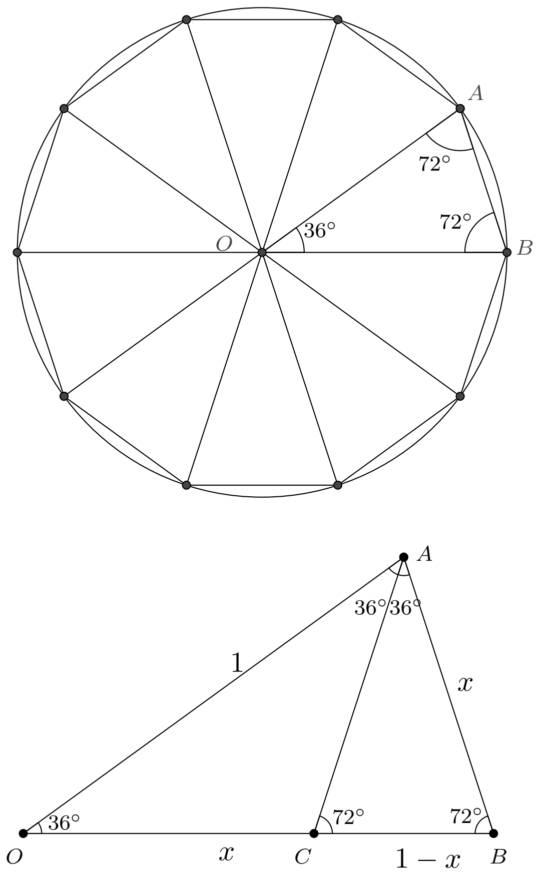
En efecto: los triángulos ABC y CBU son semejantes, luego sus lados correspondientes son proporcionales, o sea: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BU}}{\overline{BC}}$.

Luego: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{x}$ ó sea $x^2 = a$, así que $x = \sqrt{a}$.

CAPÍTULO 2

OTRAS CONSTRUCCIONES

2.1. Construcción del Decágono regular y el Número de oro



Una de las construcciones con regla y compás de mucho interés es la del decágono regular.

Cada triángulo OAB en que puede descomponerse el decágono tiene la particularidad de que los ángulos en los vértices A y B son cada uno, el doble del ángulo central: ellos miden $72°$ cada uno, mientras que el central mide $36°$. Lo anterior significa que al bisectar el ángulo A, se obtiene otro triángulo semejante con OAB. Adicionalmente el triángulo OAC es isósceles. (ver figura 2.1.1)

Si suponemos que la circunferencia circunscrita tiene radio 1 y si llamamos x al lado del decágono entonces: $\overline{AC} = \overline{OC} = x$; $\overline{CB} = 1 - x$; por la semejanza de los triángulos OAB y ABC podemos establecer la proporción:

Figura 2.1.1

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \quad \text{o sea} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Es decir: $x^2 = 1 - x$ ó $x^2 + x - 1 = 0$. Resolviendo ésta ecuación cuadrática, se obtiene:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es un número positivo por ser el lado del decágono, debemos tomar

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Por tratarse de un número algebraico, este resultado nos permite afirmar que el decágono regular es construible con regla y compás.

Para construir el pentágono regular, se unen los vértices del decágono regular dejando cada vez un vértice de por medio.

2.1.1. La Razón Áurea y el Número de Oro

Se cree que los antiguos griegos estaban sujetos a una proporción numérica especial que relacionaban con sus ideas de belleza y geometría. Se conoce con el nombre de Razón Áurea, Media Áurea o Divina Proporción.Euclides en el libro II de Los Elementos hace un estudio detallado de dicha proporción.

Dados dos segmentos de longitudes distintas l y w, la media aritmética $m = \frac{l + w}{2}$, tiene la propiedad de que $l - m = m - w$ y se dice entonces que la media aritmética produce un equilibrio entre l y w.

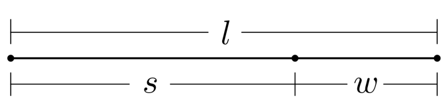
Los griegos buscaron una longitud s, la media geométrica, que produjera la igualdad

$$\frac{l}{s} = \frac{s}{w}$$

$$s^2 = l \cdot w, \qquad \text{es decir,} \qquad s = \sqrt{l \cdot w}$$

La divina proporción, aparece al dividir un segmento de longitud l, en dos partes de longitudes s y $w = l - s$ de manera que s sea media geométrica entre l y $l - s$, o sea:

$$\frac{l}{s} = \frac{s}{l - s}$$



El cociente común, recibe el nombre de el **Número de Oro**. El punto de división del segmento es el que determina la divina proporción. En el caso especial de tenerse $l = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{s} = \frac{s}{1 - s}$$

Se acostumbra denotar este cociente común con la letra griega φ. Note que se obtiene lo siguiente:

$$\varphi = \frac{s}{1-s} = \frac{1}{\frac{1}{s}-1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

con lo cual,

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \qquad \text{ó} \qquad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \qquad \text{o sea} \qquad \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Ecuación cuya solución es:

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Por tratarse de segmentos debemos tomar el valor positivo

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

con 9 cifras decimales su valor es:

$$\varphi = 1,618033989$$

Vale la pena resaltar el hecho de que en la construcción del Decágono Regular, la igualdad

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

es la Divina Proporción y el lado x del Decágono es

$$x = \frac{1}{\varphi}$$

2.1.2. Rectángulos de Oro

Desde el punto de vista artístico los rectángulos en los cuales se verifica que el cociente entre el largo y el ancho es igual al Número de Oro, son los mejor proporcionados y agradables a la vista. A estos se les llama Rectángulos Áureos o de Oro.

Una forma de construir, directamente, Rectángulos Áureos, y que fué usada por los griegos es la siguiente:

i) Constrúyase un cuadrado de lado a digamos $ABCD$.

ii) Prolónguese el lado $\overline{DC}$.

iii) Hállese el punto medio del lado $\overline{DC}$, digamos M.

iv) Constrúyase el segmento $\overline{MB}$.

v) Con radio $\overline{MB}$ y haciendo centro en M, trace un arco que corte a la prolongación de $\overline{DC}$ en el punto E.

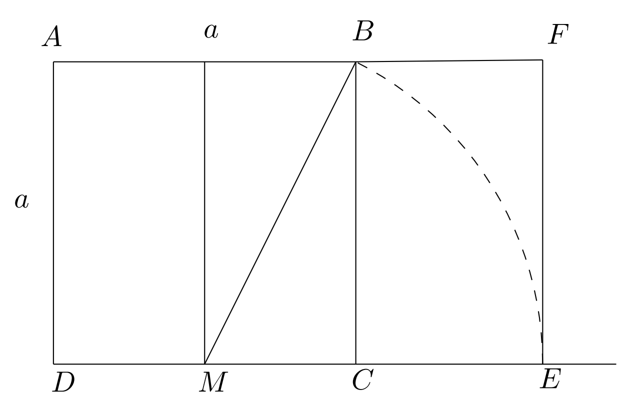


Figura 2.1.2.1

vi) Constrúyase la perpendicular al lado prolongado $\overline{DC}$ en el punto E.

El rectángulo $ADEF$ es un rectángulo de Oro. En efecto,

$$\overline{AD} = \overline{DC} = a \quad \text{y} \quad \overline{MC} = \frac{a}{2}$$

Luego:

$$\overline{MB} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a$$

y como

$$\overline{DE} = \overline{DM} + \overline{ME}; \quad \overline{DM} = \frac{a}{2}; \quad \overline{ME} = \overline{MB}$$

Así que,

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ &= a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\end{aligned}$$

Las dimensiones del rectángulo son:

$$\text{Largo: } \overline{DE} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \quad \text{Ancho: } \overline{AD} = a$$

entonces,

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = a = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

2.1.3. Relación entre los lados del Pentágono, el Hexágono y el Decágono.

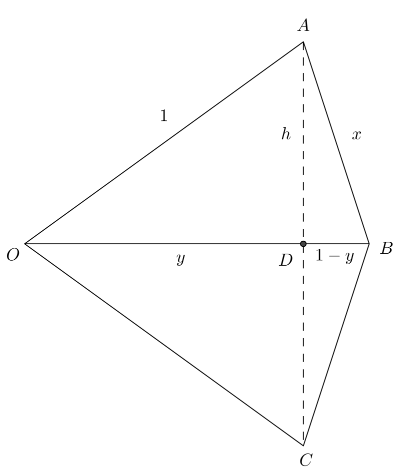


Figura 2.1.3.1

El pentágono se obtiene como ya se dijo, uniendo los vértices del decágono dejando cada vez uno de por medio. Con respecto a la figura adjunta, x es el lado del decágono, $\overline{AC}$ el lado del pentágono; si hacemos $\overline{OA} = 1$; $\overline{AD} = h$; $\overline{OD} = y$ y $\overline{DB} = 1 - y$, podemos escribir las dos relaciones siguientes:

$$1 = y^2 + h^2$$

$$x^2 = h^2 + (1-y)^2$$

Es decir que

$$h^2 = 1 - y^2 = x^2 - (1-y)^2$$

Luego:

$$1 - y^2 = x^2 - 1 + 2y - y^2 \qquad \text{, o sea} \qquad 2y = 2 - x^2$$

.

Como $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, entonces $x^2 = \dfrac{5-2\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Asi que $2y = 2 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{4-3+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y por tanto $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$; $y^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4\cdot 4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}$, luego $y^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$.

Finalmente

$$h^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \qquad \text{, es decir} \qquad h = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

El lado del pentágono regular es:

$$\overline{AC} = 2h = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Cálculos directos muestran que los lados del hexágono, el decágono y el pentágono corresponde a los lados de un triángulo rectángulo, es decir guardan la relación de pitágoras. (verificar el teorema de pitágoras)

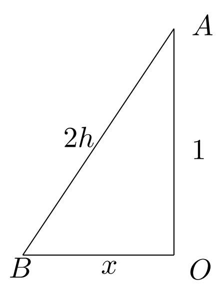


Figura 2.1.3.2

Llamando

$\overline{OA} = 1$: Lado del hexágono.
$\overline{OB} = x$: Lado del decágono
$\overline{AB} = 2h$: Lado del pentágono

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} \\ &= \frac{4+5+1-2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{10-2\sqrt{5}}{4} \\ &= (2h)^2 \end{aligned}$$

El resultado anterior proporciona un método alternativo para, en una sola construcción, hallar el lado del decágono, el pentágono y el hexágono. La construcción es como sigue:

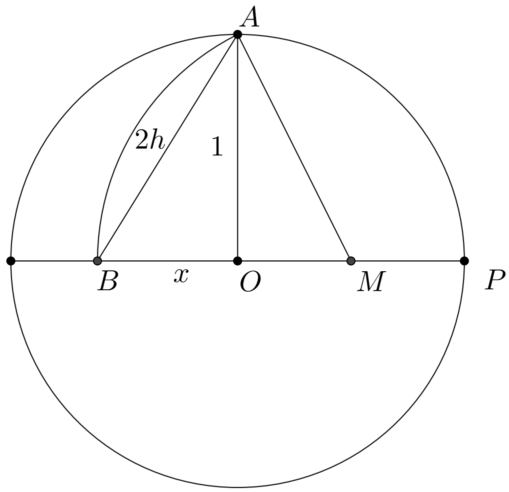


Figura 2.1.3.3

i) Trazar un círculo de radio unidad 1.

ii) Hallar el punto medio M, del radio $\overline{OP}$.

iii) Trazar el segmento $\overline{AM}$.

iv) Con centro en M y radio $\overline{AM}$ trazar un arco para determinar el punto B.

Cálculos directos muestran que, el segmento $\overline{BO} = x$ es el lado del decágono, $\overline{OA} = 1$, es el lado del hexágono y en consecuencia $\overline{AB}$ el lado del decágono. En efecto: Como $\overline{OM} = \frac{1}{2}$, entonces $\overline{AM}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Además $\overline{BM} = x + \frac{1}{2} = \overline{AM}$, entonces $x = \overline{AM} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que es el lado del decágono.

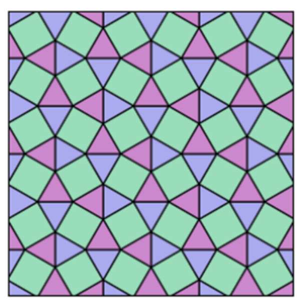
De acuerdo a los cálculos anteriores $\overline{AB} = 2h$ es el lado del Pentágono.

CAPÍTULO 3

CUADRATURAS Y TESELACIONES

3.1. Conceptos Básicos

Los términos cuadratura y teselación se usan en matemáticas con un significado muy preciso. Dada una región G cualquiera del plano, cuadrar a G es construir un cuadrado que tenga la misma área de G. El término teselación es sinónimo de recubrimiento.La teselación de una región G consiste en recubrirla con figuras más pequeñas de tal manera que no queden "huecos" y que ellas no se traslapen o sobrepongan. Son de particular interés, las teselaciones del plano con polígonos regulares del mismo tamaño.



3.2. Cuadratura de un Rectángulo

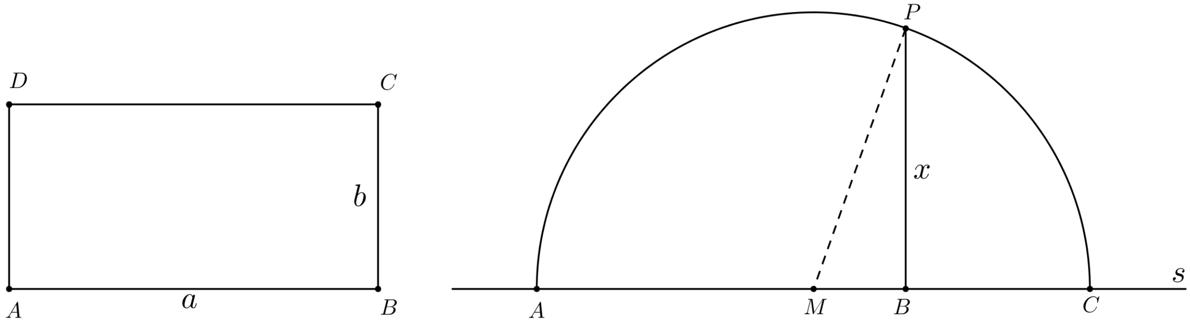


Figura 3.2.1

Dado un rectángulo $ABCD$, el cuadrado de la misma área puede obtenerse así:

i) Sobre una recta s, transportar los lados del rectángulo AB y BC, como se muestra en la Figura 3.2.1.

ii) Hallar el punto medio M del segmento AC.

iii) Con centro en M y radio AM trazar un semicirculo.

iv) Construir por el punto B una perpendicular a s para hallar el punto P de la circunferencia

v) EL segmento $\overline{BP}$ es el lado del cuadrado buscado.

En efecto:

$$\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MP} = \frac{a+b}{2}$$

Además

$$\overline{MB} = \overline{MC} - \overline{BC}$$

$$= \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{MP^2} = \overline{MB^2} + \overline{BP^2}$$

o sea,

$$\overline{BP^2} = \overline{MP^2} - \overline{MB^2}$$

$$= (\overline{MP} + \overline{MB})(\overline{MP} - \overline{MB})$$

Luego:

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = a \cdot b$$

Así que x es el lado del cuadrado de área ab.

3.3. Cuadratura de un Triángulo

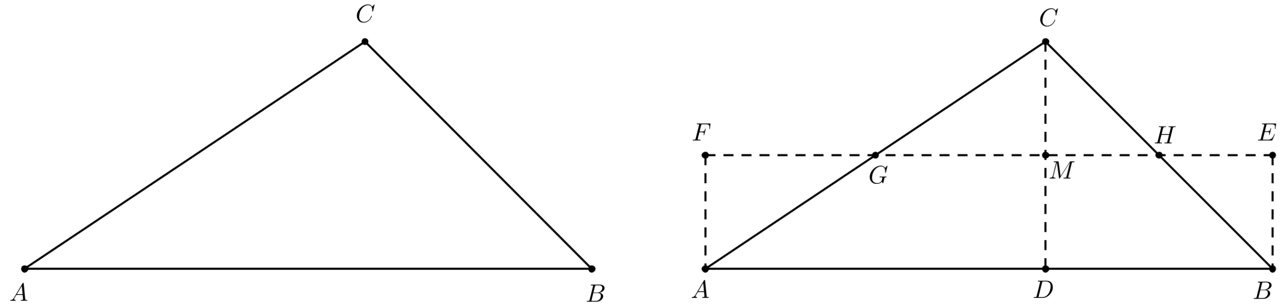


Figura 3.3.1

La cuadratura de un triángulo ABC, se obtiene, construyendo primero un rectángulo de la misma área. Esto se logra fácilmente de la siguiente manera:

i) Trácese la altura del triángulo sobre el lado AB, digamos CD.

ii) Por el punto medio de ésta altura, M, trácese una paralela al lado AB.

iii) Constrúyanse perpendiculares al lado AB en sus extremos.

iv) El rectángulo $ABEF$ tiene la misma área del triángulo.

En efecto: los triángulos AFG y CMG son congruentes y entonces tienen igual área. Lo mismo ocurre con los triángulos HEB y CMH. Luego el triángulo ABC y el rectángulo $ABEF$ tienen la misma área.

3.4. Cuadratura de dos Cuadrados

Dados dos cuadrados de lados a y b, se trata de construir otro cuadrado con área igual a la suma de las áreas de los dos anteriores.

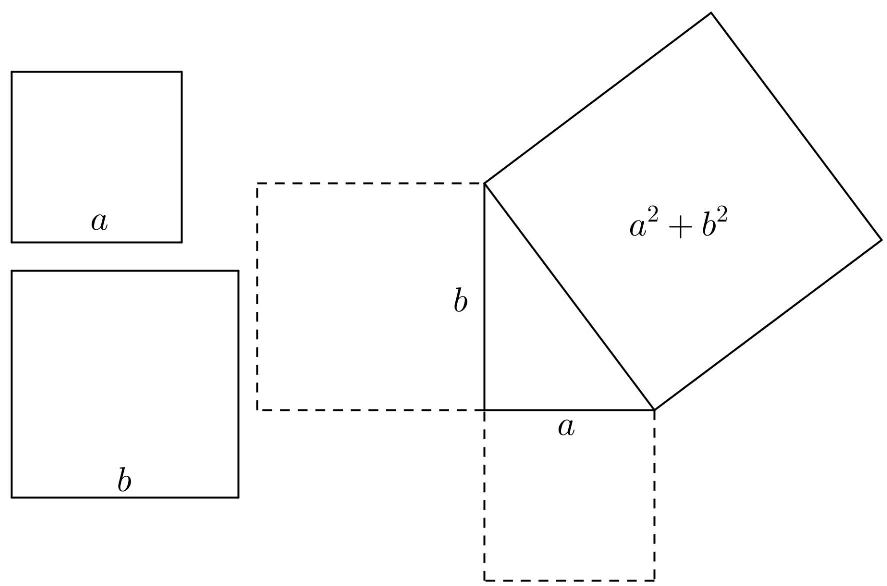


Figura 3.4.1

La forma más efectiva de hacerlo es a partir del Teorema de Pitágoras: Dados los cuadrados de lados a y b, constrúyase el triángulo rectángulo con catetos a y b. El cuadrado construido sobre la hipotenusa es el cuadrado requerido.

Otra forma de hacer la cuadratura de dos cuadrados es como sigue: sobre el cuadrado más grande (si lo hay) márquense sobre sus lados la distancia $\dfrac{a+b}{2}$ como lo indica la figura. Luego tracense las rectas AC y BD.

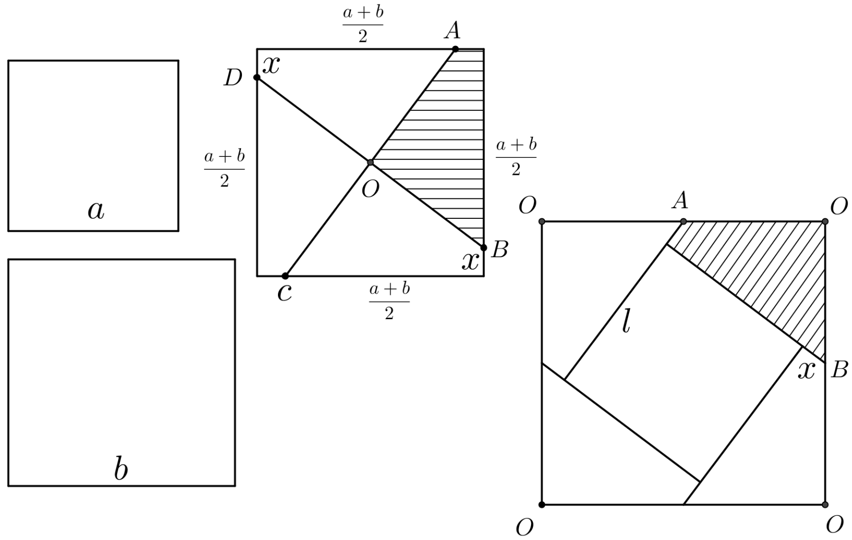


Figura 3.4.2

Al cortar el cuadrado por AC y BD se descompone en cuatro cuadriláteros congruentes con un ángulo recto en O. Al reorganizar esas piezas se forma otro cuadrado en el cual queda ubicado su centro el cuadrado menor.El cuadrado formado al reorganizar los cuadrilateros equivale en área a la suma de los dos iniciales.

En efecto el lado de dicho cuadrado es: $l = \dfrac{a+b}{2} - x$, pero $x = b - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$. Luego: $l = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = a$.

Vale la pena mencionar que cuando los dos cuadrados son iguales, los cortes producen cuatro triángulos rectángulos con los cuales fácilmente se construye el cuadrado con área el doble.

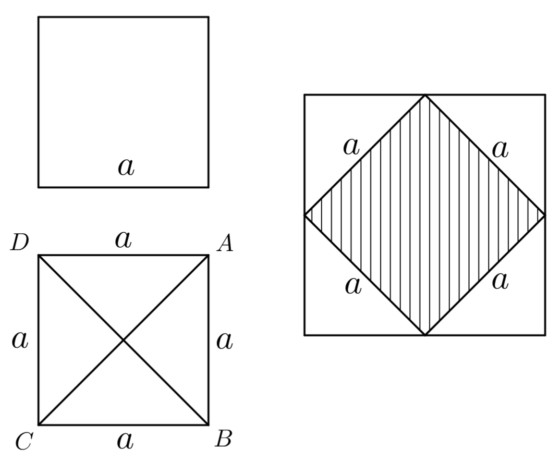


Figura 3.4.3

3.5. Cuadratura de un Trapecio

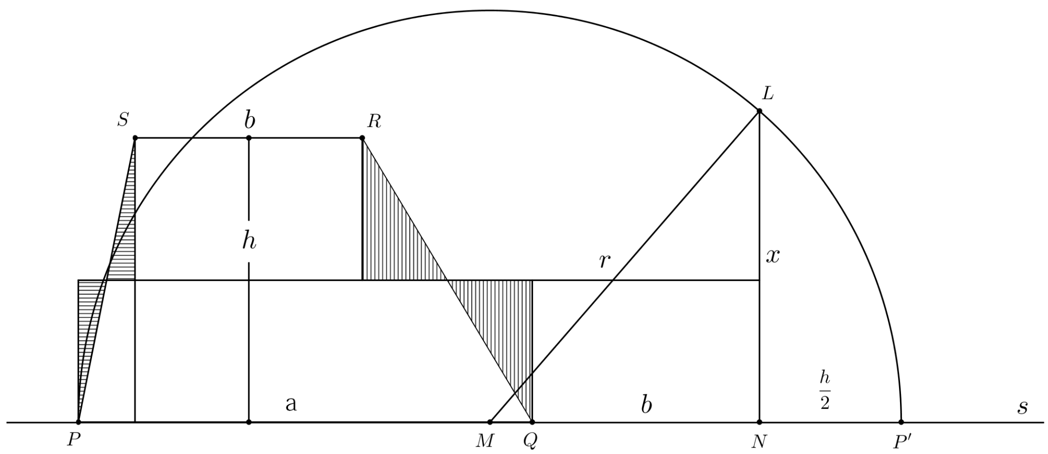


Figura 3.5.1

Dado un trapecio $PQRS$, de base mayor $a = \overline{PQ}$, base menor $b = \overline{SR}$ y altura h, su cuadratura se construye así:

i) Sobre una recta s, transporte el segmento $\overline{PQ} = a$, a continuación transporte el segmento $\overline{SR} = b$ y a continuación el segmento $\dfrac{h}{2}$, para obtener el segmento $\overline{PP'}$.

ii) Encuentre el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, llamémoslo M.

iii) Con centro en M y radio MP, trace un semicírculo y luego construya una perpendicular en el punto N, determinando así el punto L, intersección entre el semicirculo y la perpendicular.

iv) El segmento LN, es el lado del cuadrado buscado.

En efecto: El radio r del semicírculo trazado en *iii)* es

$$r = \frac{a + b + \frac{h}{2}}{2}$$

Como el triángulo MNL es rectángulo, entonces:

$$\begin{aligned}
r^2 &= \overline{MN}^2 + x^2 \\
\left(\frac{a+b+\frac{h}{2}}{2}\right)^2 &= x^2 + \left(\frac{a+b+\frac{h}{2}}{2} - \frac{h}{2}\right)^2 \\
&= x^2 + \left(\frac{a+b+\frac{h}{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{h}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b+\frac{h}{2}}{2}\right) + \frac{h^2}{4}
\end{aligned}$$

Luego

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 2\left(\frac{h}{2}\right)\left(\frac{a+b+\frac{h}{2}}{2}\right) - \frac{h^2}{4} \\
&= \frac{a+b}{2}\cdot h + \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \\
&= \frac{a+b}{2}\cdot h
\end{aligned}
$$

Así que x es el lado del cuadrado buscado.

3.6. Cuadratura de Polígonos Regulares

Ilustramos la cuadratura de polígonos regulares exhibiendo la cuadratura del hexágono regular.

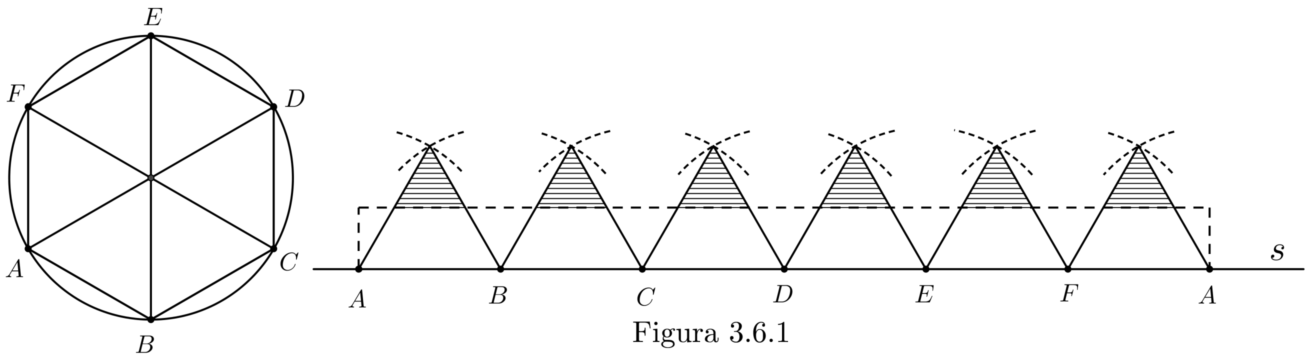


Figura 3.6.1

Dado el hexágono regular $ABCDEF$, su cuadratura se construye así;

i) Sobre una recta s, transportamos cada uno de los seis triángulos equiláteros en la forma mostrada en la figura adjunta.

ii) Construya un rectángulo, tomando como base el perímetro del hexágono y como altura la mitad de la altura de cada triángulo equilátero.

iii) El rectángulo construido antes tiene la misma área del polígono, como puede verificarse facilmente.

iv) Construir el cuadrado correspondiente al rectángulo obtenido antes.

3.7. Las Lúnulas de Hipócrates

Hipócrates nació en Cos en al año 460 antes de Cristo y era hijo de Heráclides; estudió en Atenas con el sofista Gorgias; recorrió toda Grecia y viajó por Asia y África y murió en la ciudad de Larisa a los 86 años de edad. No se conoce mucho sobre la vida de Hipócrates, pero sí muchas anécdotas atribuidas a él. Hipócrates es más conocido en el mundo de la medicina por sus aforismos y por el llamado “Juramento Hipocrático”.

Como se sabe, la cuadratura del círculo, fue tema de interés de muchos científicos griegos. Hipócrates ideó varios tipos de figuras planas llamados Lúnulas que están fuertemente emparentadas con el círculo ya que son figuras limitadas por arcos de circunferencia. De las Lúnulas ideadas por Hipócrates algunas son cuadrables y otras no. Hipócrates en su trabajo de cuadrar algunas lúnulas, al igual que otros científicos griegos, hizo uso de los siguientes principios:

1. Las cosas que son iguales a una misma cosa son también iguales unas a otras.
2. Si se añaden igualdades a igualdades, los totales son iguales.
3. Si se substraen igualdades a igualdades los restos son iguales.
4. Las cosas que coinciden con otra cosa son iguales unas a otras.
5. El todo es mayor que la parte.

3.7.1. Círculos, Sectores y Segmentos Circulares

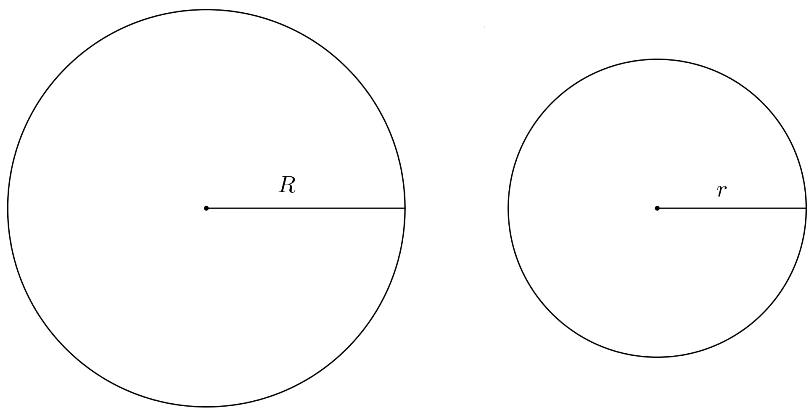


Figura 3.7.1.1

Dados dos círculos de radios R y r, la razón entre sus áreas es la razón entre los cuadrados de sus respectivos radios. En efecto;

$$\text{Área del círculo de Radio } R = \pi R^2.$$
$$\text{Área del círculo de Radio } r = \pi r^2$$

Luego;

$$\frac{\text{Área del círculo de Radio } R}{\text{Área del círculo de radio } r} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2}$$

Es inmediato que el cociente, entre las áreas también es el cociente entre los cuadrados de los respectivos diámetros.

El resultado anterior, también es válido para las áreas de los sectores circulares semejantes y para los segmentos circulares semejantes. Dos sectores circulares, son semejantes si corresponden a un mismo ángulo central θ.

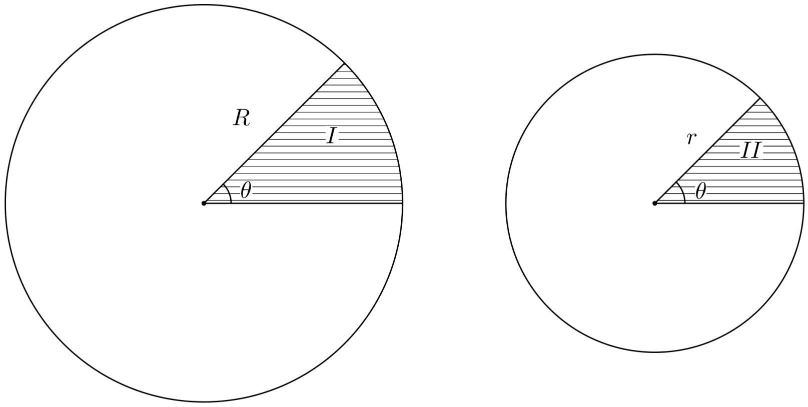


Figura 3.7.1.2

Área del sector circular $I = \dfrac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \theta = \dfrac{1}{2} R^2 \theta$

Área del sector circular$II = \dfrac{\pi r^2}{2\pi} \cdot \theta = \dfrac{1}{2} r^2 \theta$

Luego:

$$\frac{\text{Área del sector circular } I}{\text{Área del sector circular } II} = \frac{\frac{1}{2} R^2 \theta}{\frac{1}{2} r^2 \theta} = \frac{R^2}{r^2}$$

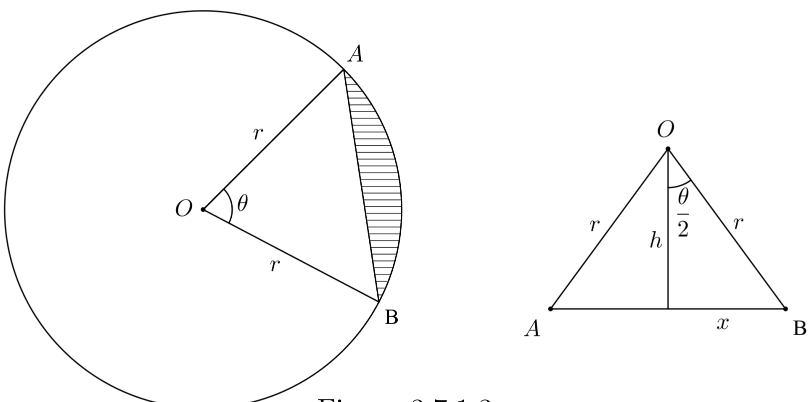


Figura 3.7.1.3

Refiriéndonos a la Figura 3.7.1.3 para hallar el área del segmento circular de base AB, procedemos así:
Calculamos el área del triángulo isósceles OAB:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{x}{r} \text{ ó } x = r \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{h}{r} \text{ ó } h = r \cos \frac{\theta}{2}$$

Luego: $\text{Área del triángulo } OAB = \; x \cdot h$

$$= \; r \sin \frac{\theta}{2} \cdot r \cos \frac{\theta}{2}$$

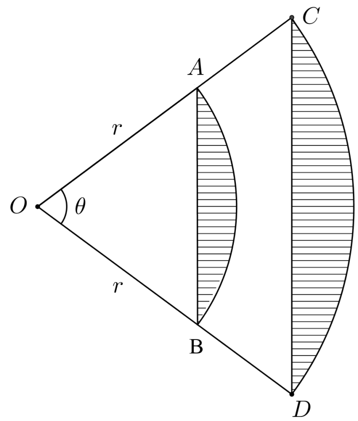
$$= \; \frac{r^2}{2} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{r^2}{2} \cdot \sin\theta$$

Entonces el área del segmento circular de base AB es:

$$\begin{pmatrix}\text{Área del segmento}\\ \text{circular de base AB}\end{pmatrix} = \Big(\text{Área del sector circular correspondiente a } \theta\Big) - \Big(\text{Área del triángulo } OAB\Big)$$
$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{r^2}{2}\cdot\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$

Si consideramos ahora segmentos circulares semejantes obtenemos:



Si tomamos $OC = R$ y $OA = r$, entonces:

$$\begin{pmatrix}\text{Área del sector circular}\\ \text{de base } CD\end{pmatrix} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$$
$$\begin{pmatrix}\text{Área del sector circular}\\ \text{de base } AB\end{pmatrix} = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$

Figura 3.7.1.4

Luego el cociente de las áreas es:

$$\frac{\frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)}{\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)} = \frac{\frac{1}{2}R^2}{\frac{1}{2}r^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

3.7.2. Cuadratura de algunas Lúnulas

La Lúnula más elemental ideada por Hipócrates es la construida tomando como base un cuadrado. Un arco de la Lúnula es el semicírculo con diámetro la diagonal del cuadrado; el otro arco de la Lúnula es un trozo de círculo de radio el lado del cuadrado.

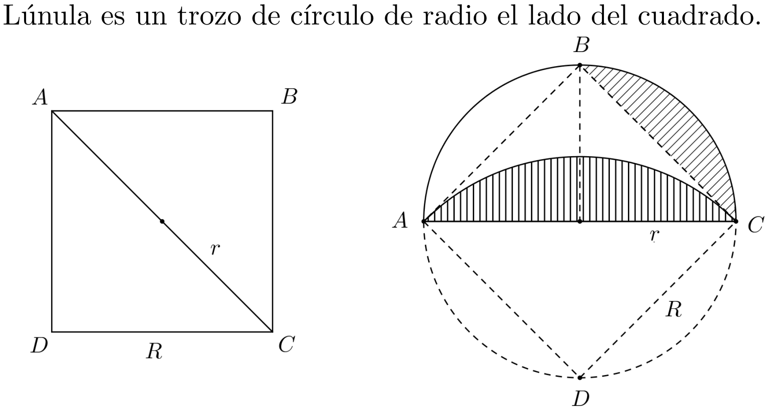


Figura 3.7.2.1

La razón entre las áreas de los círculos de radio R y r es $\dfrac{R^2}{r^2}$. Como R es el lado del cuadrado y $2r$ su diagonal entonces $(2r)^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, o sea que $R^2 = 2r^2$. La razón $\dfrac{R^2}{r^2}$ es entonces igual a 2: El área del circulo de radio R es el doble del área del círculo de radio r. Los segmentos circulares de base AC (y radio R) y el de base BC (y radio r) son semejantes, pues ambos corresponden a segmentos circulares de 90°, luego la razón entre sus áreas también es 2:

$$\frac{\text{Área segmento circular con base } AC}{\text{Área segmento circular con base } BC} = 2,$$

es decir,

$$2 \cdot (\text{ Área segmento circular con base } BC) = \text{ Área segmento circular con base } AC.$$

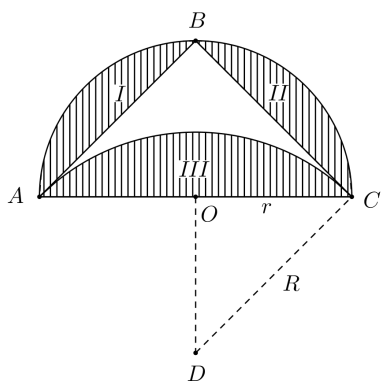


Figura 3.7.2.2

De lo anterior se deduce que la suma de los segmentos circulares I y II equivale al área del segmento circular III. En las condiciones anteriores, la cuadratura de la Lúnula mencionada es inmediata:

Si del semicírculo de radio r se retiran los segmentos circulares$I$ y II queda el triángulo ABC.

Si del semicírculo de radio r se retira el segmento circular III queda la Lúnula.

Como las cantidades retiradas en ambos casos son iguales, los restos son iguales. Luego el área del triángulo y de la Lúnula son iguales. Como el triángulo es cuadrable, la Lúnula también lo es.

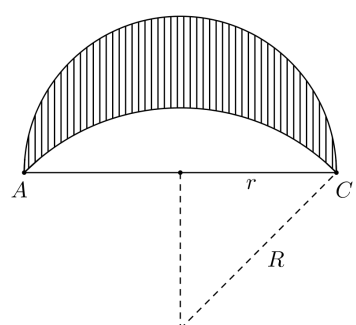


Figura 3.7.2.3

3.7.3. Una Generalización del Teorema de Pitágoras

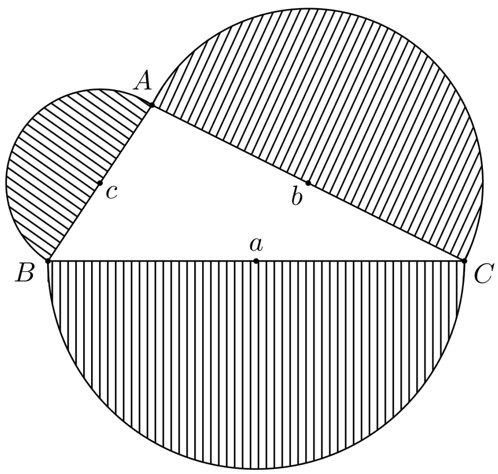


Figura 3.7.3.1

Dado el triángulo rectángulo BAC, con ángulo recto en A, el semicírculo construido sobre la hipotenusa BC, equivale a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos AC y AB.

Llamaremos:

$C(d = a)$: Área del círculo con diámetro a.
$C(d = b)$: Área del círculo con diámetro b.
$C(d = c)$: Área del círculo con diámetro c.

Como la razón entre las áreas de dos círculos equivale a la razón entre los cuadrados de sus diámetros podemos escribir:

$$\frac{C(d=c)}{C(d=a)} = \frac{c^2}{a^2} \qquad y \qquad \frac{C(d=b)}{C(d=a)} = \frac{b^2}{a^2}$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos:

$$\frac{C(d=c)}{C(d=a)} + \frac{C(d=b)}{C(d=a)} = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2};$$

o sea,

$$\frac{C(d=c) + C(d=b)}{C(d=a)} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Como el triángulo BAC es rectángulo entonces $a^2 = b^2 + c^2$ y en consecuencia

$$\frac{C(d=c) + C(d=b)}{C(d=a)} = 1.$$

Luego:

$$C(d=c) + C(d=b) = C(d=a)$$

así que:

$$\frac{1}{2}C(d=c) + \frac{1}{2}C(d=b) = \frac{1}{2}C(d=a)$$

.

3.7.4. Un Problema Clásico de Lúnulas

En la figura 3.7.4.1,dado el triángulo rectángulo BAC, con ángulo recto en A, su circulo circunscrito y los semicírculos sobre los catetos, demostrar que la suma de las Lúnulas equivale al área del triángulo.

En efecto,se sabe que el área del semicírculo con diámetro a equivale a la suma de las áreas de los semicírculos con diámetros b y c.

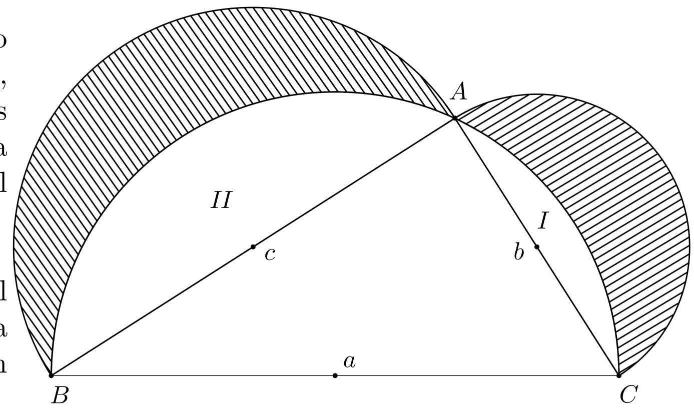


Figura 3.7.4.1

Si del semicírculo con diámetro a quitamos los segmentos circulares I y II queda el triángulo BAC. Si del medio cículo de diámetro c quitamos el segmento circular II queda una Lúnula, y, si del semicírculo de diámetro b, quitamos el segmento circular I, queda la otra Lúnula. Como en ambos casos lo quitado es igual, los restos son iguales. Luego las dos Lúnulas juntas equivalen al triángulo. En símbolos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C(d=a) &= \frac{1}{2}C(d=c)+\frac{1}{2}C(d=b)\\ \frac{1}{2}C(d=a)-(I+II) &= \frac{1}{2}C(d=c)-II+\frac{1}{2}C(d=b)-I\end{aligned}$$

Luego: $\left[\text{Área del triángulo } ABC\right] = \left[\begin{array}{c}\text{Área de la}\\ \text{Lúnula sobre } BA\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c}\text{Área de la}\\ \text{Lúnula sobre } AC\end{array}\right]$

3.7.5. Un Problema Adicional

Dado un punto C entre A y B y los semicírculos sobre AC, CB y AB como se muestra en la Figura 3.7.5.1 y si CD es perpendicular a AB, entonces el área sombreada es equivalente al área del círculo con diámetro CD.

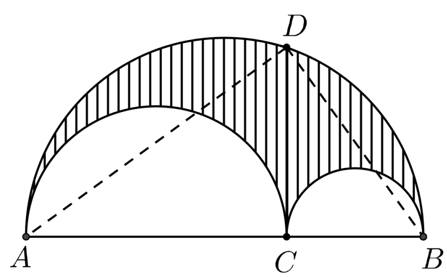


Figura 3.7.5.1

En efecto, al igual que antes llamamos:

$C(d=AB)$: Área del círculo con diámetro AB.
$C(d=AC)$: Área del círculo con diámetro AC.
$C(d=DC)$: Área del círculo con diámetro DC.
y así sucesivamente para todos los círculos.

El área sombreada es:

$$S = \frac{1}{2}C(d = AB) - \frac{1}{2}C(d = AC) - \frac{1}{2}C(d = BC)$$

.
Como los triángulos

$$ADB, ADC \qquad y \qquad CDB$$

Son rectángulos podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C(d = AD) &= \frac{1}{2}C(d = AC) + \frac{1}{2}C(d = CD) \\ \frac{1}{2}C(d = BD) &= \frac{1}{2}C(d = BC) + \frac{1}{2}C(d = CD) \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las igualdades anteriores se obtiene:

$$\frac{1}{2}C(d = AD) + \frac{1}{2}C(d = BD) = \frac{1}{2}C(d = AC) + \frac{1}{2}C(d = BC) + C(d = CD)$$

Como

$$\frac{1}{2}C(d = AD) + \frac{1}{2}C(d = BD) = \frac{1}{2}C(d = AB)$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}C(d = AB) = \frac{1}{2}C(d = AC) + \frac{1}{2}C(d = BC) + C(d = CD)$$

Luego:

$$S = \frac{1}{2}C(d = AB) - \frac{1}{2}C(d = AC) - \frac{1}{2}C(d = BC) = C(d = CD)$$

Así que el área sombreada S equivale al área del círculo con diámetro CD.

CONCLUSIONES

La elaboración de este Trabajo de Grado nos permite formular las siguientes conclusiones:

1. Las construcciones con regla y compás son fundamentales para el estudio no solo de la Geometría si no también de la Trigonometría y el Cálculo.

2. El trabajo pone de presente la posibilidad de llevar al aula de clase, en nuestro ejercicio profesional, algunas construcciones con Regla y Compás dentro de las actividades curriculares planteadas para la Educación Básica en Geometría Elemental.

3. Al igual que las construcciones básicas con Regla y Compás, el tema de las cuadraturas puede ser llevado al aula de clase como una aplicación inmediata de las mencionadas construcciones.

4. El tema de la cuadratura de las Lúnulas de Hipócrates da elementos muy eficientes para resolver geométricamente problemas relacionados con áreas y además para generalizar algunos resultados como el Teorema de Pitágoras.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Asger AABOE, Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo. Biblioteca de Matemáticas Contemporanea. Ed. Norma.

[2] Augusto Silva Silva, Construcciones con Regla y Compás. Taller I Coloquio Surcolombiano de Licenciatura en Matemáticas. U. Surcolombiana. Mayo de 2016

[3] C. H. EDWARS JR, The Historical Development of the Calculus. Ed. Springer. Verlaq. NEW yor, 1979.

[4] CHARLES H. LEHMANN, Geometría Analítica. Ed. Limusa, México 2007.

[5] HOWARD E. TAYLOR y THOMAS L. WADE, University Calculus and Subsets of the Plane. Ed. Jonh Wiley and sons, inc. New york, 1965.

[6] Ingrid Tatiana Lugo y otro. Construcciones Neusis en Geometría. trabajo de grado. Universidad Surcolombiana.Diciembre 2016.

[7] Stanley R. Clemens, Geometría, Ed. Pearson Educación, Mexico, 1998.