Neiva, 23 de mayo de 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Cristian Andrés Grijalva Ninco, con C.C. No. 7732983,

Cristian Mauricio Valenzuela Esquivel, con C.C. No. 1075286990,

_______________, con C.C. No. _______________,

_______________, con C.C. No. _______________,

autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado Cristian Andrés Grijalva Ninco y Cristian Mauricio Valenzuela Esquivel

titulado Divisibilidad Y Aplicaciones

presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de

Licenciatura En Matemáticas;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:________________________

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:___ Cristian Andrés Grijalva Ninco ___

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:____________________________

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:____________________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: DIVISIBILIDAD Y APLICACIONES

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
GRIJALVA NINCO	CRISTIAN ANDRÉS
VALENZUELA ESQUIVEL	CRISTIAN MAURICIO

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
PENAGOS	MAURICIO

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
MOLANO CUELLAR	MARIO

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD: **EDUCACIÓN**

PROGRAMA O POSGRADO: MATEMÁTICAS

CIUDAD: NEIVA **AÑO DE PRESENTACIÓN: 2019** **NÚMERO DE PÁGINAS:**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas___ Fotografías__X_ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general__X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: LATEX Y ADOBE ACROBAT READER

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	Divisibilidad	Divisibility	6.	Enteros	Whole
2.	Euclides	Euclid	7.	Teorema	Theorem
3.	Algoritmo	Algorithm	8.	Máximo	Maximum
4.	Primos	Cousins	9.	Mínimo	Minimum
5.	Aritmética	Arithmetic	10.	Divisores	Dividers

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

La Educación Matemática como disciplina científica ha sido objeto de innumerables esfuerzos de diversos investigadores de talla internacional para dar respuesta a un mejoramiento de los procesos de enseñanza, como también de aprendizaje de las matemáticas escolares.
De este modo, con el presente trabajo de grado se busca realizar una recopilación de la teoría de números, específicamente en el tema de divisibilidad. Teniendo en cuenta otros subtemas como números enteros, algoritmo de la división y sus propiedades, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, aplicaciones $(m.c.m.$ y $m.c.d)$, números primos y el teorema fundamental de la aritmética. Se incluye secuencias didácticas que se podrán aplicar a estudiantes de grado sexto, para poder suplir las dificultades que presentan, y de esta manera generar en los estudiantes una postura crítica y reflexiva al momento de pensar, proponer, actuar y argumentar.
El presente trabajo de grado se basa en los apuntes de clase del docente Augusto Silva Silva del programa de Licenciatura en Matemáticas y el libro “Enfoques Sistémicos de las Matemáticas Escolares” del doctor Mauro Montealegre Cárdenas de la Universidad Surcolombiana, tiene como referente teórico el libro “Competencias Básicas en Matemáticas” del autor Jaime Martínez Montero que trabaja la teoría de números, complementando con las secuencias didácticas aplicables a estudiantes del grado sexto.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The mathematics education as a scientific discipline has been the object of innumerable efforts of several international researchers in response to an improvement of the processes of teaching, as well as of learning of schools mathematics.

In this way, this research study, seeks to make a compilation of number theory specifically on the issue of severability. Taking into account other sub-items as integers, the division algorithms and their properties, the least common multiple, the greatest common divisor, applications of LCM and GCD, primes and the fundamental theorem of arithmetic. Is included didactic sequences that may be applied to sixth graders, to overcome the difficulties and in that way, generate a critical and reflexive position, when the students have to think, propose, act, and argue.

This study is based on Augusto Silva's class notes. Mr. Silva holds a Bachelor in Education in Mathematics, and it is also based on the book “Approaches to Sistemicos of Mathematics School” by Mauro Montealegre-Surcolombiana University, and also it is based on the book “Basics Mathematics Skills” by Jaime Martinez who works the theory of numbers, the didactic sequence in order to be utilized by sixth grade students.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Mauricio Penagos

Firma:

Nombre Jurado: Augusto Silva Silva

Firma:

Nombre Jurado: Mercy Lili Peña Morales

Firma:

Divisibilidad y aplicaciones

Por:

CRISTIAN MAURICIO VALENZUELA ESQUIVEL
Código 20121110222

CRISTIAN ANDRÉS GRIJALVA NINCO
Código 2005101681

Asesor:

Profesor MARIO MOLANO CUÉLLAR

Universidad Surcolombiana
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva — Huila
Mayo de 2019

Agradecimientos

Agradecemos a nuestras familias que nos brindan amor y apoyo incondicional para cumplir nuestros sueños, a todas las personas que participan en nuestro desarrollo vital, social, académico, pedagógico e investigativo, en especial a quienes nos acompañaron en este proceso de descubrir desde las matemáticas, como una necesidad para aportar a la superación de las dificultades que enfrentamos en la sociedad actual. También al profesor Mario Molano por el gran apoyo que ha dado en la elaboración y acompañamiento de nuestras iniciativas pedagógicas ampliando las posibilidades desde sus saberes académicos. Agradecemos al profesor Augusto Silva Silva por su gran aporte con sus apuntes de Teoría de Números y toda su enseñanza en la licenciatura. De la misma manera, queremos agradecer al docente Mauricio Penagos por sus iniciativas pedagógicas, y su asesoría en esta formación académica.

Índice general

Resumen

La Educación Matemática como disciplina científica ha sido objeto de innumerables esfuerzos de diversos investigadores de talla internacional para dar respuesta a un mejoramiento de los procesos de enseñanza, como también de aprendizaje de las matemáticas escolares.

De este modo, con el presente trabajo de grado se busca realizar una recopilación de la teoría de números, específicamente en el tema de divisibilidad. Teniendo en cuenta otros subtemas como números enteros, algoritmo de la división y sus propiedades, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, aplicaciones (m.c.m. y m.c.d.) y números primos y el teorema fundamental de la aritmética. Se incluye secuencias didácticas que se podrán aplicar a estudiantes de grado sexto, para poder suplir las dificultades que presentan, y de esta manera generar en los estudiantes una postura crítica y reflexiva al momento de pensar, proponer, actuar y argumentar.

El presente trabajo de grado se basa en los apuntes de clase del docente Augusto Silva Silva del programa de Licenciatura en Matemáticas y el libro "Enfoques Sistémicos de las Matemáticas Escolares" del doctor Mauro Montealegre Cárdenas de la Universidad Surcolombiana, tiene como referente teórico el libro "Competencias Básicas en Matemáticas" del autor Jaime Martínez Montero que trabaja la teoría de números, complementando con las secuencias didácticas aplicables a estudiantes del grado sexto.

Abstract

The mathematics education as a scientific discipline has been the object of innumerable efforts of several international researchers in response to an improvement of the processes of teaching, as well as of learning of schools mathematics.

In this way, this research study, seeks to make a compilation of number theory specifically on the issue of severability. Taking into account other sub-items as integers, the division algorithms and their properties, the least common multiple, the greatest common divisor, applications of LCM and GCD, primes and the fundamental theorem of arithmetic. Is included didactic sequences that may be applied to sixth graders, to overcome the difficulties and in that way, generate a critical and reflexive position, when the students have to think, propose, act, and argue.

This study is based on Augusto Silva's class notes. Mr. Silva holds a Bachelor in Education in Mathematics, and it is also based on the book "Approaches to Sistemicos of Mathematics School" by Mauro Montealegre-Surcolombiana University, and also it is based on the book "Basics Mathematics Skills" by Jaime Martinez who works the theory of numbers, the didactic sequence in order to be utilized by sixth grade students.

Capítulo 1

Contextualización

1.1. Estado del arte

Urge la necesidad de generar espacios dinámicos y pedagógicos donde se relacione de manera armónica las matemáticas con los estudiantes de educación básica y media, por lo tanto esta investigación se realiza en base a tres experiencias significativas que apuntan a la construcción de modelos didácticos alternativos a los modelos clásicos implementados actualmente en las aulas escolares evidenciando las fallas en términos metodológicos, que entorpecen el desarrollo cognitivo del ser humano; para ello se reseña el proceso dinámico empleado en Cartago valle del Cauca por dos licenciadas que permiten manejar criterios de enseñanza para el mínimo común múltiplo y máximo común divisor de manera dinámica por medio del trabajo grupal y del Juego.

De igual manera se reflexiona acerca de los criterios de divisibilidad empleados por una investigación realizada por la Universidad Nacional y la licenciatura en matemáticas la cual realizó una consulta histórica acerca de los criterios y algunas definiciones y teoremas relacionados con divisibilidad, pues es vital para un profesor de Matemáticas no solo conocer matemáticas sino también sobre las matemáticas.

Por último, se resalta una experiencia internacional en la universidad de Alicante donde se analiza la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, donde direcciona su investigación a la comprensión por parte de estudiantes de educación secundaria sobre divisibilidad en los conjuntos de números naturales, centrándose en las formas de construir y conocer estos conceptos en un rango de edad de 12 a 17 años.

Gran parte de los docentes de matemáticas han coincidido que el aprendizaje de los algoritmos en las operaciones y aplicaciones en los estudiantes ha sido de mucha dificultad, ya que para ellos es más fácil resolver ejercicios específicos y no aquellos que tienen que generalizar los conceptos ya adquiridos; uno moviliza en todo momento recursos para hacer frente a situaciones naturalmente complejas, pero no piensa en descomponer dichos recursos ni a preguntarse qué recursos está movilizando (Roegiers, 2006).

La Teoría de Números ha ocupado una posición prominente en el estudio de la Aritmética, del Álgebra y de la Geometría. La Teoría de Números abarca un importante lugar en el ámbito de las matemáticas, y podemos destacar el estudio de la estructura multiplicativa y de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Hilbert señala que tanto los algebristas como los matemáticos dedicados a la Teoría de Números lo que hacen es manejar la misma estructura subyacente. Desde la perspectiva de esta estructura se vislumbra con más claridad el desarrollo a lo largo de la historia de los conceptos relacionados con la divisibilidad. Es decir, lo que hoy llamamos Teoría de Números tuvo lugar con los pitagóricos, que influyeron en muchos filósofos, pero sobre todo en Euclides. Precisamente, en los libros VII, VIII y IX de los Elementos de Geometría de Euclides, donde trabaja definiciones de la aritmética tratando ya la Teoría de números y apareciendo los conceptos de divisibilidad, y sorprendentemente, llega hasta nuestros días el algoritmo que lleva su nombre para calcular el máximo común divisor. Por tanto, lo esencial de la unidad didáctica que se plantea está basada en la matemática clásica.

En consecuencia, es importante mencionar que la pretensión de la matemática es que todos los estudiantes logren alcanzar los objetivos propuestos y esté preparado para incorporarse a la vida adulta, atendiendo siempre a la variedad, tendencias o características que hay en ella, en pocas palabras a la pluralidad.

Elementos, por un lado los criterios de enseñanza del mínimo común múltiplo y máximo común divisor, investigación realizada en una Institución Educativa de Cartago, valle del Cauca, como ejercicio didáctico por parte de las licenciadas Daniela Zapata y Veronica Orozco, las cuales se plantearon una secuencia didáctica que permitiera acercar al estudiante a las matemáticas y a sus procesos, para ello la observación fue fundamental pues La investigación se desarrolló en tres fases, la primera fue la realización de una entrevista para conocer las ideas iniciales de la docente y la observación de cinco sus sesiones de clase, con el fin de identificar la metodología pedagógica y didáctica de la docente y saber si es responsabilidad del educador las dificultades que suelen presentarse al momento de la enseñanza de la matemática.

En este sentido la etnometodología fue tomada como estrategia de trazabilidad para la construcción de un modelo didáctico para la enseñanza de los criterios ya mencionados, la cual consiste en caracterizar el comportamiento o fenómeno en un individuo o grupo social, de acuerdo con un rol desempeñado; en este caso el docente de grado 5° y sus prácticas docentes para la enseñanza de la matemática.

Durante la investigación se observó que la docente no utilizaba material didáctico que le permitiera a los estudiantes interactuar para avanzar en la construcción del conocimiento de forma actica, se limitaba a una conversación con los estudiantes, en donde los procesos se registran en el tablero y luego deben ser copiados en sus cuadernos. Sumado a lo anterior se denoto que la docente no hizo una preparación previa de la clase y no demostró una apropiación para generar interés en los estudiantes sobre el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. Aunque los estudiantes utilizaron el material proporcionado, la docente no los motivo, ni involucró para que ellos interactuaran con él. Desconociendo que el material además era un recurso que podía facilitar la búsqueda de estrategias para la solución de la situación planteada.

Finalmente se pudo observar que durante la implementación de la unidad didáctica, la docente evidenció, aparentemente, que al utilizar material didáctico para el desarrollo del conocimiento, hubo participación activa de los estudiantes, en donde ellos interactúan y hacen parte de la socialización, resolviendo inquietudes y generando otros cuestionamientos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se debe desarrollar la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y el mundo laboral, y dejar entre ver que las matemáticas y sus procesos hacen parte de la complejidad del diario vivir.

De otra manera, un algoritmo permite obtener resultados sin tener que justificar los pasos dados; exige rigor, orden, concentración y práctica; puede ser popularizado ya que no es necesario comprender por qué funciona, basta con saber cómo funciona. Desde un punto de vista matemático Bermejo, Betancourt y Vela (2009) definen algoritmo cómo un "método sistemático para resolver operaciones numéricas, que consta de un conjunto finito de pasos guiados por unas reglas que nos permiten economizar el cálculo y llegar a un resultado exacto" (p. 194).

Una aproximación conceptual de Algoritmo, según Fernández (2005), "se identifica en el conjunto de una secuencia de pasos operativos para la realización de una tarea o la resolución de un problema" (p. 32), en su texto "Avatares y Estereotipos", sobre la enseñanza de los algoritmos en las matemáticas. Si bien esta definición resulta sencilla, podemos encontrar otras que completan su significado: . . . serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades), en un número finito de etapas, a cierto resultado, y esto, independientemente a los datos. (Buendía, Fernández y Rico, 1990, p. 51) . . . sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a una resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase. (Ifrah, 1998, p. 1616 citado en Gallardo, 2004). De esta manera analizamos la teoría de números, en especial la divisibilidad, una herramienta útil, práctica y necesaria para el estudiante.

Para este problema, ha existido una alianza desde hace algunos años y son los proyectos de aula, estos han formado parte de las propuestas didácticas de la pedagogía por proyectos que según Kilpatrick quien en 1918 define el proyecto como "Una entusiasta propuesta de acción para desarrollar en un ambiente social y tiene que servir para mejorar la calidad de vida de las personas"(p.320) A partir de esta primera idea y del gran impacto, se ha ido ejecutando diferentes proyectos desde las diferentes áreas del saber, cumpliendo un objetivo dentro de la sociedad y entre ellas, se resalta la secuencia didáctica como proceso de enseñanza y aprendizaje que durante su desarrollo permite al docente realizar una investigación, diseño de actividades y despliegue de contenido que es abordado a profundidad.

Por ello, se debe valorar la secuencia didáctica como una estrategia del docente ejerciendo una participación activa y aprovechando de esta manera el contenido específico de la visibilidad en las matemáticas mejorando la calidad de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. En conclusión, encontramos la secuencia didáctica como una ruta de acciones diseñada para alcanzar los propósitos de enseñanza, una opción para la organización y sistematización de la intervención del docente en el aula, en tanto que permite la revisión y reflexión del quehacer didáctico del maestro buscando plantear criterios que le permitan tomar decisiones en la reconstrucción y diseño de situaciones de enseñanza.

1.2. Formulación y descripción del problema

Se ha observado que los estudiantes han tenido mucha dificultad en el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones, debido a que el problema de ellos es realizar ejercicios donde tienen que generalizar sus conocimientos y es por eso que les resulta con mayor facilidad resolver aquellos que son específicos en los temas que están desarrollando en el momento. Apoyándose en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), propone en el documento Lineamientos Curriculares la inclusión de la modelación en el aula de clases, en el cual se sugiere el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la implementación de los cuatros procesos, (1) la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, (2) el razonamiento, (3) la resolución y planteamiento de problemas, y (4) la comunicación (MEN, 1998, p. 74).

Se plantea que los elementos algorítmicos juegan un papel elemental en el aprendizaje y son un medio que facilita el estudio de muchos temas importantes como por ejemplo la división. Sin embargo, los algoritmos por sí solos no aportan en el desarrollo matemático de un estudiante si el uso de ellos no se complementa con otros componentes para que exista una mejor asimilación y aplicación de estos (Itzcovich Horacio y Broitman Claudia, 2001). Con los algoritmos se propende por la formación de hábitos y aptitudes para el pensamiento de los alumnos, con el fin de que los estudiantes pasen de un aprendizaje formal a la auto conducción de su pensamiento y esto se logra cuando ellos manejan y diseñan de manera autónoma sus propios algoritmos.

De este modo, en el proceso de aprendizaje, el sujeto adquiere información de manera sistemática y organizada y no solo de manera memorística, sino que construye conocimiento (Díaz, 1998:18). En este proceso se pueden identificar claramente tres factores que son determinantes en el aprendizaje (Iafrancesco, 2004): "las actitudes, las aptitudes y los contenidos".

El aprendizaje de la división es uno de los procesos más complejos que hay en los estudiantes ya que encontramos exactas, inexactas, decimales, entre otras. A este problema se le suma la divisibilidad, pues para un estudiante se vuelve tedioso tener que aprenderse las distintas formas de divisibilidad, debido a que los profesores no buscan una manera práctica para el aprendizaje de aquellas, sino que tratan de hacerlo de forma memorística. De León (1995) afirma. "El aprendizaje de la división, como destreza, está asociado al desarrollo del concepto". Es decir, lo que se pueda hacer para responder ante una división depende del concepto que se tenga de ella. El problema se vuelve aún más difícil cuando se define la divisibilidad con los números enteros, pues las distintas definiciones y notaciones que le dan muchos autores a los números enteros hacen que sea más confuso para ellos, por el poco manejo de los algoritmos manejados en las matemáticas.

De acuerdo con lo anterior este trabajo de investigación trata de responder la siguiente pregunta ¿Es posible enseñar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo por medio de diferentes representaciones?

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivo general

- Hacer una revisión del concepto de divisibilidad de números enteros y sus propiedades y a partir de esto reflexionar sobre los conceptos de (m.c.d.), (m.c.m.) y los números primos.

2.2. Objetivos específicos

- Estudiar e ilustrar las propiedades básicas de la divisibilidad y aplicarlas a la resolución de problemas.

- Explicar los métodos para la enseñanza de las propiedades del (m.c.d.) y (m.c.m.) al mismo tiempo para la aplicación y la resolución de problemas en la vida cotidiana.

- Estudiar e ilustrar los números primos y aplicarlos a la resolución de problemas.

- Diseñar secuencias didácticas para la implementación de divisibilidad, (m.c.d.), (m.c.m.) y números primos para que puedan ser utilizadas en futuros trabajos de grado.

Capítulo 3

Justificación

Este proyecto busca compilar la divisibilidad de manera formal, partiendo de los números enteros como la construcción de ellos, operaciones, orden, propiedades y aplicaciones. Luego, se continúa con la teoría de la divisibilidad, sus propiedades con su respectiva demostración, algoritmo de la división; después se trata el mínimo común múltiplo y máximo común divisor con sus respectivas aplicaciones numéricas y gráficas. Se termina con la construcción de los números primos y el teorema fundamental de la aritmética con sus respectivas demostraciones.

La divisibilidad ha sido estudiada desde los pitagóricos, surgiendo como necesidad al encontrar relaciones entre los números naturales. Este estudio se continuó con Eratóstenes, quien diseñó el algoritmo para encontrar los números primos (Criba de Eratóstenes), y con Euclides en sus libros "Elementos de Eclides". Partiendo de ellos muchos matemáticos dedicaron su tiempo para profundizar la teoría de números, realizando diferentes conjeturas, refutaciones y demostraciones.

Por último, se busca obtener de la teoría, dos secuencias didácticas que permitan aclarar los temas ya mencionados, para ser aplicados a los estudiantes del grado sexto, donde se encuentra de forma más practica la resolución de problemas, gráficos y numéricos, para así, poder desarrollar en el estudiante los diferentes tipos de pensamientos que propone el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los estándares básicos de competencias en matemáticas.

Capítulo 4

Metodología aplicada

Para darle solución al problema planteado se realizó una investigación acción participativa (IAP), de tres autores que trabajan la divisibilidad, obteniendo conocimientos de diferentes tipos con lo cual se buscó encontrar las diversas representaciones de forma numérica, geométrica, demostrativa, aritmética, entre otras. Para ello, se tomó como base las notas de clase del docente Augusto Silva de la Universidad Surcolombiana y se complementaron con los libros Competencias Básicas en Matemáticas de Jaime Martínez Montero y Enfoque Sistémico de las Matemáticas Escolares del doctor Mauro Montealegre Cárdenas.

Luego de realizar detalladamente el estudio de estos libros y apuntes se procedió a elaborar el concepto, sus representaciones, ejercicios y ejemplos de cada uno de los temas ya mencionados en la presentación del trabajo, teniendo en cuenta de la misma manera los estándares establecidos por el MEN (Ministerio de Educación Nacional) y la relación que cada uno de sus pensamientos estipulados, como lo es el pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Estos tipos de pensamiento son los que tuvieron en cuenta para el desarrollo de este trabajo.

A partir del desarrollo de los temas se elaboran dos secuencias didácticas para los estudiantes del grado sexto para complementar la investigación teniendo en cuenta las diferentes representaciones que se realizaron en el marco teórico. Estas secuencias didácticas no se aplicaron en ningún colegio teniendo en cuenta que el trabajo de grado es una investigación teórica y no aplicada, pero se podrá tomar en próximos trabajos de investigación.

Capítulo 5

Marco teórico

Fundamentalmente, trabajaremos en analizar teorías sobre las diferentes definiciones, propiedades, teoremas, operaciones, demostraciones, representaciones y diferentes ejemplos con sus respectivas soluciones, de cada uno de los temas.

Para esto, implementaremos unas bases teóricas como: números enteros, divisibilidad, algoritmo de la división, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, números primos, teorema fundamental de la aritmética.

5.1. Los números enteros

Los números enteros $\mathbb{Z}$, se definen como todos los números naturales junto con todos los símbolos de la forma $(-n)$ siendo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Simbólicamente:

$$\mathbb{Z} = \{(-n) : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\} \cup \mathbb{N}$$

5.2. Operaciones en $\mathbb{Z}$

5.2.1. La suma en $\mathbb{Z}$

Para sumar números enteros se debe tener en cuenta los siguientes casos:

Caso 1. Suma de dos números enteros con el mismo signo: Se suman los números enteros. Luego, se escribe la suma con el mismo signo de los sumandos. Ejemplos:

- $(-13) + (-7) = -20$
- $15 + 8 = 23$

Caso 2. Suma de dos números enteros con distintos signos: Se restan los números enteros. Luego, se escribe la diferencia con el signo del número mayor. Ejemplos:

- $(-11) + 6 = -5$
- $11 + (-6) = 5$

1. Si $n, m \in \mathbb{N}$ definimos $n+m$ como la suma definida en $\mathbb{N}$.
2. $n+(-m)=(-m)+n=k$
3. $(-n)+m=m+(-n)=\begin{cases}-k & \text{si } k\neq 0\\ 0 & \text{si } k=0\end{cases}$
4. $(-n)+(-m)=-(n+m)$

Propiedades de la suma en $\mathbb{Z}$:

1.	Asociativa	Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$,$(x+y)+z=x+(y+z)$.
2.	Conmutativa	Si $x, y \in \mathbb{Z}$,$x+y=y+x$.
3.	Modulativa o elemento neutro	Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x+0=0+x=x$.
4.	Elemento opuesto o inverso aditivo	Para todo $x \in \mathbb{Z}$, existe un $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x+y=0$. El opuesto del x se nota $(-x)$. Usualmente escribimos $x-y$, por $x+(-y)$.

5.2.2. Multiplicación en $\mathbb{Z}$

Para multiplicar números enteros se debe tener en cuenta los siguientes casos:

Caso 1. Multiplicación de dos números enteros con el mismo signo: Si los números tienen igual signo, se multiplican los factores y el producto es positivo. Ejemplos:

- $3\times 10=30$
- $(-3)\times(-10)=30$

Caso 2. Multiplicación de dos números enteros con el distintos signos: Si los números tienen diferente signo, se multiplican los factores y el producto es negativo. Ejemplos:

- $(-4)\times 6=-24$
- $4\times(-6)=-24$

Se define por las siguientes reglas:

1. Si $n, m \in \mathbb{N}$, definimos $n \cdot m$ usando la definición de multiplicación en $\mathbb{N}$.
2. **Elemento nulo** o **elemento absorbente**: Para todo $n \in \mathbb{Z}$, definimos $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0$; es decir al multiplicar cualquier número entero a con el cero el resultado da cero.
3. Ley de composición interna: Si $n, m \in \mathbb{N}$ distintos de cero definimos
    a) $(-n) \cdot m = m \cdot (-n) = -(n \cdot m)$
    b) $(-n) \cdot (-m) = n \cdot m$

Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$:

1.	Asociativa del producto	Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2.	Conmutativa del producto	Si $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \cdot y = y \cdot x$.
3.	Elemento neutro	Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
4.	Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma	Para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
5.	Si $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $x \cdot y \neq 0$.	
6.	Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$, son tales que $x \cdot z = y \cdot z$ entonces $x = y$.	

5.3. Orden en los números enteros

Para $x, y \in \mathbb{Z}$ definimos

$$x \leq y \text{ si y sólo si } y - x \in \mathbb{N}.$$

Observaciones:

1. Si $x \leq y$ y $x \neq y$ escribimos $x < y$.
2. Si $0 < x$, decimos que x es positivo. Denotaremos $\mathbb{Z}^+$, el conjunto de los enteros positivos.
3. $x > 0$ significa lo mismo que $0 < x$.
4. Los enteros x que satisfacen $(-x) > 0$, se denominan negativos.
5. También escribimos $x < 0$ para decir que x es negativo.

Propiedades del orden en $\mathbb{Z}$:

1.	Claururativa	Si $x, y \in \mathbb{Z}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{Z}^+$ y $x \cdot y \in \mathbb{Z}^+$.
2.	Ley de la tricotomía	Si $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces una y solo una de las afirmaciones siguientes es verdadera: $x < y$, $x = y$, $x > y$.
3.	Ley de monotonía	Si $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$, tales que $x \leq y$ y $z \leq w$, entonces $x + z \leq y + w$.
4.	Ley de monotonía	Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tales que $x \leq y$ y $z > 0$, entonces $x \cdot z \leq y \leq z$.
5.	Postulado multiplicativo	Si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tales que $x \leq y$ y $z < 0$, entonces $x \cdot z \geq y \leq z$.
6.	Postulado aditivo	Si $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \leq y$ entonces para todo $z \in \mathbb{Z}$, $x + z \leq y + z$.

5.4. Divisibilidad

Definición 5.1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Decimos que a divide a b, si existe $c \in \mathbb{Z}$ de tal manera que $b = a \cdot c$. En tal caso escribimos $a|b$.

Para indicar que a no divide a b escribimos $a \nmid b$. A manera de ilustración: $3 \nmid 2$, $10 \nmid 11$.

Si $a|b$ diremos que a es un divisor de b o que b es un múltiplo de a. La definición anterior en realidad significa que si a divide a b, entonces $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$ o que la división de b entre a es exacta o que no deja residuo.

El valor absoluto de a, notado $|a|$ y definido por $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$ goza de la siguiente propiedad: si $d \neq 0$ y si $d|n$ entonces $|d| \leq |n|$.

Teorema 5.1. *La divisibilidad entre enteros cumple las siguientes propiedades:*

1.	Recíproco de la multiplicación	Para todo entero a, $1|a$.
2.	Propiedad reflexiva	Si $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, entonces $a|a$, $a| - a$ y $a|0$.
3.	Opuesto de la división	$1|a$ y $(-1)\,|a$.
4.	Si $b|a$ entonces $b|ac$	
5.	Relación de transitividad	Si $b|a$ y $a|c$ entonces $b|c$.
6.	Si $b|a$ y $b|c$ entonces $b|\,(na + mc)$ siendo $n, m \in \mathbb{Z}$ cualesquiera.	
7.	Si $b|a$ entonces $|b| \leq |a|$.	
8.	Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = b$ ó $a = -b$.	

Demostración.

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, $1|a$ pues $a = 1 \cdot a$.

2. Si $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ entonces $a = 1 \cdot a$, luego $a|a$; $(-a) = (-1)\,a$, luego $a|\,(-a)$ y $0 = 0 \cdot a$ luego $a|0$.

3. Si $a \in \mathbb{Z}$, $a = 1 \cdot a$, luego $1|a$; $a = (-1)\,(-a)$ luego $(-1)\,|a$.

4. Si $b|a$, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = k \cdot b$, luego $ac = (kc)\,b$ lo cual significa que $b|ac$.

5. Si $b|a$, entonces $a = k_1 b$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$; Si $a|c$, entonces $c = k_2 a$, con $k_2 \in \mathbb{Z}$. De esta manera $c = k_2 a = k_2\,(k_1 b) = (k_1 k_2)\,b$ lo cual significa que $b|c$.

6. Si $b|a$, entonces $a = k_1 b$, con $k_1 \in \mathbb{Z}$; Si $a|c$, entonces $c = k_2 a$. Luego $na + mc = (nk_1)\, b + (mk_2)\, b = (nk_1 + mk_2)\, b = kb$. Por lo tanto $b|\,(na + mc)$.

7. Si $b|a$ entonces $a = b \cdot c$ con $c \in \mathbb{Z}$. Como $a \neq 0$ entonces $c \neq 0$ y en consecuencia $|c| \geq 1$, así que $|a| = |b \cdot c| = |b| \cdot |c| \geq |b|$.

8. Si $a|b$ entonces $b = k_1 a$ con $k_1 \in \mathbb{Z}$. Si $b|a$ entonces $a = k_2 b$ con $k_2 \in \mathbb{Z}$. De esta manera $b = (k_1 k_2)\, b$ por lo que $k_1 k_2 = 1$ y de esta manera $k_1 = k_2 = 1$ ó $k_1 = k_2 = -1$ y $a = b$ ó $a = -b$.

5.5. Principio de Eudoxio

Dados a y b enteros positivos con $b \neq 0$, entonces a se encuentra entre dos múltiplos consecutivos de b.

Ejemplo 5.1. Si $a = 11$ y $b = 4$, entonces $2 \times 4 \leq 11 \leq 3 \times 4$.

5.6. Algoritmo de la división

Si $a \in \mathbb{Z}$, el conjunto $M = \{m \cdot a : m \in \mathbb{Z}\}$ se llamará el conjunto de los múltiplos de a. El conjunto $D = \{b \in \mathbb{Z} : b|a\}$ se llamará el conjunto de los divisores de a.

Ejemplo 5.2. A manera de ilustración para $a = 6$:

$$M = \{6m : m \in \mathbb{Z}\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$$
$$D = \{b \in \mathbb{Z} : b|6\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm, 3, \pm 6\}$$

En cualquier caso M es infinito, y D puede ser finito o infinito.

Teorema 5.2 (Algoritmo de la división)**.** *Sea b un entero positivo fijo. Cualquier otro entero a, se expresa de forma única en la forma: $a = b \cdot q + r$ donde $0 \leq r < b$.*

Demostración. Sea $S = \{a - bx : x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}$, $S \neq \emptyset$, pues si $a \geq 0$, entoces $a - b \cdot 0 = a \in S$ y si $a < 0$, como $b \geq 1$, entonces $a - ab = a\,(1 - b) \geq 0$. Así que: $a - ab \in S$.

Por el principio de buena ordenación, S tiene un elemento mínimo, digamos $r = a - bq$, $q \in \mathbb{Z}$. Como $r \in S$, entonces $r \geq 0$.

Falta probar que $r < b$. Procedemos por la contradicción:

Si $r \geq b$, entonces $r - b \geq 0$, o sea que $a - bq - b = a - b\,(q + 1) \geq 0$. Luego $a - b\,(q + 1) \in S$. Pero como $b > 0$, entonces $a - b\,(q + 1) < a - bq$, lo cual es una contradicción pues $r = a - bq$ es el mínimo de S.

Una prueba alternativa del algoritmo de la división es la siguiente: Dados dos enteros a, b con $b > 0$, existen únicos par de enteros q y r tales que: $a = qb + r$con $0 \leq r < b$, $(r = 0 \Leftrightarrow b|a)$, q es el cociente y r el residuo de la división. En efecto, por el principio de Eudoxio, existe q que satisface: $qb \leq a < (q + 1)\, b$, o bien, $0 \leq a - qb$ y $a - qb < b$. Definimos $r = a - qb$.

5.6.1. Unicidad de los enteros p y q

Supongamos que se tienen dos escrituras:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \quad \text{con } 0 \leq r_1 < b \\ a &= bq_2 + r_2 \quad \text{con } 0 \leq r_2 < b \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro tenemos que $0 = b\,(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ donde $|r_1 - r_2| < b$.

Pero como $b|0$, $b|b\,(q_1 - q_2)$, entonces $b|\,(r_1 - r_2)$. Como $|r_1 - r_2| < b$, debe tenerse que $r_1 - r_2 = 0$ o sea $r_1 = r_2$. Si $r_1 = r_2$, $bq_1 = bq_2$ y como $b \neq 0$, entonces $q_1 = q_2$; así que las dos escrituras coinciden.

5.6.2. Ejemplos sobre el algoritmo de la división

Consideremos un valor fijo para $b \in \mathbb{Z}$ y tenemos diferentes valores de $a \in \mathbb{Z}$. La idea es encontrar en cada caso números enteros q y r tales que $a = bq + r$ con $0 \leq r < b$.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \qquad a = bq + r$$

Si $a = 37$, $b = 4$ dado que $a, b \in \mathbb{Z}$, existen q, r también enteros tales que $4 = 37q + r$:

$$\begin{array}{r|l} 37 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 9 \end{array} \qquad 0 \leq r < 4,\ 37 = 4 \times 9 + 1$$

Ejemplo 5.3. Sea $b = 3$, entonces

Para	$a = 5$	:	$5 = 3 \times 1 + 2$	$q = 1; r = 2$
	$a = 17$	:	$17 = 3 \times 5 + 2$	
	$a = 30$	:	$30 = 3 \times 10 + 0$	
	$a = 43$	:	$43 = 3 \times 14 + 1$	
	$a = -2$	:	$-2 = 3 \times (-1) + 1$	
	$a = -10$	:	$-10 = 3 \times (-4) + 2$	

Ejemplo 5.4. Sea $b = 5$, entonces

Para	$a = 2$	:	$2 = 5 \times 0 + 2$
	$a = -1$	:	$-1 = 5 \times (-1) + 4$
	$a = -302$	:	$-302 = 5 \times (-61) + 3$
	$a = 1$	:	$1 = 5 \times 0 + 1$
	$a = 23$	:	$23 = 5 \times 4 + 3$

Ejemplo 5.5. Supongamos que dividimos cada uno de los números $N = 33$ y $M = -33$ por $b = 6$. Encuentra q y r en cada caso.

Solución. Si dividimos $N = 33$ por $b = 6$. En el primer caso, los números q y r buscados son respectivamente 5 y 3 pues $33 = 6 \times 5 + 3$.

Cuando dividimos $M = -33$ por 6, se puede pensar que el cociente, q, es -5. Pero si q eran, de hecho, -5, a continuación, la única forma de $N = bq + r$ sería si $r = -3$, y que contradice el hecho de que el resto está entre 0 y b. Así que, en cambio, tomamos el cociente estar -6, y luego r sería 3, y ahora $M = -33 = 6(-6) + 3 = bq + r$ donde r está entre 0 y 6. Esto es coherente con la prueba que dimos. Siempre encontramos el mayor múltiplo de b menor que o igual a N cuando se utiliza la fórmula $N = bq + r$, y en el caso cuando $N = -33$, que el mayor múltiplo de 6 a menos de o igual a -33 es $6 \times (-6)$. Esto es muy sorprendente para los estudiantes y, al principio, parece bastante extraño.

5.7. Criterios de divisibilidad (2, 3, 5 y 7)

Criterio de divisibilidad por 2. Un número es divisible entre dos, si termina en cero o en cifra par.

Criterio de divisibilidad por 3. Un número es divisible entre tres, si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.

Criterio de divisibilidad por 5. Un número es divisible entre cinco, si la última cifra del número es cero o cinco.

Criterio de divisibilidad por 7. Un número es divisible entre 7, cuando separando la primera cifra de la derecha y multiplicarla por dos, su producto se resta con las cifras que quedan a la izquierda y así sucesivamente, el resultado es divisible por 7.

Ejemplo 5.6. Verificar si 5145 es divisible entre siete aplicando el criterio de divisibilidad por 7.

Solución. Como $N = 5145$, la última cifra de la derecha es 5, luego: $514 - 2 \times 5 = 514 \times 10 = 504$. Ahora, $50 - 2 \times 4 = 50 - 8 = 42 = 7 \times 6$.

5.8. Máximo común divisor

Para desarrollar esta sección tomaremos en consideración solo los divisores positivos de los números.

Definición 5.2. sea $a, b \in \mathbb{Z}$ no ambos iguales a cero. Si $k|a$ y $k|b$, k es divisor común de a y b.

El máximo de los divisores comunes de a y b es llamado *Máximo Común Divisor* de esos números y se nota (a, b) o (m.c.d.) (a, b). Puesto que los números a y $-a$ tienen exactamente los mismos divisores positivos, luego $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$.

Teorema 5.3 (de Bozaut). *Si d es el (m.c.d.). de a y b, entonces existen n_0, m_0 tales que $(a, b) = d = n_0 a + m_0 b$.*

En efecto tomamos el mínimo de las combinaciones lineales $\{na + mb\}$. También tenemos que: si a y b son enteros entonces $a = qb + r$ donde q y r son enteros, por lo tanto $(a, b) = (b, r)$.

5.8.1. Propiedades del (m.c.d.)

Teorema 5.4. *1) Si* $a|b$*,* $(a, b) = a$*; 2) Si* $a = bq + c$*, entonces* $(a, b) = (b, c)$*.*

Demostración. Para el primer enunciado tenemos que los divisores comunes de a y b coinciden con los divisores de b. En efecto: Si $k|a$ y $k|b$, entonces $k|b$. Si $k|b$, como, $b|a$, entonces $k|a$. Para el segundo enunciado del teorema tenemos que que todo divisor común de a y b es divisor común de b y c y recíprocamente: En efecto: si $k|a$ y $k|b$, entonces, $k|b$ y $k|\,(a - bq)$ o sea $k|c$. Recíprocamente si $k|b$ y $k|c$, entonces $k|b$ y $k|\,(bq + c)$ o sea $k|a$.

5.8.2. Algoritmo de Euclides para hallar el (m.c.d.)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$; sin perder generalidad podemos suponer que $0 < b < a$. Por el algoritmo de la división existen $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = bq_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < b$.

Si $r_1 = 0$,entonces $b|a$ y $(a, b) = b$.

Si $r_1 < b$,entonces existen $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = r_1q_2 + r_2$, donde $0 \leq r_2 < r_1$

Si $r_2 = 0, (a, b) = (b, r_1) = r_1$, pues $r_1|b$

Si $r_2 < r_1$, existen $q_3, r_3 \in \mathbb{Z}$ tal que $R_1 = q_3r_2 + r_3$ donde $0 \leq r_3 < r_2$.

$(a, b) = d$, existen m_0, $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $d = m_0a + n_0b$.

De nuevo si $r_3 = 0 : (a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = r_2$.

Si $r_3 < r_2$ elproceso puede continuar: se obtiene una sucesión de igualdades de la forma:

$$
\begin{array}{cc}
a = bq_1 + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\
b = r_1q_2 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2q_3 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\
r_2 = r_3q_4 + r_4 & 0 \leq r_4 < r_3 \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
\\
r_k - 2 = r_kq_k + 1 + 0 &
\end{array}
$$

En algún momento debe tenerse residuo 0, pues los residuos son decrecientes:

$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 ...0$ luego $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) =$
$... = (r_k - 1, r_k) = r_k$

El máximo común divisor de a y b es el último residuo distinto de cero, en el algoritmo de las divisiones sucesivas de Euclides.

5.8.3. Máximo común divisor por simple inspección

Como el (m.c.d.) de varios números tiene que dividir al menor de ellos procedemos así:

Miramos el número menor. Si este divide a todos los demás será el (m.c.d.).

En caso contrario hallamos todos los divisores del número menor y miramos cual es el mayor de estos divisores que los divide a todos y este será el (m.c.d.).

Ejemplo 5.7. Halla el (m.c.d.) de 5 y 30 por simple inspección. Vemos que el número menor es 5; 5 divide a 5 y 30 por lo tanto 5 es el (m.c.d.).

$$\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

Ejemplo 5.8. Hallar el (m.c.d.) de 8 y 30 por simple inspección. Tomamos el número menor (8), los divisores de 8 son 1,2,4,8. 2 es el mayor divisor de 8 que divide a 8 y 30; 2 es el (m.c.d.).

5.8.4. (m.c.d.) por divisiones sucesivas

Este método se fundamenta en el siguiente: Teorema (m.c.d.) del dividiendo y el divisor de una división inexacta es igual al (m.c.d.) del divisor y el residuo. Lo anterior se cumple porque, por los principios fundamentales de la divisibilidad, todo número que divide al dividendo y al divisor de una división inexacta divide al residuo. También se cumple que todo número que divide al divisor y al residuo de una división inexacta también divide al dividendo.

(propiedad 2 del m.c.d.)

Por tanto, todo factor común del dividendo y el divisor será factor común del divisor y el residuo; por ello el (m.c.d.), que es el mayor de estos factores comunes, será igual para el dividendo y el divisor y para el divisor y el residuo.

Ejemplo 5.9. El área del piso de la escuela para esta superficie del patio de mi casa que es de $1126m^2$ y el piso de la habitación de mis padres que es de $522m^2$. Como en la división sucesiva el máximo común divisor es el último residuo distinto a cero:

$$\begin{array}{r|l} 1126 & 522 \\ \cline{2-2} 82 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 522 & 82 \\ \cline{2-2} 30 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 82 & 30 \\ \cline{2-2} 22 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 22 \\ \cline{2-2} 8 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 22 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 1126 &= 2 \times 522 + 82 \\ 522 &= 6 \times 82 + 30 \\ 82 &= 2 \times 30 + 22 \\ 30 &= 1 \times 22 + 8 \\ 22 &= 2 \times 8 + 6 \\ 8 &= 1 \times 6 + 2 \\ 6 &= 3 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

Luego $(1126, 522) = (6, 2) = 2$. Luego, la baldosa de mayor área requerida para cubrir el área del piso $1126m^2$ y el cuarto $522m^2$ es de $2m^2$.

Ejemplo 5.10. Hallar el (m.c.d) de 548 y 20

$$\begin{array}{r|l} 548 & 20 \\ \cline{2-2} 148 & 27 \\ 8 & \end{array}$$

El (m.c.d.) de 548 y 20 es 4

$$\begin{array}{r|l} 20 & 8 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array}$$

El (m.c.d.) de 8 y 20 es 4

5.8.5. (m.c.d.) De dos números por divisiones sucesivas

Se divide el mayor de los números entre el menor, si la división es exacta el menor es el (m.c.d.), si la división en inexacta, se divide el divisor entre el primer residuo; el primer residuo entre el segundo, este entre el tercero y así sucesivamente hasta obtener una división exacta. El último residuo distinto de cero será el (m.c.d.).

Ejemplo 5.11. Hallar el (m.c.d) de (75 y 300)

$$\begin{array}{r|l} 300 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 75 \\ 0 & \end{array}$$

El (m.c.d.) de 300 y 75 es 75

Ejemplo 5.12. Hallar el (m.c.d.) de (144 y 520)

	3
520	144
88	

	3	1
520	144	88
88	56	

	3	1	1
520	144	88	56
88	56	32	

	3	1	1	1
520	144	88	56	32
88	56	32	24	

	3	1	1	1	1
520	144	88	56	32	24
88	56	32	24	8	

	3	1	1	1	1	3
520	144	88	56	32	24	8
88	56	32	24	8	0	

Ejemplo 5.13. Hallar el (m.c.d.) de (3997 y 2947)

$$\begin{array}{r|l} 3997 & 2947 \\ \cline{2-2} 1050 & 1 \end{array}$$
$3997 = 2947 \times 1 + 1050$

$$\begin{array}{r|l} 2947 & 1050 \\ \cline{2-2} 0847 & 2 \end{array}$$
$2947 = 1050 \times 2 + 847$

$$\begin{array}{r|l} 3997 & 2947 \\ \cline{2-2} 1050 & 1 \end{array}$$
$3997 = 2947 \times 1 + 1050$

$$\begin{array}{r|l} 2947 & 1050 \\ \cline{2-2} 0847 & 2 \end{array}$$
$2947 = 1050 \times 2 + 847$

$$\begin{array}{r|l} 1050 & 847 \\ \cline{2-2} 203 & 1 \end{array}$$
$1050 = 847 \times 1 + 203$

$$\begin{array}{r|l} 847 & 203 \\ \cline{2-2} 035 & 4 \end{array}$$
$847 = 203 \times 4 + 35$

$$\begin{array}{r|l} 203 & 35 \\ \cline{2-2} 28 & 5 \end{array}$$
$203 = 35 \times 5 + 28$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 28 \\ \cline{2-2} 7 & 1 \end{array}$$
$35 = 28 \times 1 + 7$

También podemos utilizar otro método para hallar (m.c.d.) de $(3997, 2947)$.

	1	2	1	4	5	1	4
3997	2947	1050	847	203	35	28	7
1050	847	203	35	28	7	0	

Además:

$7 = (2947, 3997) = 35 - 28 \times 1$
$= 35 - (203 - 355) \times 1$
$= 35 \times 6 - 203 \times 1$
$= (847 - 203 \times 4) \times 6 - 203 \times 1$
$= 847 \times 6 - 203 \times 25$
$= 847 \times 6 - (1050 - 847 \times 1) \times 25$
$= 847 \times 31 - 1050 \times 25$
$= (2947 - 1050 \times 2) \times 31 - 1050 \times 25$
$= 2947 \times 31 - (3997 - 2947 \times 1) \times 87$

Ilustración 3

Calcular $(687, 234)$

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 687 & 234 \\ \cline{2-2} 219 & 2 \end{array} \qquad ;\ 687 = 2 \text{ x } 234 + 219;\ 0 \leq 219 < 234$$

$$\begin{array}{r|l} 234 & 219 \\ \cline{2-2} 15 & 1 \end{array} \qquad ;\ 234 = 1 \text{ x } 219 + 15;\ 0 \leq 15 < 219$$

$$\begin{array}{r|l} 219 & 15 \\ \cline{2-2} 9 & 14 \end{array} \qquad ;\ 219 = 14 \text{ x } 15 + 9;\ 0 \leq 9 < 15$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 9 \\ \cline{2-2} 6 & 1 \end{array} \qquad ;\ 15 = 1 \text{ x } 9 + 6;\ 0 \leq 6 < 9$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 6 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \qquad ;\ 9 = 1 \text{ x } 6 + 3;\ 0 \leq 3 < 6$$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \qquad ;\ 6 = 2 \text{ x } 3$$

Luego: $(687, 234) = 3$

Tambien podemos utilizar otro método para hallar $(m.c.d)$ de $(687, 234)$

	2	1	14	1	1	2
687	234	219	15	9	6	3
219	15	9	6	3	0	

El algoritmo de Euclides permite escribir (a,b) como combinación lineal de a y b. Para el ejemplo:

$3 = 9 - 16$

$3 = 9 - 1(15 - 19) = 9 - 115 + 19$

$3 = 29 - 115$

$3 = 2(219 - 1415) - 115$

$3 = 2219 - 2815 - 115$

$3 = 2219 - 2915$

$3 = 2219 - 29(234 - 1219)$

$3 = 2219 - 29234 + 29219$

$3 = 31219 - 29234$

$3 = 31(687 - 2234) - 29234$

$3 = 31687 - 62234 - 29234$

$3 = 31687 - 91234$

$3 = (31)a + (-91)b$

Ejemplo 5.14. Calcular $(308, 882, 2961)$ y expresarlo como combinación lineal de ellos. Por ello calculamos (m.c.d.) de los dos primeros y luego el (m.c.d.) del tercer número y el (m.c.d.) que se halló en el paso anterior. Es decir: $(308, 882, 2961) = ((308, 882), 2961)$

$$\begin{array}{r|l} 882 & 308 \\ \hline 266 & 2 \end{array} \qquad ;\ 882 = 308 \text{ x } 2 + 266$$

$$\begin{array}{r|l} 308 & 266 \\ \hline 42 & 1 \end{array} \qquad ;\ 308 = 266 \text{ x } 1 + 42$$

$$\begin{array}{r|l} 266 & 42 \\ \hline 14 & 6 \end{array} \qquad ;\ 266 = 42 \text{ x } 6 + 14$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 14 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad ;\ 42 = 14 \text{ x } 3$$

Luego: $(308, 882) = 14 = 308(-20) + (882)(7)$
También podemos utilizar otro método para hallar (m.c.d.) de $(308, 882)$

	2	1	6	3
882	308	266	42	14
266	42	14	0	

Calculamos ahora: $(14, 2961)$

$$\begin{array}{r|l} 2961 & 14 \\ \hline 7 & 211 \end{array} \qquad ;\ 2961 = 14 \text{ x } 211+7$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 14 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad ;\ 42 = 14 \text{ x } 3$$

$(14, 2961) = 7 = (14)(-211) + (2961)(1)$
Luego:
$7 = ((308, 882), 2961) = (308, 882, 2961)$
$7 = (-221)(308(-20)) + (882)(7) + (2961)(1)$
$7 = (308)(21120) + (882)(7)(-211) + 2961(1)$
$7 = \underbrace{(308)}_{a}\ \underbrace{(4220)}_{s} + \underbrace{(882)}_{b}\ \underbrace{(-1477)}_{t} + \underbrace{(2961)}_{c}\ \underbrace{(1)}_{v}$

Segundo método para hallar el (m.c.d.) de $(2961, 211)$

	211	2
2961	14	7
16	0	
21		
7		

5.8.6. OTRAS PROPIEDADES DEL (m.c.d.)

Teorema	Demostración
1. (a,b) = sa + tb con s, t $\in \mathbb{Z}$	La escritura de (a,b), como combinación lineal de a y b se consigue despejando cada residuo en la igualdad el algoritmo de Euclides, empezando por el ultimo hasta rescatar a y b. Cabe anotar que el reciproco de este resultado no es cierto. O sea: si $sa + tb = m$, no necesariamente (a,b) = m. Por ejemplo: $4 * 3 + 4 * 1 = 10$ y sin embargo $(2, 4) \neq 10$
2. Si $m \in \mathbb{Z}^+$ ˆ (ma,mb) = m(a,b)	El resultado se obtiene de multiplicar todas las igualdades en el algoritmo de Euclides por m: $ma = mbq_1 + mr_1; 0 \leq mr_1 < mb$ $mb = mr_1q_2 + mr_2; 0 \leq mr_2 < mr_1$ $\vdots$ $mr_{k-1} = mr_kq_{k+1} + 0.$ $(ma, mb) = (mb, mr_1) =$ $(mr_{k-1}, mr_k) = mr_k = m(a, b)$
3. El conjunto de los divisores comunes de a y b coiciden con el conjunto de los divisores de (a,b)	Si k|a y k|b, entonces k divide a cualquier combinación lineal de a y b, como $(a, b) = sa + sb$, se tiene que k|(a,b). Similarmente si k|(a,b), es claro que k|a y k|b
4. Si $(a, b) = 1$, entonces (ac, b) = (c,b)	1) Si $(a, b) = 1$, entonces $(ac, b) = (c, b)$. Probaremos que : i. (ac, b)|(c,b)ii. (c,b)|(ac, b) En efecto (ac, b)|ac (ac, b)|b $\Rightarrow$ (ac,b)|bc Así que (ac, b)|ac y (ac, b)|bc. Luego (ac, b)|(ac, bc) pero $(ac, bc) = c(a, b) = c$ Luego: (ac,b)|c, como (ac, b)|b, entonces (ac, b)|c,b) ii. (c,b)|c, luego (c,b)|ac, (c,b)|b Luego (c,b)|ac y (c,b)|b, o sea que (c,b)|(ac, b)

***Definición*:** Dos números enteros a y b se llaman primos relativos si (a,b) = 1

5.8.7. Otras propiedades del (m.c.d.)

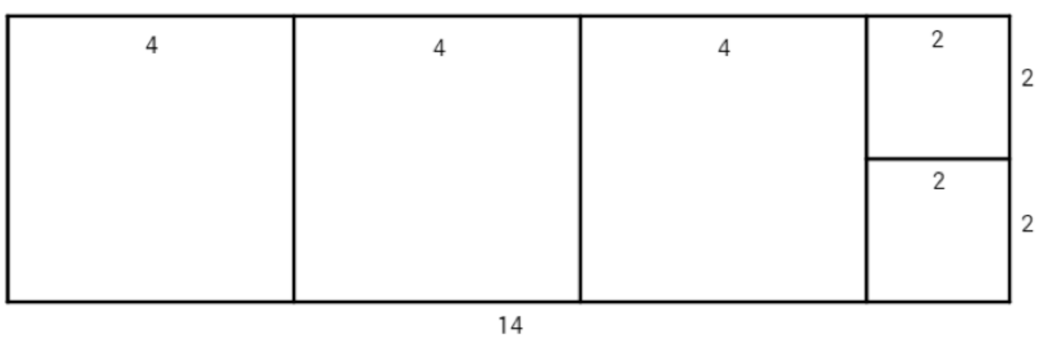
Teorema	**Demostración**
1. Si (a,b) = 1 y b|ac, entonces, b|c	Si (a,b) = 1, existen s,t $\in \mathbb{Z}$ tales que 1 = sa + sb. Luego c = (cs)a + (ct)b o c = (ac)s + (bc)t. Por hipótesis b|bc, luego b|c.
2. Los números $\frac{a}{(a,b)}$ y $\frac{b}{(a,b)}$ son primos relativos	$(a,b) = (\frac{a}{(a,b)}(a,b)); \frac{b}{(a,b)}(a,b))$ $= (a,b)(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)})$ Luego, $(\frac{a}{(a,b)}; \frac{b}{(a,b)}) = 1$
3. (a,b) = 1, si y solo si existen s,t $\in \mathbb{Z}$ tales que 1 = sa + tb	Si (a,b) = 1, se debe que existen s,t $\in \mathbb{Z}$ tales que 1 = sa + tb. Recíprocamente si existen s,t $\in \mathbb{Z}$ tales que 1 = sa + tb, como (a,b)|a y (a,b)/|b entonces (a,b)|sa + sb. Así que (a,b)|1 y en consecuencia (a,b)=1.

5.8.8. Representación Geométrica

Geométricamente existe una interpretación del algoritmo de Euclides para calcular el (m.c.d.). La esencia del método consiste en recubrir rectángulos con cuadrados del mayor tamaño posible. Los ejemplos siguientes ilustran el método.

Ejemplo 5.15. Calcular (14,4)

Paso 1: construir un rectángulo de dimensiones 14 y 4

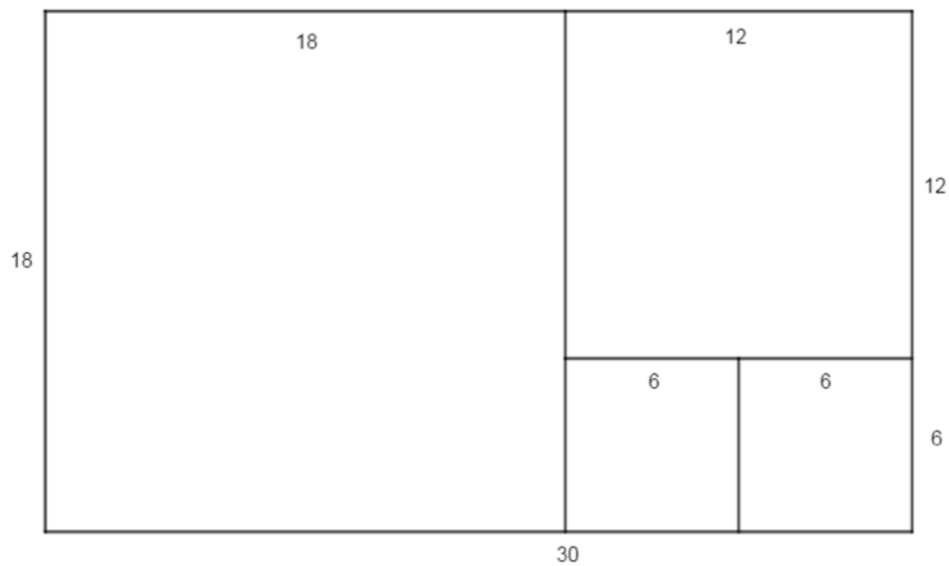


Paso 2: Recubrir el rectángulo con cuadrados 4×4: caben 3 cuadrados y sobra un rectángulo de dimensiones 2×4.

Paso 3: Recubrir este rectángulo 2×4 con cuadrados 2×2: caben dos cuadrados 2×2 y ya quedo el rectángulo inicial recubierto con cuadrados. El lado del último cuadrado es el (m.c.d.).O sea, (14,4)=2. Obsérvese que:

$$14=3\times4+2$$
$$4=2\times2+0$$

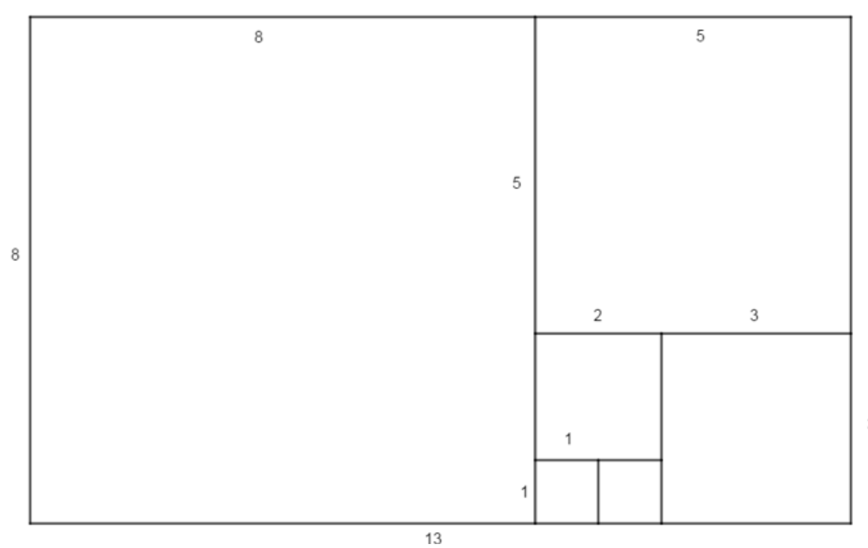
Ejemplo 5.16. Calcular (30,18)



$$30=18\times1+12$$
$$18=12\times1+6$$
$$12=6\times2$$

El máximo común divisor es 6: (30,18)=6.

Ejemplo 5.17. Calcular (13,8)



13=1×8+5
8=1×5+3
5=3×1+2
3=2×1+1
2=2×1+0

El máximo común divisor es 1: (13,8)=1.
Es conocido el siguiente algoritmo para hallar el (m.c.d):

Dados a,b $\in \mathbb{Z}$ para hallar (a,b) se procede así:

a. Descomponga a y b en sus factores primos.
b. Forme el producto de los factores primos que son comunes a las dos descomposiciones tomándolos con el menor exponente que tengan.
El siguiente ejemplo muestra porque este algoritmo funciona.

$$a = 2^2 * 3^2 * 5 * 7^3$$

$$b = 2^3 * 3 * 5^2 * 11$$

En realidad, se trata de encontrar el mayor número d que divide simultáneamente a a y b.
$\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}$, $\frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$

$\frac{2^2*3^2*5^3*7^3}{2^2*3*5^2} = \frac{2^3*3*5^2*11}{2^2*3*5^2}$

$d = (a, b) = 2^2 * 3 * 5^2$

5.8.9. LAS DIFICULTADES DE LAS OPERACIONES

El formato clásico de la operación de dividir es adecuado y se puede seguir utilizando, aunque con modificaciones. Es explicito, bastante transparente y permite dar sentido a lo que hace. Sin embargo, no se dan facilidades al alumno, no se sigue una progresión lógica, ni se entrena al estudiante en las dificultades específicas. Para la cuenta clásica se debería enseñar la operación siguiendo las siguientes cinco etapas:

- **Cocientes exactos.** Es el primer paso porque implica aplicar la tabla de multiplicar, sin más. Se trata de hallar cocientes del tipo 9÷3;999÷3, etc. También se puede complicar el caso añadiendo ceros: 800÷2. Se trata de una cuenta en la que hay que poner, uno a continuación de otro, los números del resultado, que coinciden exactamente con uno de los factores de la tabla de multiplicar correspondiente.

- **Cocientes inexactos o introducción del resto.** Se trata de determinar los dividendos del paso anterior con un número que ya no sea cociente exacto 9÷2;823÷2;8.247÷2. el número final del dividendo es más pequeño que el divisor y no se puede repartir. Por eso queda de resto.

- **Agregación de restos parciales.** En la cuenta 834÷2, el alumno se encuentra con la situación de resto en el centro del algoritmo. Se espera que el alumno pueda componer un nuevo número con el resto que obtiene, por parte, y con el número siguiente, por otra (véase el cuadro 1).

8	3	4	2		
0	3		4	1	7
	1	4			
		0			

Cuadro 1.
Hasta este paso se trataba de encontrar mitades, tercios o sextos exactos, o bien dejar un resto al final de la operación el cual no podía repartirse. En este paso se ha de aprovechar el resto intermedio ligándolo al número siguiente del dividendo, que se baja.

- **El primer número del dividendo es más pequeño que el divisor.** Es la clásica situación a la que corresponde el ejemplo siguiente: $124 \div 2$;$819 \div 9$, etc. No supone mayor problema, por cuanto el alumno traslada aquí la destreza que había adquirido en c). en este caso, en lugar de aplicarlo en el centro del algoritmo, lo hace al principio.

- **cero al cociente y se baja la cifra siguiente.** Es la situación a la que se enfrenta el alumno cuando aborda una división como lo que se muestra en el cuadro 2, y que soluciona con esa frase de resonancias consonantes tan conocidas por los escolares. En efecto, el alumno debe darse cuenta de que la única forma de continuar con los cálculos consiste en componer un nuevo número con la siguiente cifra del dividendo. Como con el número anterior no ha hecho ningún reparto, debe poner un cero en el lugar correspondiente del cociente. Tras esta dificultad, prosigue con la división hasta que la termina.

8	1	4	2		
0	1	4	4	0	7
		0			

- **Cero al cociente al final de la cuenta.** Es parecido al caso anterior, pero situado al final de la cuenta. Es una situación que origina multitud de errores en los niños, porque no saben si han terminado o si tienen que poner un cero o dos en el cociente. El cuadro 3 ejemplifica esta situación. El peligro está en que el alumno no ponga nada en el cociente porque crea que ya ha acabado la cuenta, y deje el resultado reducido a 43 (en este ejemplo). La forma de obviar este inconveniente es que el niño compare esta cuenta con una idéntica, pero que en la última cifra del dividendo aparezca un 2 en vez de un 1. Se trata de que se dé cuenta de lo que haría en este otro supuesto y, al mismo tiempo, compare lo que ocurre en el cociente en ambos casos.

8	6	1	2		
0	6		4	3	0
	0	1			
		1			

- **Cero al cociente en medio y al final.** Es lo que ocurre en la cuenta del cuadro 4, que encadena dos ceros consecutivos en el cociente, planteándose así, de forma poco habitual, el final de la operación. Es una situación que invita facilita cometer errores. Se puede salir de ella con mucho entrenamiento, identificando claramente el número correspondiente del dividendo con el número del divisor, y estableciéndole número de cifras que ha de tener el cociente.

8	0	1	2		
0	0	1	4	0	0
		1			

- **Practicas separadas del cociente y de los restos parciales.** Siempre hay que insistir en que la corrección de los errores que cometen los alumnos hay que hacerla abordando uno solo cada vez, de forma que el resto de las dificultades en las que puedan tropezar queden neutralizadas. El cuadro 5 muestra el camino a seguir para el alumno practique por separado la habilidad de hallar el cociente o la de encontrar los restos parciales.

6	3	8	4	5			
				1	2	7	6
(A)							

6	3	8	4	5			
1	3						
	3	8					
		3	4				
(B)			4				

En el primer caso (A), se propone la resolución de cuentas donde se le muestra el cociente. El alumno se puede concentrar en la resolución de los restos parciales. En B se hace a la inversa: se le dan resultados los restos parciales y el aprendiz se entrena exclusivamente en desarrollar la destreza de calcular los cocientes.

5.9. Mínimo común múltiplo

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Un número entero M es múltiplo común de a y b si existen enteros n y m de tal manera que $M = na = mb$. El menor múltiplo común positivo de a y b se llama el Mínimo Común Múltiplo de a y b y lo notaremos por $[a, b]$.

Teorema. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$; (a, b) su máximo común divisor. El conjunto de los múltiplos comunes de a y b coincide con el conjunto de números de la forma

$$M = \frac{ab}{(a,b)}t, t \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Como $(a, b)|a$ y $(a, b)|b$ es claro que todo numero de la forma $\frac{ab}{(a,b)}t$ es múltiplo de a y de b.
Supongamos ahora que $M = \frac{ab}{(a,b)}t_0$ para algún $t_0 \in \mathbb{Z}$. Si M es múltiplo común de a y b entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $M = na = mb$. Luego $\frac{na}{b} = m \in \mathbb{Z}$. Como $(a, b)|a$ y $(a, b)|b$, existen enteros d_1, d_2 tales que $a = d_1(a, b); b = d_2(a, b)$. Luego $\frac{na}{b} = \frac{nd_1(a,b)}{d_2(a,b)}$ $=\frac{nd_1}{d_2} \in \mathbb{Z}$.
Como $(d_1, d_2) = (\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)})$ y $d_2|nd_1$, entonces $d_2|n$, ó sea, $n = kd_2 = k\frac{b}{(a,b)}$ así que:

.	Colorario	Demostración
.	[a,b]=ab/((a,b)) .	El menor múltiplo común positivo de a y b se obtiene cuando t=1 así que: [a,b]=ab/((a,b)).
.	Si (a,b)=1 entonces [a,b]=ab	Si (a,b)=1 es claro que [a,b]=ab/1=ab.
.	El conjunto de los múltiplos comunes de a y b comunes de a y b coincide con el conjunto de los múltiplos de su mínimo común múltiplo comunes de a y b coincide con el conjunto de los múltiplos de su mínimo común múltiplo	El conjunto de los múltiplos comunes de a y b

$M = na = k\frac{b}{(a,b)}a = \frac{ab}{(a,b)}k$, donde $t_0 = k$.

Ejemplo. Calcular [1986,534]

Solución. se halla inicialmente (a, b)

$$\begin{array}{r|l} 1986 & 534 \\ \hline 384 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 534 & 384 \\ \hline 150 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 384 & 150 \\ \hline 84 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & 84 \\ \hline 66 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 66 \\ \cline{2-2} 18 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 66 & 18 \\ \cline{2-2} 12 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ \cline{2-2} 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Por divisiones sucesivas tenemos:

	3	1	2	1	1	3	1	2
1986	534	384	150	84	66	18	12	6
384	150	84	66	18	12	6	0	

$(1986, 534) = 6 \Rightarrow [1986, 534] = \dfrac{1986 \times 534}{6} = 176.754$

Ejemplo. Calcular $[308, 882]$

Solución. Hallamos el $(m.c.d.)$ de $[308, 882]$

	2	1	6	3
882	308	266	42	14
266	42	14	0	

$[308, 882] = \dfrac{308 \times 882}{14} = 19.404$

Teorema. $[a, b, c] = [[a, b], c]$

Para hallar el $(m.c.m.)$ de tres números, hallamos el $(m.c.m.)$ de los dos primeros, para luego calcular el $(m.c.m.)$ del tercer número y el $(m.c.m.)$ que se halló en el paso anterior.

Ejemplo. Calcular $[410, 404, 712]$

Solución. Calculamos primero $[410, 404]$

$(410, 404) = 2$. Luego: $[410, 404] = \dfrac{410 \times 404}{2} = 82820$

Calculamos $[82820, 712]$

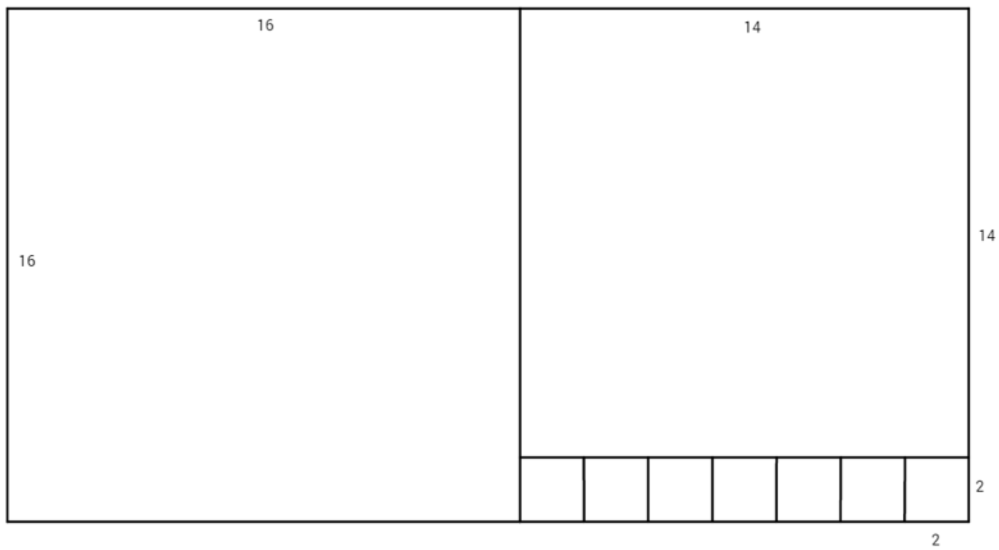
$(82820, 712) = 4$. Luego: $[82820, 712] = \dfrac{82820 \times 712}{4} = 14.741.960$

Observación. El mínimo común múltiplo también puede calcularse usando el método de recubrir rectángulos. El procedimiento se basa en la igualdad:

$$[a, b] = \frac{ab}{(a, b)} = \frac{a}{(a, b)} \times \frac{b}{(a, b)} \times (a, b)$$

(a, b) Representa el lado del último cuadrado; el producto $\dfrac{a}{(a,b)} \times \dfrac{b}{(a,b)}$ representa el número n de cuadrados de lado (a, b) que caben en el rectángulo inicial así: $[a, b] = n(a, b)$

***Ejemplo* .**: Calcular $[30, 16]$



(30,16)=2
El rectángulo inicial puede recubrirse con 15×8 cuadrados de lado 2. Luego n=120
Luego: $[30, 16]$=120×2=240.
Observación: el mínimo común múltiplo entre dos números a y b puede calcularse así:

- Descomponer los dos números en sus factores primos.
- Formar el producto de los factores primos comunes y no comunes tomados con el mayor exponente.

Hallar el $(m.c.m.)$ de $(20\ ,30)$

$$\begin{array}{r|l}
20 & 2 \\
10 & 2 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

$$20 = 2^2 \times 5$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$m.c.m = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

También podemos hallarlo así (método abreviado)

20	30	2
10	15	2
5	15	3
5	5	5
1	1	

Se divide cada uno de los números dados entre su menor divisor. Lo mismo se hace con los cocientes que resultan hasta que todos los cocientes sean 1. El (m.c.m.) es el producto de todos los divisores primos.
El mínimo común múltiplo entre dos números a y b es el número entero más pequeño que se deja dividir simultáneamente por a y b. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

$$a = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^4 \times 13$$

$$b = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$$

$$\frac{\boxed{2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^4 \times 11 \times 13}}{2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^4 \times 13}; \qquad \frac{\boxed{2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^4 \times 11 \times 13}}{2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^3 \times 11}$$

$$[a, b] = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^4 \times 11 \times 13$$

5.9.1. Interpretación geométrica del Mínimo Común Múltiplo, (m.c.m.)

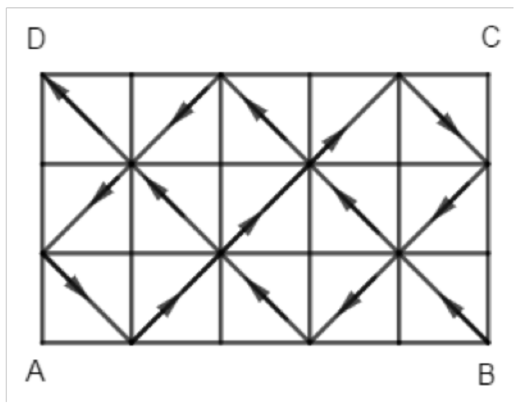
Tomemos un rectángulo ABCD en lados m y n. El rectángulo deberá estar subdividido en cuadrados unitarios. Partiendo de uno de los vértices del rectángulo, trazamos las diagonales de los cuadrados unitarios observando el siguiente orden:

- Se construye un rectángulo que tenga como base y altura el valor de que tengan los números a los cuales se les va hallar el (m.c.m.)
- Se recubre el rectángulo con cuadrados 1×1
- Se toma uno de los cuatros vértices para iniciar a trazar las diagonales, luego se traza una diagonal que al pasar por el primer cuadrado correspondiente al vértice escogido forma un ángulo de 45°. Esta diagonal se extiende hasta llegar a un lado del rectángulo
- Cuando la diagonal llega a un lado del rectángulo, se traza otra diagonal del punto donde llego y por el cuadrado correspondiente, hasta llegar a otro de sus lados y así sucesivamente.

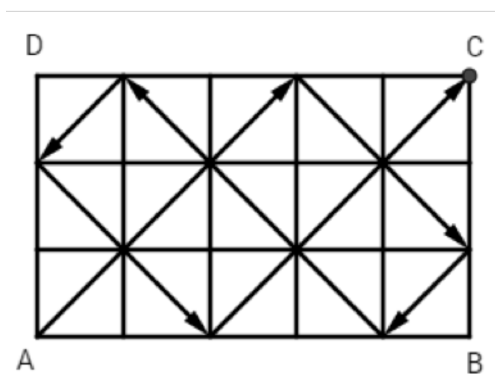
- El proceso termina cuando la diagonal llega a otro vértice del rectángulo inicial

- Contamos cuantos cuadrados tienen sus diagonales trazadas. El número encontrado es el (m.c.m.)

Ilustración:
Para hallar el (m.c.m.) de 3 y 5 (iniciando en B) observamos 15 cuadrados con sus diagonales trazadas:

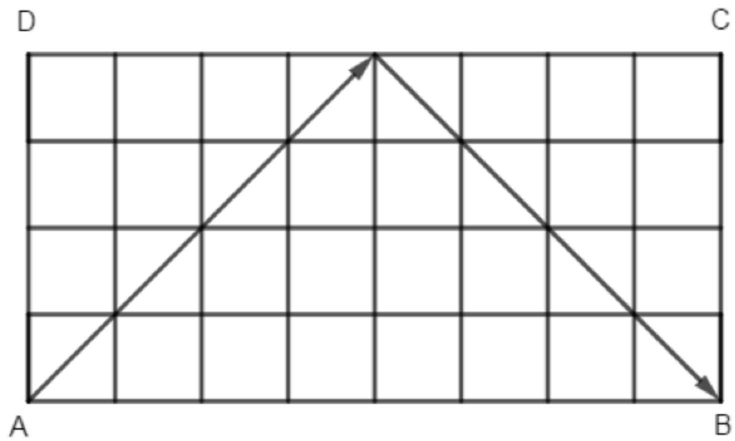


Luego $[3, 5] = 15$
Hallar el (m.c.m.) de 3 y 5 (iniciando en A) observamos 15 cuadrados con sus diagonales trazadas:



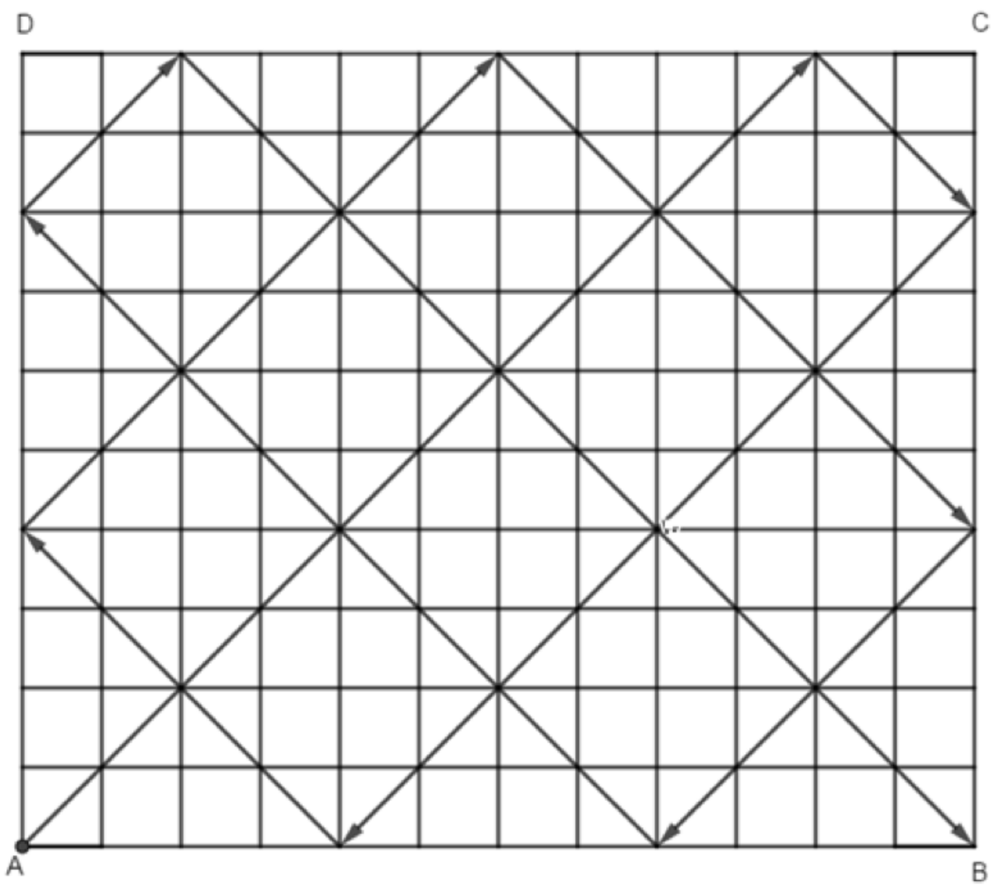
Luego $[3, 5] = 15$

Ejemplo 5.18. Hallar el (m.c.m.) de 4 y 8 (iniciando en A) observamos 8 cuadrados con sus diagonales trazadas.



Luego $[4, 8] = 8$

Ejemplo 5.19. Hallar el (m.c.m.) de 12 y 10 (iniciando en A) observamos 60 cuadrados con sus diagonales trazadas.



Luego $[12, 10] = 60$

5.9.2. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE (m.c.d.) Y (m.c.m)

1. Juan va al estadio cada 6 días y al centro comercial cada 7 días. Si hoy va a los dos lugares ¿Cuántos días pasarán para que asista a los dos lugares el mismo día?

   Solución:
   Empezamos la cuenta desde hoy, que es el día cero.
   Al estadio vuelve a ir después de 6,12,18,. . . etc. días. Es decir, los múltiplos de 6.
   Al centro comercial vuelve a ir después de 7,14,21,. . . etc. días. Es decir, múltiplos de 7. M(6)=6,12,18,24,30,36,42,48,. . . M(7)=7,14,21,28,35,42,49,. . .
   como [6 y 7] = 42, esto significa que juan visitara los dos lugares en 42 días. Podría el alumno hallar el (m.c.m.) de 6 y 7 por simple inspección. Toma el número mayor 7 y halla sus múltiplos.

   Método abreviado:

   $$\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & 2 \\ \hline 3 & 7 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \\ & 1 & \end{array} \qquad m.c.m = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

2. Andrés se enferma y su madre tiene que suministrarle los medicamentos a,b,c. A las 6 a.m. le da los tres medicamentos. Si el medicamento a lo tiene que dar cada 3 horas, el b cada 5 horas y el c cada 6 horas.
   ¿A qué hora volverá a dar simultáneamente los tres medicamentos?
   Solución:
   Si a las 6 a.m. empezaron a suministrar los medicamentos. Se determinan los múltiplos de 3,5 y 6 para saber cuándo los tres medicamentos se volverán a dar a la misma hora. Por lo tanto, debemos calcular el mínimo común múltiplo de 3,5 y 6 para esto descomponemos cada número en sus factores primos. Después hallamos el producto de los factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.

   $$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 = 2 \times 3 \\ 3 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 5 = 5$$

   $$m.c.m\,[3,5,6] = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

   Es decir, volverá a tomarse los tres medicamentos simultáneamente dentro de 30 horas.

3. Sofía tiene 22 gaseosas Cóndor y 4 jugos de naranja. Ella quiere dividirlas en grupos iguales, para varias mesas, sin que sobren gaseosas y jugos. ¿Cuál es el mayor número

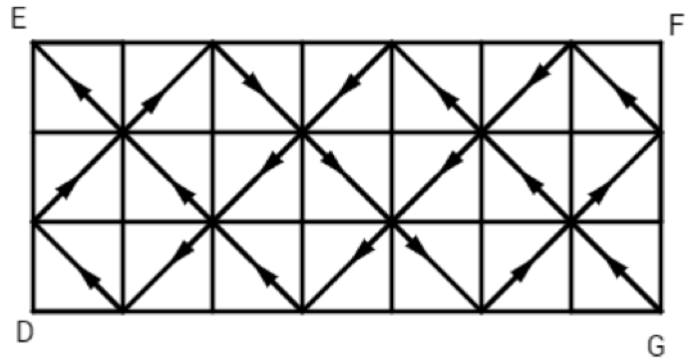
de mesas en que Sofía puede distribuir las gaseosas y los jugos?
Solución:
Es claro que debemos calcular (22,4)
Paso 1: Construir un rectángulo de dimensiones 22 y 4

Paso 2: Recubrir el rectángulo con cuadrados 4×4: contienen 5 cuadrados y sobra un rectángulo de dimensiones 2×4.
Paso 3: Recubrir este rectángulo 2×4 con cuadrados 2×2: contienen dos cuadrados 2×2 y ya quedo el rectángulo inicial recubierto con cuadrados. El lado del último cuadrado es el (m.c.d.) O sea (22,4)=2.
Obsérvese que:

$$22=5\times4+2$$
$$4=2\times2+0$$

4. Dos ciclistas parten de la meta de una pista al mismo tiempo. Uno de ellos completa su recorrido cada 3 minutos, y el otro cada 7. ¿En cuánto tiempo volverán a coincidir en el punto de salida? **Solución:**
   a. Haciendo dobleces trazamos la diagonal del cuadrado que tiene el vértice coincidente con un vértice del rectángulo.
   b. Haciendo dobleces trazamos a partir del vértice que ya se trazó, las diagonales de los cuadrados que tiene un ángulo opuesto por el vértice del cuadrado anterior, luego se traza la diagonal del cuadrado del lado a partir del vértice de donde paramos.
   c. La diagonal del cuadrado unitario debe ser trazadas hasta otro de los vértices del rectángulo DGFE.
   d. Contamos cuantos cuadrados tienen sus diagonales trazadas. Este número es el (m.c.m.)

   Para hallar el (m.c.m.) de 3 y 7 (iniciando en F) observamos 21 cuadrados sus diagonales trazadas:



Los ciclistas coincidirán de nuevo en la salida a los 21 minutos.

5. Un campesino tiene una finca rectangular que mide 362 metros de ancho y 856 metros de largo, queremos dividirla en cuadrados, de modo que estos tengan el mayor tamaño posible. ¿Qué dimensiones tendrán los cuadrados? ¿Cuántos cuadrados habrá?

$\begin{array}{r|l} 856 & 362 \\ \hline 132 & 2 \end{array}$; $856 = 2$ x $362 + 132$; $0 \leq 132 < 362$

$\begin{array}{r|l} 362 & 132 \\ \hline 98 & 2 \end{array}$; $362 = 2$ x $132 + 98$; $0 \leq 98 < 132$

$\begin{array}{r|l} 132 & 98 \\ \hline 34 & 1 \end{array}$; $98 = 2$ x $34 + 30$; $0 \leq 30 < 34$

$\begin{array}{r|l} 34 & 30 \\ \hline 4 & 1 \end{array}$; $34 = 1$ x $30 + 4$; $0 \leq 4 < 30$

$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \hline 2 & 7 \end{array}$; $30= 7$ x $4 + 2$; $0 \leq 2 < 4$

$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$; $4 = 2$ x $2 + 0$; $0 \leq 0 < 2$

Método Práctico

856	2
428	2
214	2
107	107
1	

362	2
181	181
1	

$856 = 2^3 \times 107$
$362 = 2 \times 181$
$m.c.d = 2$

Habrá que dividir la finca en cuadrados de 2×2 m
Habrá 77.468 cuadrados.
Las divisiones sucesivas pueden presentarse así:

	2	2	1	2	1	7	2
856	362	132	98	34	30	4	2
132	98	34	30	4	2	0	

Por mètodo abreviado

856	362	2
428	181	2
214	181	2
107	181	107
1	181	181
	1	

Ejemplo 5.20. Encontrar (m.c.d) (234,342) y (m.c.m)(234,342)

Por el método de Euclides hallaremos (m.c.d) (234,342)

$$342 = 234 + 18$$

$$234 = 2108 + 18$$

$$108 = 18 + 90$$

$$90 = 185$$

Luego, (342,234)=(90,18)=18
Aplicando otro método:

$$\begin{array}{r|c} 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|c} 342 & 2 \\ 171 & 3 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$$2 \times 3^2 \times 13 \qquad 2 \times 3^2 \times 19$$

$$m.c.d\ (234, 342) = 2 \times 3^2 = 18$$

m.c.m(234,342)

$$\begin{array}{rr|c} 234 & 342 & 2 \\ 117 & 171 & 3 \\ 39 & 57 & 3 \\ 13 & 19 & 13 \\ 1 & 19 & 19 \\ & 1 & \end{array} \quad 2 \times 3^2 \times 13 \times 19 = 4446$$

Luego m.c.m (234,342)=4446

5.10. Números primos

Un número entero p¿1 es primo si solo tiene dos divisores positivos: 1 y el mismo p. Un número a¿1, que tenga fuera del 1 y de sí mismo otros divisores positivos se llama compuesto.
Los primeros números primos son: 2,3,5,7,11,13,. . . .
Primeras propiedades de los Números Primos:

Teorema	**Demostración**
a) Sea a $\in \mathbb{Z}$. El menor divisor de a,distinto de 1, es un número primo.	Sea q, el menor divisor de a; $q \neq 1$. Si q fuera compuesto, digamos $q = q_1 r$ con $q_1 \in \mathbb{Z}$y $1 < q_1 < q$ Como q $\mid$ a y q_1 $\mid$q, tendriamos que $q_1 \mid$a; lo cual no es posible pues q_1 q es el divisor más pequeño de a
b) Sea a $\in \mathbb{Z}$ un numero compuesto. Sea p el divisor menor de a distinto de la unidad. Entonces p$\leq\sqrt{a}$	a $\in \mathbb{Z}$, p el divisor menor de a, p es primo. como p/a entonces, a = qp, donde q $\geq$ p o sea que qp $\geq p^2$ Luego p^2 $\leq$a o p$\leq$ $\sqrt{a}$.
El conjunto de los número primos es infinito	Supongamos que el conjunto p de números primos es infinito, P = $p_1, p_2, p_3, ...p_n$. Sea N el conjunto definido por N = $p_1.p_2.p_3....p_{n+1}$. Sea p el divisor más pequeño de N. Como se sabe p es primo. Si p es alguno de los primos del conjunto P, entonces p divide a $p_1, p_2, ...p_n$ y como P divide a N, se tendría que p divide a 1 lo cual no es posible pues p>1. Así que p es un primo que no está en p

Nota: la parte b) del teorema da una técnica para probar si un número es o no primo. A manera de ejemplo: a=79. La raíz de 79 está entre 8 y 9. Basta probar si entre los primos menores que 9 hay divisores:
2,3,5,7. Como ninguno es divisor, 79 es primo

5.10.1. LA CRIBA DE ERATÓSTENES

Dada la sucesión de números 2,3,4,5,. . . ,n; se trata de determinar la colección de primos que hay en esa lista. El procedimiento es el siguiente: tache de la lista todos los múltiplos de 2 a excepción del 2; el primer número no tachado es el 3; tache de la lista todos los múltiplos de 3 a excepción del 3; el próximo no tachado es el 5; tache de la lista todos los múltiplos de 5 a excepción del 5. Continúese de esta forma hasta alcanzar un primo menor o igual a $\sqrt{n}$.

El siguiente ejemplo ilustra el método: n=60.

2	3	**4**	5	**6**	7	**8**	**9**	**10**	11
12	13	**14**	**15**	**16**	17	**18**	19	**20**	**21**
22	23	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	29	**30**	31
32	**33**	**34**	**35**	**36**	37	**38**	**39**	**40**	41
42	43	**44**	**45**	**46**	47	**48**	**49**	**50**	**51**
52	53	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	59	**60**	

Algunos números primos son:

$$2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \ldots$$

Otras propiedades de los números primos:

Teorema	**Demostración**
Sea p un número primo dado. Si a es un entero cualquiera entonces (a, p) = 1 ó p divide a a	Como (a, p) divide a p y como p es primo, entonces (a, p) = 1 ó (a, p) = p. Además: si (a, p) = p es porque p divide a a
Si p es primo y p divide a a*b, entonces p divide a a ó p divide a b	Vamos a probar que si p divide a a*b y p divide a a entonces, obligatoriamente p divide a b. Cómo p es primo y p divide a a, entonces (a, p) = 1. Luego existen enteros s, t de tal manera que 1 = sa + tp, luego b = s(ab) + top. Como p divide a a*b y p divide a b*p entonces p divide a b. Este resultado puede extenderse a un número finiti de factores así: Si p es primo y p divide a $a_1.a_2....a_n$ entonces p divide a a_i par algul i $(1 \leq i \leq n)$
Si p , q son primos y p divide a q, entonces p = q	Si p divide a q, como q es primo, entonces p = 1 o p = q. De nuevo, como p es primo p>1, así que p = q

5.11. Teorema fundamental de la aritmética

Todo número entero a¿1 puede escribirse como producto de números primos y además de manera única sino se tiene en cuenta el orden de los factores.
Demostración:

Existencia: sea a$\in \mathbb{Z}$, $a > 1$ sea p_1 el menor divisor de a,p_1 es primo y además a=$p_1.q_1$. Si q_1=1, a es primo y no hay nada que probar. Si q_1¿1, sea p_2 el menor divisor de q_1;p_2 es primo y además q_1=$p_2.q_2$. Así que q_1=$p_3.q_2$ y a=$p_1.p_2.q_2$. Si q_2=1, a es producto de primos. Si $q_2 > 1$, el proceso puede continuar. Como a es un número fijo y cada uno de los primos es mayor que 1, en algún momento debe llegarse a una expresión de la forma $q_{(n-1)}$=$p_n.q_n$ donde q_n=1. Así que
a=$p_1.q_1$
a =$p_1.p_2.q_2$
a =$p_1.p_2.p_3.q_3$
.
.

.
a=$p_1.p_2.p_3...p_n.q_n$
a=$p_1.p_2.p_3...p_n$ pues q_n=1.
Y a es producto de primos expresando así, $[a]$ es el producto de primos

Unicidad: Supongamos que a=$p_1.p_2...p_n = q_1.q_2...q_m$. Son dos factorizaciones para a como producto de primos. Como $p_1|p_1.p_2...p_n$, luego $p_1|q_1.q_2...q_m$: sin perder generalidad (el orden no se tiene en cuenta) podemos asumir que $p_1|q_1$ y en consecuencia $p_1 = q_1$. Así que: $p_2.p_3...p_n = q_2.q_3...q_m$.
Por otro lado, $p_2|p_2.p_3...p_n$, entonces $p_2|q_2.q_3...q_m$. De nuevo podemos suponer que $p_2|q_2$ y entonces $p_2 = q_2$. Si $n < m$, después de cancelar n primos a ambos lados llegaremos a $1 = q_{(n+1)}...q_m$ Lo cual es imposible pues todos los números q_i son mayores que 1. Para cada i=1,2,... n.
Si $m < n$, llegaremos a $1 = p_{(m+1)}...p_n$. Lo cual también es imposible por la misma razón de antes.
La única posibilidad es que n=m y entonces $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n$ y la escritura es única.
Observaciones:
En la factorización de a como producto de primos puede suceder que algunos se repitan, luego en general a se escribe como $a = p_1^{(\alpha_1)}.p_2^{(\alpha_2)}....p_n^{(\alpha_n)}$ donde cada $\alpha_i \geq 1$
Los divisores de a son números de la forma $d = p_1^{(\beta_1)}.p_2^{(\beta_2)}....p_n^{(\beta_n)}$ donde $\beta_i$es tal que $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$

Ejemplo 5.21. Escribir todos los divisores de 41503. Los divisores son de la forma

$$d = 7^\alpha * 11^\beta, donde \begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 3 \\ 0 \leq \alpha \leq 2 \end{cases}$$

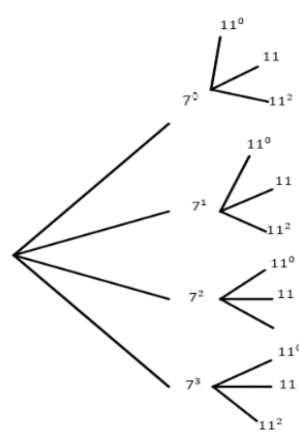
Para α hay 4 posibles valores
Para β hay 3 posibles valores
Luego a tiene doce divisores. Son:

$7^0.11^0$; $7^0.11$; $7^0 11^2$;

$7^1.11^0$; $7^1.11$; $7^1 11^2$;

$7^2.11^0$; $7^2.11$; $7^2 11^2$;

$7^3.11^0$; $7^3.11$; $7^3 11^2$;



Escribimos todos los divisores de 41503
Descomponemos el número dado

41503	7
5929	7
847	7
121	11
11	11
1	

$41503 = 7^3 \times 11^2$

Las potencias sucesivas de 7^3 son $7^3 \rightarrow$

$7 \times 7^2 \times 7^3$

Las potencias sucesivas de 11^2 son $11^2 \rightarrow$

11×11^2

Se escribe en una línea la unidad y las potencias sucesivas del primer factor primo y trazamos una raya.
Se multiplica esta primera fila de divisores por cada una de las potencias del segundo factor primo y se traza al finalizar una raya. Se multiplican todos los divisores hallados por cada una de las potencias del tercer factor primo y así sucesivamente hasta multiplicar por las potencias del último factor primo.

1	7	49	343
1 X 11	7 x 11	49 x 11	343 x 11
1 x 121	7 x 121	49 x 121	343 x 121

Divisores de 41503

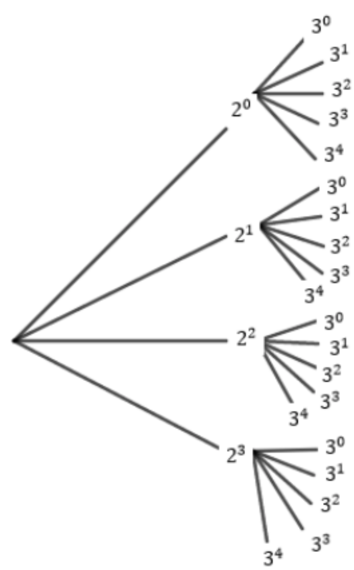
1	7	49	343
11	77	539	3773
121	847	5929	41503

A manera de ilustración: $648 = 2^3 * 3^4$ sus divisores son:

$2.3 ; 2.3^2 ; 2.3^3 ; 2.3^4 ; 2 ; 3 ; 1$

$2^2.3 ; 2^2.3^2 ; 2^2.3^3 ; 2^2.3^4 ; 2^2 ; 3^2 ; 3^4$

$2^3.3 ; 2^3.3^2 ; 2^3.3^3 ; 2^3.3^4 ; 2^3 ; 3^3$



Segundo método
Hallar los divisores de 648
Descomponemos el número

648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$648 = 2^3 \times 3^4$

Potencias sucesivas de

$2^3 \rightarrow 2^1 \times 2^2 \times 2^3$

$3^4 \rightarrow 3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4$

1	2	4	8
1x(3)	2x(3)	4x(3)	8x(3)
1x(9)	2x(9)	4x(9)	8x(9)
1x(27)	2x(27)	4x(27)	8x(27)
1x(81)	2x(81)	4x(81)	8x(81)

Divisores de 648

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
27	54	108	216
81	162	324	648

Capítulo 6

Conclusiones

- Por medio de este proyecto se busca que el estudiante aprenda a calcular el (m.c.m.) y el (m.c.d.) y a elegir cuál de los dos es el adecuado para resolver problemas. Sería recomendable que el estudiante comprenda como y porque se calcula el (m.c.m.) y (m.c.d.).
- Podemos establecer que la enseñanza de divisibilidad con el (m.c.m.) y (m.c.d.) no puede reducirse a la simple aplicación de algoritmos, sino que por diferentes métodos como lo es divisiones sucesivas, simple inspección, división entre factores primos (método abreviado) y diversas representaciones gráficas, se puede realizar un mejor desarrollo de estos temas y así los estudiantes tengan una mayor comprensión.
- Se evidencia que para el aprendizaje del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo se puede enseñar y aprender de forma lúdica sin abandonar la formalización que caracteriza a la Matemática, y como la manipulación de materiales o el uso de herramientas tecnológicas contribuye de forma positiva a esta materia, ya que el uso de diferentes recursos ayuda a la comprensión de los conceptos tratados.
- Con el análisis del tema tratado se obtiene que el (m.c.d.) y (m.c.m.) ha sufrido un proceso de evolución hasta nuestros días, donde se evidencia la relación que existe entre los distintos conceptos y sus diversas representaciones, para lograr un mejor desarrollo de los temas y así saber cómo, para qué y donde se utilizan.
- La implementación de la enseñanza de diferentes formas con material pedagógico de apoyo para retroalimentar conceptos es una estrategia que fortalece al estudiante, fomenta la sana competitividad y le permite a cada estudiante establecer relaciones entre elementos de su contexto y las problemáticas que surgen alrededor de la implementación de dicho material.

Anexo A

Secuencia didáctica I

Asignatura: Matemáticas

Unidad temática: Números Enteros

Tema general: Máximo común divisor

Contenidos: Divisores

Duración de la secuencia y número de sesiones previstas: 2 horas

Docente:

Finalidad, propósitos u objetivos: Proporcionar herramientas metodológicas y estrategias didácticas para un aprendizaje significativo del máximo común divisor.

Actividad de motivación:
Dado un numero positivo n, seccione n borrando las cifras de las unidades y las decenas, entonces duplique el número que resta y añádale el número de dos dígitos que le quitó. El resultado es divisible por 7 si y solo si n es divisible por 7. Repita el proceso hasta que la divisibilidad o no divisibilidad por 7 sea obvia. Considere por ejemplo n = 4446498

$$2(44464) + 98 = 89026$$

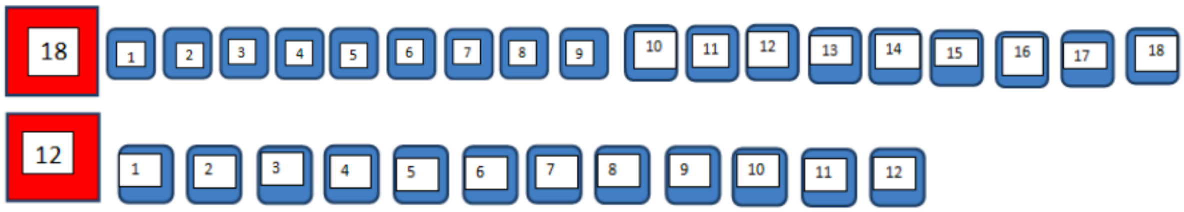
$$2(890) + 26 = 1806$$

$$2(18) + 06 = 42$$

Como 42 es divisible por 7, entonces, 4.446.498 es divisible por 7

Repetir el procedimiento con los números 782.963.092 y 24.989.104, para verificar la efectividad del criterio. ¿Por qué funciona?

Situación: Se entrega a los estudiantes dos paquetes de fichas, donde cada paquete tiene una ficha roja y otras azules, marcadas con números. Luego se pide a los estudiantes que escriban los números de la ficha azul que divide a la ficha roja.



De acuerdo con la situación anterior responder lo siguiente:

- ¿Cuáles son los números que dividen a 18 y 12?
- ¿Cómo se les llama a estos números?
- ¿Hay divisores comunes entre el 18 y el 12? ¿Cuáles son?
- ¿Cuál es el divisor mayor entre los dos números?
- ¿Cómo se define el máximo común divisor?

Lo que los estudiantes deben saber
Conocimientos esenciales
-Concepto de números naturales. -Criterios de divisibilidad. -División exacta -Tablas de multiplicar -Descomposición en factores primos -Relación “Mayor que” en números naturales.

Lo que los estudiantes deben saber hacer		
Habilidades y destrezas	**Actitudes y valores**	**Hábitos y prácticas**
-Reconocer saberes previos -Formular criterios para tomar una decisión -Analizar -Comparar -Argumentar -Interpretar -Identificar el concepto desarrollado en diferentes contextos -Reconocer y utilizar adecuadamente la información	-Valorar la importancia del saber previo en la construcción de nuevos conceptos -Reconocer la capacidad para desarrollar un tema, en una situación específica -Planear acciones utilizando razonamiento matemático -Interesarse en la búsqueda de soluciones novedosas -Respetar y valorar la opinión de otros	Apropiarse de una postura crítico -reflexiva sobre los modelos pedagógicos -Evaluar críticamente los resultados de un proceso -Realizar acciones correctivas cuando se han detectado errores -Desarrollar diferentes métodos de comunicar una teoríaInvestigar sobre los alcances de un contenido

METAS QUE SE ALCANZAN AL DESARROLLO DE LA UNIDAD

LO QUE LOS ESTUDIANTES DEBEN SABER	**LO QUE LOS ESTUDIANTES DEBEN SABER HACER**
¿Qué deben comprender los estudiantes como resultado de esta unidad?	**¿Qué deben saber hacer los estudiantes como resultado de esta unidad?**
-Comprender la definición de máximo común divisor. -Hallar los factores primos de uno o más números. -Identificar los divisores comunes	Reconoce divisores de un número, utilizándolos para encontrar el máximo común divisor, teniendo en cuenta los criterios de divisibilidad -Desarrolla habilidad para determinar el máximo común divisor de dos o más números dados. -Plantea y soluciona problemas a través del cálculo del máximo común divisor

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD

	MOMENTOS DE APRENDIZAJE	**ESTRATEGIAS – ACTIVIDADES – INSTRUCCIONES DE APRENDIZAJE**	**MATERIALES Y RECURSOS**
INDUCCION	**Enseñanza directa**	**ESTRATEGIA:** Presentación del tema **ACTIVIDAD:** Construcción del concepto de la situación	• Documentos del Ministerio de Educación Nacional • Estándares curriculares para la calidad de la
	Estudio en grupo presencial	**ESTRATEGIA:** interpretación del tema **ACTIVIDAD:** Socialización **INSTRUCCIONES:** Formar parejas para desarrollar situaciones de la vida cotidiana, luego se socializa la solución de las situaciones	

	Enseñanza directa	ESTRATEGIA: enseñanza colectiva ACTIVIDADES: -Uso cotidiano del máximo común divisor. -Diferentes métodos para hallar el (m.c.d.) -Aplicaciones sobre el tema. -Ejercicios varios INSTRUCCIONES: -Explicación de los temas respectivos -Asignación de situaciones y compromisos -Conclusiones	educación área de matemáticas. Fotocopias

APRENDIZAJE Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS	**Estudio independiente**	**ESTRATEGIA: (para la producción de conocimiento)** resolución de problemas. **Ejercicio Programado:** Mentalmente para 2 y 4 hallar el $(m.c.m)$ y el $(m.c.d)$, justificarlo. Para 2 y 4 el $(m.c.m)$ es 4 porque $\begin{array}{r\|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r\|l} 4 & 4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$ Es el número más pequeño que se a dividir por 2 y 4 $(m.c.d.)$ es 2 porque $\begin{array}{r\|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r\|l} 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$ Es el número más grande que los divide	

		Problema: Un padre les regala a sus tres hijos un dinero, al primero $85.000, al segundo $90.000 y al tercero $75.000, para repartir entre los pobres de su barrio, de modo que todos den la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad que podrán dar a cada pobre y cuantos pobres socorridos? **ACTIVIDAD:** Ver, analizar y resolver patrones de sucesiones **INSTRUCCIONES:** realizarlas de manera independiente con aportes del docente	
CULMINACION Y EVALUACION	**Estudio individual**	**ESTRATEGIA:** interpretación y argumentación del problema propuesto **ACTIVIDAD:** Solución del problema inicial **INSTRUCCIONES:** Definir y ejecutar la actividad propuesta, explicar los procesos matemáticos que utilizo para resolver esta situación.	

Anexo B

Secuencia didáctica II

Asignatura: Matemáticas

Unidad temática: Números enteros

Tema general: Mínimo común múltiplo

Contenidos:múltiplos

Duración de la secuencia y número de sesiones previstas: 2 horas

Docente:

Finalidad, propósitos u objetivos: Diseñar actividades didácticas aplicadas a la vida cotidiana con temas de mínimo común múltiplo, para fortalecer la enseñanza de la matemática.

Actividad de motivación:

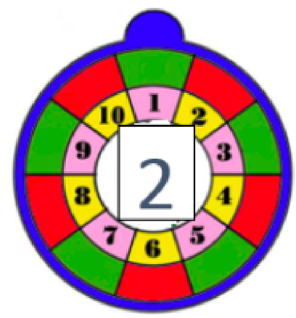
Escriba un número cualquiera de 3 dígitos, multiplíquelo sucesivamente por 7, el resultado por 11 y el resultado por 13. Considere, por ejemplo,

$$\begin{gathered} \text{n} = 567 \\ 567 \times 7 = 3.969 \\ 3969 \times 11 = 43.659 \\ 43.659 \times 13 = 567567 \end{gathered}$$

Se obtiene el número 567567.

Realice con otros números de tres dígitos el mismo proceso, verifique que contiene en común y explique la razón del resultado

Situación: Tomamos una ruleta que contiene los números de 1 a 10 como lo indica la figura. Colocamos en su centro el número 2. La hacemos girar y cuando se detenga multiplicamos el número del centro (en este caso el 2) por el número que cayo. Halle el resultado y escríbalo en un conjunto repita el proceso con los números 3 y 4.



1º *Ruleta* $\Rightarrow$ *Número central* $\boxed{\ }$ $\Rightarrow$ *producto* $\boxed{\ }$ $\Rightarrow$ *Múltiplos*{ , , , , , , ,...

2º *Ruleta* $\Rightarrow$ *Número central* $\boxed{\ }$ $\Rightarrow$ *producto* $\boxed{\ }$ $\Rightarrow$ *Múltiplos*{ , , , , , , ,...

3º *Ruleta* $\Rightarrow$ *Número central* $\boxed{\ }$ $\Rightarrow$ *producto* $\boxed{\ }$ $\Rightarrow$ *Múltiplos*{ , , , , , , ,...

De acuerdo con la situación anterior, responder lo siguiente:

- ¿Cómo se llama el resultado de las multiplicaciones que aparece cuando coloca cada uno de los números?
- Coloque en un conjunto los resultados anteriores y halle los múltiplos de cada número del conjunto
- ¿Cómo podemos llamar al menor de los números de los múltiplos comunes?
- ¿Cuántos múltiplos comunes se obtiene entre los resultados del 2 y 3, de la misma manera entre el 3 y 4?
- ¿Cómo definen el mínimo común múltiplo partiendo de la situación?
- ¿Cómo hallo el mínimo común múltiplo?

LO QUE LOS ESTUDIANTES DEBEN SABER	LO QUE LOS ESTUDIANTES DEBEN SABER HACER		
Conocimientos esenciales	**Habilidades y destrezas**	**Actitudes y valores**	**Hábitos y prácticas**
• Concepto de números naturales. • Orden de números naturales. • Operaciones básicas (multiplicación) • Concepto de múltiplos y sus propiedades • Números primos y factorización de un número	• Reconocer saberes previos • Analizar • Comparar • Argumentar • Interpretar • Identificar el concepto desarrollado en diferentes contextos • Reconocer y utilizar adecuadamente la información	• Valorar la importancia del saber previo en la construcción de nuevos conceptos • Reconocer la capacidad para desarrollar un tema, en una situación específica. • Planear acciones utilizando razonamiento matemático. • Interesarse en la búsqueda de soluciones novedosas • Respetar y valorar la opinión de otros	• Apropiarse de una postura crítico-reflexiva sobre los modelos pedagógicos • Evaluar críticamente los resultados de un proceso • Realizar acciones correctivas cuando se han detectado errores • Desarrollar diferentes métodos de comunicar una teoría • Investigar sobre los alcances de un contenido

METAS QUE SE ALCANZAN A DESARROLLAR LA UNIDAD

LO QUE LOS ESTUDIANTES DEBEN SABER	LO QUE LOS ESTUDIANTES DEBEN SABER HACER
¿Qué deben comprender los estudiantes como resultado de esta unidad?	**¿Qué deben saber hacer los estudiantes como resultado de esta unidad?**
• Comprender la definición del mínimo común múltiplo • Construcción de los múltiplos comunes de los números. • Aplicaciones de diferentes representaciones del $(m.c.m)$	• Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones. • Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD

	MOMENTOS DE APRENDIZAJE	**ESTRATEGIAS – ACTIVIDADES – INSTRUCCIONES DE APRENDIZAJE**	**MATERIALES Y RECURSOS**
INDUCCION	**Enseñanza directa**	**ESTRATEGIA:** Introducción del tema **ACTIVIDAD:** Construcción del concepto por medio del juego o situaciones de la vida cotidiana	• Documentos del Ministerio de Educación Nacional • Estándares curriculares para la calidad de la
	Estudio en grupo presencial	**ESTRATEGIA:** Conceptos adquiridos **ACTIVIDAD:** Situaciones tipo problema. **INSTRUCCIONES:** En una bolsa hacer que los grupos de dos o tres integrantes saquen un papelito, donde en cada uno hay una situación. Realizar una pequeña discusión en cada grupo de cómo resolver cada una de estas situaciones, luego realizar la solución del problema. Para socializar la solución, cada grupo escoge un compañero a exponer la solución.	

APRENDIZAJE Y DESARROLLO DE COMPETENCIAS	**Enseñanza directa**	**ESTRATEGIA:** enseñanza directa **ACTIVIDADES:** Presentación de la situación problema inicial Diferentes representaciones del $(m.c.m.)$ con números mayores de una cifra. Ejemplos sobre el tema Ejercicios varios **INSTRUCCIONES:** Explicación de los temas respectivos Conclusiones Asignación de tareas y compromisos	educación área de matemáticas. • Cuaderno, lapicero, lápiz, borrador • Tablero, marcador • Fotocopias • Portátil

	Estudio independiente	**ESTRATEGIA: (para la producción de conocimiento)** plantear un problema y establecer criterios para decidir adecuadamente al momento de solucionarlo. **Problema:** Una madre debe darle a su hijo dos medicamentos Dolex y suero fisiológico. El Dolex debe dárselo cada 4 horas y el suero cada 3 horas. Si a las 6 de la mañana le da los dos medicamentos por primera vez, ¿a qué horas volverá a darle simultáneamente (al mismo tiempo) los dos medicamentos por segunda vez? ¿Por tercera vez? **ACTIVIDAD:** Desarrollar actividades propuestas por el docente en la clase **INSTRUCCIONES:** realizarlas de manera individual con aportes del docente	• Video beam

CULMINACION Y EVALUACION	**Estudio individual**	**ESTRATEGIA:** interpretación y argumentación del problema propuesto **ACTIVIDAD:** Solución del problema inicial **INSTRUCCIONES:** • Definir y ejecutar la actividad propuesta, explicar los procesos matemáticos que utilizo para resolver esta situación. • Teniendo en cuenta las preguntas propuestas en el problema cada uno darle una respuesta y luego se escoge al azar para socializar las preguntas.	

Anexo C

Ejercicios propuestos

C.1. Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

1. Hallar la menor distancia que se puede medir exactamente con reglas de 30 cm, de 60 cm y de 90 cm de largo.

2. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que se necesita para comprar un número exacto de camisas de \$20.000, \$35.000 o \$50.000 cada uno, si quiero que en cada caso me sobren \$2.500?

3. Del Huila se exporta para Alemania: aguacate, cholupa y cacao. El 1 de marzo enviaron los tres productos. Si el aguacate se envía cada 4 días, la cholupa cada 5 días y el cacao cada 8 días. ¿En qué fecha se volverán a enviar los 3 productos simultáneamente?

4. ¿Cuál será la menor longitud de una varilla que se puede dividir en pedazos de 12 cm, 9 cm o 30 cm de longitud sin que sobre ni falte nada y cuántos pedazos de cada longitud se podrían sacar de esa varilla?

5. Tres motos salen juntas en una carrera de una pista circular. Si el primero tarda 30 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo tarda 31 segundos y el tercer 32 segundos, ¿al cabo de cuántos segundos pasarán juntos por la línea de salida y cuantas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo?

6. Tres aviones salen de Neiva el 10 de marzo. El 1° cada 8 días, el 2° cada 10 días, el 3° cada 20 días. ¿Cuáles serán las dos fechas más próximas en que volverán a salir el mismo día?

C.2. Máximo común divisor (m.c.d.)

1. Se tiene tres varillas de 110 cm, 120 cm, 140 cm de longitud respectivamente. Se quieren dividir en pedazos de la misma longitud sin que sobre ni falte nada. Decir tres longitudes posibles para cada pedazo.

2. Dos cintas de 6 m y 8 m de longitud se requieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo? ¿Cuántos pedazos obtengo?

3. ¿Cuál será la mayor longitud de una medida con la que se puedan medir exactamente tres dimensiones de 220 metros, 590 metros y 840 metros?

4. Una persona camina un número exacto de pasos desplazándose 650 cm, 800 cm, 1000 cm. ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

Bibliografía

Apuntes de clases del profesor Augusto Silva.

Baldor, A. (1999). *Aritmética Teórico Practico*. México: Publicaciones Cultural.

Bermejo, V.; Betancourt, S. y Vela, E. (2009). *Los algoritmos*. En Bermejo, V.(Coord.), Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor (pp. 193-214). Madrid: Editorial CCS.

Buendía E. L.; Fernández Cano, A. y Rico Romero, L. (1990). *Algoritmos y estrategias en la enseñanza del cálculo básico*. Revista de investigación educativa, RIE, 8(15), 51-62.

Díaz Díaz, R. (2006). *Apuntes sobre la aritmética maya*. Educere: Revista Venezolana de Educación, 35, 621-627.

Fernández, J. y Muñoz Santonja, J. (2007). *Las T.I.C. como herramienta educativa en matemáticas*. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, 9, 119- 147.

Ifrah, G. (2008). *Historia universal de las cifras: La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe.

Joya, A.; Puentes, X.; Cely, V.; Chizner, J. (2010). *Hipertexto matemáticas sexto*. Bogotá, Colombia: Santillana.

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza.* Buenos Aires: Paídos.

Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en las matemáticas una nueva práctica*. España: Wolters Kluwer.

Montealegre, M. (2008). *Enfoque Sistemático de las Matemáticas Escolares*. Colombia, Universidad Surcolombiana.

Ñabraña, A. (2002). *Algoritmos e Matemáticas*. Educa: Revista galega do ensino, 34,147-166.

Piaget, J. (1980). *Psicología y pedagogía*. Barcelona: Ariel.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsoi.