Neiva, 06 de Noviembre

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

Los suscritos:

Carlos Saul Mayor Poveda, con C.C. No. 1075.287.770,

José Israel Patiño Caviedes, con C.C. No. 1075.293.796,

Autores de la tesis y/o trabajo de grado titulado Construcción de los números reales a partir de Sucesiones de Cauchy presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de Licenciado en matemáticas.

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Carlos Saul Mayor Poveda

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Construcción de los números reales a partir de Sucesiones de Cauchy

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Mayor Poveda	Carlos Saul
Patiño Caviedes	José Israel

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Duarte Vidal	Julio Cesar
Reyes Bahamon	Francisco Javier

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Duarte Vidal	Julio Cesar

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2020 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 109

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas_X_ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Portable Document Format

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*: Tesis meritoria

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Número racional	Rational Number	**6.** Cuerpo ordenado arquimediano	Archimedian Ordered Body
2. Número real	Real Number	**7.** Completitud	Completeness
3. Sucesión de Cauchy	Cauchy Succession	**8.** Convergencia	Convergence
4. Clase de equivalencia	Equivalence Class	**9.** Isomorfismo	Isomorphism
5. Espacio métrico	Metric Space	**10.** Desarrollo decimal	Decimal Development

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Tradicionalmente, los números reales son presentados de una manera bastante intuitiva e informal, lo que es un obstáculo para los que se quieren sumergir en algunos tópicos de la matemática muchos más rigurosos. Por lo tanto, es importante tener un conocimiento solido sobre este conjunto y sus propiedades para el propósito del trabajo matemático formal. El trabajo de grado titulado “Construcción de los números reales a partir de sucesiones de Cauchy” presenta una de las rutas que se pueden tomar para extender al conjunto de los números racionales en un conjunto mucho más amplio y rico en propiedades que si se pueda poner en correspondencia biyectiva con la recta numérica. El espacio anterior se construyó como clases de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy definidas en el conjunto de los números racionales, donde se obtuvo, como resultado final, a un cuerpo ordenado arquimediano, completo como espacio métrico.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Traditionally, real numbers are presented in a fairly intuitive and informal way, which is an obstacle for those who want to immerse themselves in some more rigorous mathematics topics. Therefore, it is important to have a solid knowledge of this set and its properties for the purpose of formal mathematical work. The work of degree entitled "Construction of real numbers from Cauchy successions" presents one of the routes that can be taken to extend to the set of rational numbers in a much broader set and rich in properties that if it can be put into bijective correspondence with the number line. The previous space was constructed as equivalence classes of all the Cauchy sequences defined in the set of rational numbers, where it was obtained, as a final result, to an ordered arquimedean body, complete as metric space.

APROBACION DE LA TESIS

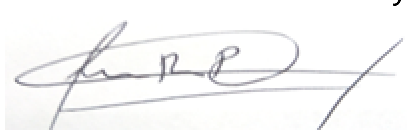
Nombre Presidente Jurado: Julio Cesar Duarte

Firma: 

Nombre Jurado: Julio Cesar Duarte Vidal

Firma: 

Nombre Jurado: Francisco Javier Reyes Bahamon

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcción de los números reales a partir de Sucesiones de Cauchy

Carlos Saul Mayor Poveda
José Israel Patiño Caviedes

Neiva, Huila
2020

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcción de los números reales a partir de Sucesiones de Cauchy

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Carlos Saul Mayor Poveda
20132120786
José Israel Patiño Caviedes
20132121942

Asesor:
Profesor. Julio Cesar Duarte

Neiva, Huila
2020

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Mayo de 2020

Agradecimientos

En primer lugar, tenemos que agradecer a Dios por su infinito amor hacía nosotros. Sin él nada de esto hubiera sido posible.

A nuestras familias por ser una de nuestras más grandes motivaciones para seguir creciendo cada día. Gracias porque ustedes fueron un factor fundamental durante todo este proceso.

A todos los profesores de la USCO con los que tuvimos la oportunidad de crecer academicamente, nuestros más sinceros sentimientos de gratitud y respeto. En especial, al profesor Mauricio Penagos por ayudarnos a ver la matemática no como una ciencia rutinaria y algoritmica, si no como una ciencia donde lo que prevalece es la abstracción y el análisis.

Sin duda alguna, a nuestro asesor, el Mg. Julio Cesar Duarte, por su disposición y colaboración para poder realizar el presente trabajo, y por sus buenos deseos para que nosotros sigamos creciendo en el campo de las matemáticas puras.

A la USCO, nuestra alma mater, agradecemos que nos haya abierto sus puertas. Gracias porque en esta institución no sólo crecimos academicamente si no que también vivimos experiencias únicas e irrepetibles que jamás olvidaremos.

A nuestro círculo más cercano de amigos, en especial, a todos los colegas con los que pasamos ratos muy agradables y divertidos en el Centro de Estudios Leonhard Euler.

Tal vez falten más personas a las que tengamos que agradecer, a todos gracias, muchas gracias por contribuir de alguna forma con este logro.

Introducción

El presente trabajo de grado busca exponer en cuatro capítulos una de las rutas que se pueden tomar para extender al conjunto de los números racionales en un conjunto mucho más amplio y rico en propiedades, que tradicionalmente llamamos conjunto de los números reales.

El lector deberá estar relacionado con algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos, aunque en el capítulo de las preliminares se presentará de manera general algunos resultados que nos servirán de base para poder desarrollar todo el contenido de éste trabajo. Habrán demostraciones que se desarrollarán de manera detallada, algunas se desarrollarán de manera condensada, y algunas proposiciones no tendrán demostración. En cualquier caso, el lector deberá completar las demostraciones que falten, o los detalles que se omitan en alguna prueba condensada.

Se hará un estudio básico de las estructuras matemáticas necesarias para poder construir al conjunto de los números reales. Se presentarán las estructuras de grupos, anillos, cuerpos, espacios métricos y cuerpos totalmente ordenados. Mostraremos que todas éstas estructuras las comparte el conjunto de los números racionales y el conjunto que construiremos a partir de éste. Además, presentaremos la manera para determinar cuando dos cuerpos, dos espacios métricos, o dos cuerpos ordenados son estructuralmente equivalentes.

Demostraremos que los números racionales no llenan completamente la recta, es decir, probaremos que entre dos números racionales siempre podremos encontrar números que no son racionales. Luego presentaremos una de las propiedades que tiene que cumplir un conjunto para poder afirmar que éste llene completamente la recta. Ésta propiedad se conoce en matemáticas como completitud de un conjunto, y el conjunto que vamos a construir la deberá satisfacer.

Mostraremos que la noción de completitud la podemos definir en términos de conjuntos totalmente ordenados, de cuerpos ordenados o de espacios métricos, y probaremos que todos los conceptos sobre completitud que se presenten son equivalentes.

Uno de los resultados más importantes que demostraremos en este trabajo será el de la equivalencia estructural que existe entre dos cuerpos ordenados completos cualesquiera. Para nuestros propositos éste resultado es fundamental, porque nos dirá que no importa la forma en la que construyamos algún cuerpo ordenado completo, en cuyo caso, éste será único y se corresponderá con cualquier otro cuerpo ordenado completo. Luego, el cuerpo ordenado completo que vamos a construir lo vamos a identificar con el cuerpo ordenado completo de los números reales.

La construcción de los números reales que presentaremos se hará a partir de sucesiones de Cauchy de números racionales. Por lo tanto, será necesario un capítulo netamente dedicado al estudio de las sucesiones en espacios métricos. Se estudiará la convergencia de sucesiones, y veremos que el concepto de espacio métrico completo dependerá de todas las sucesiones de Cauchy definidas en dicho espacio y de la convergencia de las mismas. El conjunto que vamos a construir será el conjunto de las clases de equivalencia de todas las sucesiones de Cauchy definidas en el conjunto de los números racionales, y demostraremos que este conjunto se puede dotar de una estructura de cuerpo ordenado, completo como espacio métrico.

Justificación

Los números reales y sus propiedades tienen gran relevancia en diferentes campos de la matemática, como el álgebra lineal, el análisis, la topología, la geometría diferencial, entre otras, siendo el análisis matemático una de las ramas en la cual éste conjunto tiene un protagonismo importante.

Tradicionalmente los números reales son presentados de una manera bastante intuitiva e informal, lo que es un obstáculo para los que se quieren sumergir en algunos tópicos de la matemática muchos más rigurosos. Por lo tanto, es importante tener un conocimiento sólido sobre éste conjunto y sus propiedades para el proposito del trabajo matemático formal.

Históricamente, los números reales surgieron de la necesidad de darle una base rigurosa al cálculo desarrollado por los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Leibniz, pues durante mucho tiempo éstos números se utilizaban sin una definición rigurosa de los mismos, lo que desencadeno una serie de paradojas que condujeron en la necesidad de crear una base rigurosa para la matemática.

En el siglo XIX los matemáticos Georg Cantor y Richard Dedekind presentaron las primeras construcciones formales del conjunto de los números reales; Georg Cantor con su construcción de los números reales a partir de sucesiones de Cauchy y Richard Dedekind con su construcción de los números reales por cortaduras de Dedekind. En éste trabajo se opto por presentar la construcción de Georg Cantor porque ésta se puede hacer partiendo del estudio de algunas estructuras algebraicas y del estudio de las sucesiones, fundamentales para poder avanzar en el campo del análisis matemático, tópico el cual estamos interesados en seguir estudiando.

Objetivos

Objetivo general

Presentar la teoría de sucesiones en espacios métricos y a partir de esta proporcionar argumentos sobre la incompletitud del cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales, usándola como un insumo para su respectiva completitud como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.

Objetivos específicos

- Analizar algunos conceptos y resultados de la teoría de estructuras algebraicas y espacios métricos, para una posterior caracterización e identificación del cuerpo ordenado completo de los números reales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy.
- Exponer formalmente la relación de isomorfismo que existe entre dos cuerpos ordenados completos cualesquiera para luego usarla en la identificación del cuerpo ordenado completo que se pretende construir con el cuerpo ordenado completo de los números reales.
- Exhibir una teoría sobre desarrollos decimales que nos provea de los resultados más importantes y significativos para una formalización de la clasificación tradicional que se hace de los números reales como desarrollos decimales exactos, periódicos puros y mixtos e inexactos no periódicos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En éste capítulo presentaremos algunos conceptos y resultados básicos que nos servirán de base para desarrollar el contenido del trabajo. La primera sección estará dedicada a un estudio elemental de teoría de conjuntos, mientras que la otra se encaminará a demostrar el algoritmo de la división. Los conceptos y resultados más importantes para la construcción del conjunto que identificaremos con los números reales, serán introducidos, en su gran mayoría, con una pequeña motivación que permita evidenciar la importancia del concepto o resultado para la construcción que presentaremos en el último capítulo. Por lo tanto, en algunas ocasiones mencionaremos algunos objetos matemáticos que se desarrollarán formalmente en capítulos posteriores. Se le aconseja al lector analizar dichas introducciones sólo de una forma nocional, en el caso de que no se tengan conocimientos sólidos sobre los objetos que se estén mencionando, en otras palabras, rescatando solo la esencia de dichos comentarios con respecto al concepto o definición que estemos construyendo. Lo anterior con el objetivo de que tales definiciones y resultados cobren un mayor sentido en los capítulos venideros.

1.1. Conjuntos

Recordemos que intuitivamente un conjunto es una reunión de objetos a los cuales llamaremos elementos. Generalmente, los conjuntos se nombran con letras mayúsculas, mientras que los elementos se nombran con letras minúsculas. Si X es un conjunto cualquiera, y x es un elemento arbitrario de X, entonces a ésta relación la representaremos como $x \in X$, lo que se puede leer como "x pertenece al conjunto X", o de cualquier otra forma que indique que x es un elemento del conjunto X. Si ocurre lo contrario, entonces esto usualmente se nota como $x \notin X$, lo que podemos leer como "x no pertenece al conjunto X".

Los conjuntos se pueden definir por compresión o por extensión. Como el lector recordará, un conjunto por extensión es un conjunto en el cual sus elementos están dados de forma explicita, y ésto generalmente se hace por medio de llaves. Un conjunto se define por comprensión cuando se da a conocer una propiedad que permita determinar de manera exacta cuando un objeto pertenece o no pertenece a dicho conjunto. Un conjunto definido por comprensión también se puede representar por medio de llaves en la forma $\{x : x \textit{ cumple la propiedad } P\}$, donde los dos puntos significan "tales que", y P es la propiedad que debe cumplir algún objeto para poder afirmar que pertenece al conjunto. La notación anterior se lee de manera completa como "los x tales que satisfagan la propiedad P".

En ocaciones también tendremos que usar la notación $\{x \in Y : x \textit{ cumple la propiedad } P\}$, la cual se lee como "los x que pertenecen al conjunto Y tales que satisfagan la propiedad P", y se usa cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto y además satisfacen una propiedad en común.

Como el lector sabrá, los conjuntos de mayor interes son los que tienen elementos, es decir, los conjuntos no vacíos, donde éste conjunto se puede definir por medio de llaves de la siguiente manera: $\emptyset = \{x : x \neq x\}$. Notemos que esta definición entra en contradicción con el concepto que presentamos de conjunto, motivo por el cual tuvimos que utilizar la palabra intuitivamente, pues en realidad los conjuntos no se pueden definir de una manera rigurosa. Si el lector está interesado en indagar en la paradoja que acabos de describir, puede ver los libros [1] y [2], donde se expone una teoría de conjuntos detallada.

Por otro lado, el conjunto de números reales que pretendemos construir se va a cimentar por la víspera, luego, será necesario definir, en primer lugar, la contenencia de conjuntos, pues se demostrará que $\mathbb{Q}$ es una parte de $\mathbb{R}$, lo que también nos dice que necesitamos definir de manera formal al conjunto de partes de un conjunto. Además, el conjunto de los números racionales no es la mayor parte del conjunto de los números reales, y esto nos crea la necesidad de presentar una definición de conjuntos iguales.

Definición 1.1.1 (Contenencia de conjuntos)**.** Un conjunto no vacío X es un subconjunto de otro conjunto no vacío Y, lo cual notaremos como $X \subseteq Y$, si y sólo si, todo elemento de X es un elemento de Y.

Ejemplo 1.1.1. Un ejemplo trivial de contenencia es el de todo conjunto consigo mismo. También se puede demostrar que el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto.

Proposición 1.1.1 (Transitividad de la inclusión)**.** Sean X, Y y Z conjuntos arbitrarios. Si $Y \subseteq X$ y $X \subseteq Z$, entonces $Y \subseteq Z$.

Definición 1.1.2 (Partes de un conjunto)**.** Sea X un conjunto cualquiera. Se define el conjunto de partes de X como el conjunto $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$. Es decir, el conjunto de partes de un conjunto cualquiera es el conjunto de todos sus subconjuntos.

Ejemplo 1.1.2. De la definición anterior es inmediano que para un conjunto cualquiera X, se tiene que $X, \emptyset \in \mathcal{P}(X)$.

Definición 1.1.3 (Cardinal de un conjunto)**.** Se define el cardinal de cualquier conjunto finito X como el número de elementos que tiene dicho conjunto. A este número natural lo notaremos como $\#(X)$.

Ejemplo 1.1.3. Como ejemplo tenemos que $\#(\emptyset) = 0$.

Proposición 1.1.2. Si X es un conjunto cualquiera, entonces $\#(\mathcal{P}(X)) = 2^{\#(X)}$.

Definición 1.1.4 (Igualdad de conjuntos)**.** Dos conjuntos no vacíos A y B son iguales, si y sólo si, todo los elementos de A son elementos de B, y todo elemento de B es un elemento de A. En otras palabras, $A = B$, si y sólo si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Escribiremos $A \subset B$ cuando $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

1.1.1. Operaciones entre conjuntos

Como se mencionó en la introducción, el conjunto que vamos a identificar con $\mathbb{R}$ será un conjunto de subconjuntos de un cierto conjunto de sucesiones de Cauchy definidas en $\mathbb{Q}$, donde al realizar la unión de todos estos subconjuntos obtenemos de nuevo al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Además, en el tercer capítulo el lector se dará cuenta que el cardinal de esos subconjuntos es mayor a 2, y que no tienen elementos en común. Luego, lo anterior nos motiva, en primer lugar, a definir la unión y la intersección de conjuntos, además de generalizar estas dos operaciones. Por otro lado, también se definirá el producto cartesiano de dos conjuntos, pues esta operación será la que nos servirá de base más adelante para definir el concepto de función, que será clave en la identificación del conjunto que vamos a construir con el conjunto de los números reales.

Definición 1.1.5 (Unión de conjuntos)**.** Sean X e Y conjuntos cualesquiera. La unión de los conjuntos X e Y se define como el conjunto $X \cup Y = \{z : z \in X \vee z \in Y\}$.

Ejemplo 1.1.4. Es claro que para cualquier par de conjuntos X e Y, $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$, y $X \cup X = X$, $A, B \subseteq A \cup B$. Además, la unión de todos los elementos del conjunto $\mathcal{P}(X)$ nos da como resultado al conjunto X.

Definición 1.1.6 (Intersección de conjuntos)**.** Sean X e Y conjuntos cualesquiera. La intersección de los conjuntos X e Y se define como el conjunto $X \cap Y = \{z : z \in X \wedge z \in Y\}$. En otras palabras, la intersección de dos conjuntos es el conjunto de todos los elementos que tienen en común.

Ejemplo 1.1.5. Si dos conjuntos X e Y no poseen elementos en común, entonces es claro que $X \cap Y = \emptyset$. Cuando la intersección de dos conjuntos sea vacía, diremos que los conjuntos son disyuntos. También tenemos que para cualquier par de conjuntos X e Y, $X \cap X = X$, $X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$, y $A, B \subseteq A \cap B$.

Proposición 1.1.3. Sean X, Y, Z y W conjuntos arbitrarios. Se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $X \cup Y = Y \cup X$.

(b) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.

(c) $X \cup Y = X \leftrightarrow Y \subseteq X$.

(d) $X \subseteq Y \wedge Z \subseteq W \rightarrow X \cup Z \subseteq Y \cup W$.

(e) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Nota 1.1.1. La primera y segunda propiedad nos dicen que la unión es una operación conmutativa y asociativa respectivamente. La última propiedad se le conoce como la distributividad de la unión respecto a la intersección. Además, en la proposición anterior podemos cambiar a la unión por la intersección y a la intersección por la unión y tendríamos un resultado análogo.

Definición 1.1.7 (Diferencia de conjuntos)**.** Se define la diferencia entre dos conjuntos cualesquiera X e Y como el conjunto $X - Y = \{z : z \in X \wedge z \notin Y\}$. Cuando $Y \subset X$ el conjunto $X - Y$ lo conforma los elementos que le faltan al conjunto Y para llegar a ser el conjunto X. A esta diferencia la definimos como el complemento del conjunto Y respecto del conjunto X, y la notaremos como Y'_X. Como caso particular, podemos tomar el complemento de un conjunto cualquiera X respecto de el conjunto de todos los conjuntos U. A este conjunto lo definiremos simplemente como el complemento de un conjunto cualquiera, y lo notaremos como X'.

Ejemplo 1.1.6. Es sencillo demostrar que para X e Y conjuntos cualesquiera, $X - Y = X - (X \cap Y)$. Luego, cuando $X \cap Y = \emptyset$, entonces $X - Y = X$. Otro ejemplo es la diferencia $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}$ es el conjunto de los números irracionales. Es importante aclarar que en esencia, el cojunto que estámos buscando constuir es el mismo $\mathbb{I}$, pues la construcción que expondremos en el último capítulo se hará a partir de sucesiones de Cauchy definidas en $\mathbb{Q}$, en otras palabras, el conjunto de los números racionales será nuestra plataforma para construir al conjunto que al unirlo con $\mathbb{Q}$ nos de $\mathbb{R}$, osea, el mismo $\mathbb{I}$.

Proposición 1.1.4. Sean X e Y conjuntos cualesquiera. Se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $(X')' = X$.

(b) $X \subset Y \leftrightarrow X' \subset Y'$.

(c) $X = \emptyset \leftrightarrow X' = U$.

(d) $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$.

(e) $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$.

Definición 1.1.8 (Colecciónes de conjuntos)**.** Una colección C es un conjunto cuyos elementos también son conjuntos. A las colecciones también se les suele llamar familias de conjuntos.

Ejemplo 1.1.7. Como ejemplo de una familia tenemos al conjunto de partes de cualquier conjunto. Otro ejemplo es el conjunto que vamos a identificar con $\mathbb{R}$, que será una familia de conjuntos de sucesiones de Cauchy de números racionales.

Definición 1.1.9 (Unión generalizada)**.** La unión generalizada de todos los elementos de una colección arbitraria C se define como el conjunto

$$\bigcup C = \{x : (\exists X \in C)(x \in X)\}. \tag{1.1}$$

Definición 1.1.10 (Intersección generalizada)**.** La intersección generalizada de todos los elementos de una colección arbitraria C se define como el conjunto

$$\bigcap C = \{x : (\forall X \in C)(x \in X)\}. \tag{1.2}$$

Las dos definiciones anteriores fueron tomadas de ([1], pág 31).

El concepto que presentaremos a continuación, aunque a simple vista parezca algo muy simple, nos abrirá el camino para definir más adelante a las funciones, que como ya lo hemos dicho, nos permitirán identificar al conjunto de los números reales con el conjunto que vamos a construir en el último capítulo. Observemos que estámos afirmando que la siguiente definición será la base para conceptualizar al objeto matemático llamado función, pero se había dicho que éste concepto estará inducido por otro objeto matemático llamado producto cartesiano. Como es de esperarse, éste último dependerá del siguiente. Una de las ideas centrales que está inmersa en tal identificación es la de la asociación que se puede hacer de un conjunto en otro conjunto, bajo un cierto criterio que tradicionalmente llamamos “regla de asignación”. Luego, en el último capítulo le asignaremos a cada número real uno y sólo un conjunto de sucesiones de Cauchy, objetos matemáticos que presentaremos con precisión en el tercer capítulo. De ésta manera, si $x \in \mathbb{R}$ y S_x es el conjunto de sucesiones de Cauchy que le vamos a asignar a $x \in \mathbb{R}$, entonces a ésta asignación la podemos notar como (x, S_x), donde a éste último símbolo lo llamamos pareja ordenada con primera componente $x \in \mathbb{R}$ y segunda componente S_x. Lo anterior nos motiva a definir lo siguiente:

Definición 1.1.11 (Pareja ordenada)**.** Se dice que una colección de conjuntos $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ es una pareja ordenada con primer componente x y segunda componente y. La notación usual para una pareja ordenada $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ esta dada por (x, y).

Para nuestros propositos, las parejas que nos van a interesar en el último capítulo son todas las de la forma (x, S_x), donde $x \in \mathbb{R}$ y S_x es un conjunto de sucesiones de Cauchy. El conjunto formado por todas éstas parejas ordenadas no es nada más y menos que el producto cartesiano formado por el conjunto de los números reales y un subconjunto del conjunto de partes del conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales.

Definición 1.1.12 (Producto cartesiano)**.** Se define el producto cartesiano de dos conjuntos arbitrarios X e Y como el conjunto $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$. Al producto cartesiano de cualquier conjunto A consigo mismo lo notaremos simplemente como A^2.

De la definición de parejas ordenadas es inmediata la siguiente:

Proposición 1.1.5 (Igualdad de parejas ordenadas)**.** Sean (a, b) y (x, y) parejas ordenadas cualesquiera. Se cumple que $(a, b) = (x, y)$, si y sólo si, $a = x$ y $b = y$.

También es obvio el siguiente teorema. Si el lector no está muy convencido del mismo, puede ver su demostración en la referencia que se deja:

Teorema 1.1.1. *([1], pág 66) Si X e Y son conjuntos arbitrarios, entonces existe un único conjunto formado por todas las parejas ordenadas con primera componente un elemento de X y segunda componente un elemento de Y.*

Dejamos al lector la demostración de la siguiente proposición. El resultado es importante porque nocionaliza la distributividad de una operación con respecto a otra. Cuando construyamos al conjunto que identificaremos con el conjunto de los números reales, mostraremos que una de las operaciones que definamos en dicho conjunto distribuye con respecto a otra operación que también definiremos en el mismo conjunto.

Proposición 1.1.6. Sean X, Y, Z y W conjunto cualesquiera. Se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

(b) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$.

(c) $X \times (Y - Z) = (X \times Y) - (X \times Z)$.

Nota 1.1.2. Continuando con el argumento que utilizamos para introducir la proposición anterior, observamos que ésta básicamente nos dice que el producto cartesiano distribuye respecto a la unión, la intersección y la diferencia de conjuntos.

1.1.2. Relaciones

El concepto más importante que hemos presentando hasta el momento es el de producto cartesiano, pues aunque paresca algo muy práctico de hacer, cuando lo llevamos a casos concretos vemos que esta operación resulta ser una herramienta muy últil para relacionar de alguna forma los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto y a partir de estas relaciones obtener resultados muy interesantes que en ocasiones hasta retan nuestra intuición. El análisis que presentaremos a continuación nos servirá, en primer lugar, para determinar de una manera intuitiva a él cardinal de algunas de las partes más importantes de $\mathbb{R}$, y en segundo lugar, para dejar planteada una pregunta que responderemos en el último capítulo, donde su respuesta nos determinará a él cardinal de $\mathbb{R}$. En efecto:

Sea $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ el producto cartesiano del conjunto de los números naturales con el conjunto de los números enteros. Analizaremos a todas las parejas ordenadas (n, m), donde n sea un número par diferente de cero y $m = \dfrac{n-2}{2}$. Si al conjunto de todas estas parejas ordenadas lo llamamos $\mathcal{R}_1$ y lo escribimos de manera ordenada en la forma $\mathcal{R}_1 = \{(2,0), (4,1), (6,2), (8,3), \cdots\}$, entonces vemos que en $\mathcal{R}_1$ lo que se esta haciendo es una enumeración o un conteo de todos los números pares sin inluir al cero, ¿pero qué consecuencias tiene enumerar o contar a los elementos de un conjunto infinito? Si pensamos la enumeración en conjuntos finitos como lo acabamos de hacer, entonces es claro que la cantidad de elementos que utilicemos para contar a los elementos de este tipo de conjuntos tiene que coincidir con el número de elementos del conjunto mismo.

Esta idea la podemos trasladar a conjuntos infinitos, y, obtendríamos, por ejemplo, que el cardinal del conjunto de los números pares sin el cero se corresponde con el cardinal del conjunto de los números naturales, pues esto es lo que se ve en $\mathcal{R}_1$, entendiendo a los números naturales como los objetos que estamos utilizando para enumerar a los elementos del conjunto de los números pares sin el cero. Más aún, se puede plantear otro conjunto de parejas ordenadas que también nos permita afirmar que el conjunto de los números pares tiene el mismo número de elementos que el conjunto de los números naturales.

Sea $\mathcal{R}_2$ el conjunto de todas las parejas ordenadas (n', m'), con n' es un número impar y donde $m' = -\dfrac{n'+1}{2}$. De lo anterior obtenemos que $\mathcal{R}_2 = \{(1,-1), (3,-2), (5,-3), (7,-4), \cdots\}$, y, como en el caso de los números pares, la forma en la que escribimos a los elementos de $\mathcal{R}_2$ nos presenta un conteo o una enumeración de todos los elementos del conjunto de los números impares, entendiendo a los números enteros negativos como los objetos que estámos utilizando para contar o enumerar a los números impares. Como en el caso anterior, concluímos que el número de elementos que tiene el conjunto de los números impares es el mismo que el del conjunto de los números naturales, pues es claro que el cardinal del conjunto de los números enteros negativos coincide con el de los números naturales. Más sorprendentemente es lo que sucede cuando analizamos a la unión $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. En efecto, a este conjunto lo podemos escribir en la forma

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{\cdots, (5,-3), (3,-2), (1,-1), (2,0), (4,1), (6,2), (8,3), \cdots\} \tag{1.3}$$

y nos está presentando un conteo o una enumeración de todos los elementos del conjunto de los números enteros, donde el conjunto que estamos utilizando para contar o enumerar es el conjunto de todos los números naturales sin incluir al cero. Lo anterior nos dice que el cardinal del conjunto de los números enteros es el mismo que el de el conjunto de los números naturales sin incluir al cero.

De todo el análisis que acabamos de hacer, podemos concluir, de manera intuitiva, las igualdades $\#(\mathbb{P}) = \#(\mathbb{P}') = \#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{Z})$. En el libro ([6], Págs 38, 39, y 40), se demuestra de manera rigurosa las afirmaciones que acabamos de hacer. Además, también se puede encontrar la prueba del hecho de que el conjunto de los números racionales también tienen la misma cardinalidad del conjunto de los números enteros. Luego, podemos escribir $\#(\mathbb{P}) = \#(\mathbb{P}') = \#(\mathbb{N}) = \#(\mathbb{Z}) = \#(\mathbb{Q})$. Terminamos este pequeño análisis haciéndonos la siguientes preguntas: ¿Cómo podemos determinar el cardinal de la otra parte importante de $\mathbb{R}$, que como ya lo hemos dicho, es en últimas el conjunto que nos interesa construir, osea, el conjunto $\mathbb{I}$? ¿Será que este cardinal también coincide con el de los números racionales? ¿Y el cardinal de $\mathbb{R}$ cómo lo podemos determinar? Las preguntas anteriores serán resultas en el último capítulo, pero podemos cerrar el análisis afirmando que el cardinal de $\mathbb{I}$ se corresponde con el cardinal de $\mathbb{R}$, aunque parezca algo imposible. De hecho, en el último capítulo mostraremos que $\#(\mathbb{R}) = 2^{\#(\mathbb{Q})}$.

De los ejemplos que acabamos de presentar es bastante evidente que cualquier subconjunto de un producto cartesiano es un conjunto de parejas ordenadas. ¿Será que para cualquier conjunto de parejas ordenadas siempre podremos encontrar algún producto cartesiano que lo contenga? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y junto a lo primero que notamos, obtenemos:

Teorema 1.1.2. *([1], pág 69) Un conjunto $\mathcal{R}$ es un conjunto de parejas ordenadas, si y sólo si, existe algún producto cartesiano que lo contiene.*

Siguiendo con la idea de relación que presentamos en los ejemplos anteriores podemos definir lo siguiente:

Definición 1.1.13 (Relación binaria)**.** Una relación binaria $\mathcal{R}$ es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Definición 1.1.14. Sea $\mathcal{R}$ una relación cualquiera y sea $A \times B$ tal que $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Cuando lo anterior ocurra, diremos que $\mathcal{R}$ es una relación de A en B, lo cual notaremos como $\mathcal{R} : A \to B$. Además, diremos que un elemento $a \in A$ se relaciona con un elemento $b \in B$ cuando la pareja ordenada $(a, b) \in A \times B$, y esto lo notaremos como $a\mathcal{R}b$. En ocaciones diremos que una relación $\mathcal{R}$ está definida en A en vez de escribir $\mathcal{R} : A \to A$.

A continuación definiremos algunos elementos de las relaciones que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo;

Definición 1.1.15 (Campo de una relación)**.** El campo de una relación $\mathcal{R}$ es el conjunto formado por todas las primeras y segundas componentes de las parejas ordenadas que constituyen a la relación. Al campo de una relación lo notaremos como $C(\mathcal{R})$.

Definición 1.1.16 (Dominio de una relación)**.** Se define el dominio de una relación cualquiera $\mathcal{R}$ como el conjunto de todas las primeras componentes de las parejas de la relación. Al dominio de una relación lo notaremos como $D(\mathcal{R})$.

Definición 1.1.17 (Recorrido de una relación)**.** Definimos el recorrido de una relación $\mathcal{R}$ como el conjunto formado por todas las segundas componentes de las parejas ordenadas de la relación. El recorrido de una relación lo notaremos como $R(\mathcal{R})$.

Definición 1.1.18 (Relación inversa)**.** Si $\mathcal{R}$ es una relación arbitraria entonces a partir de esta podemos definir otra relación notada $\mathcal{R}^{-1}$ como el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in A \times B\}. \tag{1.4}$$

Diremos que la relación $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación inversa de $\mathcal{R}$.

1.1.3. Relaciones de equivalencia

En algunas partes de este trabajo necesitaremos presentar algún conjunto como la unión generalizada de una familia de conjuntos, todos disyunyos dos a dos, y de tal manera que todos los elementos de un conjunto arbitrario de la familia se relacionen de alguna manera, y que esta relación tenga propiedades y comportamientos similares a los de la relación de igualdad. Cuando un conjunto se somete a este proceso se acostumbra a decir que se está realizando una partición de dicho conjunto. A continuación definiremos esta noción que es muy importante en muchos contextos de la matemática, y luego presentaremos un método que resulta ser muy efectivo para partir un conjunto.

Definición 1.1.19 (Partición de un conjunto)**.** Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{P}$ una familia de conjuntos arbitrarios. La familia $\mathcal{P}$ es una partición del conjunto X, si y sólo si, en $\mathcal{P}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$.

(b) $A \cap B = \emptyset$, $\forall A, B \in \mathcal{P}$.

(c) $\bigcup \mathcal{P} = X$.

Si pensamos la relación de igualdad como una relación en cualquier conjunto no vacío, entonces vemos que en esta relación cualquier elemento se relaciona consigo mismo porque es obvio que cualquiera objeto es igual a si mismo. Además, si un elemento esta relacionado con otro, entonces ese otro también tiene que estar relacionado con el primero, pues también es evidente que si un objeto es igual a otro, entonces ese otro es igual al primero. Por último, tenemos que si un elemento es igual a otro, y ese otro es igual al otro elemento, entonces tiene que ser igual al último. Estas tres propiedades las queremos abstraer a relaciones arbitrarias entendiendo a la relación que cumpla estas propiedades como una relación que tiene un comportamiento análogo al de la igualdad. La primer propiedad se conoce como propiedad reflexiva de una relación, la segunda como propiedad simétrica de una relación y la tercera se conoce como propiedad transiva de una relación. Cualquier relación que satisfaca estas propiedades se conoce como relación de equivalencia y su importancia radica en que cualquier relación de equivalencia induce una partición del conjunto en el cual esté definida, y como ya lo habíamos dicho, esto aveces resulta necesario de hacer en algunas partes de la matemática. A continuación definiremos de manera general lo que es una relación de equivalencia sobre un conjunto no vacío:

Definición 1.1.20 (Relación de equivalencia)**.** Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathcal{R}$ una relación definida en X. Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en X, si y sólo si, en $\mathcal{R}$ se cumplen las siguientes propiedades, llamadas propiedades de una relación de equivalencia:

(a) $(\forall x \in X)(x\mathcal{R}x)$.

(b) $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y \to y\mathcal{R}x)$.

(c) $(\forall x, y, z \in X)(x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{R}y \to x\mathcal{R}y)$.

Definición 1.1.21 (Clase de equivalencia). Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre un conjunto no vacío X. Para cualquier $x \in X$, definimos la clase de equivalencia de x como el conjunto de todos los elementos de X que se relacionen con x mediante la relación $\mathcal{R}$, la cual notaremos como $[x]$. En otras palabras, la clase de equivalencia de x esta dada por el conjunto $[x] = \{y \in X : y\mathcal{R}x\}$.

Definición 1.1.22 (Conjunto cociente). Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre un conjunto no vacío X. Definimos el conjunto cociente inducido por la relación $\mathcal{R}$, notado $X/\mathcal{R}$, como la colección de conjuntos formada por todas las clases de equivalencia inducidas por la relación $\mathcal{R}$. En otras palabras, el conjunto cociente inducido por la relación $\mathcal{R}$ se definirá como el conjunto $X/\mathcal{R} = \{[x] : x \in X\}$.

Teorema 1.1.3 (Teorema fundamental de las relaciones de equivalencia). *Toda relación de equivalencia en cualquier conjunto no vacío X induce una partición sobre dicho conjunto, y toda partición de X define una relación de equivalencia sobre X. ([1], pág 113)*

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre un conjunto no vacío X. Vamos a demostrar que el conjunto cociente inducido por la relación $\mathcal{R}$ induce una partición de X. En efecto, $X/\mathcal{R}$ satisface la condición (a) de la definición de partición 1.1.19, pues es claro que para cualquier $[x] \in X/\mathcal{R}$, $[x] \in \mathcal{P}(X)$. Luego, $X/\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$.

Para demostrar la condición (b) afirmamos que dos clases de equivalencia cualesquiera, o son iguales, o son disyuntas. Para esto, sean $x, y \in X$ arbitrarios, y supongamos que $[x] \neq [y]$. Ahora, sea $\alpha \in [x] \cap [y]$ abitraria. Por las propiedades de las relaciones de equivalencia y por la definición de la intersección, tenemos;

$$\begin{aligned} \alpha \in [x] \cap [y] &\rightarrow \alpha \in [x] \wedge \alpha \in [y] \\ &\rightarrow \alpha\mathcal{R}x \wedge \alpha\mathcal{R}y \\ &\rightarrow x\mathcal{R}\alpha \wedge \alpha\mathcal{R}y \\ &\rightarrow x\mathcal{R}y \\ &\rightarrow x \in [y] \wedge y \in [x] \\ &\rightarrow [x] = [y]. \end{aligned}$$

El último resultado es absurdo, pues se había dicho que $[x] \neq [y]$. Luego, $[x] \cap [y] = \emptyset$, con lo que concluímos que dos clases de equivalencia cualesquiera, o son iguales, o son disyuntas.

Por último, vamos a demostrar la condición (c) de la definición de partición, es decir, vamos a demostrar que $\bigcup X/\mathcal{R} = X$. Si tomamos un $\beta \in \bigcup X/\mathcal{R}$ arbitrario, entonces por la definición de unión generalizada;

$$\begin{aligned} \beta \in \bigcup X/\mathcal{R} &\leftrightarrow (\exists [x] \in X/\mathcal{R})(\beta \in [x]) \\ &\leftrightarrow (\exists [x] \in X/\mathcal{R})([\beta] = [x]) \\ &\leftrightarrow \beta \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\bigcup X/\mathcal{R} = X$. De todo lo anterior concluímos que el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ define una partición de X, como se quería probar.

Lo que sigue es demostrar que toda partición $\mathcal{P}$ de X define una relación de equivalencia sobre X. Para esto, definamos en X la relación $\mathcal{R}$ de la siguiente manera: para cualquier par de elementos $x, y \in X$, entonces $x\mathcal{R}y$ si y sólo si existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in A$. Demostraremos que $\mathcal{R}$ así definida es una relación de equivalencia. En efecto; para un $x \in X$ arbitrario, entonces $x \in \bigcup \mathcal{P}$, esto en virtud de la condición (c) de la definición de partición 1.1.19. Luego, por la definición de unión generalizada 1.1.9 existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $x \in A$, y por lo tanto $x\mathcal{R}x$. Es decir, $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva.

Sean $x, y \in X$ cualesquiera y supongamos que $x\mathcal{R}y$. Por la definición de $\mathcal{R}$, existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in A$, o lo que es lo mismo, existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $y, x \in A$, de donde $y\mathcal{R}x$, en otras palabras, $\mathcal{R}$ es una relación simétrica.

Ahora, tomemos a $x, y, z \in X$ y supogamos que $x\mathcal{R}z$ y que $z\mathcal{R}y$. Nuevamente por la definición de la relación $\mathcal{R}$ tenemos que existen $A, B \in \mathcal{P}$ tales que $x, z \in A$ y $z, y \in B$. Por la condición (b) de la definición de partición de un conjunto, tenemos que $A \cap B = \emptyset$ o $A = B$. Lo primero no se puede dar, pues hemos supuesto que $z \in A \cap B$. Luego, $A = B$, de donde es inmediato que $x, z \in A = B$, con lo que concluímos que $\mathcal{R}$ es una relación transitiva. Como $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva, entonces esta define una relación de equivalencia sobre X, como se quería demostrar. $\square$

1.1.4. Aplicaciones o funciones

Devolvamonos un poco a la introducción de relación que empezamos a hacer en la sección 1.1.2, y observemos con más calma las relaciones que presentamos en dicha introducción, pero no en las consecuencias que derivaron de relacionar a los números enteros con los números naturales en la forma que lo hicimos, si no más bien en la forma y orden en la que los relacionamos, y la necesidad de haber optado por esa forma de relacionar para razonar las afirmaciones que hicimos. En efecto, la primera relación que presentamos fue la relación $\mathcal{R}_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como

$$\mathcal{R}_1 = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : n \in \mathbb{P} - \{0\} \wedge m = \frac{n-2}{2}\}, \tag{1.5}$$

y haciendo una lista de sus primeras cuatro parejas, obtuvimos que;

$$\mathcal{R}_1 = \{(2, 0), (4, 1), (6, 2), (8, 3), \cdots\}. \tag{1.6}$$

Si nos fijamos bien en en las primeras componentes, vemos que hay una secuencia de números pares que se prolonga hacía el infinito y de manera creciente, lo que implica que un número que aparezca como primera componente en el orden establecido no volverá a aparecer jamás. En otras palabras, a cada elemento del conjunto $\mathbb{P} - \{0\}$ le estamos asignando un único elemento del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

Además, también podemos notar de las primeras componentes que estas no comparten segundas componentes, en otras palaras, a números pares diferentes le corresponden números naturales diferentes.

Por último, si nos fijamos en las segundas componentes de la relación vemos que estas constituyen una secuencia de números naturales que se prolonga hacía el infinito de forma creciente. Luego, todas las segundas componentes de la relación son números naturales a pesar de que la relación este contenida en $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, es decir, el recorrido de la relación $\mathcal{R}_1$ coincide con el conjunto de los números naturales.

También podemos hacer observaciones análogas para la relación

$$\mathcal{R}_2 = \{(1, -1), (3, -2), (5, -3), (7, -4), \cdots\}. \tag{1.7}$$

De esta relación también podemos observar que cualquier número que aparezca como primer componente no volverá a aparecer jamás, a números impares diferentes le corresponden números enteros negativos diferentes, y el recorrido de la relación coincide con el conjunto de los números enteros negativos, sin importar que $\mathcal{R}_2$ sea un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.

Cuando realizamos la unión

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \{\cdots, (5,-3), (3,-2), (1,-1), (2,0), (4,1), (6,2), (8,3), \cdots\} \tag{1.8}$$

también observamos comportamientos similares a los de las relalciones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$. Vemos que a cualquier número natural le corresponde un único número entero, a números naturales diferentes le corresponden números enteros diferentes, pero en este caso, el recorrido de la relación es todo $\mathbb{Z}$.

Las relaciones que tienen un comportamiento análogo al de las relaciones que acabamos de presentar están presentes en casi todos los campos de la matemática, y muchas de sus teorías no se hubieran podido desarrollar sin la ayuda de estos objetos. A continuación presentaremos los conceptos que describen de manera general el comportamiento de las relaciones que presentamos en esta pequeña introducción.

Definición 1.1.23 (Función)**.** Una relación f es una relación funcional cuando en f no existen dos o más parejas distintas con primeras componentes iguales. En otras palabras, f es una relación funcional, si y sólo si;

$$(\forall x, y, z \in D(f))((x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \rightarrow y = z). \tag{1.9}$$

Cuando una relación f sea una relación funcional simplemente diremos que f es una función o que f es una aplicación. Además, en vez de escribir xfy escribiremos $y = f(x)$, y diremos que el elemento $y \in R(f)$ es la imagen de el elemento $x \in D(f)$ mediante la aplicación f. ([2], pág 52)

Ejemplo 1.1.8. Como ejemplo de funciones tenemos a todas las que utilizamos para contar los elementos del conjunto de los números pares, los números impares y los números enteros.

Ejemplo 1.1.9. Otro ejemplo trivial de función es la relación de igualdad. Esta función es importante y usualmente se le llama función identidad. La notación para una función identica está dada por I_X, donde X es el conjunto en el cual se define la función.

Definición 1.1.24. *([2], pág 52)* Una función f es una función de X en Y, si y sólo si;

(a). $D(f) = X$.

(b). $R(f) \subseteq Y$.

Diremos que el conjunto Y es el conjunto de imagenes de la función f o la meta de f.

Definición 1.1.25 (Función inyectiva)**.** Se dice que una función $f : X \rightarrow Y$ es inyectiva cuando a elementos distintos del dominio le hacemos corresponder mediante f imagenes distintas. Es decir, $f : X \rightarrow Y$ es una función inyectiva, si y sólo si;

$$(\forall x, w \in X)(f(x) = f(w) \rightarrow x = w) \tag{1.10}$$

El siguiente resultado nos indicará una forma para encontrar una relación inyectiva a partir de una función inyectiva. Se trata de la relación inversa de cualquier relación funcional f.

Teorema 1.1.4. *([1], pág 94) Si f una relación funcional inyectiva, entonces f^{-1} también es una relación funcional inyectiva.*

Demostración. Sean $(y_1, x_1) \in f^{-1}$ y $(y_1, x_2) \in f^{-1}$ arbitrarios. Luego, $(x_1, y_1) \in f$ y $(x_2, y_1) \in f$, donde $x_1 = x_2$, pues f es inyectiva, lo cual implica que f^{-1} sea una relación funcional.

Para probar que f^{-1} es inyectiva, sea $(y_1, x_1) \in f^{-1}$ y $(y_2, x_1) \in f^{-1}$. Por lo tanto, $(x_1, y_1) \in f$ y $(x_1, y_2) \in f$, y se sigue de inmediato que $y_1 = y_2$, esto en virtud de que f es una relación funcional. De todo lo anterior se sigue que f^{-1} es una relación funcional inyectiva. □

Definición 1.1.26 (Función sobreyectiva)**.** Una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva cuando $R(f) = Y$. En otras palabras, $f : X \to Y$ es una función sobreyectiva, si y sólo si;

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x)). \tag{1.11}$$

Definición 1.1.27 (Función biyectiva)**.** Se dice que una función $f : X \to Y$ es biyectiva o una biyeción cuando es inyectiva y sobreyectiva a la misma vez.

Ejemplo 1.1.10. La función $\mathcal{R}_1 : \mathbb{P} - \{0\} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva. También lo es la función $\mathcal{R}_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{Z}^-$, y la función $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{Z}$.

Definición 1.1.28 (Imagen directa)**.** Sea $f : X \to Y$ una función cualquiera, y sea $A \subseteq X$ arbitrario. Se define la imagen directa de A como el conjunto formado por todas las imagenes de los elementos de A mediante f. Es decir, como el conjunto;

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}. \tag{1.12}$$

Definición 1.1.29 (Imagen inversa)**.** Sea $f : X \to Y$ una función cualquiera, y sea $B \subseteq Y$ arbitrario. Definimos la imagen inversa de B como el conjunto formado por todos los elementos de X tales que sus imagenes mediante f sean elementos de B. En otras palabras, como el conjunto;

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}. \tag{1.13}$$

Definición 1.1.30 (Composición de funciones)**.** La función compuesta de dos funciones $f : X \to Y$ e $g : W \to Z$ donde $f(X) \subseteq W$ es la función $h = g \circ f : X \to Z$ definida como

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X. \tag{1.14}$$

Teorema 1.1.5. *([1], pág 93) Si $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ son funciones biyectivas, entonces su composición $h = g \circ f : X \to Z$ también define una función biyectiva.*

Demostración. Vamos a demostrar primero que la función $h = g \circ f : X \to Z$ es una función inyectiva. En efecto, sean $x, y \in X$ cualesquiera. Luego,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\to g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\to f(x) = f(y) \\ &\to x = y \end{aligned}$$

Luego, para $x, y \in X$ arbitrarios, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ implica que $x = y$, en otras palabras, $h = g \circ f : X \to Z$ es una función inyectiva.

Para probar que la función compuesta $h = g \circ f : X \to Z$ es sobreyectiva sea $z \in Z$ arbitrario. Como $g : Y \to Z$ es sobreyectiva, entonces existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Además, la función $f : X \to Y$ también es sobreyectiva, y por lo tanto para $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Luego, para $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$, lo que significa que $h = g \circ f : X \to Z$ es también sobreyectiva. De todo lo anterior podemos concluir que $h = g \circ f : X \to Z$ es una biyección, como se quería probar. □

Teorema 1.1.6. *([2], pág 50) Si $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces $f^{-1} : Y \to X$ también es una función biyectiva, además de que $f^{-1} \circ f = I_X$ y $f \circ f^{-1} = I_Y$.*

Demostración. Por hipótesis la función $f : X \to Y$ es inyectiva, lo que implica que f^{-1} sea una relación funcional inyectiva, esto en virtud del teorema 1.1.4. Además, $f : X \to Y$ es sobreyectiva, y por lo tanto $R(f) = Y$, lo que significa que $D(f^{-1}) = Y$, de donde concluimos que $f^{-1} : Y \to X$ es una función inyectiva. Por otro lado, $D(f) = X$, luego, $R(f^{-1}) = X$. De lo anterior concluimos que $f^{-1} : Y \to X$ es una función biyectiva. Los demás es rutina. □

Teorema 1.1.7. *([2], pág 50) Si $f : X \to Y$ es una función arbitraria, y $f^{-1} : Y \to X$ también es una función, entonces $f : X \to Y$ es biyectiva.*

Demostración. Sea $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$. Luego, $(y, x_1) \in f^{-1}$ y $(y, x_2) \in f^{-1}$. Por hipótesis $f^{-1} : Y \to X$ es una función, lo que implica que $x_1 = x_2$, de donde concluimos que $f : X \to Y$ es inyectiva. Ahora, sea $y \in Y$ arbitrario. Como $f^{-1} : Y \to X$ es una función, entonces existe $x \in X$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$, por lo cual, $(x, y) \in f$, es decir, $f : X \to Y$ es biyectiva. □

Los dos últimos teoremas se pueden resumir en el siguiente:

Teorema 1.1.8. *La relación inversa $f^{-1} : Y \to X$ de una función $f : X \to Y$ es una función, si y sólo si, $f : X \to Y$ es una biyección.*

1.1.5. Leyes de composición interna

A continuación presentaremos la propiedad que debe satisfacer alguna relación de equivalencia para poder dotar al conjunto cociente generado por esta de una operación bien definida inducida por otra operación ya establecida en el conjunto en el cual este definida la relación.

Definición 1.1.31. Una ley de composición interna en un conjunto cualquiera X es una función de la forma $* : X^2 \to X$. Usaremos la notación $x * y = z$ para indicar que la pareja ordenada $(x, y) \in X^2$ se relaciona medidante $*$ con un único $z \in X$, lo que se puede leer como "x operado con y mediante $*$ nos da como resultado z".

Definición 1.1.32. *([1], pág 113)* Sea $* : X^2 \to X$ una ley de composición interna y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida en X. La relación $\mathcal{R}$ es compatible con la ley de composición interna $* : X^2 \to X$, si y sólo si;

$$(\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in X)(x_1 \mathcal{R} x_2 \wedge y_1 \mathcal{R} y_2 \to x_1 * y_1 \mathcal{R} x_2 * y_2). \tag{1.15}$$

Se sigue de inmediato los siguientes resultados:

Proposición 1.1.7. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia definida en un conjunto cualquiera X compatible con una ley de composición interna $* : X^2 \to X$, entonces:

$$(\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in X)([x_1] = [x_2] \wedge [y_1] = [y_2] \to [x_1 * y_1] = [x_2 * y_2]). \tag{1.16}$$

Proposición 1.1.8. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia definida sobre un conjunto cualquiera X compatible con una ley de composición interna $* : X^2 \to X$, entonces la relación

$$[*] : X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \to X/\mathcal{R} \tag{1.17}$$

definida como $[x][*][y] = [x*y]$, para $[x], [y] \in X/\mathcal{R}$ cualesquiera también es una ley de composición interna.

Definición 1.1.33. *([1], pág 114)* Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre un conjunto cualquiera X compatible con una ley de composición interna $* : X^2 \to X$. Diremos que la función

$$[*] : X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \to X/\mathcal{R} \tag{1.18}$$

es la ley de composición interna obtenida por paso al cociente de la ley de composición interna $* : X^2 \to X$.

Definición 1.1.34. Se dice que una ley de composición interna $* : X^2 \to X$ es conmutativa cuando $x * y = y * x * y$, para $x, y \in X$ arbitrarios.

Teorema 1.1.9. *Sea $* : X^2 \to X$ una operación interna conmutativa y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre X. La relación $\mathcal{R}$ es compatible con la operación interna $* : X^2 \to X$, si y sólo si;*

$$(\forall x, y, z \in X)(x\mathcal{R}y \to x * z\mathcal{R}y * z). \tag{1.19}$$

Nota 1.1.3. Una ley de composición interna definida en un conjunto cualquiera X también puede ser llamada operación interna en X.

1.1.6. Relaciones de orden

A continuación presentaremos una estructura matemática que en un cierto sentido nos permitirá decidir cuando un elemento de un conjunto no vació es más grande o más pequeño que otro, entre otras cosas. Esta estructura es importante para nosotros porque una de las cosas que tiene que cumplir el conjunto que pretendemos construir es que sus elementos se puedan ordenar en algún sentido.

Definición 1.1.35 (Relación de orden)**.** *([1], pág 118)* Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto no vacío X es una relación de orden total en X, si y sólo si, satisface las siguientes condiciones:

(a') $(\forall x \in X)(x\mathcal{R}x)$.

(b') $(\forall x, y, z \in X)(x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{R}y \to x\mathcal{R}y)$.

(c') $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \to x = y)$.

(d') $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$.

Cuando lo anterior ocurra, diremos que la relación $\mathcal{R}$ ordena totalmente al conjunto X y también decimos que X es un conjunto totalmente ordenado por $\mathcal{R}$. Además, se dice que una relación $\mathcal{R}$ que sólo satisfaga los tres primeros axiomas es sólamente una relación de orden.

Nota 1.1.4. De la definición anterior tenemos que notar que las dos primeras propiedades ya las conocemos. La tercera propiedad que tiene que cumplir una relación para poder afirmar que sea de orden es la propiedad antisimétrica.

Definición 1.1.36 (Orden estricto)**.** Sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en un conjunto cualquiera X. Definimos el orden estricto o riguroso correspondiente a $\mathcal{R}$ como la relación $\mathcal{R}'$ definida de la siguiente manera: para $x, y \in X$, $x\mathcal{R}'y$, si y sólo si, $x\mathcal{R}y$ e $x \neq y$.

Teorema 1.1.10. *Sea $\mathcal{R}$ una relación de orden en un conjunto arbitrario X. El orden estricto o riguroso correspondiente a $\mathcal{R}$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) $(\forall x \in X)(\neg(x\mathcal{R}'x))$.

(b) $(\forall x, y \in X)(\neg(x\mathcal{R}'y \wedge y\mathcal{R}'x))$.

(c) $(\forall x, y, z \in X)(x\mathcal{R}'z \wedge z\mathcal{R}'y \to x\mathcal{R}'y)$.

Nota 1.1.5. Del teorema anterior, la primer propiedad se conoce como la irreflexividad, y la segunda como la asimetría. La tercera ya la conocemos.

1.2. Los números enteros

A continuación presentaremos de manera breve las características principales que posee el conjunto de los números naturales y a partir de este construiremos a los números enteros con el proposito de presentar una demostración del algoritmo de la división el cual será clave en el estudio que realizaremos sobre desarrollos decimales en el último capítulo. Como es lo habitual, empezaremos definiendo al conjunto de los números naturales vía axiomas de Peano.

1.2.1. Axiomas de Peano

El conjunto de los números naturales, notado $\mathbb{N}$, está caracterizado mediante los siguientes axiomas, llamados axiomas de Peano:

(1) El cardinal del conjunto vacío es un número natural.

(2) Existe una aplicación $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$ llamada función sucesor tal que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asocia un único $s(n) \in \mathbb{N} - \{0\}$ llamado el sucesor de n.

(3) La función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$ es biyectiva.

(4) Si $S \subseteq \mathbb{N}$ es tal que $0 \in S$ y para cada $n \in S$, $s(n) \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$. ([6], pág 26)

Nota 1.2.1. El axioma (2) nos está diciendo que todo número natural posee un sucesor y que 0 no es un sucesor de ningún número natural. El axioma (3) nos dice que para números naturales diferentes existen sucesores diferentes, y el último axioma es conocido como el axioma de inducción, o principio de inducción de matemática. Este axioma es una poderosa herramienta que sirve para hacer demostraciones que involucren a los números naturales, y de hecho, a los números enteros, como veremos más adelante.

1.2.2. Operaciones con Números Naturales

Las operaciones usuales entre números naturales será definidas como operaciones internas en $\mathbb{N}$.

Definición 1.2.1 (Adición de números naturales)**.** La suma de números naturales es una operación interna $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por las siguientes igualdades:

(a) $(\forall m \in \mathbb{N})(+(m, 0) = m)$.

(b) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(+(m, s(n)) = s(+(m, n)))$. ([3], pág 2)

En vez de escribir $+(m, n)$ escribiremos $m + n$ como es lo habitual.

Definición 1.2.2 (Producto de números naturales)**.** La multiplicación de números naturales es una operación interna $\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por las siguientes igualdades:

(a) $(\forall m \in \mathbb{N})(\cdot(m, 0) = 0)$.

(b) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(\cdot(m, s(n)) = \cdot(m, n) + m))$. ([3], pág 5)

Usaremos la notación $m.n = mn$ en vez de la notación $\cdot(m, n)$.

Nota 1.2.2. De la suma de números naturales, usando la notación habitual, obtenemos que la define las ecuaciones $m + 0 = m$ y $m + s(n) = s(m + n)$. Análogamente, el producto queda definido por las ecuaciones $m0 = 0$ y $ms(n) = mn + m$.

Se pueden demostrar los siguientes resultados aplicando las definiciones que acabamos de presentar y utilizando el principio de inducción matemática.

Teorema 1.2.1. *([3])* $(\forall m \in \mathbb{N})(ms(0) = m)$.

Proposición 1.2.1. *([3])* $(\forall n, m \in \mathbb{N})(s(m) + n = s(m + n))$.

Teorema 1.2.2. *([3]) La suma de números naturales satisface las siguientes propiedades:*

(a) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m + n = n + m)$.

(b) $(\forall m, n, l \in \mathbb{N})((m + n) + l = m + (n + l))$.

(c) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(m + n = m + l \to n = l)$.

Teorema 1.2.3. *([3]) El producto de números naturales satisface las siguientes propiedades:*

(a) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(mn = nm)$.

(b) $(\forall m, n, l \in \mathbb{N})((mn)l = m(nl))$.

(c) $(\forall n, l \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N} - \{0\})(mn = ml \to n = l)$.

(d) $(\forall m, n \in \mathbb{N})(mn = 0 \to m = 0 \vee n = 0)$.

Nota 1.2.3. Los teoremas anteriores nos dicen que la suma y la producto de números naturales son operaciones que satisfacen la conmutatividad y la asociativad. La tercera propiedad que aparece en ambos teoremas es conocida como la propiedad cancelativa de la suma y el producto respectivamente. El último resultado del teorema que describe las propiedades de la multiplicación pudo haber sido enunciado como un sólo teorema, pues se conoce como el teorema del factor nulo.

Teorema 1.2.4. *La multiplicación de números naturales es distributiva con respecto a la adición. En otras palabras;*

$$(\forall m, n, l \in \mathbb{N})(m(n + l) = mn + ml). \tag{1.20}$$

1.2.3. Orden en los Números Naturales

A continuación definiremos la relación de orden usual en $\mathbb{N}$ y luego probaremos que en realidad si se trata de una relación de orden.

Definición 1.2.3 (Orden usual en los naturales)**.** Definimos la relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ de la siguiente manera: para $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, si y sólo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. ([3], pág 7)

Teorema 1.2.5. *([3], pág 7) La relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ es una relación de orden.*

Demostración. (a). Es claro que la relación $\leq$ es reflexiva, pues para cualquier $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $m = m + 0$, de donde $m \leq m$.

(b). Tomemos un $l \in \mathbb{N}$ y supongamos que $m \leq n \leq l$. Nuevamente por la definición de $\leq$ tenemos que existen $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n = m + p_1$ y $l = n + p_2$. Reemplazando la primera ecuación en la segunda obtenemos que $l = m + (p_1 + p_2)$, esto nuevamente por la asociatividad de la suma, lo que significa que $m \leq l$, en otras palabras, $\leq$ es una relación transitiva.

(c). Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n \leq m$. Por la definición de $\leq$ obtenemos que existen $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ los cuales cumplen que $n = m + p_1$ y $m = n + p_2$. Sustiyendo la última ecuación en la primera, entonces $n = (n + p_2) + p_1$, y por la asociatividad de la suma, $n = n + (p_2 + p_1)$, lo que implica que $p_2 + p_1 = 0$. De lo anterior se concluye que $p_1 = p_2$, y por lo tanto $m = n$, es decir, $\leq$ es antisimétrica.

De todo lo anterior podemos concluir que la relación $\leq$ es de orden en $\mathbb{N}$. $\square$

Definición 1.2.4 (Orden estricto en los naturales)**.** La relación $<$ definida como $m < n$, si y sólo si, $m \leq n$ y $m \neq n$ es el orden estricto en $\mathbb{N}$ o riguroso correspondiente a $\leq$.

Nota 1.2.4. De la definición anterior es claro que $m < n$, si y sólo si, existe $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $n = m + p$, o lo que es lo mismo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + s(k)$.

Teorema 1.2.6 (Ley de la tricotomía). *Para $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrarios, se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones; $m < n$, $n < m$ o $m = n$. ([3], pág 8)*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que alguna afirmación es cierta, y demostremos que en ese caso, las demás no pueden ser verdaderas. En efecto; si $m < n$, $n < m$ y $m = n$, en virtud de la definición de $<$ existen $p_1, p_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$ tales que $m = n + p_1$ y $n = m + p_2$. Como $m = n$, entonces de la primera ecuación obtenemos que $m = m + p_1$, de donde $p_1 = 0$, una contradicción. Si tomamos la segunda ecuación entonces de manera análoga tendríamos que $p_2 = 0$, otro absurdo. Luego, si se da alguna de las afirmaciones presentadas, las demás ya no pueden ser ciertas.

Ahora vamos a probar por inducción matemática que para $m, n \in \mathbb{N}$, alguna de las afirmaciones se tiene que cumplir. Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N},\ m < n \vee n < m \vee m = n\}$. Si $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, entonces $m = 0$ o $m = s(k)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Si tomamos el segundo caso, entonces $m = 0 + s(k)$, de donde $0 < m$. Por lo tanto, $0 \in S$.

Sea $l \in S$ cualquiera y $m \in \mathbb{N}$ arbitrario. Por la definición de S, $l < m$, $m < l$, o $l = m$. Tomando el primer caso, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = l + s(k)$, y por la definición de la adición, $m = s(l + k)$, de donde $m = s(l) + k$, esto en virtud de la proposición 1.2.1. De lo anterior tenemos que si $k = 0$, entonces $m = s(l)$, y en caso contrario, $s(l) < m$. Por tanto, $s(l) \in S$.

Para el segundo caso tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $l = m + s(k)$, de donde obtenemos que $s(l) = s(m + s(k))$, pues s es una función inyectiva. Además, por la de definición de suma, $s(l) = m + s(s(k))$, y por lo tanto, $m < s(l)$. En este caso también obtenemos que $s(l) \in S$.

Supongamos ahora que $l = m$. Por la inyectividad de la función s, $s(l) = s(m)$, de donde $s(l) = m + s(0)$, por la definición de la suma. Así, $s(l) \in S$. De todo lo anterior podemos concluir que $S = \mathbb{N}$, y por lo tanto para $m, n \in \mathbb{N}$ arbitrarios, se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones; $m < n$, $n < m$ o $m = n$, como se quería demostrar. □

1.2.4. Construcción de los Números Enteros

Una de las necesidades de ampliar al conjunto de los números naturales en el conjunto de los números enteros fue la de resolver ecuaciones del estilo $5 + w = 3$, cuya solución no puede estar en $\mathbb{N}$. De está manera, podemos considerar a $w = -2$ como un nuevo número que aparece como solución a la ecuación $5 + w = 3$, el cual podemos pensar como la cantidad que le falta al número natural 3 para llegar a ser el número natural 5. ¿Pero esta ecuación será la única que nos obligue a considerar a $w = -2$ como otro nuevo número, que sabemos no es natural? La respuesta a esta pregunta es negativa. Podemos considerar, por ejemplo, las ecuaciones $7 + w = 5$, $10 + w = 8$, $13 + w = 11$, y vemos que todas tienen como solución a $w = -2$. De la aritmética elemental sabemos que;

$$w = 3 - 5 = 5 - 7 = 8 - 10 = 11 - 13 = \cdots$$

El problema de esta escritura es que las restas consideradas no tienen ningún sentido en $\mathbb{N}$ y además no se está dando una definición rigurosa de lo que significa realmente $w = -2$. Luego, lo primero que debemos hacer es reescribir las igualdades anteriores en algo que si tenga sentido en $\mathbb{N}$ y a partir de esta nueva escritura definir sin ambigüedad alguna lo que significa $w = -2$. En efecto, podemos tomar, en particular, a la igualdad;

$$3 - 5 = 5 - 7$$

escrita como restas sin ningún significado en $\mathbb{N}$ pero equivalente a la igualdad $3 + 7 = 5 + 5$ escrita como sumas que si tienen sentido en $\mathbb{N}$. Por lo tanto, a $w = -2$ lo podemos representar, por ejemplo, como la pareja ordenada $(3,5)$ o como la pareja $(5,7)$ porque $w = 3 - 5 = 5 - 7$, lo que se traduce en la igualdad $3 + 7 = 5 + 5$. Hemos relacionado entonces a las parejas bajo el criterio $3-5 = 5-7 = -2$, en otras palabras, están relacionadas porque las sumas de sus primeras componentes con las últimas dan el mismo resultado de sumar las ultimas componenetes con las primeras, sin importar el orden en que se haga. Pero hacer esto también nos genera un problema, y es que no estamos considerando a $w = -2$ como una pareja única, problema que también teniamos al considerarlo no como una única resta si no como varias. Este pequeño inconveniente lo podemos arreglar considerando al número $w = -2$ como el conjunto de todas las parejas que lo representan bajo el criterio o relación presentada. Esta relación define una relación de equivalencia sobre el producto cartesiano $\mathbb{N}^2$, y de esta manera podemos considerar a $w = -2$ como la clase de equivalencia $[(3,5)]$ que es igual a la clase de equivalencia $[(5,7)]$. Lo que sigue es construir de manera general al conjunto de los números enteros siguiendo las ideas que acabamos exponer.

Teorema 1.2.7 (Equivalencia de números enteros)**.** *Sea $\backsim$ una relación en $\mathbb{N}^2$ definida de la siguiente manera: para $(m,n),(l,o) \in \mathbb{N}^2$, $(m,n) \backsim (l,o)$, si y sólo si, $m+o = n+l$. La relación $\backsim$ define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}^2$.*

Demostración. Si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ es una pareja ordenada cualquiera, entonces es claro que $(m,n) \backsim (m,n)$, pues por la conmutatividad de la suma en $\mathbb{N}$ se tiene la igualdad $m+n = n+m$. Luego, $\backsim$ es una relación reflexiva.

Sea $(l,o) \in \mathbb{N}^2$ arbitraria, y supongamos que $(m,n) \backsim (l,o)$. Luego, por la definición de $\backsim$, $m+o = n+l$, de donde $o+m = l+n$, esto nuevamente por la conmutatividad de la suma en $\mathbb{N}$, y de esto es inmediato que $l+n = o+m$, pues la relación de igualdad es de equivalencia. Luego, $(l,o) \backsim (m,n)$, y por lo tanto, $\backsim$ es simétrica.

Ahora, tomemos a otra pareja $(q,p) \in \mathbb{N}^2$ y supongamos que $(m,n) \backsim (l,o) \backsim (q,p)$. Por la definición de la relación $\backsim$ tenemos las igualdades $m+o = n+l$ y $l+p = o+q$. Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos otra igualdad $(m+o)+(l+p) = (n+l)+(o+q)$, de donde $(m+p)+(o+l) = (n+q)+(o+l)$, esto en virtud de la conmutatividad y la asociatividad de la suma en $\mathbb{N}$. De la propiedad cancelativa de la suma se sigue que $m+p = n+q$, lo que significa que $(m,n) \backsim (q,p)$, por la definición de $\backsim$, y por lo tanto, esta relalción es transitiva. De todo lo anterior se sigue que la relación $\backsim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}^2$. □

Definición 1.2.5 (Números enteros)**.** Definimos al conjunto de los números enteros como el conjunto cociente inducido por la relación $\backsim$, es decir, como el conjunto $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\backsim$.

Definición 1.2.6. Definimos las operaciones suma y prodcuto en $\mathbb{N}^2$ notadas como $\oplus$ y $\odot$ respectivamente de la siguiente manera: para $(m,n),(l,o) \in \mathbb{N}^2$ cualesquiera, entonces $(m,n) \oplus (l,o) = (m+l, n+o)$ y $(m,n) \odot (l,o) = (ml+no, mo+nl)$.

El siguiente resultado es practicamente una consecuencia de la definición anterior y de las propiedades de la suma y el producto de números naturales.

Teorema 1.2.8. *Las operaciones $\oplus$ y $\odot$ son leyes de composición interna y además cumplen con las siguientes propiedades:*

(a) $\oplus$ y $\odot$ son conmutativas y asociativas.

(b) $(\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2)((0,0) \oplus (m,n) = (0,0))$.

(c) $(\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2)((1,0) \odot (m,n) = (m,n))$.

(d) La operación $\odot$ es distributiva con respecto a la operación $\oplus$.

Lo que sigue es dotar al conjunto de los números enteros de una suma y un producto.

Teorema 1.2.9. *La relación de equivalencia $\backsim$ es compatible con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas en $\mathbb{N}^2$.*

Demostración. Sean $(m_1, n_1), (l_1, o_1), (m_2, n_2), (l_2, o_2) \in \mathbb{N}^2$ tales que $(m_1, n_1) \backsim (l_1, o_1)$ y $(m_2, n_2) \backsim (l_2, o_2)$. Por la definición de la relación $\backsim$ tenemos las igualdades $m_1 + o_1 = n_1 + l_1$ y $m_2 + o_2 = n_2 + l_2$, de donde $(m_1 + o_1) + (m_2 + o_2) = (n_1 + l_1) + (n_2 + l_2)$, y por las propiedades de la suma en $\mathbb{N}$ obtenemos que $(m_1 + m_2) + (o_1 + o_2) = (n_1 + n_2) + (l_1 + l_2)$, lo que significa que $(m_1, n_1) \oplus (m_2, n_2) \backsim (l_1, o_1) \oplus (l_2, o_2)$. Luego, la relación $\backsim$ es compatible con la operación $\oplus$.

Por otro lado, sean $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ arbitraria. De la igualdad $m_1 + o_1 = n_1 + l_1$ podemos multiplicar ambos miembros por el número natural p y aplicando la distributividad del producto en los naturales con respecto a la suma, obtenemos; $pm_1 + po_1 = pn_1 + pl_1$. Podemos realizar este mismo proceso con el natural q, lo que implica la igualdad $qn_1 + ql_1 = qm_1 + qo_1$, y sumando término a término, entonces $(m_1p + n_1q) + (l_1q + o_1p) = (m_1q + n_1p) + (l_1p + o_1q)$, lo que significa que $(m_1p+n_1q, m_1q+n_1p) \backsim (l_1p+o_1q, l_1q+o_1p)$, en otras palabras, $(m_1, n_1) \odot (p, q) \backsim (l_1, o_1) \odot (p, q)$, y en virtud del teorema 1.1.9 concluimos que la relación $\backsim$ es compatible con la operación $\odot$. $\square$

Teorema 1.2.10. *Las operaciones internas* $[\oplus]$ *y* $[\odot]$ *obtenidas por paso al cociente de las operaciones* $\oplus$ *y* $\odot$ *satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $[\oplus]$ *y* $[\odot]$ *son conmutativas y asociativas.*

(b) $(\forall[(m, n)] \in \mathbb{Z})([(0, 0)][\oplus][(m, n)] = [(m, n)])$.

(c) $(\forall[(m, n)] \in \mathbb{Z})([(1, 0)][\odot][(m, n)] = [(m, n)])$.

(d) $(\forall[(m, n)] \in \mathbb{Z})(\exists[(n, m)] \in \mathbb{Z})([(m, n)][\oplus][(n, m)] = [(0, 0)])$.

(e) La operación $[\odot]$ *es distributiva con respecto a la operación* $[\oplus]$.

Demostración. Sólo vamos a demostrar la cuarta propiedad. Las demás pruebas son cuestión de rutina. En efecto; sea $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ cualquiera. Luego,

$$[(m, n)][\oplus][(n, m)] = [(m, n) \oplus (n, m)] = [(m + n, n + m)] = [(m + n, m + n)]. \tag{1.21}$$

Además es claro que $(m + n, m + n) \backsim (0, 0)$, lo que implica que $[(m + n, m + n)] = [(0, 0)]$. Por lo tanto, $[(m, n)][\oplus][(n, m)] = [(0, 0)]$. $\square$

Teorema 1.2.11. *Para todo* $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ *existe un único* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $[(m, n)] = [(p, 0)]$ *o* $[(m, n)] = [(0, p)]$.

Demostración. Sean $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$. En virtud de la ley de la tricotomía en $\mathbb{N}$, $m = n$, $m < n$ o $n < m$. Si tomamos el primer caso, entonces $[(m, n)] = [(m, m)] = [(0, 0)]$. Para el segundo caso tenemos que existe $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $n = m + p$, de donde $[(m, n)] = [(0, p)]$, pues es claro que $(m, m + p) \backsim (0, p)$. El caso faltante se trata igual. $\square$

Nota 1.2.5. Del teorema anterior podemos observar que cualquier entero $[(m, n)]$ con $n < m$ se puede escribir en la forma $[(m, n)] = [(p, 0)]$ donde $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $m - n = p$. Luego, al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ lo podemos identificar con el subconjunto $\mathbb{N}' = \{[(p, 0)] : p \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{Z}$ y con esta identificación nos damos cuenta de inmediato que los números tradicionalmente llamados enteros negativos tienen que coincidir con los enteros del estilo $[(m, n)]$ donde $n < m$, pues en este caso existe $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $[(m, n)] = [(0, p)]$. Por lo tanto, podemos escribir al conjunto de los números enteros como la unión

$$\mathbb{Z} = \{[(0, p)] : p \in \mathbb{N}\} \cup [(0, 0)] \cup \{[(p, 0)] : p \in \mathbb{N}\}. \tag{1.22}$$

Más aún, podemos escribir $[(p, 0)] = p$, $[(0, p)] = -p$ y $[(p, p)] = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{N}$ y obtendríamos a los enteros con los que siempre hemos trabajado. Cuando se traten los temas de isomorfismos quedará más claro porque podemos identificar totalmente al conjunto de los números naturales con el conjunto $\mathbb{N}'$.

Definición 1.2.7 (Orden usual en los enteros)**.** Definimos el orden usual $\leq$ en el conjunto de los números enteros de la siguiente manera: para $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \leq b$, si y sólo si, $b - a \in \mathbb{N}$.

1.2.5. El Algoritmo de la División

Lo que sigue es presentar una demostración del algoritmo de la división pero primero tendremos que demostrar el principio de buena ordenación como una consecuencia del principio de inducción matemática pues en la prueba del algoritmo de la división usaremos este principio.

Teorema 1.2.12 (Principio de buena ordenación). *Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ posee un mínimo. En otras palabras, si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ entonces existe $m \in A$ tal que $m \leq n$, $\forall n \in A$. ([3], pág 13)*

Demostración. Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : n \leq a, \forall a \in A\}$. El conjunto S no es vacío, pues en particular tenemos que $0 \in S$. Además, para un $a \in A$ cualquiera tenemos que $a < s(a)$, lo que implica que $s(a) \notin S$, de donde $S \neq \mathbb{N}$ por el principio de inducción. Por otro lado, el hecho de que $S \neq \mathbb{N}$ implica la existencia de un $m \in S$ tal que $s(m) \notin S$, esto nuevamente por el principio de inducción. Afirmamos que $m \in A$, pues de no ser así, entonces tendríamos que $m < a$, $\forall a \in A$, de donde $s(m) \leq a$, $\forall a \in A$, y por lo tanto $s(m) \in S$, una contradicción. Luego, $m \in A$. $\square$

Teorema 1.2.13 (Algoritmo de la división). *Para toda pareja ordenada $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} - \{0\}$ existe una única pareja ordenada $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < b$. ([3], pág 13)*

Demostración. Sea $S = \{a - bx \geq 0 : x \in \mathbb{Z}\}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \geq 1$. Si $a \geq 0$, entonces para $x = 0$, $a - bx = a \geq 0$, y en este caso $a \in S$. Si $a < 0$, entonces para $x = b$, $a - ab = a(1 - b) \geq 0$, pues $b \geq 1$, de donde $a - ab \in S$. De todo lo anterior podemos concluir que $S \neq \emptyset$, lo que implica la existencia de un mínimo $r \in S$, esto en virtud del principio de buena ordenación. Además, como $r \in S$, entonces existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - bq \geq 0$. Por otro lado, la desigualdad $-b < 0$ implica la desigualdad $a - (q + 1)b < a - bq$, de donde $r - b = a - (q + 1)b < 0$, pues r es el mínimo de S. Por lo tanto, $0 \leq r < b$.

Supongamos ahora que $r' \in S$ es otro mínimo de S. Luego, $r' \leq r$, pues $r \in S$. De la misma manera tenemos que $r \leq r'$, pues $r' \in S$. Como $\leq$ es una relación antisimétrica, entonces las desigualdades $r \leq r'$ y $r' \leq r$ implican la igualdad $r = r'$. Lo anterior también implica la unicidad del entero q pues este depende del entero r. $\square$

Capítulo 2

Cuerpos

En este capitulo se realizará un estudio básico de las estructuras algebraicas de grupos, anillos y cuerpos, siendo esta última la más importante para nuestros propósitos, pues el conjunto que pretendemos construir deberá estar dotado de esta estructura. Entre los conceptos más importantes que se estudiarán esta el de isomorfismo, que no es más que una aplicación biyectiva entre dos estructuras algebraicas que traduce propiedades tipo algebraicas de una en términos de la otra. En este sentido, si existe un isomorfismo entre dos cuerpos, por ejemplo, entonces el estudio de uno se reduce al del otro y viceversa, es decir, estos necesariamente tendrían una estructura análoga sin importar que sus elementos difieran entre sí. Otro concepto que se estudiará es el de cuerpo ordenado. Este nos presentará una estructura que en un cierto sentido nos permitirá decidir cuando un elemento de un cuerpo es más grande o mas pequeño que otro, esto dotando al cuerpo de una estructura de orden total que además sea compatible con las operaciones que definen al cuerpo. El estudio de los cuerpos ordenados nos llevará al concepto de cuerpo ordenado completo que será indispensable en la construcción de los números reales, pues éste tendrá un papel muy importante en el problema de unicidad de $\mathbb{R}$.

2.1. Grupos y grupos cociente

Lo que vamos a hacer a continuación es mostrar las propiedades básicas de los grupos para luego definir una relación de equivalencia sobre esta estructura en particular llamada congruencia módulo un subgrupo y a partir de esta presentar un criterio que nos permitirá determinar cuando el conjunto cociente por esta relación se puede dotar también de una estructura de grupo generada de manera natural por la estructura ya establecida en el conjunto donde se este definida la relación de equivalencia.

Definición 2.1.1. Una estructura algebraica es una $n-upla$ $(a_1, \cdots, a_n)$, donde a_1 es conjunto no vacío y $\{a_2, \cdots, a_n\}$ es un conjunto de operaciones internas definidas en a_1.

Definición 2.1.2. La estructura algebraica $(A, *)$ es asociativa, si y sólo si, para $x, y, c \in A$ arbitrarios, $x * (y * c) = (x * y) * c$.

Definición 2.1.3. Se dice que una estructura algebraica $(A, *)$ posee elemento neutro $e \in A$, si y sólo si, para cualquier $x \in A$, $x * e = x = e * x$.

Ejemplo 2.1.1. Las parejas $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, +)$ son estructuras algebraicas conmutativas, asociativas y con elemento neutro.

Definición 2.1.4. Se dice que en una estructura algebraica $(A, *)$ todos sus elementos son invertibles, si y sólo si, para cualquier $x \in A$ existe $x^{-1} \in A$ tal que $x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$.

Ejemplo 2.1.2. En la estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +)$ todos sus elementos son invertibles.

Definición 2.1.5. Sea $(A, *, \bullet)$ una estructura algebraica. Se dice que la operación interna $*$ es distributiva con respecto a la operación interna $\bullet$, si y sólo si, para $x, y, c \in A$ cualesquiera se cumple que $x * (y \bullet c) = (x * y) \bullet (x * c)$ e $(y \bullet c) * x = (y * x) \bullet (c * x)$.

Ejemplo 2.1.3. En la estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la suma es distributiva con respecto a la multiplicación.

Definición 2.1.6 (Grupo)**.** Una estructura algebraica $(G, *)$ tiene estructura de grupo, si y sólo si, es asociativa con elemento neutro y donde todos sus elemento son invertibles. Es decir, la pareja $(G, *)$ tiene estructura de grupo cuando satisface las siguientes propiedades:

(A) $(\forall x, y, z \in G)$ $(x * (y * z) = (x * y) * z)$.

(B) $(\exists e \in G)$ $(\forall x \in G)$ $(x * e = x = e * x)$.

(C) $(\forall x \in G)$ $(\exists x^{-1} \in G)$ $(x * x^{-1} = e = x^{-1} * x)$. ([4], pág 39)

Definición 2.1.7 (Grupo abeliano)**.** Sea $(G, *)$ un grupo cualquiera. Se dice que el grupo $(G, *)$ es abeliano, si y sólo si, es conmutativo.

Ejemplo 2.1.4. Las estructuras algebraicas $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no tienen estructura de grupo pues en cada una sus elementos no son invertibles. Un ejemplo de grupo abeliano es la estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +)$.

Teorema 2.1.1. *([4]) Si la pareja $(G, *)$ tiene estructura de grupo, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $(\forall x, y, z \in G)(x * y^{-1} = z \leftrightarrow x = z * y)$.

(b) $(\forall x, y, z \in G)(x * y = z * y \leftrightarrow x = z)$.

(c) $(\forall x \in G)((x^{-1})^{-1} = x)$.

(d) $(\forall x, y \in G)((x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1})$.

Demostración. (a). Sean $x, y, z \in G$ y supongamos que $x * y^{-1} = z$. Luego;

$$
\begin{aligned}
x &= x * e && \text{(Existencia de elemento neutro en } (G, *)) \\
&= x * (y^{-1} * y) && \text{(Existencia de inversos en } (G, *)) \\
&= (x * y^{-1}) * y && \text{(Asociatividad en } (G, *)) \\
&= z * y && \text{(Hipótesis)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\forall x, y, z \in G)$ $(x * y^{-1} = z \to x = y * z)$.

Reciprocamente, sean $x, y, z \in G$ y supongamos que $x = z * y$. Tenemos que;

$$
\begin{aligned}
z &= z * e && \text{(Existencia de elemento neutro en } (G, *)) \\
&= z * (y * y^{-1}) && \text{(Existencia de inversos en } (G, *)) \\
&= (z * y) * y^{-1} && \text{(Asociatividad en } (G, *)) \\
&= x * y^{-1} && \text{(Hipótesis)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\forall x, y, z \in G)$ $(x * y^{-1} = z \to x = y * z)$.

(b). Sean $x, y, z \in G$ y supongamos que $x * y = z * y$. Entonces;

$$
\begin{aligned}
x &= x * e && \text{(Existencia de elemento neutro en } (G,*)) \\
&= x * (y * y^{-1}) && \text{(Existencia de inversos en } (G,*)) \\
&= (x * y) * y^{-1} && \text{(Asociatividad en } (G,*)) \\
&= (z * y) * y^{-1} && \text{(Hipótesis)} \\
&= z * (y * y^{-1}) && \text{(Asociatividad en } (G,*)) \\
&= z * e && \text{(Existencia de elemento neutro en } (G,*)) \\
&= z && \text{(Existencia de elemento neutro en } (G,*))
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\forall x, y, z \in G)\ (x * y = z * y \to x = z)$.

(c). Como $(G,*)$ es un grupo, entonces para cualquier $x \in G$ existe un inverso $x^{-1} \in G$ tal que $x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$. De la misma manera para $x^{-1} \in G$ existe $(x^{-1})^{-1} \in G$ tal que $x^{-1} * (x^{-1})^{-1} = e = (x^{-1})^{-1} * x^{-1}$. Luego tenemos que $x * x^{-1} = (x^{-1})^{-1} * x^{-1}$, de donde $x = (x^{-1})^{-1}$ por el segundo inciso. Por lo tanto, $x = (x^{-1})^{-1}$, para cualquier $x \in G$, como se quería probar.

(d). Dados $x, y \in G$ arbitrarios, entonces;

$$
\begin{aligned}
(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) &= x * (y * y^{-1}) * x^{-1} \\
&= x * e * x^{-1} \\
&= x * x^{-1} \\
&= e
\end{aligned}
$$

Luego, $(x * y) * (x * y)^{-1} = (x * y) * (y^{-1} * x^{-1})$, de donde obtenemos que $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$. Por lo tanto, $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$, para $x, y \in G$ cualesquiera, como se quería demostrar. □

Teorema 2.1.2 (Unicidad del neutro)**.** *Si $(G,*)$ es un grupo cualquiera, entonces su neutro $e \in G$ es único. ([4], pág 42)*

Demostración. Supongamos que existe otro elemento neutro $e' \in G$ en el grupo $(G,*)$. Luego, por la definición de elemento neutro tenemos que $e' * x = x * e'$, para cualquier $x \in G$. Por lo tanto, $e' * x = e * x$, para cualquier $x \in G$, pues por hipótesis $e \in G$ también es elemento neutro del grupo $(G,*)$. De la igualdad anterior se sigue que $e = e'$, esto en virtud de (b) del teorema 2.1.1, lo que implica que el elemento neutro en el grupo $(G,*)$ es único. □

Teorema 2.1.3 (Unicidad de los inversos)**.** *Si $(G,*)$ es un grupo cualquiera, entonces cada $x \in G$ tiene un inverso $x^{-1} \in G$ único. ([4], pág 42)*

Demostración. Sea $x \in G$ arbitrario y supongamos que existen dos inversos $x^{-1}, \lambda \in G$ para $x \in G$. Por la definición 2.1.4 tenemos que $x * x^{-1} = e = x^{-1} * x$ y $x * \lambda = e = \lambda * x$, de donde $x^{-1} * x = \lambda * x$, y por (b) del teorema 2.1.1 obtenemos que $x^{-1} = \lambda$. Luego, cada $x \in G$ tiene un único inverso $x^{-1} \in G$. □

Teorema 2.1.4. *([4], pág 43) Sea $(G,*)$ un grupo abeliano arbitrario. Para $x, y, z \in G$ cualesquiera, entonces $x * y = y * z$, si y sólo si, $x = z$.*

Demostración. La demostración consiste en realizar los primeros cuatro pasos de la prueba de (b) del teorema 2.1.1 y en el quinto paso se tiene que usar la conmutatividad del grupo $(G,*)$. Los demás pasos serían análogos. □

Definición 2.1.8. *([6], pág 69)* Para un grupo $(G, *)$ cualquiera definimos lo siguiente:

(a) $(\forall x \in G)(x^0 = e)$.

(b) $(\forall x \in G)(\forall n \in \mathbb{N})(x^n = x^{n-1}x)$.

(c) $(\forall x \in G)(\forall n \in \mathbb{N})(x^{-n} = (x^n)^{-1})$.

Teorema 2.1.5. *([6], pág 69) Si $(G, *)$ es un grupo arbitrario, entonces:*

(a) $(\forall x \in G)(\forall n, m \in \mathbb{Z})(x^n x^m = x^{n+m})$.

(b) $(\forall x \in G)(\forall n, m \in \mathbb{Z})((x^m)^n = x^{mn})$.

Definición 2.1.9 (Subgrupo)**.** Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$, con H un conjunto no vacío. Se dice que H es un subgrupo de G, si y sólo si, la pareja $(H, *)$ también forma un grupo. ([4], pág 45)

Definición 2.1.10. Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. En $(G, *)$ definimos a la relación de congruencia módulo un subgrupo, notada $\sim$, de la siguiente manera: para $x, y \in G$ arbitrarios, $x \sim y$, si y sólo si, $x * y^{-1} \in H$.

Proposición 2.1.1. *([5], pág 109)* La relación de congruencia módulo un subgrupo es una relación de equivalencia.

Demostración. Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Como $e \in H$, entonces para $x \in G$ arbitrario, $x * x^{-1} = e \in H$. Luego, $\sim$ es reflexiva. Además, para $y \in G$ arbitrario, $x * y^{-1} \in H$ implica que $y * x^{-1} \in H$, pues $(x * y^{-1})^{-1} = y * x^{-1}$. Por lo tanto, $\sim$ es una relación simétrica. Ahora, sea $z \in G$ arbitrario. Si suponemos que $x * y^{-1} \in H$ e $y * z^{-1} \in H$, entonces es claro que $(x * y^{-1}) * (y * z^{-1}) \in H$, y utilizando los axiomas de la definición 2.1.6 se puede probar sin mucha dificultad la igualdad $(x * y^{-1}) * (y * z^{-1}) = x * z^{-1} \in H$, esto es, $\sim$ es una relación transitiva. De todo lo anterior se concluye que la relación de congruencia módulo un subgrupo es una relación de equivalencia. □

Definición 2.1.11. *([5], pág 108)* Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Para $x \in G$ arbitrario, se define la clase lateral derecha de H en G inducida por x, como el conjunto $Hx = \{h * x : h \in H\}$. De manera análoga se defina la clase lateral izquierda de H en G inducida por x.

Proposición 2.1.2. *([4], pág 48)* Sea $(G, *)$ un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Además, sea $[x]$ la clase de equivalencia inducida por la relación $\sim$ de un elemento $x \in G$ arbitrario. Se cumple la igualdad $[x] = Hx$, donde Hx es la clase lateral derecha de H en G inducida por x.

Demostración. Sea $y \in [x]$ arbitrario. Luego, $y \sim x$, esto es, $y * x^{-1} \in H$, en otras palabras, existe $h \in H$ tal que $y * x^{-1} = h$, de donde $y = h * x \in Hx$. Así, $[x] \subset Hx$. Ahora, sea $y' \in Hx$ arbitrario. Luego existe $h \in H$ tal que $y' = h * x$, de donde $y' * x^{-1} = h \in H$. Lo anterior significa que $y' \sim x$, y por lo tanto $y' \in [x]$. De todo lo anterior concluimos la igualdad $[x] = Hx$, como se quería probar. □

Recordemos que el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia afirma que toda relación de equivalencia definida en un conjunto no vacío arbitrario induce una partición de tal conjunto en clases de equivalencia, todas disyuntas dos a dos, y que toda partición de un conjunto no vació determina una relación de equivalencia sobre dicho conjunto. Para el caso de la relación de congruencia módulo un subgrupo, tenemos entonces que esta induce una partición a la que llamaremos conjunto cociente, notado G/H, en clases laterales derechas, todas disyuntas dos a dos. Por lo tanto, dos clases laterales cualesquiera de un subgrupo H en un grupo $(G, *)$, o son identicas, o su intersección es vacía. Lo que vamos a hacer a continuación es darle una estructura de grupo al conjunto cociente G/H, y a este grupo lo llamaremos grupo cociente de $(G, *)$ por el subgrupo H. Esto se puede hacer siempre y cuando el subgrupo H cumpla ciertas características, llamadas características de un subgrupo normal. Como los elementos del conjunto cociente G/H son subconjuntos del conjunto G, tendremos entonces que definir una operación para subconjuntos de G y para elementos y subconjuntos de G.

Definición 2.1.12. Sea $(G,*)$ un grupo y $A, B \subseteq G$. Se define el producto de A y B como el conjunto $AB = \{a * b : (a,b) \in A \times B\}$. Además, para $g \in G$ arbitrario, se defina el producto de g con A por derecha como el conjunto $Ag = \{a * g : a \in A\}$. De manera análoga se define el producto de g con A por izquierda.

Notemos que si A es un subgrupo del grupo $(G,*)$, entonces la definición anterior estaría definiendo a las clases laterales.

Proposición 2.1.3. Sea $(G,*)$ un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo de G. Se cumple que $HH = H$, donde $HH = \{h_1 * h_2 : h_1, h_2 \in H\}$.

Demostración. La contenencia $HH \subseteq H$ es evidente, pues $H \subseteq G$ es un subgrupo de G. Por otro lado, es claro que $H = eH \subseteq HH$. Luego, $HH = H$. □

Ya podemos definir la característica que tiene que tener un subgrupo H de un grupo $(G,*)$ la cual nos permitirá dotar de una estructura de grupo al conjunto cociente G/H.

Definición 2.1.13 (Subgrupo normal)**.** Sea $(G,*)$ un grupo y N un subgrupo de G. Diremos que N es un subgrupo normal en $(G,*)$, lo cual notaremos como $N \triangleleft G$, si y sólo si, para todo $g \in G$, $gNg^{-1} \subseteq N$. ([4], pág 56)

Teorema 2.1.6. *([4]) Sea $(G,*)$ un grupo y N un subgrupo de $(G,*)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $N \triangleleft G$.

(b) $gNg^{-1} = N$, $\forall g \in G$.

(c) $gN = Ng$, $\forall g \in G$.

(d) $NgNg' = N(g * g')$, $\forall g, g' \in G$.

Demostración. $(a) \to (b)$. Sean $g \in G$ y $n \in N$ arbitrarios. Por hipótesis tenemos que $N \triangleleft G$, lo cual implica que $g^{-1} * n * (g^{-1})^{-1} \in N$. Luego existe $n' \in N$ tal que $g^{-1} * n * (g^{-1})^{-1} = n'$, de donde $n = g * n' * g^{-1} \in gNg^{-1}$. Por lo tanto, $N \subseteq gNg^{-1}$, y como $N \triangleleft G$, entonces $gNg^{-1} \subseteq N$, obteniendo la igualdad $gNg^{-1} = N$, $\forall g \in G$.

$(b) \to (c)$. La demostración es trivial.

$(c) \to (d)$. Sean $n, n' \in N$ y $g \in G$ arbitrarios. Luego $(n * g) * (n' * g') \in NgNg'$. Como $(G,*)$ es asociativo, y $gN = Ng$, $\forall g \in G$, entonces;

$$\begin{aligned}
(n * g) * (n' * g') &= (g * n) * (n' * g') \\
&= ((g * n) * n') * g' \\
&= (g * (n * n')) * g' \\
&= ((n * n') * g) * g' \\
&= (n * n') * (g * g')
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(n * g) * (n' * g') = (n * n') * (g * g') \in N(g * g')$. Así, $NgNg' \subseteq N(g * g')$, $\forall g, g' \in G$.

Ahora, sean $n \in N$ y $g, g' \in G$ arbitrarios. Entonce $n * (g * g') \in N(g * g')$, y por lo tanto;

$$\begin{aligned} n*(g*g') &= (n*g)*g' \\ &= (g*n)*g' \\ &= (g*(e*n))*g' \\ &= ((g*e)*n)*g' \\ &= ((e*g)*n)*g' \\ &= (e*g)*(n*g') \end{aligned}$$

Luego, $n*(g*g') = (e*g)*(n*g') \in NgNg'$, de donde $N(g*g') \subseteq NgNg'$, lo cual implica que $NgNg' = N(g*g')$, $\forall g, g' \in G$.

$(d) \to (a)$. Por hipótesis, para un $g \in G$ arbitrario, $NgNg^{-1} = Ne = N$. Luego, para un $n \in N$ arbitrario, $g*(n*g^{-1}) \in gNg^{-1}$, y además $g*(n*g^{-1}) = (e*g)*(n*g^{-1}) \in NgNg^{-1} = Ne = N$, de donde $g*(n*g^{-1}) \in N$. Por lo tanto, $\forall g \in G$, $gNg^{-1} \subseteq N$, esto es, $N \triangleleft G$. □

Una de las cosas que nos dice el teorema anterior es que en cualquier grupo abeliano todos sus subgrupos son normales, esto en virtud del inciso (c). Además, el último inciso del teorema anterior nos está diciendo que el producto entre clases laterales derechas de un subgrupo normal N en un grupo $(G,*)$ es otra clase lateral derecha de N en $(G,*)$. Luego este producto de clases laterales derechas define una operación interna $\circ$ en el conjunto de todas las clases laterales derechas de un subgrupo normal N en un grupo $(G,*)$.

Teorema 2.1.7. *([4], pág 58) Sea $(G,*)$ un grupo y $N \triangleleft G$. La pareja $(G/N,\circ)$ tiene estructura de grupo, donde G/N es el conjunto de las clases laterales derechas de N en G, y la operación $\circ$ es el producto entre subconjuntos del conjunto G.*

Demostración. (A). Sean $Ng, Nx, Ny \in G/N$ arbitrarios. En virtud de la asociatividad en $(G,*)$, del último inciso del teorema anterior, y de la definición de $\circ$ tenemos;

$$\begin{aligned} Ng\circ(Nx\circ Ny) &= Ng(NxNy) \\ &= Ng(N(x*y)) \\ &= Ng*(x*y) \\ &= N(g*x)*y \\ &= (Ng*x)Ny \\ &= (NgNx)Ny \\ &= (Ng\circ Nx)\circ Ny \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Ng\circ(Nx\circ Ny) = (Ng\circ Nx)\circ Ny$, para $Ng, Nx, Ny \in G/N$ arbitrarios. Por lo tanto, $(G/N,\circ)$ es asociativa.

(B). Sea $Ng' \in G/H$ tal que $Ng\circ Ng' = Ng$ para cualquier $Ng \in G/H$. Así,

$$Ng\circ Ng' = NgNg' = Ng \leftrightarrow N(g*g') = Ng. \tag{2.1}$$

Luego, para un $n \in N$ arbitrario, $n*(g*g') = n*g$, de donde $g' = e$. Lo anterior nos dice que el elemento neutro en $(G/N,\circ)$ tiene que ser $Ne = N \in G/N$. En efecto, para $Ng \in G/N$ arbitrario,

$$Ne\circ Ng = NeNg = N(e*g) = Ng. \tag{2.2}$$

Por lo tanto, en $(G/N,\circ)$ hay elemento neutro $Ne = N \in G/N$.

(C). Sea $Ng \in G/H$ arbitrario, y sea $Ng' \in G/H$ tal que $Ng \circ Ng' = Ne$. De está manera;

$$Ng \circ Ng' = Ne \leftrightarrow NgNg' = Ne \leftrightarrow N(g * g') = Ne. \tag{2.3}$$

Para $n \in N$ arbitrario tenemos que $n * (g * g') = n * e$, de donde $g * g' = e$, y por lo tanto $g' = g^{-1}$. De lo anterior concluimos que el elemento inverso para un $Ng \in G/N$ arbitrario tiene que ser $(Ng)^{-1} = Ng^{-1} \in G/N$. En efecto,

$$Ng \circ Ng^{-1} = NgNg^{-1} = N(g * g^{-1}) = Ne = N. \tag{2.4}$$

Se cloncuye que para cada $Ng \in G/N$ existe un elemento inverso $(Ng)^{-1} = Ng^{-1} \in G/N$.

De todo lo anterior se concluye que la pareja $(G/N, \circ)$ tiene estructura de grupo. $\square$

2.2. Anillos y anillos cociente

Lo que vamos a hacer a continuación es algo análogo a la construcción de un grupo cociente por un subgrupo normal pero para una estructura algebraica más amplia, que estará formada por dos leyes de composición interna; una llamada suma y la otra llamada producto. La estructura que vamos presentar tiene el nombre de anillo, y en esta definiremos algo análogo a los subgrupos normales; los ideales, y como en los grupos, estos nos permitirán construir la estructura algebraica llamada anillo cociente.

Definición 2.2.1 (Anillo)**.** Sea $\mathbb{A}$ un conjunto no vacío, y $+, \cdot : \mathbb{A}^2 \to A$ leyes de composición interna, la primera llamada suma, y la segunda llamada producto. La terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo, si y sólo si, la pareja $(\mathbb{A}, +)$ tiene estructura de grupo abeliano, y la terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ satisface la ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Ejemplo 2.2.1. La estructura algebraica $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo.

Nota 2.2.1. Si la terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo, entonces el neutro del grupo $(\mathbb{A}, +)$ será notado como ξ y el inverso de cualquier $x \in \mathbb{A}$ del grupo $(\mathbb{A}, +)$ se identificará con el símbolo $-x$.

Teorema 2.2.1. *Si la terna* $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ *tiene estructura de anillo, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $(\forall x \in \mathbb{A})(x\xi = \xi x = \xi)$.

(b) $(\forall x, y \in \mathbb{A})((-x)y = x(-y) = -(xy))$.

(c) $(\forall x, y \in \mathbb{A})((-x)(-y) = xy)$.

Demostración. (a). Si $x \in \mathbb{A}$ es arbitrario, entonces $\xi + x\xi = x(\xi + \xi) = x\xi + x\xi$, pues $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ es un anillo, de donde $x\xi = \xi$, por el segundo inciso del teorema 2.1.1. De la misma manera se prueba que $\xi x = \xi$, para cualquier $x \in \mathbb{A}$.

(b). Sean $x, y \in \mathbb{A}$ cualesquiera. En virtud de los axiomas del anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ y del inciso anterior tenemos;

$$xy + (-x)y = (x + (-x))y = \xi y = \xi. \tag{2.5}$$

Por lo tanto, $(-x)y = -(xy)$, pues el inverso de xy es único. De manera análoga se demuestra que $x(-y) = -(xy)$.

(c). Si $x, y \in \mathbb{A}$ son arbitrario, entonces por el inciso anterior y por el tercer inciso del teorema 2.1.1, $(-x)(-y) = -((-x)y) = -(-(xy)) = xy$. $\square$

Definición 2.2.2. Un anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ en donde $(\mathbb{A}, \cdot)$ satisfaga la propiedad asociativa se llama un anillo asociativo.

Definición 2.2.3. Diremos que un anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo cuando la pareja $(\mathbb{A}, \cdot)$ satisfaga la propiedad conmutativa.

Definición 2.2.4. Si en un anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ existe elemento neutro para la estructura algebraica $(\mathbb{A}, \cdot)$, entonces a este lo llamaremos elemento unitario del anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ y lo notaremos con el símbolo ζ.

Proposición 2.2.1. *Si la terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo con elemento unitario, entonces para cualquier $x \in \mathbb{A}$, $(-\zeta)x = -x$.*

Definición 2.2.5. Un anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ es un anillo con división, si y sólo si, la pareja $(\mathbb{A} - \{\xi\}, \cdot)$ tiene estructura de grupo. El inverso de cualquier $x \in \mathbb{A}$ del grupo $(\mathbb{A} - \{\xi\}, \cdot)$ será notado con el símbolo habitual x^{-1}.

Teorema 2.2.2. *Si la terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo con división, entonces para $x, y \in \mathbb{A}$ arbitrarios, $xy = \xi$, si y sólo si, $x = \xi$ o $y = \xi$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{A}$ tales que $xy = \xi$. Si suponemos que $y \in \mathbb{A} - \{\xi\}$, entonces existe $y^{-1} \in \mathbb{A} - \{\xi\}$ tal que $yy^{-1} = \zeta$, pues por hipótesis la terna $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo con división. De está manera;

$$\begin{aligned} xy = \xi \quad &\leftrightarrow \quad (xy)y^{-1} = \xi y^{-1} \\ &\leftrightarrow \quad x(yy^{-1}) = \xi \\ &\leftrightarrow \quad x\zeta = \xi \\ &\leftrightarrow \quad x = \xi \end{aligned}$$

Por lo tanto, $xy = \xi$, si y sólo si, $x = \xi$ o $y = \xi$, para $x, y \in \mathbb{A}$ cualesquiera, como se quería probar. □

Ahora vamos a definir nuestro objeto matemático análogo al de los subgrupos normales definidos en la teoría de grupos.

Definición 2.2.6. Sea $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un anillo, y I un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$. Diremos I es un ideal bilateral en $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, si y sólo si, en $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ se satisfacen las siguientes condiciones, llamadas condiciones de un ideal bilateral:

(A') $(I, +)$ es un subgrupo del grupo $(\mathbb{A}, +)$.

(B') $I \times \mathbb{A} \subseteq I$ y $\mathbb{A} \times I \subseteq I$.

Nota 2.2.2. De la definición anterior podemos concluir que el ideal I es un subgrupo normal en el grupo $(\mathbb{A}, +)$, pues este es abeliano. Luego, en virtud del teorema 2.1.7 tenemos que la pareja $(\mathbb{A}/I, \circ)$ tiene estructura de grupo, donde $\mathbb{A}/I$ es el conjunto de todas las clases laterales de I en el grupo $(\mathbb{A}, +)$, y $\circ$ es el producto entre subconjuntos del conjunto $\mathbb{A}$. También se puede demostrar sin mucha dificultad que el grupo $(\mathbb{A}/I, \circ)$ es abeliano. Para el caso de los anillos, la notación $\circ$ será reemplazada por la notación $\oplus$, y diremos que esta es la suma de clases laterales del conjunto cociente $\mathbb{A}/I$. La segunda condición de la definición anterior nos servirá para definir la otra operación interna en $\mathbb{A}/I$ que nos falta para poder dotar a este conjunto de una estructura de anillo.

Teorema 2.2.3. *Sea $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un anillo, con I un ideal en $(\mathbb{A}, +, \cdot)$. La operación $\odot$ en el conjunto $\mathbb{A}/I$ de las clases laterales del grupo $(\mathbb{A}, +)$ definida como $Ix \odot Iy = I(xy)$ para $Ix, Iy \in \mathbb{A}/I$ arbitrarias es una operación bien definida.*

Demostración. Sean $Ix, Iy, Ix', Iy' \in \mathbb{A}/I$ arbitrarias tales que $Ix = Ix'$ e $Iy = Iy'$. Vamos a demostrar que $I(xy) = I(x'y')$. En efecto; como $Ix = Ix'$, entonces es claro que $x = i_1 + x'$, con $i_1 \in I$. De manera análoga se tiene que $y = i_2 + y'$, pues $Iy = Iy'$. Luego, por la distributividad en el anillo $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, tenemos;

$$\begin{aligned} xy &= (i_1 + x')(i_2 + y') \\ &= (i_1 + x')i_2 + (i_1 + x')y' \\ &= i_1 i_2 + x' i_2 + i_1 y' + x' y' \end{aligned}$$

Como I es un ideal bilateral en $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, entonces es claro que $i_3 = i_1 i_2 + x' i_2 + i_1 y' \in I$, de donde $xy = i_3 + x'y'$. Además, también es claro que $Ii_3 = I$. Luego,

$$\begin{aligned} I(xy) &= I(i_3 + x'y') \\ &= Ii_3 \oplus I(x'y') \\ &= I \oplus I(x'y') \\ &= I(x'y') \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $Ix = Ix'$ e $Iy = Iy'$, entonces $I(xy) = I(x'y')$, para $Ix, Iy, Ix', Iy' \in \mathbb{A}/I$ cualesquiera, esto es, la operación $\odot$ en el conjunto $\mathbb{A}/I$ de las clases laterales del grupo $(\mathbb{A}, +)$ es una operación bien definida. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sea $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ un anillo, con I un ideal en $(\mathbb{A}, +, \cdot)$. La terna $(\mathbb{A}/I, \oplus, \odot)$ tiene estructura de anillo, donde $\oplus$ es la suma de clases laterales en el conjunto cociente $\mathbb{A}/I$ y $\odot$ es el producto entre clases laterales de $\mathbb{A}/I$.*

Demostración. Por el teorema 2.1.7 sabemos que la pareja $(\mathbb{A}/I, \oplus)$ tiene estructura de grupo y no es difícil probar que tiene estructura de grupo abeliano. Vamos a demostrar la ley distributiva de la operación $\odot$ respecto a la suma $\oplus$. En efecto, sean $Ix, Iy, Iz \in \mathbb{A}/I$ arbitrarias. Por definición de las operaciones;

$$\begin{aligned} Ix \odot (Iy \oplus Iz) &= Ix \odot (I(y+z)) \\ &= I(x(y+z)) \\ &= I(xy + xz) \\ &= I(xy) \oplus I(xz) \\ &= (Ix \odot Iy) \oplus (Ix \odot Iz). \end{aligned}$$

Luego, $Ix \odot (Iy \oplus Iz) = Ix \odot Iy \oplus Ix \odot Iz$, para cada $Ix, Iy, Iz \in \mathbb{A}/I$, esto es, $\odot$ distribuye por izquierda respecto a la suma $\oplus$. La distributividad por derecha del producto $\odot$ respecto a la suma $\oplus$ se demuestra de manera similar. De lo anterior tenemos que la terna $(\mathbb{A}/I, \oplus, \odot)$ tiene estructura de anillo, como queríamos demostrar. $\square$

2.3. Cuerpos e isomorfismos

Lo que sigue es definir la estructura algebraica llamada cuerpo y presentar el concepto que nos permitirá determinar cuando dos estructuras algebraicas son estructuralmente equivalentes.

Definición 2.3.1. La terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, si y sólo si, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo conmutativo con división. En otras palabras, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, si y sólo si, satisface los siguientes axiomas, llamados axiomas de cuerpo.

(a) $(\ \forall\ x, y \in\ \mathbb{K}\ )\ (\ x + y = y + x\ )$

(b) $(\ \forall\ x, y \in\ \mathbb{K}\ (\ xy = yx\ )$

(c) $(\forall\, x, y, z \in\ \mathbb{K})\ ((x + y) + z = x + (y + z))$

(d) $(\forall\, x, y, z \in\ \mathbb{K})\ ((xy)z = x(yz))$

(e) $(\exists\, \xi \in \mathbb{K})\ (\forall\, x \in \mathbb{K})\ (x + \xi = \xi + x = x)$

(f) $(\exists\, \zeta \in \mathbb{K})\ (\forall\, x \in \mathbb{K})\ (x\zeta = \zeta x = x)$

(g) $(\forall\, x \in\ \mathbb{K})\ (\exists\, (-x) \in\ \mathbb{K})\ (x + (-x) = -x + x = \xi)$

(h) $(\forall\, x \in\ \mathbb{K} - \{\xi\})\ (\exists\, x^{-1} \in \mathbb{K} - \{\xi\})\ (xx^{-1} = x^{-1} \cdot x = \zeta)$

(i) $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{K})\ (x(y + z) = (y + z)x = xy + xz)$

Ejemplo 2.3.1. La estructura algebraica $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo.

Definición 2.3.2. Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Se define la diferencia entre x e y, como la suma $x+(-y) = x-y$.

Definición 2.3.3. Sean $x, y \in \mathbb{K}$, con $y \neq \xi$. Se define el cociente entre x e y, como el producto $xy^{-1} = \dfrac{x}{y}$. En ocasiones se usará también la notación $x \cdot y^{-1} = (x, y)$.

Proposición 2.3.1. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Si $p, r \in \mathbb{K}$ y $q, t \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, entonces;

$$(p, q) = (r, t) \ \leftrightarrow\ pt = qr. \tag{2.6}$$

Demostración. Sean $p, r \in \mathbb{K}$ y $q, t \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ cualesquiera. En virtud de la definición 2.3.3 y de las propiedades del cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, tenemos que;

$$\begin{aligned}
(p, q) = (r, t) &\leftrightarrow & pq^{-1} &= rt^{-1} \\
&\leftrightarrow & (pq^{-1})q &= (rt^{-1})q \\
&\leftrightarrow & p(q^{-1}q) &= r(t^{-1}q) \\
&\leftrightarrow & p &= r(qt^{-1}) \\
&\leftrightarrow & p &= (rq)t^{-1} \\
&\leftrightarrow & pt &= (rq)(t^{-1}t) \\
&\leftrightarrow & pt &= rq
\end{aligned}$$

Así, $(p, q) = (r, t) \leftrightarrow pt = rq$, $\forall p, r \in \mathbb{K}$, $\forall q, t \in \mathbb{K} - \{\xi\}$. □

Proposición 2.3.2. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Si $x, y, w, z \in \mathbb{K}$ son elementos arbitrarios, con $y, z \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, entonces;

(a) $(x, y) + (w, z) = (xz + wy, yz)$

(b) $(x, y) \cdot (w, z) = (xw, yz)$

Demostración. (a). Sean $x, y, w, z \in \mathbb{K}$ con $y, z \in \mathbb{K} - \{\xi\}$. En virtud de la definición 2.3.3 y de las propiedades del cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, entonces;

$$\begin{aligned}
(x, y) + (w, z) &= x \cdot y^{-1} + w \cdot z^{-1} \\
&= (x\zeta)y^{-1} + (wz^{-1})\zeta \\
&= x(zz^{-1})y^{-1} + (wz^{-1})(yy^{-1}) \\
&= (xz)(z^{-1}y^{-1}) + w(z^{-1}y)y^{-1} \\
&= (xz)(yz)^{-1} + w(yz^{-1})y^{-1} \\
&= (xz)(yz)^{-1} + (wy)(z^{-1}y^{-1}) \\
&= (xz)(yz)^{-1} + (wy)(yz)^{-1} \\
&= (xz + wy)(yz)^{-1} \\
&= (xz + wy, yz)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x,y)+(w,z)=(xz+wy,yz)$, $\forall x,w\in\mathbb{K}$, $\forall y,z\in\mathbb{K}-\{\xi\}$.

(b). Sean $x,y,w,z\in\mathbb{K}$ con $y,z\in\mathbb{K}-\{\xi\}$. En virtud de la definición 2.3.3 y de las propiedades del cuerpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$, tenemos que;

$$\begin{aligned}
(x,y)(w,z) &= (xy^{-1})(wz^{-1})\\
&= x(y^{-1}w)z^{-1}\\
&= x(wy^{-1})z^{-1}\\
&= (xw)(y^{-1}z^{-1})\\
&= (xw)(yz)^{-1}\\
&= (xw,yz)
\end{aligned}$$

En consecuencia, $(x,y)\cdot(w,z)=(xw,yz)$, $\forall x,w\in\mathbb{K}$, $\forall y,z\in\mathbb{K}-\{\xi\}$. □

Definición 2.3.4 (Homomorfismo). Sean $(\mathbb{K},+,\cdot)$ y $(\mathbb{L},\oplus,\odot)$ cuerpos. Un homomorfismo de cuerpos es una aplicación $f:(\mathbb{K},+,\cdot)\to(\mathbb{L},\oplus,\odot)$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) $f(x+y)=f(x)\oplus f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{K}$.

(b) $f(x\cdot y)=f(x)\odot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{K}$.

Si la aplicación f es inyectiva, entonces es un monomorfismo. Si es sobreyectiva, entonces decimos que es un epimorfismo. La aplicación f es un isomorfismo de cuerpos cuando es biyectiva, y en este caso se dice que $(\mathbb{K},+,\cdot)$ y $(\mathbb{L},\oplus,\odot)$ son cuerpos isomorfos, lo cual se nota $(\mathbb{K},+,\cdot)\cong(\mathbb{L},\oplus,\odot)$.

Ejemplo 2.3.2. Las ternas $(\mathbb{M},+,.)$ y $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ tienen estructura de cuerpo, ademas de ser isomorfas, donde $\mathbb{M}=\{M_{(x,y)}=\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}:x,y\in\mathbb{Q}\}$, $\mathbb{C}=\{C_{(x,y)}=(x,y):x,y\in\mathbb{Q}\}$, y las sumas y productos que aparecen son las operaciones usuales entre matrices y parejas ordenadas.

Demostración. La aplicación $f:(\mathbb{M},+,.)\longrightarrow(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ es un homomorfismo de cuerpos, la cual está definida como $f(M_{(x,y)})=C_{(x,y)}$, $\forall M_{(x,y)}\in\mathbb{M}$. En efecto;

$$\begin{aligned}
f(M_{(x,y)}+M_{(w,z)}) =& f(\begin{pmatrix}x & y\\ -y & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & z\\ -z & w\end{pmatrix})\\
=& f(\begin{pmatrix}x+w & y+z\\ -y-z & x+w\end{pmatrix})\\
=& (x+w,y+z)\\
=& (x,y)\oplus(w,z).
\end{aligned}$$

Luego, $f(M_{(x,y)}+M_{(w,z)})=f(M_{(x,y)})\oplus f(M_{(w,z)})$, $\forall M_{(x,y)},M_{(w,z)}\in\mathbb{M}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
f(M_{(x,y)}M_{(w,z)}) =& f(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ -z & w \end{pmatrix}) \\
=& f(\begin{pmatrix} xw-yz & xz+yw \\ -yw-xz & xw-yz \end{pmatrix}) \\
=& (x,y)\odot(z,w).
\end{aligned}$$

De esta manera, $f(M_{(x,y)}M_{(w,z)}) = f(M_{(x,y)}) \odot f(M_{(w,z)})$, $\forall M_{(x,y)}, M_{(w,z)} \in \mathbb{M}$.

De todo lo anterior podemos concluir que f es un homomorfismo. Las demás pruebas se dejan como ejercicios para el lector. □

Nota 2.3.1. En esencia, afirmar que $(\mathbb{M},+,\cdot) \cong (\mathbb{C},\oplus,\odot)$ es equivalente a afimar que $(\mathbb{M},+,.)$ y $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ son estructuras análogas o equivalentes. En otras palabras; sumar y multiplicar en $(\mathbb{M},+,.)$ es análogo a sumar y multiplicar en $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$. Luego, el estudio de $(\mathbb{M},+,.)$ se reduce al de $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ y viceversa.

Definición 2.3.5 (Nucleo)**.** Sea $f : (\ \mathbb{K},+,\cdot) \to (\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$ un homomorfismo de cuerpos, y sean ξ',ζ' los neutros del cuerpo $(\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$. Los conjuntos $K(+) = \{x \in \mathbb{K} : f(x) = \xi'\}$ y $K(\cdot) = \{x \in \mathbb{K} : f(x) = \zeta'\}$ se llaman los núcleos del homomorfismo $f : (\ \mathbb{K},+,\cdot) \to (\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$.

Ejemplo 2.3.3. Si consideramos el isomorfismo $f : (\mathbb{M},+,.) \longrightarrow (\mathbb{C},\oplus,\odot)$ del ejemplo 2.3.2, entonces es claro que $K(+) = \{M_{(x,y)} \in \mathbb{M} : f(M_{(x,y)}) = (0,0)\} = \{M_{(0,0)}\}$ y $K(\cdot) = \{M_{(x,y)} \in \mathbb{M} : f(M_{(x,y)}) = (1,0)\} = \{M_{(1,0)}\}$, por ser f biyectiva.

Teorema 2.3.1. *Sea $f : (\ \mathbb{K},+,\cdot) \to (\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$ una aplicación sobreyectiva que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{K}$.

(b) $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{K}$.

Si la terna $(\ \mathbb{K},+,\cdot)$ tiene estructura de cuerpo, entonces la terna $(\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$ también tiene estructura de cuerpo. Es decir, la aplicación $f : (\ \mathbb{K},+,\cdot) \to (\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$ de alguna forma traduce todos los axiomas que cumple la terna $(\ \mathbb{K},+,\cdot)$ de la definición 2.3.1, en términos de la terna $(\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$.

Demostración. De la función $f : (\ \mathbb{K},+,\cdot) \to (\ \mathbb{L},\oplus,\odot)$ se tiene que los elementos de $\mathbb{L}$ tienen la forma $f(x)$, para algún $x \in \mathbb{K}$. Probemos ahora los nueve axiomas que caracterizan a un cuerpo. En efecto;

(a). Sean $f(x), f(y) \in \mathbb{L}$. Luego,

$$\begin{aligned}
f(x) \oplus f(y) &= f(x+y) \\
&= f(y+x) \\
&= f(y) \oplus f(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall f(x), f(y) \in \mathbb{L})\ (f(x) \oplus f(y) = f(y) \oplus f(x))$. Luego, en $(\ \mathbb{L},\oplus)$ hay conmutatividad.

(b). Sean $f(x), f(y) \in \mathbb{L}$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} f(x) \odot f(y) &= f(xy) \\ &= f(yx) \\ &= f(y) \odot f(x) \end{aligned}$$

Luego, $(\forall f(x), f(y) \in \mathbb{L})$ $(f(x) \odot f(y) = f(y) \odot f(x))$. Por lo tanto, en $(\mathbb{L}, \odot)$ hay conmutatividad.

(c). Sean $f(x), f(y), f(z) \in \mathbb{L}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) \oplus [f(y) \oplus f(z)] &= f(x + [y + z]) \\ &= f([x + y] + z) \\ &= [f(x) \oplus f(y)] \oplus f(z) \end{aligned}$$

Así, $(\forall f(x), f(y), f(z) \in \mathbb{L})$ $(f(x) \oplus [f(y) \oplus f(z)] = [f(x) \oplus f(y)] \oplus f(z))$. Por lo tanto, $(\mathbb{L}, \oplus)$ es asociativa.

(d). Sean $f(x), f(y), f(z) \in \mathbb{L}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) \odot [f(y) \odot f(z)] &= f(x[yz]) \\ &= f([xy]z) \\ &= [f(x) \odot f(y)] \odot f(z) \end{aligned}$$

Así, $(\forall f(x), f(y), f(z) \in \mathbb{L})$ $(f(x) \odot [f(y) \odot f(z)] = [f(x) \odot f(y)] \odot f(z))$. Por lo tanto, $(\mathbb{L}, \odot)$ es asociativa.

(e). Sea $f(x) \in \mathbb{L}$. Como la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, entonces existe el neutro para la operación suma. Sea ξ el neutro para $(\mathbb{K}, +)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + \xi) \\ &= f(x) + f(\xi) \end{aligned}$$

De está manera, tenemos que $(\ \exists\ f(\xi) \in \mathbb{L}\ )$ $(\ \forall\ f(x) \in \mathbb{L}\ )$ $(\ f(x) \oplus f(\xi) = f(\xi) \oplus f(x) = f(x)\ )$, en otras palabras, en $(\mathbb{L}, \oplus)$ hay elemento neutro.

(f). Sea $f(x) \in \mathbb{L}$. Como la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo, entonces existe el neutro para el producto. Sea ζ el neutro para $(\mathbb{K}, \cdot)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x\zeta) \\ &= f(x) \odot f(\zeta) \end{aligned}$$

De está manera, tenemos que $(\ \exists\ f(\zeta) \in \mathbb{L}\ )$ $(\ \forall\ f(x) \in \mathbb{L}\ )$ $(\ f(x) \odot f(\zeta) = f(\zeta) \odot f(x) = f(x)\ )$, en otras palabras, en $(\mathbb{L}, \odot)$ hay elemento neutro.

(g). Sea $f(x) \in \mathbb{L}$. Como la terna ($\mathbb{K}, +, \cdot$) tiene estructura de cuerpo, entonces para cada $x \in \mathbb{K}$ existe $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = \xi$. Luego,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(x + (-x)) \\ &= f(x) \oplus f(-x) \end{aligned}$$

De está manera, tenemos que ($\forall\ f(x) \in \mathbb{L}$) ($\exists\ f(-x) \in\ \mathbb{L}$) ($f(x) \oplus f(-x) = f(-x) \oplus f(x) = f(\xi)$), esto es, en ($\mathbb{L}, \oplus$) hay elementos inversos.

(h). Sea $f(x) \in \mathbb{L} - \{f(\xi)\}$. Como la terna ($\mathbb{K}, +, \cdot$) tiene estructura de cuerpo, entonces para cada $x \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ existe $x^{-1} \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ tal que $x.x^{-1} = \zeta$. Luego,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= f(x.x^{-1}) \\ &= f(x) \odot f(x^{-1}) \end{aligned}$$

De está manera, tenemos que ($\forall\ f(x) \in \mathbb{L} - \{f(\xi)\}$) ($\exists\ f(x^{-1}) \in\ \mathbb{L} - \{f(\xi)\}$) ($f(x) \odot f(x^{-1}) = f(x^{-1}) \odot f(x) = f(\zeta)$), esto es, en ($\mathbb{L}, \odot$) hay elementos inversos.

(i). Sean $f(x), f(y), f(z) \in \mathbb{L}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) \odot [f(y) \oplus f(z)] &= f(x) \odot [f(y + z)] \\ &= f(x(y + z)) \\ &= f(xy + xz) \\ &= f(xy) \oplus f(xz) \\ &= f(x) \odot f(y) \oplus f(x) \odot f(z) \end{aligned}$$

Por lo tanto, ($\mathbb{L}, \oplus, \odot$) satisface el axioma de distributividad.

De (a) y (i) se concluye que la terna ($\mathbb{L}, \oplus, \odot$) tiene estructura de cuerpo. $\square$

Nota 2.3.2. Sea $f : (\mathbb{K}, +, \cdot) \to (\ \mathbb{L}, \oplus, \odot)$ un homomorfismo de cuerpos arbitrario. En lo que sigue, $\xi' \in \mathbb{L}$ será el neutro para la dupla $(\mathbb{L}, \oplus)$, y $\zeta' \in \mathbb{L} - \{\xi'\}$ el neutro para la dupla $(\mathbb{L}, \odot)$.

Teorema 2.3.2. *Si $f : (\mathbb{K}, +, \cdot) \to (\ \mathbb{L}, \oplus, \odot)$ es un homomorfismo, entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $f(\xi) = \xi'$.

(b) $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{K}$.

(c) $f(x) = \xi'$ para todo $x \in \mathbb{K}$, o entonces $f(\zeta) = \zeta'$ y f es inyectiva.

(d) $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$, para todo $x \in \mathbb{K} - \{\xi\}$.

Demostración. (a). Dado $x \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + \xi) \\ &= f(x) \oplus f(\xi) \end{aligned}$$

Ademas, $f(x) = f(x) \oplus \xi'$, y así tenemos que $f(x) \oplus \xi' = f(x) \oplus f(\xi)$, de donde $f(\xi) = \xi'$, por el segundo inciso del teorema 2.1.1.

(b). Si $x \in \mathbb{K}$, entonces $f(x) \oplus f(-x) = f(x + (-x)) = f(\xi) = \xi' = f(x) \oplus (-f(x))$. De está manera, $f(x) \oplus f(-x) = f(x) \oplus (-f(x))$. Luego, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{K}$, nuevamente por el segundo inciso del teorema 2.1.1.

(c). Supongamos que existe $x \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ tal que $f(x) \in \mathbb{L} - \{\xi'\}$. Luego, $f(\zeta) \odot f(x) = f(\zeta x) = f(x) = \zeta' \odot f(x)$, de donde $f(\zeta) = \zeta'$, por el segundo inciso del teorema 2.1.1.

Para probar que f es inyectiva, primero tenemos que probar que $f(y) = \xi'$, si y sólo si, $y = \xi$. En efecto, supongamos por vía reducción al absurdo que existe $y \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ tal que $f(y) = \xi'$. Luego,

$$f(xy) = f(x) \odot f(y) = f(x) \odot \xi' = \xi'. \tag{2.7}$$

Además, como $x, y \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, entonces $xy \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, y por lo tanto existe $(xy)^{-1} \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ tal que $(xy)(xy)^{-1} = \zeta$. Luego tenemos que;

$$f((xy)(xy)^{-1}) = f(\zeta) = \zeta'. \tag{2.8}$$

También tenemos que;

$$f((xy)(xy)^{-1}) = f(xy) \odot f((xy)^{-1}) = \xi' f((xy)^{-1}) = \xi'. \tag{2.9}$$

Lo anterior es absurdo. Por lo tanto, $f(y) = \xi'$, si, y sólo si, $y = \xi$. Ahora si supongamos que $f(x) = f(y)$, entonces $f(x) \oplus f(-y) = \xi'$, y por f ser homomorfismo, se tiene $f(x + (-y)) = \xi'$, de donde $x + (-y) = \xi$, y por lo tanto, $x = y$. Luego, f es inyectiva.

(d). Si tomamos $x \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, entonces $f(x^{-1}) \odot f(x) = f(x^{-1}x) = f(\zeta) = \zeta'$, por f ser un homomorfismo. Luego, $f(x^{-1}) \odot f(x) = f(x)^{-1} \odot f(x)$, de donde $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. □

Ejemplo 2.3.4. Sea $p \in \mathbb{N}$, con p primo y $m \in \mathbb{Z}$. En virtud del algoritmo de la división, existe $(q, \overline{m}) \in \mathbb{N}^2$ única tal que $m = pq + \overline{m}$, y $0 \leq \overline{m} < |p|$. Se dice que $\overline{m}$ es el residuo de la división de m con p. Luego podemos definir la aplicación $f(m) = \overline{m}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. La terna $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo, donde $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \cdots, p-1\}$, y dados $m, n \in \mathbb{Z}_p$, entonces $m \oplus n = \overline{m+n}$, y $m \odot n = \overline{mn}$.

Demostración. Para demostrar que la terna $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo, primero vamos a demostrar algunas proposiciones que nos serán de gran utilidad. Los enunciados son los siguientes:

(a) $\overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n}$.

(b) $\overline{m.n} = \overline{m}.\overline{n}$.

(c) $\overline{\overline{m}} = \overline{m}$.

(d) $f(m+n) = f(m) \oplus f(n), \ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

(e) $f(mn) = f(m) \odot (n), \ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

En efecto;

(a). Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. En virtud del algoritmo de la división, existen $(q_1, \overline{m}), (q_2, \overline{n}) \in \mathbb{N}^2$ únicas tales que $m = pq_1 + \overline{m}$ y $n = pq_2 + \overline{n}$ con $0 \leq \overline{m}, \overline{n} < |p|$. Si sumamos miembro a miembro obtenemos que $m + n = p(q_1 + q_2) + (\overline{m} + \overline{n})$. Lo anterior implica que $\overline{m+n} = \overline{m} + \overline{n}$, como se quería demostrar.

(b). Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces por el algoritmo de la división existen $(q_1, \overline{m}), (q_2, \overline{n}) \in \mathbb{N}^2$ únicas tales que $m = pq_1 + \overline{m}$ y $n = pq_2 + \overline{n}$ con $0 \leq \overline{m}, \overline{n} < |p|$. Multiplicando término a término obtenemos que $mn = p(pq_1q_2 + q_1\overline{n} + q_2\overline{m}) + \overline{m}\,\overline{n}$, de donde $\overline{m.n} = \overline{m}.\overline{n}$.

(c). Si $m \in \mathbb{Z}$, entonces por el algoritmo de la división existe $(q_1, \overline{m}) \in \mathbb{N}^2$ única tal que $m = pq_1 + \overline{m}$, con $0 \leq \overline{m} < |p|$. Por otro lado, $\overline{m} \in \mathbb{Z}$, y aplicando nuevamente el algoritmo de la división obtenemos $(q_2, \overline{\overline{m}}) \in \mathbb{N}^2$ única tal que $\overline{m} = pq_2 + \overline{\overline{m}}$. Sustituyendo la última ecuación en la primera, entonces obtenemos que $m = p(q_1 + q_2) + \overline{\overline{m}}$. Luego, $\overline{\overline{m}} = \overline{m}$.

(d). Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces,

$$\begin{aligned} f(m+n) &= \overline{m+n} \\ &= \overline{m} + \overline{n} \\ &= \overline{\overline{m} + \overline{n}} \\ &= \overline{f(m) + f(n)} \\ &= f(m) \oplus f(n) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(m+n) = f(m) \oplus f(n), \ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

(e). Sean $m, n \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} f(mn) &= \overline{mn} \\ &= \overline{m}.\overline{n} \\ &= \overline{\overline{m}.\overline{n}} \\ &= \overline{f(m)f(n)} \\ &= f(m) \odot f(n) \end{aligned}$$

Así, $f(mn) = f(m) \odot (n), \ \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$.

De (d) y (e) se concluye que la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ donde $f(m) = \overline{m}, \ \forall\, m \in \mathbb{Z}$ satisface las condiciones (a) y (b) del teorema 2.3.1. Luego, en virtud de este, en $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ se cumplen todos los axiomas de la definición 2.3.1 que cumple $(\mathbb{Z}, +, .)$, es decir, la terna $(\mathbb{Z}_p, \oplus, \odot)$ satisface los axiomas (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g) y (i).

Para mostrar que la terna $(\mathbb{Z}_p, \odot)$ satisface el axioma (h), tenemos que mostrar que dado $m \in \mathbb{Z}_p$, entonces existe $x \in \mathbb{Z}_p$ tal que $m \odot x = 1$. Notemos que la ecuación $m \odot x = 1$ es equivalente a encontrar $(x, q) \in \mathbb{N}^2$ única tal que $mx = pq + 1$, y la ecuación anterior es equivalente a la ecuación $mx + (-pq) = 1$. Claramente está es una ecuación diofántica, y por teoría de ecuaciones diofánticas tiene soluciones, pues $MCD(m, -p) = 1$ por p ser primo y además 1 es divisor de el mismo. $\square$

Ejemplo 2.3.5. La terna $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo, donde $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Ademas, $\oplus$ y $\odot$ están definidas de la siguiente manera:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Figura 2.1: Tablas de Operaciones

Demostración. Sea $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2n, \ n \in \mathbb{Z}\}$ el conjunto de los números pares. Ahora, sea $f : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\ \mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ una aplicación definida como $f(n) = 0$ si $n \in \mathbb{P}$, y $f(n) = 1$ si $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{P}$. Afirmamos lo siguiente:

(a) $f(m+n) = f(m) \oplus f(n), \ \forall \ m, n \in \mathbb{Z}$.

(b) $f(mn) = f(m) \odot f(n), \ \forall \ m, n \in \mathbb{Z}$.

En efecto; dados $m, n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $m + n \in \mathbb{P}$, si y solo si, $m, n \in \mathbb{P}$ o $m, n \in \mathbb{Z} - \mathbb{P}$.

En el primer caso,

$$\begin{aligned} f(m+n) &= 0 \\ &= 0 \oplus 0 \\ &= f(m) \oplus f(n) \end{aligned}$$

Y en el segundo caso,

$$\begin{aligned} f(m+n) &= 0 \\ &= 1 \oplus 1 \\ &= f(m) \oplus f(n) \end{aligned}$$

Por otro lado, $m + n \in \mathbb{Z} - \mathbb{P}$, si y solo si, $m \in \mathbb{P}$ y $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{P}$, o, $m \in \mathbb{Z} - \mathbb{P}$ y $n \in \mathbb{P}$.

En el primer caso tenemos que,

$$\begin{aligned} f(m+n) &= 1 \\ &= 0 \oplus 1 \\ &= f(m) \oplus f(n) \end{aligned}$$

Y en el segundo caso,

$$\begin{aligned} f(m+n) &= 1 \\ &= 1 \oplus 0 \\ &= f(m) \oplus f(n) \end{aligned}$$

Luego, $f(m+n) = f(m) \oplus f(n), \ \forall \ m, n \in \mathbb{Z}$. De manera análoga se prueba que $f(m) \odot f(n) = f(m \cdot n), \ \forall \ m, n \in \mathbb{Z}$.

Cómo la aplicación $f : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\ \mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ satisface las condiciones (a) y (b) del teorema 2.3.1, y además la terna $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ satisface todos los axiomas de cuerpo, excepto la existencia de inversos en $(\mathbb{Z}, \cdot)$, entonces por el teorema 2.3.1 la terna $(\ \mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ satisface todas las propiedades de cuerpo que satisface la terna $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Por otro lado, la figura 2.1 muestra claramente que (c), (d), (e), (f) y (g) y (h) se cumplen. En $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$ el elemento neutro es $\xi' = 0 \in \mathbb{Z}$, y en $(\mathbb{Z}_2, \odot)$ el elemento neutro es $\zeta' = 1 \in \mathbb{Z}$. Además, en $(\mathbb{Z}_2, \oplus)$ cada elemento es su propio inverso, y en $(\mathbb{Z}_2, \odot)$ ocurre lo mismo.

Vemos entonces que la terna $(\ \mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ satisface todos los axiomas de cuerpo, y por lo tanto, $(\ \mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo. $\square$

2.3.1. Cuerpos ordenados

A continuación definiremos lo que es un cuerpo ordenado y a partir de este concepto presentaremos la relación de orden total que se puede definir en cualquier cuerpo que este dotado de esta estructura. Demostraremos que en cualquier cuerpo totalmente ordenado se encuentra inmerso un conjunto isomorfo al cuerpo ordenado de los números racionales.

Definición 2.3.6. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. La terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo ordenado, si y sólo si, existe un subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}$, llamado el conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$, tal que en $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se satisfacen los siguientes axiomas, llamados axiomas de orden.

(A) $(\forall x, y \in \mathcal{P})\ (x + y \in \mathcal{P})$.

(B) $(\forall x, y \in \mathcal{P})\ (x \cdot y \in \mathcal{P})$.

(C) $(\forall x \in \mathbb{K})\ (x = \xi,\ o\ \ x \in \mathcal{P},\ o\ -x \in \mathcal{P})$.

Nota 2.3.3. Los axiomas (A) y (B) nos dicen que el conjunto $\mathcal{P}$ es estable respecto a cada operación (suma y producto). El axioma (C) tiene por nombre "ley de la tricotomía". Hay que resaltar que la disyunción que aparece en este axioma es exclusiva.

Definición 2.3.7. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo ordenado, y sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}$ el conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$. Se define el conjunto de elementos negativos de $\mathbb{K}$ como el conjunto formado por todo los inversos aditivos de $\mathcal{P}$, es decir, el conjunto de elementos negativos de $\mathbb{K}$ es el conjunto $-\mathcal{P} = \{-p / p \in \mathcal{P}\}$.

Proposición 2.3.3. Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo ordenado, y si $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}$ es el conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$, entonces $-\mathcal{P} \cap \{\xi\} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

Nota 2.3.4. Notemos que por la existencia de neutro e inversos en $(\mathbb{K}, +)$ se tiene la identidad $\xi + \xi = \xi + (-\xi) = \xi$, de donde $\xi = -\xi$. Este hecho nos llevaría a pensar que $\xi \in -\mathcal{P} \cap \mathcal{P}$, en contradicción con (C). En efecto, una de las cosas que no dice (C) es que ξ no es positivo, ni negativo.

Proposición 2.3.4. Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo ordenado, y si $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{K}$ el conjunto de elementos positivos de $\mathbb{K}$, entonces $\mathbb{K} = -\mathcal{P} \cup \{\xi\} \cup \mathcal{P}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{K}$. Luego;

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{K} &\leftrightarrow x = \xi,\ o\ \ x \in \mathcal{P},\ o\ \ x \in -\mathcal{P} \\ &\leftrightarrow x \in \{\xi\},\ o\ \ x \in \mathcal{P},\ o\ \ x \in -\mathcal{P} \\ &\leftrightarrow x \in -\mathcal{P} \cup \{\xi\} \cup \mathcal{P} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall x \in \mathbb{K})(x \in \mathbb{K} \leftrightarrow x \in -\mathcal{P} \cup \{\xi\} \cup \mathcal{P})$, de donde $\mathbb{K} = -\mathcal{P} \cup \{\xi\} \cup \mathcal{P}$. □

Proposición 2.3.5. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo ordenado, y $\mathcal{P} \subset \mathbb{K}$ el conjunto de números positivos de $\mathbb{K}$. Sí $a \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, entonces $a^2 \in \mathcal{P}$.

Demostración. Si $a \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, entonces por (C), $a \in \mathcal{P}$ o $-a \in \mathcal{P}$. Si tomamos el primer caso, entonces por (B), $a^2 = a \cdot a \in \mathcal{P}$, y si tomamos el segundo, entonces nuevamente por (B) $a^2 = (-a)(-a) = a \cdot a \in \mathcal{P}$. En cualquier caso $a \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ implica $a^2 \in \mathcal{P}$. □

Nota 2.3.5. En particular $\zeta \in \mathcal{P}$, pues $\zeta \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, y $\zeta = \zeta^2 \in \mathcal{P}$. Se sigue de inmediato que $-\zeta \in -\mathcal{P}$.

Definición 2.3.8. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo ordenado. Fijaremos en $\mathbb{K}$ la relación $\leq$ definida de la siguiente manera: dados $x, y \in \mathbb{K}$, entonces $x \leq y$ si y sólo si $y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$. Es decir, $x \leq y$ si y sólo si existe $z \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$ tal que $y = x + z$. A esta relación la llamaremos relación de orden usual en un cuerpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

Si consideramos los elementos de $\mathbb{K}$ como puntos de una recta, entonces la siguiente gráfica ilustra la definición anterior, para el caso de elementos positivos de $\mathbb{K}$ que sean distintos.

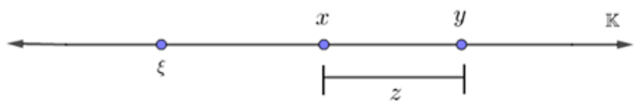


Figura 2.2: Desiguadad entre dos puntos

Teorema 2.3.3. *La relación de orden usual $\leq$ en cualquier cuerpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es una relación de orden total.*

Demostración. (a). Sea $x \in \mathbb{K}$. Es claro que,

$$\begin{aligned} \xi \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} &\leftrightarrow x - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow x \leq x \end{aligned}$$

Luego, $(\forall x \in \mathbb{K})$ $(x \leq x)$, es decir, $\leq$ es reflexiva.

(b). Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$, y supongamos que $x \leq y$, e $y \leq z$. Luego;

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge y \leq z &\leftrightarrow y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \wedge z - y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow (y - x) + (z - y) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow (z - y) + (y - x) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow z + (-y + y) - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow z + \xi - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow z - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow x \leq z \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})$ $(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$, es decir, $\leq$ es transitiva.

(c). Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Luego,

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge y \leq x &\leftrightarrow y = x + z \wedge x = y + z\prime \\ &\leftrightarrow y + x = x + y + (z + z\prime) \\ &\leftrightarrow z + z\prime = \xi \\ &\leftrightarrow z = -z\prime \\ &\leftrightarrow z = -z\prime = \xi \end{aligned}$$

De esta manera, $y = x + z = x + \xi = x$, por lo tanto, $(\forall x, y \in \mathbb{K})$ $(x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow y = x)$, es decir, $\leq$ es antisimétrica.

(d). Sean $x, y \in \mathbb{K}$. En virtud de (C), $y - x = \xi$, o $y - x \in \mathcal{P}$, o $x - y \in \mathcal{P}$. Por definición de $\leq$, lo anterior significa que $y = x$, o $x \leq y$, o $y \leq x$. Luego, $\leq$ satisface la ley de la tricotomía.

De (a), (b), (c) y (d) se concluye que $\leq$ es una relación de orden total, como se quería demostrar. $\square$

Teorema 2.3.4. *Si la terna* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *tiene estructura de cuerpo ordenado, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})\ (x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z)$

(b) $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ (\forall z \in \mathcal{P})\ (x \leq y \leftrightarrow xz \leq yz)$

(c) $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ (\forall z \in -\mathcal{P})\ (x \leq y \leftrightarrow xz \geqslant yz)$

(d) $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ (x \leq y \leftrightarrow -y \leq -x)$

(e) $(\forall x, y, w, z \in \mathbb{K})\ (x \leq y \wedge w \leq z \to x + w \leq y + z)$

(f) $(\forall x, y, w, z \in \mathcal{P})\ (x \leq y \wedge w \leq z \to xw \leq yz)$

Demostración. (a). Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$, y supongamos que $x \leq y$. Luego;

$$\begin{aligned} x \leq y &\leftrightarrow y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow y - x + \xi \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow y - x + (z - z) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow y + (-x + z) - z \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow y + (z - x) - z \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow (y + z) - (x + z) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow x + z \leq y + z \end{aligned}$$

De esta manera, $(\forall x, y, z \in \mathbb{K})\ (x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z)$.

(b). Si $x, y \in \mathbb{K}$, y $z \in \mathcal{P}$, entonces;

$$\begin{aligned} x \leq y &\leftrightarrow y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow (y - x)z \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow yz - xz \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow xz \leq yz \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ (\forall z \in \mathcal{P})\ (x \leq y \leftrightarrow xz \leq yz)$.

(c). Sean $x, y \in \mathbb{K}$, y $z \in -\mathcal{P}$. Supongamos que $x \leq y$. Así;

$$\begin{aligned} x \leq y &\leftrightarrow y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow -z(y - x) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow -zy + zx \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow xz - yz \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow xz \geqslant yz \end{aligned}$$

Luego, $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ (\forall z \in -\mathcal{P})\ (x \leq y \leftrightarrow xz \geqslant yz)$.

(d). Dados $x, y \in \mathbb{K}$, entonces tenemos que;

$$\begin{aligned} x \leq y &\leftrightarrow y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow -x - (-y) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow -y \leq -x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \end{aligned}$$

Así, $(\forall x, y \in \mathbb{K})$ $(x \leq y \leftrightarrow -y \leq -x)$.

(e).Sean $x, y, z, w \in \mathbb{K}$. Si $x \leq y$ e $w \leq z$, entonces;

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge w \leq z &\rightarrow x + w \leq y + w \wedge y + w \leq z + y \\ &\rightarrow x + w \leq z + y \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall x, y, w, z \in \mathbb{K})$ $(x \leq y \wedge w \leq z \rightarrow x + w \leq y + z)$.

(f). Sean $x, y, z, w \in \mathcal{P}$, y supongamos que $x \leq y$ e $w \leq z$ Luego;

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge w \leq z &\rightarrow xw \leq yw \wedge yw \leq zy \\ &\rightarrow xw \leq zy \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall x, y, w, z \in \mathcal{P})$ $(x \leq y \wedge w \leq z \rightarrow xw \leq yz)$. □

Teorema 2.3.5. *Si la terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo ordenado, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $(\forall x \in \mathbb{K})$ $(x \geqslant \zeta \rightarrow x^2 > x)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{K})$ $(\xi \leq x \leq \zeta \rightarrow x^2 \leq x)$

(c) $(\forall x, y \in \mathbb{K})$ $(\xi \leq x \leq y \rightarrow x^2 \leq y^2)$

(d) $(\forall x, y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\})$ $(x^2 \leq y^2 \rightarrow x \leq y)$

(e) $(\forall x, y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\})$ $(x \leq y \rightarrow x^n \leq y^n)$

Demostración. (a). Sea $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \geqslant \zeta$. Luego, $x \geqslant \zeta \geqslant \xi$, pues $\zeta \in \mathcal{P}$. De esta manera;

$$\begin{aligned} x \geqslant \zeta &\leftrightarrow x - \zeta \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \wedge x \in \mathcal{P} \\ &\rightarrow x(x - \zeta) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow x^2 - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\ &\leftrightarrow x^2 \geqslant x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall x \in \mathbb{K})$ $(x \geqslant \zeta \rightarrow x^2 \geqslant x)$.

(b). Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Luego;

$$
\begin{aligned}
\xi \leq x \leq \zeta &\leftrightarrow x \geqslant \xi \wedge x \leq \zeta \\
&\leftrightarrow x \geqslant \xi \wedge \zeta - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\rightarrow x(\zeta - x) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\leftrightarrow x - x^2 \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\leftrightarrow x^2 \leq x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(\forall x \in \mathbb{K})\ (\xi \leq x \leq \zeta \rightarrow x^2 \leq x)$.

(c). Sean $x, y \in \mathbb{K}$, y supongamos que $\xi \leq x \leq y$. De esta manera;

$$
\begin{aligned}
\xi \leq x \leq y &\leftrightarrow \xi \leq x \wedge \xi \leq y \wedge x \leq y \\
&\leftrightarrow x + y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \wedge y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\rightarrow (y - x)(x + y) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\leftrightarrow y^2 - x^2 \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\leftrightarrow x^2 \leq y^2
\end{aligned}
$$

Luego, $(\forall x, y \in \mathbb{K})\ (\xi \leq x \leq y \rightarrow x^2 \leq y^2)$.

(d). Sean $x, y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, y supongamos, por reducción al absurdo, que $x^2 \leq y^2$ e $y \leq x$. De esta manera, tenemos que;

$$
\begin{aligned}
x^2 \leq y^2 \wedge y \leq x &\leftrightarrow y^2 - x^2 \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \wedge x - y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\leftrightarrow x^2 - y^2 \in -\mathcal{P} \cup \{\xi\} \wedge (x - y)(x + y) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \\
&\leftrightarrow x^2 - y^2 \in -\mathcal{P} \cup \{\xi\} \wedge x^2 - y^2 \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}
\end{aligned}
$$

La última equivalencia es imposible que se de, pues $-\mathcal{P} \cap \{\xi\} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Por lo tanto, $(\forall x, y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\})$ $(x^2 \leq y^2 \rightarrow x \leq y)$.

(e). Sean $x, y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, y supongamos que $x \leq y$. De la identidad;

$$
y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^1 + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) \tag{2.10}
$$

tenemos que

$$
y^n - x^n \in \mathcal{P} \cup \{\xi\} \leftrightarrow y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^1 + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1} \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}, \tag{2.11}
$$

pues $x \leq y$ implica que $y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$. En efecto, si $x, y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, entonces;

$$
y^{n-1} + y^{n-2}x + y^{n-3}x^1 + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1} \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}, \tag{2.12}
$$

en virtud de (A) y (B). Luego, $y^n - x^n \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, de donde $x^n \leq y^n$. □

Teorema 2.3.6. *Sea* $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ *un cuerpo ordenado,* $\xi \in \mathbb{K}$ *el neutro para* $(\mathbb{K}, \oplus)$*, y* $\zeta \in \mathbb{K}$ *el neutro para* $(\mathbb{K}, \odot)$*. La aplicación* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$*, donde* $f(1) = \zeta$*, y* $f(n+1) = f(n) \oplus \zeta$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $f(m+n) = f(n) \oplus f(m)$*,* $\forall m, n \in \mathbb{N}$*.*

(b) $f(mn) = f(n) \odot f(m)$*,* $\forall m, n \in \mathbb{N}$*.*

(c) $m \leq n \to f(m) \leq f(n)$*,* $\forall m, n \in \mathbb{N}$*.*

(d) $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ *es una aplicación biyectiva.*

Demostración. (a). Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : f(m+n) = f(m) \oplus f(n),\ \forall\, m \in \mathbb{N}\}$. Como $f(m+0) = f(m) = f(m) \oplus \xi = f(m) \oplus f(0)$, entonces $0 \in S$. Ahora, sea $n \in S$ tal que $f(m+n) = f(m) \oplus f(n)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Luego;

$$
\begin{aligned}
f(m+(n+1)) &= f((m+n)+1) \\
&= f(m+n) \oplus f(1) \\
&= f(m) \oplus (f(n) \oplus f(1)) \\
&= f(m) \oplus f(n+1)
\end{aligned}
$$

Así, $f(m+(n+1)) = f(m) \oplus f(n+1)$, de donde $n+1 \in S$. Tenemos entonces que $0 \in S$, y que si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$. Por lo tanto $S = \mathbb{N}$, en virtud del principio de inducción. Luego, $f(m+n) = f(m) \oplus f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

(b). Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : f(mn) = f(m) \odot f(n),\ \forall\, m \in \mathbb{N}\}$. En particular, $f(m0) = f(0) = \xi = f(m) \odot \xi = f(m) \odot f(0)$, y así $0 \in S$. Ahora, sea $n \in S$ tal que $f(nm) = f(n) \odot f(m), \forall m \in \mathbb{N}$. De está manera;

$$
\begin{aligned}
f(m(n+1)) &= f(nm+m) \\
&= f(nm) \oplus f(m) \\
&= f(m) \odot (f(n) \oplus \zeta) \\
&= f(m) \odot f(n+1)
\end{aligned}
$$

De esta manera, $n+1 \in S$, y por el principio de inducción $S = \mathbb{N}$, es decir, $f(mn) = f(n) \odot f(m)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, como se quería probar.

(c). Observemos que $f(n) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, pues si tomamos un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, entonces

$$
f(n) = f(\underbrace{1+1+1\cdots+1}_{n-veces}) = \underbrace{\zeta \oplus \zeta \oplus \cdots \oplus \zeta}_{n-veces} \in \mathcal{P}, \tag{2.13}
$$

y si tomamos $n = 0$, entonces $f(n) = \xi$. Luego, dados $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m \leq n$, entonces $n - m \in \mathbb{N}$. De está manera, $f(n-m) = f(n) - f(m) \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, y por lo tanto $f(m) \leq f(n)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

(d). Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$. Luego, $n < m$, o $m < n$. Si tomamos el primer caso, entonces por (c) tenemos que $f(n) < f(m)$, de donde $f(n) \leq f(m)$ y $f(n) \neq f(m)$. Si tomamos el segundo caso, de manera análoga se concluye que $f(m) \leq f(n)$, y $f(m) \neq f(n)$. Luego, $m \neq n$ implica $f(n) \neq f(m)$, es decir, f es inyectiva.

Ahora, sea $n' \in f(\mathbb{N})$. Luego, si $n' = \xi$ entonces existe $n = 0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n'$. Por otro lado, si $n' \neq \xi$ entonces $\underbrace{\zeta \oplus \zeta \oplus \cdots \oplus \zeta}_{n-veces} = n'$, para algún $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Por lo tanto, $f(n) = f(1+1+\cdots+1) = \zeta\oplus\zeta\oplus\cdots\oplus\zeta = n'$. Luego, dado arbitrariamente $n' \in f(\mathbb{N})$, entonces podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $f(n') = n$, esto es, f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces se concluye que f es biyectiva. □

Nota 2.3.6. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo totalmente ordenado, entonces el cuarto inciso del teorema anterior nos dice que $\mathbb{K}$ posee un subconjunto $f(\mathbb{N})$ tal que el cardinal de este coincide con el cardinal de $\mathbb{N}$. Por otro lado, los tres primeros incisos de este teorema nos dicen que $(\mathbb{N}, \leq) \cong (f(\mathbb{N}), \leq)$, y que $(\mathbb{N}, +, .) \cong (f(\mathbb{N}), +, .)$, en otras palabras, en cuanto a álgebra y orden el estudio de $\mathbb{N}$ se reduce al de $f(\mathbb{N})$, y viceversa. Es decir, los conjuntos $\mathbb{N}$ y $f(\mathbb{N})$ son los mismos, pero escritos de otra forma. En este sentido, el teorema anterior nos está diciendo que cualquier cuerpo ordenado tiene un subconjunto análogo o equivalente al conjunto de los números naturales. Observemos además que de lo anterior se deduce que cualquier cuerpo totalmente ordenado por la relación usual tiene inmerso al conjunto de los números racionales, pues los números enteros se construyen a partir de los naturales, y los números racionales se construyen a partir de los enteros.

También es importante observar que de las igualdades $f(1) = \zeta$, y $f(n+1) = f(n) \oplus \zeta$, $\forall n \in \mathbb{N}$ obtenemos que $f(\mathbb{N}) = \{\zeta,\ \zeta \oplus \zeta,\ \zeta \oplus \zeta \oplus \zeta, \cdots\}$, donde $f(2) = \zeta \oplus \zeta$, $f(3) = \zeta \oplus \zeta \oplus \zeta$, y para un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ arbitrario, $f(n) = \underbrace{\zeta \oplus \zeta \oplus \cdots \oplus \zeta}_{n-veces}$.

En lo que sigue, vamos a identificar al conjunto $f(\mathbb{N})$ con $\mathbb{N}$, pues ya se demostró que estos dos conjuntos son isomorfos. Luego, para un cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ tenemos las relaciones $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Teorema 2.3.7 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x \geqslant -\zeta$, con $x \in \mathbb{K}$, entonces $(\zeta + x)^n \geqslant \zeta + nx$.*

Demostración. Sea $S = \{n \in \mathbb{N} :\ (\zeta + x)^n \geqslant \zeta + nx,\ \forall x \geqslant -\zeta\}$. Afirmamos que $0 \in S$. En efecto;

$$\begin{aligned} 0 \in S \quad &\leftrightarrow \quad (\zeta + x)^0 \geqslant \zeta + 0x \\ &\leftrightarrow \quad \zeta \geqslant \zeta \end{aligned}$$

Luego, $0 \in S$. Ahora, sea $n \in S$ tal que $(\zeta + x)^n \geqslant \zeta + nx$, $\forall x \geqslant -\zeta$. De esta manera;

$$\begin{aligned} (\zeta + x)^{n+1} \quad &\geqslant \quad (\zeta + x)^n(\zeta + x) \\ &\geqslant \quad (\zeta + nx)(\zeta + x) \\ &\geqslant \quad \zeta + x + nx + nx^2 \\ &\geqslant \quad \zeta + x(n + \zeta) + nx^2 \\ &\geqslant \quad \zeta + x(n + \zeta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n \in\ S$ implica $n + 1 \in\ S$. De donde $S = \mathbb{N}$, en virtud del principio de inducción. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geqslant -\zeta$, $(\zeta + x)^n \geqslant \zeta + nx$. □

2.3.2. Cotas Superiores e Inferiores

Definición 2.3.9. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado y sean $a, b \in \mathbb{K}$ arbitrarios, con $a \leq b$. Definimos en $\mathbb{K}$ los siguientes subconjuntos, llamados intervalos ilimitados.

(a) $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}$

(b) $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{K} : x < b\}$

(c) $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x\}$

(d) $(a, +\infty] = \{x \in \mathbb{K} : a < x\}$

(e) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{K}$

Definición 2.3.10. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado y sean $a, b \in \mathbb{K}$ arbitrarios, con $a \leq b$. Definimos en $\mathbb{K}$ los siguientes subconjuntos, llamados intervalos limitados de extremos a y b.

(a) $[a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\}$

(b) $[a, b) = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}$

(c) $(a, b] = \{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\}$

(d) $(a, b) = \{x \in \mathbb{K} : a < x < b\}$

Definición 2.3.11. Un intervalo degenerado es un intervalo que consta de un solo elemento. Con más precisión, un intervalo degenerado es un intervalo de la forma $[a, a] = \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq a\ \} = \{a\}$. Los intervalos que aparecen en las definiciones (2.3.9) y (2.3.10) entran en la categoría de intervalos no degenerados.

Uno de los hechos que diferencia los intervalos degenerados con los no degenerados es su cardinalidad, lo que se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.6. En un cuerpo totalmente ordenado, los intervalos no degenerados tienen cardinalidad infinita.

Demostración. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado, y sea $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{K}$ un intervalo no degenerado en $\mathbb{K}$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathbb{X}$ tiene cardinalidad finita $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{X}$ es un conjunto numerable, por ser finito. Ahora, sea $\mathbb{X} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ una enumeración de los elementos del conjunto $\mathbb{X}$. Si $\mathbb{X}$ es el primer intervalo de la definición (2.3.10), entonces supongamos que $a \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq b$ es una ordenación total del conjunto $\mathbb{X}$, donde $x_1 = a$ y $x_n = b$. Por otro lado, $x_{n-1} \leq b$ implica $x_{n-1} \leq \dfrac{x_{n-1} + b}{2} = x_{n+1} \leq b$, y de esta manera $x_{n+1} \in \mathbb{X}$, una contradicción, pues se había dicho que $\mathbb{X}$ tiene n elementos.

Si $\mathbb{X}$ es cualquier otro intervalo, excepto el último de la definición (2.3.9), es decir, el mismo $\mathbb{K}$, entonces la demostración sería análoga al caso que acabamos de probar. El hecho de que $\mathbb{K}$ sea infinito se debe a que todo cuerpo totalmente ordenado es infinito. Esto es una consecuencia del último inciso del teorema (2.3.6). □

Definición 2.3.12. Sea $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ un cuerpo totalmente ordenado. Decimos que un subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ está acotado superiormente, si y sólo si, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $x \leq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Al elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ lo llamaremos cota superior del conjunto $\mathbb{X}$. Notemos que cualquier elemento mayor a $\alpha \in \mathbb{K}$ también es cota superior de $\mathbb{X}$.

Definición 2.3.13. Sea $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ un cuerpo totalmente ordenado. Decimos que un subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ está acotado inferiormente, si y sólo si, existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $\beta \leq x$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Al elemento $\beta \in \mathbb{K}$ lo llamaremos cota inferior del conjunto $\mathbb{X}$. Notemos que cualquier elemento menor a β también es cota inferior de $\mathbb{X}$.

Definición 2.3.14. Sea $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ un cuerpo totalmente ordenado. Decimos que un subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ está acotado, si y sólo si, está acotado superiormente e inferiormente. Es decir, un subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ está acotado, si y sólo si, existen $\beta, \alpha \in \mathbb{K}$ tales que $\beta \leq x \leq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{X}$. A los elementos $\beta, \alpha \in \mathbb{K}$ los llamaremos cotas del subconjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$.

Proposición 2.3.7. Si $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq)$ es un cuerpo totalmente ordenado, entonces $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ está acotado, si y sólo si, existen $\beta, \alpha \in \mathbb{K}$ tales que $\mathbb{X} \subset [\beta, +\infty)$ y $\mathbb{X} \subset (-\infty, \alpha]$.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ está acotado. Luego por la definición (2.3.14) existen $\beta, \alpha \in \mathbb{K}$ tales que $\beta \leq x \leq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{X}$. De esta manera;

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{X} &\rightarrow x \leq \alpha \\ &\leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha] \end{aligned}$$

Luego, $(\forall x \in \mathbb{X})(x \in \mathbb{X} \rightarrow x \in (-\infty, \alpha])$, de donde $\mathbb{X} \subset (-\infty, \alpha]$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{X} &\rightarrow \beta \leq x \\ &\leftrightarrow x \in [\beta, +\infty) \end{aligned}$$

Así, $(\forall x \in \mathbb{X})(x \in \mathbb{X} \rightarrow x \in [\beta, +\infty))$, y por lo tanto $\mathbb{X} \subset [\beta, +\infty)$.

La demostración del reciproco de esta proposición es trivial, por la propia definición de los intervalos $[\beta, +\infty)$ y $(-\infty, \alpha]$. □

Definición 2.3.15. Si $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces decimos que $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ tiene elemento máximo b si y sólo si $b \in \mathbb{X}$, y además b es una cota superior del conjunto $\mathbb{X}$. Afirmar que b es el máximo del conjunto $\mathbb{X}$, es equivalente a escribir $b = max\ \mathbb{X}$.

Definición 2.3.16. Si $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces decimos que $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ tiene elemento mínimo a si y sólo si $a \in \mathbb{X}$, y además a es una cota inferior del conjunto $\mathbb{X}$ Afirmar que a es el mínimo del conjunto $\mathbb{X}$, es equivalente a escribir $a = min\ \mathbb{X}$.

Definición 2.3.17. Sea $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado, y $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ un conjunto acotado. Además, sea $\mathcal{C}_I(\mathbb{X}) = \{\ \beta \in \mathbb{K} : \beta \leq x, \forall x \in \mathbb{X}\ \}$ el conjunto de todas las cotas inferiores de $\mathbb{X}$, y $\mathcal{C}_S(\mathbb{X}) = \{\ \alpha \in \mathbb{K} : x \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{X}\ \}$ el conjunto de todas las cotas superiores de $\mathbb{X}$.

(i) Decimos que el conjunto $\mathbb{X}$ posee extremo superior s, o supremo s, si y sólo si $s \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, y además s es la menor de las cotas superiores del conjunto $\mathbb{X}$. Afirmar que s es el supremo del conjunto $\mathbb{X}$ es equivalente a escribir $s = Sup\ \mathbb{X}$. Adoptando ésta terminología tenemos que $s = Sup\ \mathbb{X}$, si y sólo si, $s \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, y además $\alpha \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$ implica $x \leq s \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{X}$.

(ii) Decimos que el conjunto $\mathbb{X}$ posee extremo inferior i, o ínfimo i, si y sólo si $i \in \mathcal{C}_I(\mathbb{X})$, y además i es la mayor de las cotas inferiores del conjunto $\mathbb{X}$. Afirmar que i es el ínfimo del conjunto $\mathbb{X}$ es equivalente a escribir $i = Inf\ \mathbb{X}$. Adoptando ésta terminología tenemos que $i = Inf\ \mathbb{X}$, si y sólo si, $i \in \mathcal{C}_I(\mathbb{X})$, y además $\beta \in \mathcal{C}_I(\mathbb{X})$ implica $\beta \leq i \leq x, \forall x \in \mathbb{X}$.

Nota 2.3.7. Si $s = Sup\ \mathbb{X} \in \mathbb{X}$ entonces $s = max\ \mathbb{X}$. Análogamente, si $i = Inf\ \mathbb{X} \in \mathbb{X}$ entonces $i = min\ \mathbb{X}$. Además lo anterior implica las igualdades $s = min\ \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$ y $i = max\ \mathcal{C}_I(\mathbb{X})$.

Teorema 2.3.8. *Sea* $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ *un cuerpo totalmente ordenado, y* $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ *un conjunto acotado. Si* $s = Sup\ \mathbb{X}$, *e* $i = Inf\ \mathbb{X}$, *entonces se cumple lo siguiente:*

(a) s *e* i *son elementos únicos.*

(b) $(\forall c \in \mathbb{K})(c < s \rightarrow \exists x \in \mathbb{X} \wedge c < x)$.

(c) $(\forall c \in \mathbb{K})(i < c \rightarrow \exists y \in \mathbb{X} \wedge y < c)$.

Demostración. (a) Supongamos, por reducción al absurdo, que existen dos supremos distintos para el conjunto $\mathbb{X}$. Es decir, supongamos que $s = Sup\ \mathbb{X}$ y $s' = Sup\ \mathbb{X}$ con $s \neq s'$. Luego, por definición de supremo, $s, s' \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, y esto implica las desigualdades $s \leq s'$ y $s' \leq s$, nuevamente por definición de supremo. De la antisimetría de $\leq$ se sigue que $s = s'$, una contradicción. Luego, si $\mathbb{X}$ posee supremo, entonces este es único. La demostración de la unicidad del ínfimo para un conjunto $\mathbb{X}$ es análoga a la del supremo.

(b) Sea $c \in \mathbb{K}$ tal que $c < s$, y sea $x \in \mathbb{X}$. Luego $x \leq c < s$, o $c \leq x \leq s$. El primer caso no se puede dar, pues si fuera así, entonces $s = c$, en contradicción con la desigualdad $c < s$. De está manera, $c \leq x \leq s$.

(c) La demostración es análoga a la del inciso anterior. □

Nota 2.3.8. Observemos que el segundo inciso del teorema 2.3.7 nos dice que un elemento estrictamente menor al supremo de un conjunto $\mathbb{X}$ no puede ser cota superior de éste. Análogamente, el tercer inciso del teorema 2.3.7 nos dice que un elemento estrictamente mayor al ínfimo de un conjunto $\mathbb{X}$ no puede ser cota inferior de este.

Teorema 2.3.9. *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *un cuerpo totalmente ordenado, y* $\mathbb{X} \neq \emptyset$ *un subconjunto acotado de* $\mathbb{K}$*. Si* $s \in \mathbb{K}$*, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $s \leq Sup\ \mathbb{X}$

(b) $(\forall \varepsilon > \xi)(\exists x \in \mathbb{X})(s - \varepsilon < x)$

(c) $(\forall c \in \mathbb{K})(c < s \to \exists x \in \mathbb{X} \wedge c < x)$

Demostración. $(a) \to (b)$. Supongamos por reducción al absurdo que $s \leq Sup\ \mathbb{X}$, y que existe $\varepsilon > \xi$ tal que para todo $x \in \mathbb{X}$, $x \leq s - \varepsilon$. Luego, $s - \varepsilon \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, y por lo tanto $Sup\ \mathbb{X} \leq s - \varepsilon$, esto es, $Sup\ \mathbb{X} + \varepsilon \leq s$. Además, $s \leq Sup\ \mathbb{X}$ implica $s \leq Sup\ \mathbb{X} + \varepsilon$, pues $\varepsilon > \xi$. De esta manera, $s = Sup\ \mathbb{X} + \varepsilon$ por la antisimetría de la relación $\leq$. Se sigue de inmediato que $s \leq Sup\ \mathbb{X}$ implica $Sup\ \mathbb{X} + \varepsilon \leq Sup\ \mathbb{X}$, una contradicción, pues $\varepsilon > \xi$ Luego, $(a) \to (b)$.

$(b) \to (c)$. Sea $c \in \mathbb{K}$ tal que $c < s$. Luego, $s - c > \xi$, y por hipótesis existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $s - (s - c) < x$, es decir, $c < x$. Luego, $(b) \to (c)$.

$(c) \to (a)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que (c) es cierta y que $Sup\ \mathbb{X} < s$. Luego, de (c) se sigue que existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $Sup\ \mathbb{X} < x$, en contradicción con la definición de supremo. □

Nota 2.3.9. Observemos que la igualdad en (a) se da si $s \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$. En efecto, Supongamos, por reducción al absurdo, que $s \neq Sup\ \mathbb{X}$, y que (c) es cierta. Como $s \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, entonces s no puede ser la menor de las cotas superiores del conjunto $\mathbb{X}$. Luego debe existir $\alpha \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$ tal que $x \leq \alpha \leq s$, $\forall x \in \mathbb{X}$. Por otro lado, de (c) se sigue que la desigualdad $x \leq \alpha < s$, $\forall x \in \mathbb{X}$ implica la existencia de un $x' \in \mathbb{X}$ tal que $\alpha < x'$, una contradicción, pues $\alpha \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$. Luego $s = Sup\ \mathbb{X}$. En cualquier caso, $(c) \to (a)$.

Se puede formular un teorema análogo para el caso del ínfimo de un conjunto acotado $\mathbb{X}$. En este caso la demostración sería similar a la del teorema 2.3.8. Sólo bastaría con cambiar la relación $<$, por la relación $>$. El enunciado de dicho teorema es el siguiente:

Teorema 2.3.10. *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *un cuerpo totalmente ordenado, y* $\mathbb{X} \neq \emptyset$ *un subconjunto acotado de* $\mathbb{K}$*. Si* $i \in \mathbb{K}$*, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $i \geq Inf\ \mathbb{X}$

(b) $(\forall \varepsilon > \xi)(\exists x \in \mathbb{X})(i - \varepsilon > x)$

(c) $(\forall c \in \mathbb{K})(c > i \to \exists x \in \mathbb{X} \wedge c > x)$

Proposición 2.3.8. Sea $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ un cuerpo totalmente ordenado con $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ conjuntos acotados tales que $\mathbb{X}\subset\mathbb{Y}\subset\mathbb{K}$. Si lo conjuntos $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ poseen supremo e ínfimo, entonces se cumple la desigualdad $Inf\ \mathbb{Y}\leq Inf\ \mathbb{X}\leq Sup\ \mathbb{X}\leq Sup\ \mathbb{Y}$.

Demostración. Sea $i=Inf\,\mathbb{X}$, $s=Sup\,\mathbb{X}$, $i'=Inf\,\mathbb{Y}$ e $s'=Sup\,\mathbb{Y}$. Observemos que $i'\leq x,\forall x\in\mathbb{X}$, pues $\mathbb{X}\subset\mathbb{Y}$. Luego, $i'\in\mathcal{C}_I(\mathbb{X})$, y por definición de i, se tiene que $i'\leq i$. De manera análoga se prueba que $s\leq s'$. Por otro lado, es claro que $i\leq x\leq s'$, y de está manera $i'\leq i\leq s\leq s'$, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 2.3.9. Sean $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ conjuntos no vacíos con supremo e ínfimo tales que $\mathbb{X},\mathbb{Y}\subset\mathbb{K}$, donde el sistema $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ tiene estructura de cuerpo totalmente ordenado. Entonces:

(a) $-\mathbb{X}$ está acotado, y además $Sup-\mathbb{X}=-Inf\ \mathbb{X}$ e $Inf\ -\mathbb{X}=-Sup\ \mathbb{X}$.

(b) Para todo $\lambda>\xi$, el conjunto $\lambda\mathbb{X}$ está acotado, además de cumplirse las identidades $Sup\ \lambda\mathbb{X}=\lambda Sup\ \mathbb{X}$ y $Inf\ \lambda\mathbb{X}=\lambda Inf\ \mathbb{X}$.

(c) Para todo $\lambda<\xi$, el conjunto $\lambda\mathbb{X}$ está acotado, además de cumplirse las identidades $Sup\ \lambda\mathbb{X}=\lambda Inf\ \mathbb{X}$ e $Inf\ \lambda\mathbb{X}=\lambda Sup\ \mathbb{X}$.

(d) $\mathbb{X}+\mathbb{Y}$ está acotado, y se cumplen las identidades $Sup\ \mathbb{X}+\mathbb{Y}=Sup\ \mathbb{X}+Sup\ \mathbb{Y}$ e $Inf\ \mathbb{X}+\mathbb{Y}=Inf\ \mathbb{X}+Inf\ \mathbb{Y}$.

(e) Si $\mathbb{X},\mathbb{Y}\subset\mathcal{P}$, entonces $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ está acotado, y se tiene que $Sup\ \mathbb{X}\mathbb{Y}=Sup\ \mathbb{X}\ Sup\ \mathbb{Y}$ e $Inf\ \mathbb{X}\mathbb{Y}=Inf\ \mathbb{X}\ Inf\ \mathbb{Y}$.

Demostración. Para hacer más simple la escritura, pongamos $i=Inf\ \mathbb{X}$, $s=Sup\ \mathbb{X}$, $i'=Inf\ \mathbb{Y}$, $s'=Sup\ \mathbb{Y}$, $a=Inf\ -\mathbb{X}$, $b=Sup\ -\mathbb{X}$, $c=Inf\ \lambda\mathbb{X}$, $d=Sup\ \lambda\mathbb{X}$, $f=Sup\ \mathbb{X}+\mathbb{Y}$, $e=Inf\ \mathbb{X}+\mathbb{Y}$, $k=Sup\ \mathbb{X}\mathbb{Y}$ e $j=Inf\ \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

(a). Por definición de i, $i\leq x$, $\forall x\in\mathbb{X}$, y por el inciso (d) del teorema 2.3.4, lo anterior equivale a decir que $-x<-i$, $\forall-x\in-\mathbb{X}$, esto es, $-i\in\ \mathcal{C}_S\ (-\mathbb{X})$. Ahora sea $\alpha\in\ \mathcal{C}_S\ (-\mathbb{X})$, es decir, sea $\alpha\in\mathbb{K}$ tal que $-x\leq\alpha$, $\forall-x\in-\mathbb{X}$. De esta manera;

$$\begin{aligned}
-x\leq\alpha,\ \forall-x\in-\mathbb{X}\quad&\leftrightarrow\quad-\alpha<x,\ \forall x\in\mathbb{X}\\
&\leftrightarrow\quad-\alpha\in\ \mathcal{C}_I\ (\mathbb{X})\\
&\leftrightarrow\quad-\alpha\leq i<x,\ \forall x\in\mathbb{X}\\
&\leftrightarrow\quad-x\leq-i\leq\alpha,\ \forall-x\in-\mathbb{X}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\alpha\in\ \mathcal{C}_S\ (\mathbb{X})$ entonces $-i<\alpha$. Luego, $b=-i$.

(b). Tenemos que $i\leq x\leq s$, $\forall x\in\mathbb{X}$. Luego;

$$\begin{aligned}
i\leq x\leq s,\ \forall x\in\mathbb{X}\quad&\leftrightarrow\quad\lambda i\leq\lambda x\leq\lambda s,\ \forall x\in\mathbb{X}\\
&\leftrightarrow\quad\lambda i\in\ \mathcal{C}_I\ (\lambda\mathbb{X})\wedge\lambda s\in\ \mathcal{C}_S\ (\lambda\mathbb{X})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto $\lambda\mathbb{X}$ está acotado por λi, e λs. Ahora, sea $\beta\in\ \mathcal{C}_I\ (\lambda\mathbb{X})$ y $\alpha\in\ \mathcal{C}_S\ (\lambda\mathbb{X})$. Así,

$$\begin{aligned}
\beta\leq\lambda x\leq\alpha,\ \forall x\in\mathbb{X}\quad&\leftrightarrow\quad\frac{\beta}{\lambda}\leq x\leq\frac{\alpha}{\lambda},\ \forall x\in\mathbb{X}\\
&\leftrightarrow\quad\frac{\beta}{\lambda}\leq Inf\ \mathbb{X}\leq x\leq Sup\ \mathbb{X}\leq\frac{\alpha}{\lambda}\\
&\leftrightarrow\quad\beta\leq\lambda i\leq\lambda x\leq\lambda s\leq\alpha
\end{aligned}$$

Luego, si $\beta \in \mathcal{C}_I\ (\mathbb{X})$, entonces $\beta \leq \lambda i$, y si $\alpha \in \mathcal{C}_S\ (\mathbb{X})$, entonces $\lambda s \leq \alpha$. Luego, $d = \lambda s$, y $c = \lambda i$.

(c). De la definición de ínfimo y supremo se concluye que;

$$\begin{aligned} i \leq x \leq s,\ \forall x \in \mathbb{X} &\leftrightarrow \lambda s \leq \lambda x \leq \lambda i,\ \forall x \in \mathbb{X} \\ &\leftrightarrow \lambda s \in\ \mathcal{C}_I\ (\lambda \mathbb{X}) \wedge \lambda i \in\ \mathcal{C}_S\ (\lambda \mathbb{X}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda \mathbb{X}$ está acotado por λi, e λs. Ahora, dados arbitrariamente $\beta \in\ \mathcal{C}_I\ (\lambda \mathbb{X})$ y $\alpha \in \mathcal{C}_S\ (\lambda \mathbb{X})$ entonces;

$$\begin{aligned} \beta \leq \lambda x \leq \alpha,\ \forall x \in \mathbb{X} &\leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda} \leq x \leq \frac{\beta}{\lambda},\ \forall x \in \mathbb{X} \\ &\leftrightarrow \frac{\alpha}{\lambda} \leq i \leq x \leq s \leq \frac{\beta}{\lambda} \\ &\leftrightarrow \beta \leq \lambda s \leq \lambda x \leq \lambda i \leq \alpha \end{aligned}$$

De está manera, $d = \lambda i$ e $c = \lambda s$, por la definición de c y d.

(d). Si los conjuntos $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subset \mathbb{K}$ poseen supremo e ínfimo, entonces se cumple que $i \leq x \leq s$, $\forall x \in \mathbb{X}$, e $i' \leq y \leq s'$, $\forall y \in \mathbb{Y}$. Se sigue que;

$$i \leq x \leq s \wedge i' \leq y \leq s' \leftrightarrow i + i' \leq x + y \leq s + s'$$

Lo anterior significa que $i + i' \in \mathcal{C}_I(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$, y $s + s' \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$, en otras palabras, $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ esta acotado. Además, del teorema 2.3.9 tenemos que dado arbitrariamente un $\varepsilon > \xi$, entonces existe $x \in \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$ tales que $s - \varepsilon < x$, e $s' - \varepsilon < y$. En particular, si ponemos $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$ entonces $s - \dfrac{\varepsilon}{2} < x$, e $s' - \dfrac{\varepsilon}{2} < y$, de donde $s + s' - \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2} < x + y$, es decir, $s + s' - \varepsilon < x + y$. Por lo tanto, dado arbitrariamente un $\varepsilon > \xi$ entonces existe $x + y \in \mathbb{X} + \mathbb{Y}$ tal que $s + s' - \varepsilon < x + y$. Luego, $f = s + s'$.

Utilizando el teorema 2.3.10, de manera análoga se prueba que $e = i + i'$.

(e). Por hipótesis tenemos que $\mathbb{X} \subset \mathcal{P}$, y esto implica que $\xi \leq i$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que $i < \xi$. Luego, $i < \xi < x$, $\forall x \in \mathbb{X}$, pues $\mathbb{X} \subset \mathcal{P}$, en contradicción con el hecho de que $Inf\ \mathbb{X}$ es la mayor de las cotas inferiores del conjunto $\mathbb{X}$, por lo tanto $\xi \leq i$.

Ahora observemos que de $x \leq s$, $\forall x \in \mathbb{X}$, e $y \leq s'$, $\forall y \in \mathbb{Y}$ se tiene que $xy \leq ss'$, $\forall xy \in \mathbb{X}\ \mathbb{Y}$. Así, $ss' \in \mathcal{C}_S\ (\mathbb{X}\ \mathbb{Y})$. Teniendo en cuenta que $\xi \leq i$, entonces de manera similar se prueba que $ii' \in \mathcal{C}_I\ (\mathbb{X}\ \mathbb{Y})$.

Por otro lado, por la definición de k tenemos que $\forall x \in \mathbb{X}$, e $\forall y \in \mathbb{Y}$,

$$\begin{aligned}
xy \leq k &\leftrightarrow x \leq \frac{k}{y},\ \forall x \in \mathbb{X} \\
&\leftrightarrow \frac{k}{y} \in \mathcal{C}_S\ (\mathbb{X}) \\
&\leftrightarrow s \leq \frac{k}{y} \\
&\leftrightarrow y \leq \frac{k}{s},\ \forall y \in \mathbb{Y} \\
&\leftrightarrow \frac{k}{s} \in \mathcal{C}_S\ (\mathbb{Y}) \\
&\leftrightarrow s' \leq \frac{k}{s} \\
&\leftrightarrow ss' \leq k
\end{aligned}$$

Además, $k \leq ss'$, y por la antisimetría de la relación $\leq$, $k = ss'$.

Usando un razonamiento similar se demuestra que $j = ii'$. □

Definición 2.3.18. Si la cuádrupla $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ tiene estructura de cuerpo ordenado, entonces se dice que la aplicación $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ está acotada si y sólo si el conjunto de todas sus imágenes $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{K}$ lo está. Es decir; $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ está acotada si y sólo si existen $\beta, \alpha \in \mathbb{K}$ tales que $\beta \leq f(x) \leq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{X}$. A α y β se les llaman cotas de la aplicación $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

En virtud de lo anterior, si el conjunto $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{K}$ posee supremo e ínfimo, entonces se define el supremo y el ínfimo de la aplicación $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ como $Sup\ (f) = Sup\ \{f(x) : x \in \mathbb{X}\}$ e $Inf\ (f) = Inf\ \{f(x) : x \in \mathbb{X}\}$.

Teorema 2.3.11. *Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado, y sean $f, g : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ aplicaciones acotadas, con supremo e ínfimo. Definamos de manera natural la suma y el producto de las aplicaciones anteriores como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $(f + g)(\mathbb{X}) \subset f(\mathbb{X}) + g(\mathbb{X})$.

(b) $f + g : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *es acotada,* $Sup\ (f + g) \leq Sup\ (f) + Sup\ (g)$*, e* $Inf\ (f + g) \geq Inf\ (f) + Sup\ (g)$.

Demostración. (a). Sea $\lambda \in (f + g)(\mathbb{X})$. Así;

$$\begin{aligned}
\lambda \in (f + g)(\mathbb{X}) &\leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{X})(\lambda = (f + g)(x)) \\
&\to (\exists x \in \mathbb{X})(\lambda = f(x) + g(x)) \\
&\to \lambda \in f(\mathbb{X}) + g(\mathbb{Y})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\forall \lambda)(\lambda \in (f + g)(\mathbb{X}) \to \lambda \in f(\mathbb{X}) + g(\mathbb{X}))$, esto es, $(f + g)(\mathbb{X}) \subset f(\mathbb{X}) + g(\mathbb{X})$.

(b). Como las aplicaciones $f, g : \mathbb{X} \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ son acotadas, entonces los conjuntos de sus respectivas imágenes $f(\mathbb{X}), g(\mathbb{X}) \subset \mathbb{K}$ son acotados, y por el (d) de la proposición 2.3.9, $f(\mathbb{X}){+}g(\mathbb{X})$ está acotado. Además, $(f + g)(\mathbb{X}) \subset f(\mathbb{X}) + g(\mathbb{X})$, y por lo tanto $(f + g)(\mathbb{X})$ está acotado, pues todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado. Luego, $f+g:\mathbb{X}\subset\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ es acotada. Por otro lado, sea

$i = Inf\ (f)$, $i' = Inf\ (g)$, $s = Sup\ (f)$, $s' = Sup\ (g)$, $a = Inf\ (f+g)$, e $b = Sup\ (f+g)$. Por la definición de supremo e ínfimo, $\forall x\in\mathbb{X}$;

$$\begin{aligned} i\leq f(x)\leq s\wedge i'\leq g(x)\leq s' &\leftrightarrow\ i+i'\leq f(x)+g(x)\leq s+s' \\ &\leftrightarrow\ i+i'\in\ \mathcal{C}_I\ (f(\mathbb{X})+g(\mathbb{X}))\wedge s+s'\in\mathcal{C}_S\ (f(\mathbb{X})+g(\mathbb{X})) \\ &\leftrightarrow\ i+i'\in\mathcal{C}_I\ (f+g)(\mathbb{X})\wedge s+s'\in\mathcal{C}_S\ (f+g)(\mathbb{X}) \\ &\leftrightarrow\ i+i'\leq a\wedge s+s'\geq b \end{aligned}$$

La equivalencia anterior es el resultado que estábamos esperando, quedando demostrado el teorema. □

Teorema 2.3.12. *Sea* $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ *un cuerpo totalmente ordenado, y sean* $f,g:\mathbb{X}\subset\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}$ *aplicaciones acotadas tales que* $f(x),\ g(x)>\xi$, $\forall x\in\mathbb{X}$. *Si* f *y* g *poseen supremo e ínfimo, y si consideramos las operaciones definidas en el teorema anterior, entonces:*

(a) $(fg)(\mathbb{X})\subset f(\mathbb{X})\ g(\mathbb{X})$.

(b) $fg:\mathbb{X}\subset\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}$ *es acotada,* $Sup\ (fg)\leq Sup\ (f)\ Sup\ (g)$, *e* $Inf\ (fg)\geq Inf\ (f)\ Sup\ (g)$.

Demostración. (a). Demostración análoga a la del primer inciso del anterior teorema.

(b). Esta prueba es idéntica a la demostración del segundo inciso del teorema anterior. Basta con cambiar la operación suma, por la operación producto. □

2.3.3. Cuerpos Ordenados Arquimedianos

Definición 2.3.19. Un cuerpo totalmente ordenado $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ es arquimediano, si y sólo si, su respectivo subconjunto de números naturales $\mathbb{N}\subset\mathbb{K}$ no está acotado superiormente. En otras palabras, $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq\ )$ tiene estructura de cuerpo arquimediano, si y sólo si, dado arbitrariamente un $x\in\mathbb{K}$ entonces siempre podemos encontrar un $n\in\mathbb{N}$ de tal manera que $n>x$.

Teorema 2.3.13. *Si la cuádrupla* $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ *tiene estructura de cuerpo totalmente ordenado, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ *tiene estructura de cuerpo arquimediano.*

(b) $(\forall y\in\mathbb{K})(\forall x\in\mathcal{P})(\exists n\in\mathbb{N})(nx>y)$.

(c) $(\forall x\in\mathcal{P})(\exists n\in\mathbb{N})(\xi<\dfrac{\zeta}{n}<x)$.

Demostración. (a) $\to$ (b). Supongamos por contradicción que (a) es cierta y que existe $y\in\mathbb{K}$, e $x>\xi$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$, $nx\leq y$. Como $x>\xi$, entonces $nx\leq y$ implica $n\leq\dfrac{y}{x}$, y de ésta manera $\dfrac{y}{x}\in\mathcal{C}_S(\mathbb{N})$, en contradicción con (a), pues esta proposición afirma que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, es decir, $\mathcal{C}_S(\mathbb{N})=\emptyset$.

(b) $\to$ (c). Sea $x\in\mathcal{P}$. Como $\zeta\in\mathbb{K}$, entonces por (b) existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $nx>\zeta$, esto es, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\xi<\dfrac{\zeta}{n}<x$.

(c) $\to$ (a). Si $x\in\mathcal{P}$, entonces $\dfrac{\zeta}{x}\in\mathcal{P}$, y por (c) existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\zeta}{n}<\dfrac{\zeta}{x}$, de donde, $n>x$. Luego, $\mathbb{N}$ está acotado superiormente, es decir, $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ tiene estructura de cuerpo arquimediano. □

Teorema 2.3.14. *Si la cuádrupla $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ tiene estructura de cuerpo totalmente ordenado, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ *tiene estructura de cuerpo arquimediano.*

(b) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{K}$ *no está acotado ni inferior, ni superiormente.*

(c) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{K}$ *no está acotado ni inferior, ni superiormente.*

Demostración. (a) $\rightarrow$ (b). Sea $x\in\mathbb{K}$. Luego, $x\in-\mathcal{P}$, o $x\in\{\xi\}$, o $x\in\mathcal{P}$. Si tomamos el primer caso, entonces tenemos que $-x\in\mathcal{P}$, y por (a) existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $n>-x$, esto es, existe $-n\in-\mathbb{N}$ tal que $-n<x$. Si tomamos el segundo y tercer caso, entonces trivialmente siempre podremos encontrar un $m\in-\mathbb{N}$ tal que $m<x$. De esta manera se concluye que $-\mathbb{N}$ no está acotado inferiormente. Además, por hipótesis tenemos que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, por lo tanto $\mathbb{Z}=-\mathbb{N}\cup\mathbb{N}$, no está acotado ni inferior, ni superiormente.

(b) $\rightarrow$ (c). Si $x\in\mathbb{K}$, entonces para un $n\in\mathbb{N}$ arbitrario, $xn\in\mathbb{K}$. Como (b) afirma que $\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente, entonces podemos encontrar un $m\in\mathbb{N}$ tal que $m>xn$, esto es, $\dfrac{m}{n}>x$. Luego, $\mathbb{Q}$ no está acotado superiormente. Además, si $x\in\mathbb{K}$, entonces $x\in-\mathcal{P}$, o $x\in\{\xi\}$, o $x\in\mathcal{P}$. Si tomamos el primer caso, entonces $-x\in\mathcal{P}$, y por $\mathbb{Z}$ no estar acotado superiormente entonces existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $m>-xn$, es decir, $-\dfrac{m}{n}<x$. Si tomamos el segundo y tercer caso, entonces trivialmente siempre podremos encontrar un $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}^{-}$ tal que $\dfrac{m}{n}<x$. De está manera $\mathbb{Q}$ no está acotado inferiormente.

(c) $\rightarrow$ (a). Sea $x\in\mathbb{K}$ arbitrario. Como por hipótesis tenemos que $\mathbb{Q}$ no está acotado superiormente, entonces podemos encontrar un $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}^{+}$ tal que $\dfrac{m}{n}>x$. Además es claro que $m+1>\dfrac{m}{n}$. Luego, por la transitividad de la relación $<$ tenemos que $m+1>x$. Por lo tanto $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, y de ésta manera la cuádrupla $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ tiene estructura de cuerpo arquimediano. □

Nota 2.3.10. Observemos que la prueba anterior también nos dice que el cuerpo de los números racionales es arquimediano, pues dado arbitrariamente un $\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}^{+}$, entonces $m+1\in\mathbb{N}$, y además $m+1>\dfrac{m}{n}$.

Proposición 2.3.10. Si la cuádrupla $(\mathbb{K},+,\cdot,\leq)$ tiene estructura de cuerpo arquimediano, y $\mathbb{X},\mathbb{Y}\subset\mathbb{K}$ son tales que $\forall x\in\mathbb{X},\forall y\in\mathbb{Y},\ x\leq y$, entonces si $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ poseen supremo e ínfimo se cumple:

(a) $Sup\ \mathbb{X}\leq Inf\ \mathbb{Y}$.

(b) $Sup\ \mathbb{X}=Inf\ \mathbb{Y}\leftrightarrow(\forall\varepsilon>\xi)\ (\exists\, x\in\mathbb{X})\ (\exists\, y\in\mathbb{Y})\ (y-x<\varepsilon)$.

Demostración. Sea $i=Inf\ \mathbb{Y}$, e $s=Sup\ \mathbb{X}$.

(a). Por hipótesis tenemos que $\forall x\in\mathbb{X},\ \forall y\in\mathbb{Y},\ x\leq y$, y por las definiciones 2.3.12 y 2.3.13 entonces $\forall x\in\mathbb{X},\ \forall y\in\mathbb{Y},\ x\in\mathcal{C}_I(\mathbb{Y})$ e $y\in\mathcal{C}_S(\mathbb{X})$. Luego, si $x\in\mathcal{C}_I(\mathbb{Y})$ entonces $x\leq i$, y si $y\in\mathcal{C}_S(\mathbb{X})$ entonces $s\leq y$, por las definiciones de supremo e ínfimo. Por otro lado, las desigualdades $x\leq i$, e $s\leq y$ implican que $i\in\mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, y $s\in\mathcal{C}_I(\mathbb{Y})$. Si tomamos cualquier caso, entonces $s\leq i$, como se quería demostrar.

(b). Supongamos por reducción al absurdo, que $s=i$, y que existe $\varepsilon>\xi$ tal que $\forall x\in\mathbb{X},\ \forall y\in\mathbb{Y}$, $y-x\geqslant\varepsilon$. De ésta manera;

$$y-x\geqslant\varepsilon\leftrightarrow\varepsilon+x\leq y,\ \forall x\in\mathbb{X},\ \forall y\in\mathbb{Y}\tag{2.14}$$

y además,

$$y - x \geqslant \varepsilon \leftrightarrow y - \varepsilon \geqslant x,\ \forall x \in \mathbb{X},\ \forall y \in \mathbb{Y} \tag{2.15}$$

Oservemos que (2.14) implica que $\varepsilon + x \in \mathcal{C}_I(\mathbb{Y})$, $\forall x \in \mathbb{X}$, y (2.15) implica que $y - \varepsilon \in \mathcal{C}_S(\mathbb{X})$, $\forall y \in \mathbb{Y}$. Luego por las definiciones del supremo e ínfimo tenemos que;

$$\begin{aligned}
\varepsilon + x \leq i = s \leq y - \varepsilon &\leftrightarrow \varepsilon + x \leq y - \varepsilon \\
&\leftrightarrow 2\varepsilon + x \leq y \leq i = s \leq y - \varepsilon \\
&\leftrightarrow 2\varepsilon + x \leq y - \varepsilon \\
&\leftrightarrow 3\varepsilon + x \leq y \leq i = s \leq y - \varepsilon \\
&\leftrightarrow 3\varepsilon + x \leq y - \varepsilon
\end{aligned}$$

Si continuamos haciendo el proceso anterior, entonces eso nos llevaría a conjeturar la desigualdad $n\epsilon \leq y - x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que es cierta y se puede demostrar fácilmente usando el principio de inducción matemática.

Por otro lado, $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es un cuerpo arquimediano, y por lo tanto para los elemntos ε, $y - x \in \mathbb{K}$, existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n'\varepsilon > y - x$, en contradicción con la desigualdad $n\varepsilon \leq y - x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, supongamos que para todo $\varepsilon > \xi$ existen $x \in \mathbb{X}$ e $y \in \mathbb{Y}$ tales que $y - x < \varepsilon$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
y - x < \varepsilon &\leftrightarrow y < \varepsilon + x \\
&\leftrightarrow i \leq y < \varepsilon + x \\
&\leftrightarrow i < \varepsilon + x \\
&\leftrightarrow i - \varepsilon < x
\end{aligned}$$

Luego, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $x \in \mathbb{X}$ tal que $i - \varepsilon < x$, esto es, $s = i$ en virtud del teorema 2.3.9. $\square$

Proposición 2.3.11. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo totalmente ordenado. $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ tiene estructura de cuerpo arquimediano, si y sólo si, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\zeta}{2^n} < \varepsilon$.

Demostración. Sea $\varepsilon \in \mathbb{K}$ arbitrario, con $\varepsilon > \xi$. Por hipótesis $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ tiene estructura de cuerpo arquimediano, y por lo tanto para los elementos $\varepsilon, \zeta \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\zeta < n\varepsilon$. Luego;

$$\begin{aligned}
\zeta < n\varepsilon &\leftrightarrow \frac{\zeta}{n} < \varepsilon \\
&\leftrightarrow \frac{\zeta}{2^n} < \frac{\zeta}{n} < \varepsilon \\
&\leftrightarrow \frac{\zeta}{2^n} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Así, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\zeta}{2^n} < \varepsilon$, como se quería probar.

Reciprocamente, sea $x \in \mathbb{K}$ arbitrario, con $x > \xi$. Si $x < \zeta$, entonces trivialmente existe $n = \zeta \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$. Si $x > \zeta$, entonces por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\zeta}{2^n} < x$. Por lo tanto;

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{2^n} < x &\leftrightarrow \frac{\zeta}{2^n} < \frac{\zeta}{n} < x \\ &\leftrightarrow \xi < \frac{\zeta}{n} < x \end{aligned}$$

Así pues, para todo $x \in \mathbb{K}$, con $x > \xi$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\xi < \dfrac{\zeta}{n} < x$, estos es, $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ tiene estructura de cuerpo arquimediano. □

2.3.4. Valor absoluto y distancia

Lo escrito hasta aquí expone la manera como se deben operar entre si elementos de un cuerpo, y presenta una estructura que en cierto sentido nos permite decidir cuando un elemento de un cuerpo es mas grande, o más pequeño que otro. Pero si un elemento de un cuerpo totalmente ordenado es más grande, o más pequeño que otro, entonces ¿cuál es la distancia que los separa? Notemos que en esta pregunta aparece de manera natural la palabra distancia, sin embargo, ¿qué se entiende por distancia en matemáticas? Este concepto es muy importante, y lo que sigue responderá a esta pregunta.

Definición 2.3.20. Un valor absoluto en un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es una aplicación

$$f : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot\ ) \longrightarrow (\ \mathbb{A},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ ),$$

donde la cuádrupla $(\ \mathbb{A},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ tiene estructura de cuerpo ordenado arquimediano, y f satisface las siguientes propiedades:

(A) $f(x) > \xi$, para todo $x \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, y $f(\xi) = \xi'$, donde ξ' es el elemento neutro en $(\mathbb{A}, \oplus)$.

(B) $f(x + y) \leq f(x) \oplus f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

(C) $f(xy) = f(x) \odot f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

A partir de lo anterior, definimos a un cuerpo métrico como una pareja $(f, \mathbb{K})$, donde f es un valor absoluto definido en $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot\ )$.

Proposición 2.3.12. Si $f : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot\ ) \longrightarrow (\ \mathbb{A},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ es un valor absoluto, entonces $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$.

Demostración. En virtud de (C) tenemos que;

$$[f(-\zeta)]^2 = f(-\zeta) \odot f(-\zeta) = f[(-\zeta)(-\zeta)] = f[(-\zeta)^2] = f(\zeta) = \zeta' \tag{2.16}$$

Luego, $f(-\zeta) = \zeta'$. Ahora sea $x \in \mathbb{K}$. Así,

$$\begin{aligned} f(x) &= f[-(-x)] \\ &= f[(-\zeta)(-x)] \\ &= f(-\zeta) \odot f(-x) \\ &= \zeta' \odot f(-x) \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$. □

Teorema 2.3.15. *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *un cuerpo arquimediano, y* $| \quad | : (\mathbb{K}, +, \cdot, \leq) \longrightarrow (\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *una aplicación definida como*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq \xi \\ \\ -x & si\ x < \xi \end{cases} \tag{2.17}$$

La aplicación anterior define un valor absoluto en cualquier cuerpo arquimediano, y se dice que la pareja $(| \quad |, \mathbb{K})$ *forma un cuerpo métrico usual, o también que* $| \quad |$ *es el valor absoluto usual en un cuerpo arquiediano arbitrario.*

Demostración. (A). Trivialmente $|x| > \xi$, para todo $x \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, y $|\xi| = \xi$, por la definición de $| \quad |$.

(B). Sean $x, y \in \mathbb{K}$. Luego tenemos los siguientes casos:

(1) $x, y \geq \xi$

(2) $x, y \leq \xi$

(3) $x \geq \xi$, $y \leq \xi$

(4) $x \leq \xi$, $y \geq \xi$

Si tomamos el caso (1), entonces tendríamos que $|x + y| = x + y = |x| + |y|$, pues en este caso $x, y \geq \xi$ implica que $x + y \geq \xi$.

Tomando el caso (2), tendríamos que $x, y \leq \xi$ implica $x + y \leq \xi$. Luego por la definición de $| \quad |$, entonces $|x + y| = -(x + y) = -x + (-y) = |x| + |y|$.

Para el caso (3) tenemos que si $x + y \geq \xi$, entonces por definición de $| \quad |$,

$$\begin{aligned} |x + y| &= x + y \\ &= |x| - |y| \\ &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x + y \leq \xi$, entonces nuevamente por definición de $| \quad |$,

$$\begin{aligned} |x + y| &= -(x + y) \\ &= |y| - |x| \\ &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

El caso (4) es análogo al caso (3), es suficiente con cambiar las variables.

De (1), (2), (3), y (4) se concluye que $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{K}$.

(C). Para demostrar este inciso tendremos que considerar nuevamente los cuatro casos anteriores para $x, y \in \mathbb{K}$ arbitrarios. En efecto;

Si consideramos el caso (1), entonces por definición de $|\ \ |$, tendríamos $|xy| = xy = |x||y|$, pues $x, y \geq \xi$ implica que $xy \geq \xi$.

Tomando el caso (2), nuevamente $xy \geq \xi$, y de ésta manera $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

Para el caso (3) tendríamos que $xy \leq \xi$, y por lo tanto, $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$.

La prueba para el caso (4) es idéntica a la del caso (3), basta con intercambiar las variables.

De (A), (B), y (C) concluimos que la pareja $(|\ \ |, \mathbb{K})$ es un cuerpo métrico, como se quería demostrar. □

Proposición 2.3.13. Si ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tiene estructura de cuerpo arquimediano, entonces $\forall x \in \mathbb{K}$,

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{2.18}$$

Demostración. Si $x \geq \xi$, el resultado es evidente. Si $x < \xi$, entonces $|x| = -x$, osea,

$$-|x| = x \leq x \leq |x|. \tag{2.19}$$

Luego, $-|x| \leq x \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{K}$. □

Teorema 2.3.16. *Si* ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) *tiene estructura de cuerpo arquimediano, entonces:*

(a) $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, $|x| \leq \alpha \leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.

(b) $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, $|x| \geq \alpha \leftrightarrow x \geq \alpha \vee x \leq -\alpha$.

(c) $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, $|x| = \alpha \leftrightarrow x = -\alpha \vee x = \alpha$.

Demostración. (a). Si $x \geq \xi$, el teorema es evidente. Si $x < \xi$, entonces $|x| = -x$, de donde,

$$|x| \leq \alpha \leftrightarrow -x \leq \alpha \leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \tag{2.20}$$

De está manera, $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, $|x| \leq \alpha \leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.

(b). Si $x \geq \xi$ entonces,

$$|x| \geq \alpha \leftrightarrow x \geq \alpha. \tag{2.21}$$

Si $x < \xi$, entonces $|x| = -x$, y así

$$|x| \geq \alpha \leftrightarrow -x \geq \alpha \leftrightarrow x \leq -\alpha. \tag{2.22}$$

Luego, $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$,

$$|x| \geq \alpha \leftrightarrow x \geq \alpha \vee x \leq -\alpha \tag{2.23}$$

(c). Si tomamos $x \geq \xi$ tenemos,

$$|x| = \alpha \leftrightarrow x = \alpha. \tag{2.24}$$

Si tomamos $x < \xi$ entonces,

$$|x| = \alpha \leftrightarrow -x = \alpha \leftrightarrow x = -\alpha. \tag{2.25}$$

Por lo tanto, $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$,

$$|x| = \alpha \leftrightarrow x = -\alpha \vee x = \alpha. \tag{2.26}$$

□

Proposición 2.3.14. Si ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tiene estructura de cuerpo arquimediano, entonces $\forall x, y \in \mathbb{K}$, $\forall \varepsilon \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$,

$$|x - y| \leq \varepsilon \leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \leftrightarrow x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon). \tag{2.27}$$

Demostración. Éste resultado es una consecuencia casi directa del teorema anterior, y de la definición de intervalos limitados. En efecto,

$$|x - y| \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \leq x - y \leq \varepsilon \leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \leftrightarrow x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon). \tag{2.28}$$

Por lo tanto, $\forall x, y \in \mathbb{K}$, $\forall \varepsilon \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, $|x - y| \leq \varepsilon \leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \leftrightarrow x \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. □

Teorema 2.3.17. *Si* ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) *tiene estructura de cuerpo arquimediano, entonces* $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$ *se cumple:*

(a) $|x| = |-x|$.

(b) $|\dfrac{x}{y}| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \in \mathbb{K} - \{\xi\}$.

(c) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.

(d) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Demostración. (a). Dado $x \in \mathbb{K}$ arbitrario, entonces,

$$|x| = |-(-x)| = |-\zeta(-x)| = |-\zeta||-x| = -(-\zeta)|-x| = \zeta|-x| = |-x|. \tag{2.29}$$

Así, $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{K}$.

(b). Sean $x \in \mathbb{K}$, e $y \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ arbitrarios. Tenemos que $|y||y^{-1}| = |yy^{-1}| = |\zeta| = \zeta$, de donde, $|y^{-1}| = |y|^{-1}$. Luego,

$$|\frac{x}{y}| = |xy^{-1}| = |x||y^{-1}| = |x||y|^{-1} = \frac{|x|}{|y|}. \tag{2.30}$$

De está manera, $|\dfrac{x}{y}| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $\forall y \in \mathbb{K} - \{\xi\}$.

(c). Si $x \in \mathbb{K}$, e $y \in \mathbb{K}$, entonces por la desigualdad triangular,

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \leftrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|. \tag{2.31}$$

De manera similar, y aplicado (a) obtenemos,

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|. \tag{2.32}$$

En virtud del teorema 1.2.5, lo anterior equivale a decir,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{2.33}$$

Además, por la proposición 2.3.5 y por lo anterior concluimos,

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{2.34}$$

Por otro lado, si $x, y \in \mathbb{K}$ entonces tenemos los siguientes casos:

(a) $x, y \geq \xi$

(b) $x, y \leq \xi$

(c) $x \geq \xi$, $y \leq \xi$

(d) $x \leq \xi$, $y \geq \xi$

Si consideramos el caso (a), y además suponemos que $x \leq y$, entonces,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow y - x \leq x + y \leftrightarrow -x \leq x \tag{2.35}$$

Razonando de manera análoga, si suponemos que $y \leq x$, entonces,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow -y \leq y. \tag{2.36}$$

Si consideramos el caso (b), y suponemos que $x \leq y$, entonces,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow y - x \leq -x - y \leftrightarrow y \leq -y. \tag{2.37}$$

Procediendo de manera similar, y considerando el caso en que $y \leq x$, entonces,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow x \leq -x. \tag{2.38}$$

Para el caso (c) tendríamos que $y \leq x$, y por lo tanto,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow x - y \leq x - y. \tag{2.39}$$

Para el caso (d) tendríamos que $x \leq y$, y así,

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leftrightarrow y - x \leq y - x. \tag{2.40}$$

En cualquier caso tendríamos que $|x - y| \leq |x| + |y|$, y de está manera,

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{K}. \tag{2.41}$$

(d). Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$. Luego por la desigualdad triangular,

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|. \tag{2.42}$$

Así pues, $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$, $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$. $\square$

Definición 2.3.21. Un distancia, o métrica en un conjunto no vacío $\mathcal{X}$, es una aplicación

$$f : \mathcal{X}^2 \longrightarrow (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ ),$$

donde la cuádrupla $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ tiene estructura de cuerpo arquimediano, y f satisface las siguientes propiedades, llamadas propiedades de una distancia:

(A') $f(x, y) \geq \xi$, y $f(x, y) = \xi \leftrightarrow x = y$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(B') $f(x, y) = f(x, y)$, para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(C') $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$, para todo $x, y, z \in \mathcal{X}$.

Definimos a un espacio métrico como una pareja $(\mathcal{X}, f)$, donde $\mathcal{X}$ es un conjunto no vacío, y f es una distancia en $\mathcal{X}$.

Teorema 2.3.18. *Sea $f : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ ) \longrightarrow (\ \mathbb{A},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ un valor absoluto, con $\xi' \in \mathbb{A}$ el neutro para $(\mathbb{A}, \oplus)$, y $\zeta' \in \mathbb{A}$ el neutro para $(\mathbb{A}, \odot)$. Definamos la aplicación $g : \mathbb{K}^2 \longrightarrow (\ \mathbb{A},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ como*

$$g(x, y) = f(x - y),\ \forall x, y \in \mathbb{K}. \tag{2.43}$$

Ésta aplicación define una distancia en $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ )$, y decimos que ésta es la distancia usual en cualquier cuerpo métrico, o que la pareja $(\mathbb{K}, g)$ forma un espacio métrico usual.

Demostración. (A). Si $x, y \in \mathbb{K}$, con $x \neq y$, entonces $x - y \in \mathbb{K} - \{\xi\}$, y por f ser un valor absoluto, entonces $f(x - y) = g(x, y) > \xi$. Por otro lado, si $x, y \in \mathbb{K}$ son tales que $f(x - y) = \xi'$, entonces nuevamente por f se un valor absoluto, lo anterior equivale a afirmar que $x - y = \xi$, lo que a su vez equivale a decir que $x = y$.

(B). Sean $x, y \in \mathbb{K}$. En virtud de la proposición 2.3.5,

$$f(x - y) = f[-(x - y)] = f(y - x) \tag{2.44}$$

De está manera, $g(x, y) = g(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{K}$.

(C). Sean $x, y, z \in \mathbb{K}$. Luego,

$$g(x, z) = f(x - z) = f[(x - y) + (y - z)] \leq f(x - y) \oplus f(y - z) = g(x, y) \oplus g(y, z). \tag{2.45}$$

Por lo tanto, la pareja $(\mathbb{K}, g)$ es un espacio métrico. □

Nota 2.3.11. Como caso particular, el valor absoluto definido en el teorema 2.3.15 induce la métrica $d : \mathbb{K}^2 \longrightarrow (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ definida como

$$d(x, y) = |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{K}. \tag{2.46}$$

Una proposición muy útil es la siguiente:

Proposición 2.3.15. Si $f : \mathcal{X}^2 \longrightarrow (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es una métrica, entonces se cumple la desigualdad

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq f(y, z), \forall x, y, z \in \mathcal{X}. \tag{2.47}$$

Así como hay equivalencias estructurales entre cuerpos ordenados, también las hay entre espacios métricos. El siguiente concepto definirá cuando dos espacios métricos son estructuralemente los mismos, en términos de sus distancias, sin importar que sus elementos difieran entre si.

Definición 2.3.22. Sean $(\mathcal{M}, f)$ y $(\mathcal{N}, g)$ espacios métricos. Una aplicación $i : (\mathcal{M}, f) \longrightarrow (\mathcal{N}, g)$ es una inmersión isométrica, si y sólo si, $f(x, y) = g(i(x), i(y))$, $\forall x, y \in \mathcal{M}$. Si la aplicación $i : (\mathcal{M}, f) \longrightarrow (\mathcal{N}, g)$ es biyectiva, entonces se dice que ésta es una isometría, y cuando ésta aplicación exista decimos que los espacios métricos $(\mathcal{M}, f)$ y $(\mathcal{N}, g)$ son isométricos.

En esencia, una imersión isométrica es una aplicación entre dos espacios métricos que conserva las distancias, y dos espacios métricos son isométricos cuando estructuralmente son los mismos en terminos de sus distancias. En otras palabras, la igualdad $f(x, y) = g(i(x), i(y))$ nos dice que tomar la distancia entre x e y con la métrica f en el espacio $\mathcal{M}$ es equivalente a tomar la distancia entre $i(x)$ e $i(y)$ en el espacio $\mathcal{N}$ con la métrica g.

Definición 2.3.23. Sean $(\mathbb{K}, v_1)$ y $(\mathbb{L}, v_2)$ cuerpos métricos. Una inmersión isométrica entre los cuerpos $(\mathbb{K}, v_1)$ y $(\mathbb{L}, v_2)$ es un monomorfismo $i : (\mathbb{K}, v_1) \longrightarrow (\mathbb{L}, v_2)$ tal que $v_1(x) = v_2(i(x))$. Si la aplicación $i : (\mathbb{K}, v_1) \longrightarrow (\mathbb{L}, v_2)$ es biyectiva, entonces es una isometría, y las observaciones que se hiceron en las isometrías de espacios métricos también se cumplen en las isometrías de cuerpos métricos.

Proposición 2.3.16. Toda inmersión isométrica es inyectiva.

Demostración. Sean $(\mathcal{M}, f)$ y $(\mathcal{N}, g)$ espacios métricos, e $i : (\mathcal{M}, f) \longrightarrow (\mathcal{N}, g)$ una inmersión isométrica. Por la definición 2.3.22, $f(x, y) = g(i(x), i(y))$, $\forall x, y \in \mathcal{M}$. Si suponemos que $i(x) = i(y)$, entonces $f(x, y) = g(i(x), i(x))$, $\forall x, y \in \mathcal{M}$. Luego, $f(x, y) = 0$, en virtud de (A). En otras palabras, $x = y$. Por lo tanto, $i : (\mathcal{M}, f) \longrightarrow (\mathcal{N}, g)$ es inyectiva. Si consideramos una inmersión isométrica entre dos cuerpos métricos, entonces la demostración es análoga. $\square$

Existe una relación poderosa entre los isomorfismos de cuerpos ordenados arquimedianos y las isometrías de cuerpos métricos. Tal relación ésta dada en la siguiente proposición:

Proposición 2.3.17. Todo isomorfismo de cuerpos ordenados arquimedianos (isomorfismo que además satisface la definición 2.3.3) es una isometría de cuerpos métricos, y por lo tanto una isometría de espacios métricos.

Lo escrito hasta aquí responde a la pregunta que nos habíamos hecho en la página 59, y es que ya tenemos una estructura que en un cierto sentido nos permite determinar la distancia entre dos elementos arbitrarios de un cuerpo ordenado. Ésta estructura es muy importante en análisis, pues casi todos sus conceptos la involucran; más adelante veremos ésto con más claridad. En lo que sigue, siempre consideraremos el espacio métrico definido en el Teorema 2.3.6, a menos de que se diga lo contrario.

2.3.5. La incompletitud de los números racionales

En está subsección vamos a dar varios argumentos que justifiquen la incompletitud del cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. En otras palabras, vamos a probar que el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales no llena completamente la recta numérica si pensamos a este conjunto como elementos de la misma. Lo anterior lo haremos vía un teorema que nos motivará a dar una definición la cual nos permitirá distinguir a el cuerpo ordenado arquimediano de los números raciones con otro cuerpo ordenado arquimediano que si llene completamente la recta; el cuerpo de los números reales, que se construirá formalmente a partir de los números racionales en el último capítulo.

Proposición 2.3.18. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo arquimediano, y $x \in \mathbb{K}$. Luego existe un único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + \zeta$. Al entero n se le llama la parte entera de x, y la identificaremos con el símbolo $[x]$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{K}$ arbitrario. Luego, $x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, o $x \in -\mathcal{P}$. Si tomamos el primer caso, entonces por $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ ser arquimediano, existe un conjunto E de números naturales mayores a x. Sea $m = min\ E$. Luego, $x < m$. Además, $m - \zeta \leq x$, pues de no ser así entonces $x < m - \zeta < m$, lo que contradice la mínimidad de m. De esta manera, $m - \zeta \leq x < m$. Por otro lado, si $x \in -\mathcal{P}$, entonces $-x \in \mathcal{P}$. Luego existe un conjunto E' de números naturales mayores a $-x$. Ahora, si $m' = min\ E'$ entonces $m' - \zeta \leq -x < m'$, de donde $-m' \leq x < -m' + \zeta$. De esta manera, para todo $x \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + \zeta$. La unicidad de n se da en virtud del teorema 2.3.8. □

Definición 2.3.24. Si $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo arquimediano, y $x \in \mathbb{K}$, entonces se defina la parte fraccionaria de x como el elemento $\mathcal{F}(x) = x - [x]$.

Nota 2.3.12. Observemos que la proposición 2.3.12 básicamente nos dice que existe una aplicación llamada parte entera, que tiene la forma

$$\begin{array}{rccc} [\ \ ]: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & [x], \end{array}$$

donde $[x] \leq x \leq [x] + \zeta$. Por otro lado, la parte fraccionaria de un elemento arbitrario $x \in \mathbb{K}$ es única, en virtud de la unicidad de la parte entera de este. Además se puede demostrar que la parte fraccionaria de cualquier $x \in \mathbb{K}$ pertenece a el intervalo $[\xi, \zeta)$. Esto se traduce, como en el caso de la parte entera, en que existe una aplicación llamada parte fraccionaria, definida como

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathbb{K} & \longrightarrow & [\xi, \zeta) \\ & x & \longmapsto & \mathcal{F}(x) = x - [x], \end{array}$$

tal que $\xi \leq \mathcal{F}(x) < \zeta$. Además, de la igualdad $\mathcal{F}(x) = x - [x]$ se puede concluir que todo $x \in \mathbb{K}$ se puede descomponer de forma única en la forma $x = \mathcal{F}(x) + [x]$.

Teorema 2.3.19. *Sea* $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ *un cuerpo arquimediano, y* $x \in \mathbb{K}$, *con* $x > \xi$. *Si definimos las aplicaciones* $x, k, a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *como:*

(a) $x_n = \dfrac{\mathcal{F}(10^{n-1}x_{n-1})}{10^{n-1}}$, *con* $x = x_0 > \xi$

(b) $k_n = [10^n x_n]$.

(c) $a_n = [x] + \sum_{l=1}^{n} \dfrac{k_l}{10^l} \in \mathbb{Q}$, *con* $a_0 = [x]$.

(d) $b_n = a_n + \dfrac{\zeta}{10^n} \in \mathbb{Q}$, *con* $n \geq 0$.

Entonces, $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos,

$$k_n = [10^n x_n] \leftrightarrow 10^n x_n = k_n + \mathcal{F}(10^n x_n) \leftrightarrow x_n = \frac{k_n}{10^n} + \frac{\mathcal{F}(10^n x_n)}{10^n} \leftrightarrow x_n = \frac{k_n}{10^n} + x_{n+1}. \quad (2.48)$$

Ahora sea $S = \{\ n \in \mathbb{N} : x = a_0 + \sum_{t=1}^{n} \dfrac{k_t}{10^t} + x_{n+1}\ \}$. Afirmamos que $1 \in S$. En efecto,

$$x_1 = \frac{k_1}{10} + x_2. \quad (2.49)$$

De está manera,

$$x = x_0 = a_0 + \mathcal{F}(x_0) = a_0 + x_1 = a_0 + \frac{k_1}{10} + x_2. \tag{2.50}$$

Por lo tanto, $1 \in S$. Supongamos ahora que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in S$, es decir, supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$$x = a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{k_t}{10^t} + x_{n+1}. \tag{2.51}$$

Tenemos que,

$$x_{n+1} = \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} + x_{n+2.} \tag{2.52}$$

Por lo cual,

$$x = a_0 + \sum_{t=1}^{n+1} \frac{k_t}{10^t} + x_{n+2}. \tag{2.53}$$

Así pues, $n+1 \in S$, y en virtud del principio de inducción, $S = \mathbb{N} - \{0\}$, en otras palabras,

$$x = a_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{k_t}{10^t} + x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}. \tag{2.54}$$

Por otro lado,

$$\xi \leq \mathcal{F}(10^{n+1}x_{n+1}) < \zeta \leftrightarrow \xi \leq \frac{\mathcal{F}(10^{n+1}x_{n+1})}{10^{n+1}} < \frac{\zeta}{10^{n+1}} \leftrightarrow \xi \leq x_{n+2} < \frac{\zeta}{10^{n+1}}. \tag{2.55}$$

Ahora, al intervalo $[\xi, \frac{\zeta}{10^n}]$ lo vamos a dividir en 10 partes iguales, esto es,

$$\xi < \frac{1}{10^{n+1}} < \cdots < \frac{10}{10^{n+1}} = \frac{\zeta}{10^n} \tag{2.56}$$

Además,

$$\xi \leq \mathcal{F}(10^{n+1}x_{n+1}) < \zeta \leftrightarrow \xi \leq \frac{\mathcal{F}(10^{n+1}x_{n+1})}{10^{n+1}} < \frac{\zeta}{10^{n+1}} \leftrightarrow \xi \leq x_{n+2} < \frac{\zeta}{10^{n+1}}. \tag{2.57}$$

Observemos que,

$$k_{n+1} = [10^{n+1}x_{n+1}] \leftrightarrow k_{n+1} \leq 10^{n+1}x_{n+1} < k_{n+1} + 1 \leftrightarrow \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x_{n+1} < \frac{k_{n+1}+1}{10^{n+1}}. \tag{2.58}$$

Por lo tanto, $k_{n+1} + 1 < 10$.

De todo lo anterior se sigue que,

$$[x] + \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} < [x] + \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} + \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} < [x] + \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_n}{10^n} + \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} + x_{n+2}. \tag{2.59}$$

También,

$$[x]+\frac{k_1}{10}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\frac{k_{n+1}}{10^{n+1}}+x_{n+2}<[x]+\frac{k_1}{10}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\frac{k_{n+1}+\zeta}{10^{n+1}}<[x]+\frac{k_1}{10}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\frac{\zeta}{10^n} \tag{2.60}$$

En otras palabras,

$$a_n < a_{n+1} < x < b_{n+1} < b_n \tag{2.61}$$

Luego,

$$x \in [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.62}$$

□

Si consideramos los elementos del un cuerpo arquimediano como puntos de una recta, entonces la situación anterior se puede representar mediante el siguiente gráfico:

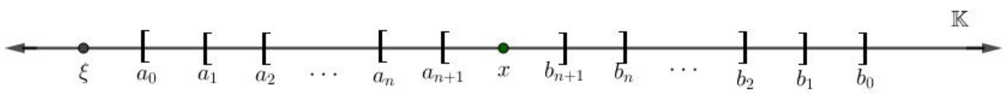


Figura 2.3: Sucesión de intervalos

Ejemplo 2.3.6. Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ un cuerpo arquimediano, y $x \in \mathbb{K}$ tal que $x^2 = 2$, y $x > \xi$. Se tiene que $1 < x^2 = 2 < 2^2$, y por definición de parte entera, entonces $[x] = 1$. Si aplicamos el teorema anterior, tenemos,

(a) $a_0 = 1$, $a_1 = \zeta + \frac{k_1}{10}$, y $a_2 = \zeta + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2}$

(b) $b_0 = 2$, $b_1 = a_1 + \frac{\zeta}{10}$, y $b_2 = a_2 + \frac{\zeta}{10^2}$

Por otro lado, tenemos las desigualdades,

(a) $(1 + \frac{k_1}{10})^2 < x^2 < (1 + \frac{k_1 + 1}{10})^2$

(b) $(1 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2})^2 < x^2 < (1 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2 + 1}{10^2})^2$

Como $x^2 = 2$, entonces por tanteo se puede verificar que los único valores que satisfacen las desigualdades anteriores son $k_1 = 4$, y $k_2 = 2$. De está manera, $x \in [1{,}41, 1{,}42] \subset [1{,}4, 1{,}5] \subset [1, 2]$. Si seguimos haciendo este proceso, entonces en particular podemos verificar que

$$x \in [1{,}41421356237310, 1{,}41421356237311] \tag{2.63}$$

Vemos entonces que si encojemos un elemento arbitrario $x > \xi$ de un cuerpo arquimediano, tal que $x^2 = 2$, entonces el teorema anterior nos dice que este está rodeado de una infinidad de números racionales, que cada vez se acercan más a el. A pesar de esto, tal número no puede ser racional, como se demostrará en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.19. No existe un elemento $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un elemento $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$. Luego, si $x \in \mathbb{Q}$ entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $MCD(m, n) = 1$ y $x = \frac{m}{n}$. De está manera,

$$x^2 = 2 \leftrightarrow (\frac{m}{n})^2 = 2 \leftrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \leftrightarrow m^2 = 2n^2 \tag{2.64}$$

Notemos que la igualdad $m^2 = 2n^2$ implica que el entero m^2 es par, y esto a su vez implica que el entero m también es par. Luego existe otro entero a tal que $m = 2a$, de donde, $m^2 = 4a^2$. Así,

$$m^2 = 4a^2 \leftrightarrow 2n^2 = 4a^2 \leftrightarrow n^2 = 2a^2 \tag{2.65}$$

Lo anterior significa que el entero n^2 también es par, y ésto implica que el entero n es par. Tenemos entonces que m, y n son pares, y por lo tanto $MCD(m, n) \neq 1$, en contradicción con la igualdad $MCD(m, n) = 1$. Por lo tanto, no existe un elemento $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$, como se quería probar. □

Nota 2.3.13. Así como el elemento escogido en el ejemplo 2.3.6, hay una inmensidad de números que tienen las mismas características. Estos no pertenecen al conjunto de los números racionales, pero a su alrededor existen una infinidad de elementos de este conjunto que se hacen prácticamente irreconocibles a estos. Por ejemplo, se puede demostrar que los siguientes números no están en $\mathbb{Q}$, y si aplicamos el teorema 2.3.15, entonces nos podremos aproximar bastante mediante números racionales. Los números son los siguientes:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ e = 2,71828182845904523536....,\ \pi = 3,1415926535897932..... \tag{2.66}$$

El primer número es la solución a la ecuación $x^2 = 2$, que ya analizamos antes. En el ejemplo 2.3.6 se mostró que $\sqrt{2} \in [1{,}41421356237310, 1{,}41421356237311]$, en realidad, $\sqrt{2} = 1{,}41421356237310....$, y los puntos suspensivos, en este caso, significan que los decimales se siguen prolongando de manera indefinida y no periódica. Fijémonos que está conclusión la estamos haciendo de manera intuitiva, o más bien sin mucha rigurosidad, pues el teorema 2.3.15 nos dice estrictamente que cuando n crece mucho en las aplicaciones a_n, y b_n, entonces las imágenes de estas se acercan cada vez más al elemento $x > \xi$ de el cuerpo arquimediano que estemos considerando. Darle un sentido más formal a éste asunto requiere de una serie de conceptos y técnicas que se estudiaran en el siguiente capítulo. Si consideramos a los números racionales como elementos de una recta numérica, entonces vemos que los intervalos que aparecen en la conclusión del teorema 2.3.15 siempre van a rodear a algún número irracional. Se dice que estos números irracionales son los huecos o lagunas que presenta el cuerpo de los números racionales. También decimos que los números racionales tienen la característica de ser un conjunto discontinuo, pues estos no llenan la recta. Un cuerpo que llene completamente la recta, se llama cuerpo completo. Más adelante definiremos ésto con más precisión. El siguiente gráfico ilustrará el hecho de que los números racionales, vistos desde un punto de vista geométrico, no pueden llenar la recta, pues en ésta también se pueden ubicar a los números irracionales, que son los huecos o vacíos que presenta éste conjunto.

A continuación daremos otro argumento de la discontinuidad de el conjunto de los números racionales.

Proposición 2.3.20. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ contiene subconjuntos no vacíos que son acotados superiormente pero carecen de supremo. Uno de ellos es el conjunto $L = \{\ r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 3\ \}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $x > 3$. Luego, $x^2 > 9 > 3$, y de ésta manera $x \notin L$. Así, $r \in L$ implica que $r < 3$. Además es claro que $0 \in L$, pues $0^2 = 0 < 3$. Tenemos entonces que $0 \leq r < 3$, para toda $r \in L$, y así $L \subset [0, 3]$. Por tanto, L es un conjunto acotado.

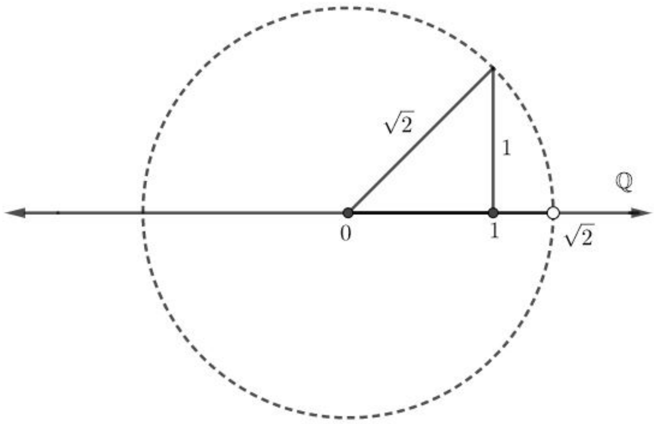


Figura 2.4: La $\sqrt{2}$ como un hueco en $\mathbb{Q}$

Afirmamos que L no tiene máximo. En efecto, sea $r \in L$ y $r' \in \mathbb{Q}^+$ tal que $r' < 1$, y $0 < r' < \dfrac{3-r^2}{2r+1}$. Luego,

$$\begin{aligned} r' < \frac{3-r^2}{2r+1} &\leftrightarrow r'(2r+1) < 3 - r^2 \\ &\leftrightarrow 2rr' + r' < 3 - r^2 \\ &\leftrightarrow r^2 + 2xr' + r' < 3 \end{aligned}$$

Además, $r' < 1$, y por tanto, $r'^2 < r'$. Así,

$$r^2 + 2xr' + r'^2 < r^2 + 2xr' + r' < 3 \leftrightarrow (r+r')^2 < 3 \tag{2.67}$$

Lo anterior significa que $r+r' \in L$. Luego dado arbitrariamente un $r \in L$ entonces existe $r+r' \in L$ con $r+r' > r$, esto es, L no tiene máximo.

Ahora observemos que dado $r \in L$, entonces $r^2 < 3$, de donde $r < \sqrt{3}$. Luego, $r < \sqrt{3}$, $\forall r \in L$, en otras palabras, $\sqrt{3} \in \mathcal{C}_S\ (L)$. Por otro lado, sea $\alpha \in \mathcal{C}_S\ (L)$. Como L no tiene máximo, entonces $\alpha \notin L$, pues de ser así, entonces α sería el máximo del conjunto L. Lo anterior implica que, $\alpha^2 > 3$, es decir, $\alpha > \sqrt{3}$. Tenemos entonces que dada arbitrariamente $\alpha \in \mathcal{C}_S\ (L)$ entonces $\sqrt{3} < \alpha$, y de ésta manera, $\sqrt{3} = Sup\ L$. Además, se puede demostrar que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Concluimos entonces que el conjunto L está acotado superiormente, pero carece de supremo en $\mathbb{Q}$. □

El ejemplo anterior muestra otro hueco o vacío que presenta el cuerpo de los números racionales, éste es el irracional $\sqrt{3}$. Motivados por lo anterior, definimos:

Definición 2.3.25. Un cuerpo arquimediano $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ se dice que es completo, si y sólo si, todo $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ acotado superiormente posee supremo $s \in \mathbb{X}$.

2.4. Densidad en los racionales

Definición 2.4.1. Si $(\mathcal{X}, f)$ es un espacio métrico, entonces $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ es denso en $\mathcal{X}$, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathcal{X}$, existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $f(x,d) < \varepsilon$.

Teorema 2.4.1. *Sea $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ un cuerpo ordenado arquimediano. El conjunto $\mathbb{D} \subset \mathbb{K}$ es denso en $\mathbb{K}$, si y sólo si, para cada $x, y \in \mathbb{K}$ tales que $x < y$ existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $x < d < y$.*

Demostración. Si el conjunto $\mathbb{D} \subset \mathbb{K}$ es denso en $\mathbb{K}$, entonces para $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2} > 0$ y $x' = \dfrac{x+y}{2} \in \mathbb{K}$ existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $|x'-d| < \varepsilon$. Por otro lado,

$$y - x' = y - \frac{x+y}{2} = \frac{2y-(x+y)}{2} = \frac{y-x}{2} = \varepsilon. \tag{2.68}$$

Además,

$$x - x' = x - \frac{x+y}{2} = \frac{2x-(x+y)}{2} = \frac{x-y}{2} = -\varepsilon. \tag{2.69}$$

Luego, en virtud del primer inciso del teorema 2.3.16,

$$|x'-d| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x'-d < \varepsilon \leftrightarrow x-x' < d-x' < y-x' \leftrightarrow x < d < y. \tag{2.70}$$

Por lo tanto, para cada $x, y \in \mathbb{K}$ existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $x < d < y$.

Reciprocamente, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{K}$ arbitrarios. De la desigualdad $x < x+\varepsilon$ tenemos que existe $d \in \mathbb{D}$ tal que $x < d < x+\varepsilon$. Luego, $0 < d-x < \varepsilon$, esto es, $|d-x| < \varepsilon$, como se quería probar. $\square$

Finalizamos con unos conceptos y proposiciónes que nos serán útiles en las demostraciones de unos teoremas que se expondrán en los siguientes capitulos.

Proposición 2.4.1. Si $\mathcal{X}$ es un cuerpo totalmente ordenado por la relación usual, entonces para todo intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathcal{X}$, existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $[a,b] \subset [-c,c] \subset \mathcal{X}$.

Proposición 2.4.2. Si ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario, entonces se cumple la desigualdad;

$$b^n - a^n \leq (b-a)nb^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.71}$$

Capítulo 3

Sucesiones

En éste capítulo se estudiarán a las sucesiones en conjuntos no vacíos y en espacios métricos. Una sucesión, en resumen, es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. La teoría que gira en torno a éste tipo especial de funciones nos permitirá, por ejemplo, solucionar el problema que obtuvimos en la nota 2.3.13 del capítulo anterior. Concretamente, en éste capítulo se estudiará la convergencia de sucesiones en espacios métricos, estudio que nos llevará a reformular el teorema del capítulo anterior en un enunciado mucho más útil que el ya presentado, pues éste 2.3.19 nos permitirá aproximarnos a números irracionales mediante números racionales, sino también dar una fórmula que los defina de manera exacta. También se estudiarán unas sucesiones muy importantes llamadas sucesiones de Cauchy. Estás sucesiones tendrán un papel muy importante en una de las construcciones de los números reales, llamada la construcción de los números reales a partir de sucesiones de Cauchy, y en la formulación y comprensión del concepto de cuerpo ordenado completo, indispensable en nuestra construcción de $\mathbb{R}$.

3.1. Sucesiones acotadas

Definición 3.1.1. Una sucesión en un conjunto no vacío $\mathcal{X}$ es una aplicación de la forma

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & n & \longmapsto & x(n) = x_n, \end{array}$$

donde x_n es llamado el termino de orden n, o el "*n-ésimo*" termino de la sucesión x.

Nota 3.1.1. Dada una sucesión en un conjunto $\mathcal{X}$,

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & n & \longmapsto & x(n) = x_n, \end{array}$$

entonces ésta será notada de las siguientes tres formas; $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$.

Definición 3.1.2. La imagen directa de $\mathbb{N}$ bajo la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathcal{X} : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...\}$, será llamada el conjunto de los términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nota 3.1.2. No se debe confundir a la sucesión $(x_n) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ con el conjunto de sus términos $x(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathcal{X} : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...\}$.

Definición 3.1.3. Sea $\mathcal{X}$ un cuerpo totalmente ordenado por la relación usual, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ una sucesión en $\mathcal{X}$. Decimos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, si y sólo si, el conjunto de sus términos $x(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathcal{X} : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado. Ésto es, si existen $a, b \in \mathcal{X}$ tales que $a \leqslant x_n \leqslant b$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$.

Proposición 3.1.1. Si $\mathcal{X}$ es un cuerpo totalmente ordenado por la relación usual, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ es una sucesión en $\mathcal{X}$, entonces está acotada, si y sólo si, existe un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathcal{X}$ tal que $x(\mathbb{N}) \subset [a, b] \subset \mathcal{X}$.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ una sucesión en $\mathcal{X}$. Por la definición 3.1.3, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...)$ está acotada, si y sólo si, el conjunto de sus términos $x(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathcal{X} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Además, $x(\mathbb{N}) = \{x_n \in \mathcal{X} : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado, si y sólo si, existen $a, b \in \mathcal{X}$ tales que $a \leqslant x_n \leqslant b$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. Por otro lado, $a \leqslant x_n \leqslant b$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$, si y sólo si, $x_n \in [a, b], \forall x_n \in x(\mathbb{N})$. Luego, $x(\mathbb{N}) \subset [a, b] \subset \mathcal{X}$ por definición de contenencia. □

Proposición 3.1.2. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo totalmente ordenado por la relación usual $\mathcal{X}$ está acotada, si y sólo si, existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $x(\mathbb{N}) \subset [-c, c] \subset \mathcal{X}$.

Demostración. En virtud de la proposición 3.1.1 , $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, si y sólo si, existe un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathcal{X}$ tal que $x(\mathbb{N}) \subset [a, b] \subset \mathcal{X}$. Luego, por la proposición 2.4.1 , existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $x(\mathbb{N}) \subset [a, b] \subset [-c, c] \subset \mathcal{X}$. De donde, $x(\mathbb{N}) \subset [-c, c] \subset \mathcal{X}$. □

Teorema 3.1.1. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo arquimediano $\mathcal{X}$ está acotada, si y sólo si, existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $|x_n| \leq c$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$.*

Demostración. En virtud de la proposición 3.1.2, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, si y sólo si, existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $x(\mathbb{N}) \subset [-c, c] \subset \mathcal{X}$. Por otro lado, $x(\mathbb{N}) \subset [-c, c] \subset \mathcal{X}$, si y sólo si, $-c \leq x_n \leq c$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. Luego, Por el inciso (a) del teorema 2.3.16, $|x_n| \leq c$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. □

Definición 3.1.4. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un conjunto no vacío $\mathcal{X}$, y sea $\mathbb{X} = \{n_1, n_2, ..., n_k, n_{k+1}, ...\} \subset \mathbb{N}$ un conjunto infinito. Una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una aplicación de la forma

$$\begin{array}{rccl} x' : & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & n_k & \longmapsto & x'(n_k) = x_{n_k}, \end{array}$$

donde x_{n_k} es llamado el "*k-ésimo*" termino de la subsucesión. El término n_k de la subsucesión, significa que es el término *k-ésimo* de sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Nota 3.1.3. Dada una subsucesión

$$\begin{array}{rccl} x' : & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & n_k & \longmapsto & x'(n_k) = x_{n_k}, \end{array}$$

de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces ésta será notada como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Definición 3.1.5. Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de un conjunto $\mathcal{X}$. La imagen directa de $\mathbb{X}$, $x'(\mathbb{X}) = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, ...\}$ bajo la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sera llamada el conjunto de los términos de la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.1.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en un cuerpo arquimediano $\mathcal{X}$, entonces toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

Demostración. Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, por el teorema 3.1.1 existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $|x_n| \leq c$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. Como $x(\mathbb{X}) \subset x(\mathbb{N})$, entonces $|x_{n_k}| \leq c$, $\forall x_{n_k} \in x(\mathbb{X})$, es decir, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en virtud del teorema 3.1.1. □

3.1.1. Sucesiones monótonas

Definición 3.1.6. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo $\mathcal{X}$ totalmente ordenado por la relación usual es creciente, si y sólo si, $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. En virtud de lo anterior, las sucesiones crecientes se puede escribir ordenadamente como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ...)$. En caso de que la relación de orden sea $<$ en vez de $\leq$, entonces se dice que la sucesión es estrictamente creciente.

Definición 3.1.7. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo $\mathcal{X}$ totalmente ordenado por la relación usual es decreciente, si y sólo si, $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. Luego, la sucesión se puede escribir de manera ordenada como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq x_{n+1} \geq ...)$. En caso de que la relación sea $<$ en vez de $\leq$, entonces se dice que la sucesión es estrictamente decreciente.

Definición 3.1.8. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo $\mathcal{X}$ totalmente ordenado por la relación usual es monótona, si y sólo si, la sucesión satisface alguna de las condiciones expuestas en las definiciónes 3.1.6 y 3.1.7

Proposición 3.1.3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente en un cuerpo $\mathcal{X}$ totalmente ordenado por la relación usual, entonces $n \leq m$, si y sólo si, $x_n \leq x_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $S = \{m \in \mathbb{N} : n \leq m \to x_n \leq x_m, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que si $n \leq 0$, entonces necesariamente $n = 0$. Luego, $n \leq 0$ implica $x_0 \leq x_0$, esto es, $0 \in S$.

Ahora supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in S$, es decir, supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq m$ implica $x_n \leq x_m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$n \leq m+1 \to n-1 \leq m \to x_{n-1} \leq x_m \to x_{n-1} \leq x_n \leq x_m \leq x_{m+1} \to x_n \leq x_{m+1}. \tag{3.1}$$

Por lo tanto, $m + 1 \in S$, y por el principio de inducción $S = \mathbb{N}$. Así, $n \leq m$, si y sólo si, $x_n \leq x_m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, como se quería probar. □

Nota 3.1.4. Se pueden formular proposiciones similares para los demás casos expuestos en las definiciónes 3.1.6, y 3.1.7. Para hacer ésto, es suficiente con cambiar la relación de orden que aparece en la proposición 3.1.3, y las pruebas sería análogas.

Definición 3.1.9. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en un conjunto totalmente ordenado $\mathcal{X}$. Un número natural c es un punto de contención en la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si y sólo si, para todo $n \geq c$, $x_c \leq x_n$. Los puntos de contención en una sucesión, por definición, siempre van a estar en el conjunto de los números naturales, pero su efecto siempre va a actuar en la respectiva sucesión donde los estemos considerando. Por lo tanto, cuando hagamos referencia a los puntos de contención en una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, siempre los vamos a ligar a la pareja $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Proposición 3.1.4. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en un conjunto totalmente ordenado $\mathcal{X}$. En $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ todos sus puntos son de contención, si y sólo si, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Demostración. Sea $x_n \in x(\mathbb{N})$. Como $n \in \mathbb{N}$, entonces por hipótesis es un punto de contención. Luego la desigualdad $n + 1 \geq n$ implica la desigualdad $x_n \leq x_{n+1}$. De esta manera, $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$, esto es, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

Reciprocamente, sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, entonces en virtud de la proposición 3.1.3, para todo $c \geq n$, $x_n \leq x_{n+1}$, esto es, en $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ todo sus puntos son de contención. □

Teorema 3.1.3. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un cuerpo $\mathcal{X}$ totalmente ordenado posee una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monótona.*

Demostración. Existen dos posibilidades, que $x(\mathbb{N})$ sea finito o infinito. Si tomamos el primer caso, el resultado es evidente, pues de ser así entonces existe una subsucesión constante, y por lo tanto monótona. Si $x(\mathbb{N})$ es infinito, entonces existen tres posibilidades; que en $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ hayan infinitos puntos de contención, que existan finitos puntos de contención, o que no hayan puntos de contención. Si tomamos el primer caso, entonces pueden ocurrir dos cosas; que en $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ todos sus puntos sean de contención, o que exista un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ de infinitos puntos de contención. Si en $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ todos sus puntos son de contención, entonces por la proposición 3.1.4, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sería creciente, luego monótona. Ahora supongamos que en $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ existe un subconjunto propio C de infinitos puntos de contención. Si escribimos a C de manera ordenada como $C = \{n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots \leq n_k \leq \cdots\}$, entonces es fácil ver que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} x' : & C & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & n_k & \longmapsto & x'(n_k) = x_{n_k}, \end{array}$$

define una subsucesión creciente, y por lo tanto monótona. Por otro lado, si en $(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ existen finitos puntos de contención, entonces sea C_1 el conjunto de los finitos puntos de contención de

$(\mathbb{N}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Ahora, sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > c$, $\forall\ c\ \in C_1$. Claramente $n_1 \notin C_1$. Luego existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$, y $x_2 \leq x_1$. También es claro que $n_2 \notin C_1$. Luego existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 > n_2$, y $x_3 \leq x_2 \leq x_1$. Si repetimos éste proceso de manera indefinida, entonces podemos construir la subsucesión decreciente

$$\begin{array}{rccl} x' : & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & n_k & \longmapsto & x'(n_k) = x_{n_k}, \end{array}$$

donde $\mathbb{X} = \{\cdots, n_k, n_{k-1}, \cdots, n_3, n_2, n_1\}$ es el conjunto infinito construido en el proceso anterior. El caso faltante se trata igual al anterior, quedado demostrado del teorema. $\square$

Teorema 3.1.4. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona en un cuerpo arquimediano $\mathcal{X}$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, si y sólo si, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ acotada*

Demostración. Primero vamos a considerar el caso donde la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. En efecto;

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente en un cuerpo $\mathcal{X}$ totalmente ordenado por la relación usual. Por el teorema 3.1.2 existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que ésta está acotada.

Reciprocamente, sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión monótona creciente de elementos de un cuerpo arquimediano $\mathcal{X}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por el teorema 3.1.1, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada, si y sólo si, existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $|x_{n_k}| \leq c$, $\forall x_{n_k} \in x'(\mathbb{X})$. Por otro lado, dado arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $n_k \in \mathbb{X}$ tal que $n \leq n_k$, pues $\mathbb{X}$ es un conjunto infinito. Además, $n \leq n_k$, si y sólo si, $x_n \leq x_{n_k}$, por la proposición 3.1.3. Tenemos entonces que $x_n \leq x_{n_k} \leq c$, en virtud del (a) del teorema 2.3.16. Además, por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ser monótona creciente, para todo $n \geq 0$, $x_0 \leq x_n \leq c$. Luego, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, como se quería demostrar.

Los demás casos se prueban de manera similar. $\square$

3.2. Convergencia de sucesiones

Definición 3.2.1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite l, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe otro número natural $N = N(\varepsilon)$ (que en general depende de ε) tal que $f(x_n, l) < \varepsilon$, $\forall n > N$. En símbolos, lo anterior equivale a afirmar que,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = l \leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \to f(x_n, l) < \varepsilon). \tag{3.2}$$

Definición 3.2.2. Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ tiene limite l, entonces diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacía l, y escribimos

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = l, o, x_n \to l,\ n \to \infty \tag{3.3}$$

Nota 3.2.1. (i) $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$ se lee; “el limite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando n tiende a infinito es l".

(ii) $x_n \to l,\ n \to \infty$ se lee; “la sucesión x_n se acerca, o tiende a l, cuando n crece mucho, o n tiende a infinito.

Afirma que x_n tiende a l, es equivalente a afirmar que x_n converge a l, y esto a su vez es equivalente a afirmar que x_n tiene limite l.

Informalmente, decir que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un limite l, quiere decir que para términos avanzados de $\mathbb{N}$, las imágenes de éstos números bajo la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se acercan cada vez más hacía l, hasta hacerse prácticamente irreconocibles de l.

Definición 3.2.3. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ converge en $\mathcal{X}$, si y sólo si, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene limite l, y además $l \in \mathcal{X}$.

Definición 3.2.4. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ es divergente, si y sólo si, ésta no tiene limite, o no converge a nada.

Nota 3.2.2. Si consideramos el caso en el que $(\mathcal{X}, f) = (\mathcal{X}, d)$, es decir, el caso del espacio métrico usual proveniente del valor absoluto definido en el teorema 2.3.15, entonces para un $\varepsilon > \xi$ arbitrario tenemos que,

$$d(x_n, l) < \varepsilon \leftrightarrow |x_n - l| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \leftrightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon). \quad (3.4)$$

Luego, para el caso del espacio métrico usual proveniente del valor absoluto definido en el teorema 2.3.15, la definición 3.2.1 equivalente a afirmar que,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = l \leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \to x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)). \quad (3.5)$$

La siguiente gráfica ilustrará la situación anterior. En la gráfica, $x_n \geq \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

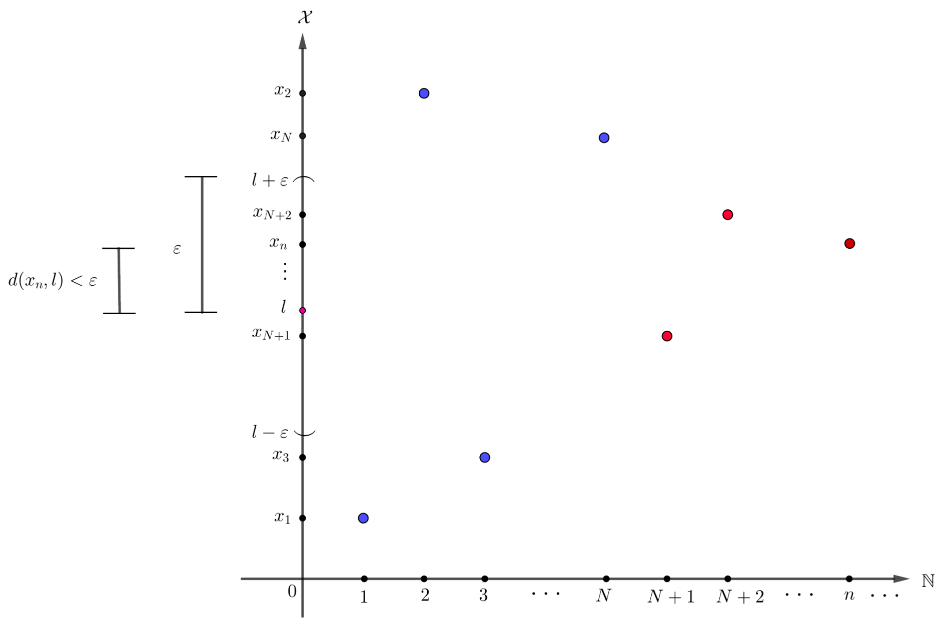


Figura 3.1: Definición de Limite

Ejemplo 3.2.1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ arbitrario, tal que $x_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $c \in \mathcal{X}$ es un punto fijo. Entonces $\lim_{n\to\infty}(x_n) = c$, y la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada una sucesión constante, pues en $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $x(\mathbb{N}) = \{c\}$, y por lo tanto su punto más obvio de convergencia es $c \in \mathcal{X}$.

Demostración. Si $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, entonces $f(x_n, c) = f(c, c) = \xi < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pues la pareja $(\mathcal{X}, f)$ forma un espacio métrico. De está manera, para cada $\varepsilon > \xi$ arbitrario, $f(x_n, c) < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, esto es, $\lim_{n\to\infty}(x_n) = c$, como se quería probar. □

Las proposiciones y definiciones sobre acotamiento que se han dado son casos particulares de la siguiente definición:

Definición 3.2.5. Sea $f : \mathcal{X}^2 \to (\ \mathbb{A},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ una métrica, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotado, si y sólo si, existe $x \in \mathcal{X}$, y $c \in \mathbb{A}$ tal que $f(x_n, x) \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Evidentemente, toda subsucesión de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ también está acotada.

Proposición 3.2.1. Sea $f : \mathcal{X}^2 \to (\ \mathbb{A},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ una métrica, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, si y sólo si, existe $c \in \mathbb{A}$ tal que $f(x_n, x_m) \leq c$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la definición 3.2.5, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, si y sólo si, existe $x \in \mathcal{X}$, y $c \in \mathbb{A}$ tal que $f(x_n, x) \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dada arbitrariamente $x' \in \mathcal{X}$, entonces en virtud de (C),

$$f(x_n, x') \leq f(x_n, x) + f(x, x') \leq c + f(x, x'). \tag{3.6}$$

Luego, si ponemos $c' = c + f(x, x')$ entonces $f(x_n, x') \leq c'$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $x' \in \mathcal{X}$ es arbitraria, y claramente $c' \in \mathbb{A}$, entonces $f(x_n, x_m) \leq c'$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$. $\square$

Nota 3.2.3. Si en la definición 3.2.5 consideramos a una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en una métrica usual $d : \mathcal{X}^2 \to (\ \mathbb{A},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estaría acotada, si y sólo si, existe $x \in \mathcal{X}$, y $c \in \mathbb{A}$ tal que $d(x_n, x) \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\begin{aligned} d(x_n, x) \leq c \quad &\leftrightarrow \quad |x_n - x| \leq c \\ &\leftrightarrow \quad -c \leq x_n - x \leq c \\ &\leftrightarrow \quad x - c \leq x_n \leq x + c \\ &\leftrightarrow \quad x_n \in (x - c, x + c). \end{aligned}$$

Luego, para el caso de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en una métrica usual $(\mathcal{X}, d)$, el análisis anterior nos dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, si y sólo si, podemos encontrar un punto fijo del espacio métrico $(\mathcal{X}, d)$ tal que la distancia de éste a cualquier punto de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea menor a c.

Esta situación se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

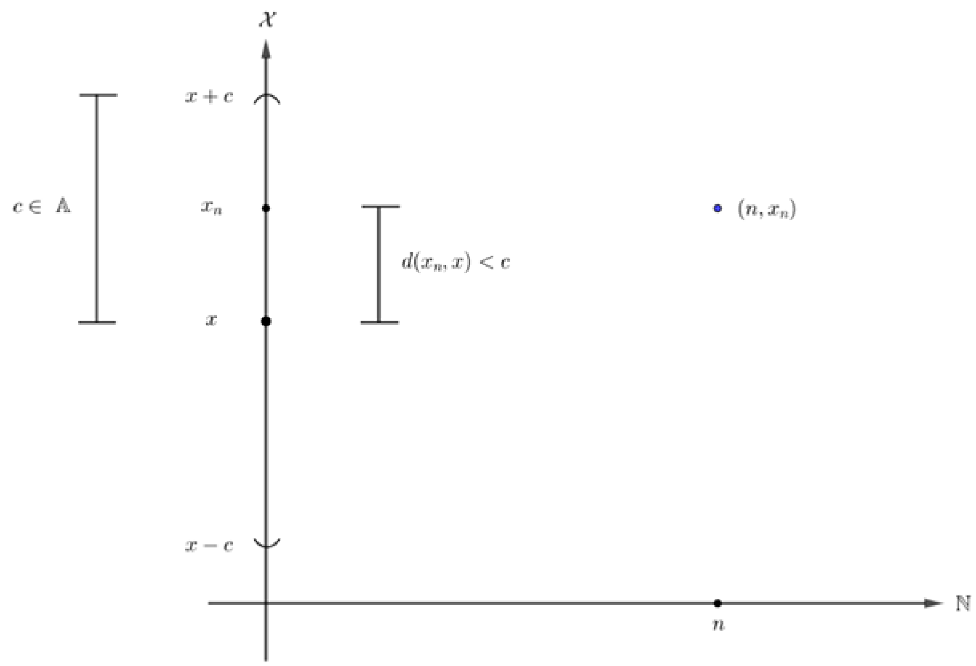


Figura 3.2: Sucesión acotada

De la gráfica anterior se puede observar que el conjunto de términos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cumple que $x(\mathbb{N}) \subset (x-c, x+c)$.

Por otro lado, proposición 3.2.1 nos está diciendo en éste caso que cualquier $y \in \mathcal{X}$ nos puede servir de punto fijo, tal que la distancia de éste a cualquier punto de la sucesión sea menor a una cota c'.

En particular, si consideramos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo arquimediano $\mathcal{X}$, entonces tomando como punto de referencia, o punto fijo al elemento $x = \xi$, tenemos que está acotada, si y sólo si, existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $|x_n| \leq c$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$. Luego, el teorema 3.1.1 es un caso particular de la definición 3.2.5.

Teorema 3.2.1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ arbitrario, entonces si ésta converge, el punto de convergencia es único.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que el punto de convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es único. Ahora, sean l, l' dos puntos distintos de convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, por la definición 3.2.1, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $f(x_n, l) < \varepsilon'$, $\forall n > N$, y $f(x_n, l') < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Por otro lado, en virtud de la desigualdad triangular,

$$f(l, l') \leq f(l, x_n) + f(x_n, l') < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Ahora, si ponemos $\varepsilon = f(l, l')$, entonces,

$$f(l, l') \leq f(l, x_n) + f(x_n, l') < f(l, l'), \tag{3.8}$$

de donde $f(l, l') < f(l, l')$, una contradicción. Luego, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ arbitrario, entonces si ésta converge, el punto de convergencia es único, como se quería probar. □

Teorema 3.2.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$, entonces ésta es acotada.*

Demostración. Sea l el punto de convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por la definición 3.2.1, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, l) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Ahora dejemos fijo a un $\varepsilon > \xi$, y sea $C = max\{\varepsilon, f(x_1, l), ..., f(x_N, l)\}$. Lo anterior implica que $f(x_n, l) \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}$, esto es, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, en virtud de la definición 3.2.5. □

Teorema 3.2.3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, definida en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$, y con punto de convergencia l, entonces toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge en l.*

Demostración. Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a l, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, l) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Ahora, sea $\mathbb{X} = \{n_1, ..., n_k, ...\}$ el dominio de la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, con $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1}....$ Como $\mathbb{X}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, entonces existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_o} > N$. Luego, $f(x_{n_{k_o}}, l) < \varepsilon$, $\forall n_{k_o} > N$. Además, si $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0$, entonces $n_k > n_{k_0} > N$, de donde $f(x_{n_k}, l) < \varepsilon$. En resumen, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_{n_k}, l) < \varepsilon$, $\forall k > k_0$, donde $\varepsilon > 0$ es arbitrario, en otras palabras, la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, y su punto de convergencia es l, quedando demostrado el teorema. □

Proposición 3.2.2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$, cuyo punto de convergencia es l, entonces para toda $\alpha \in \mathbb{N}$, la sucesión $(x_{n+\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a l.

Demostración. Sea $\mathbb{X}$ el dominio de la sucesión $(x_{n+\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$. Claramente $\mathbb{X} = \{1+\alpha, 2+\alpha, \cdots, n+\alpha, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ es un conjunto infinito. Luego, $(x_{n+\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y por el teorema 3.2.3, ésta converge en l. □

Proposición 3.2.3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio métrico $(f, \mathcal{X})$, cuyo punto de convergencia es l, y $b \neq l$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq b$, $\forall n > N$.

Demostración. Supongamos, por contradicción, que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en l, y que para todo $N \in \mathbb{N}$, $x_n = b$, para todo $n > N$. Ahora, sea $N' \in \mathbb{N}$, y sea $\mathbb{X} = \{n \in \mathbb{N} : n > N'\}$. Evidentemente $\mathbb{X}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, y además, $x(\mathbb{X}) = \{b\}$, una contradicción, pues la aplicación $x' : \mathbb{X} \to \mathcal{X}$, donde $x'(n) = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{X}$, es una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo limite es l, y por el teorema 3.2.2 $x' : \mathbb{X} \to \mathcal{X}$ converge a l. □

Teorema 3.2.4. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes definidas en un cuerpo arquimediano arbitrario $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$. Se tiene que $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n) = \text{lím}_{n\to\infty}(b_n) = l$, si y sólo si, $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \xi$.*

Demostración. De las igualdades $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n) = \text{lím}_{n\to\infty}(b_n) = l$ tenemos que para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen N, $N' \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N$, y $|b_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Además, $\forall n > N$,

$$\begin{aligned} |a_n - l| < \varepsilon' &\leftrightarrow -\varepsilon' < a_n - l < \varepsilon' \\ &\leftrightarrow -\varepsilon' - b_n < a_n - l - b_n < \varepsilon' - b_n \\ &\leftrightarrow -\varepsilon' + l - b_n < a_n - b_n < \varepsilon' + l - b_n \\ &\leftrightarrow l - (\varepsilon' + b_n) < a_n - b_n < \varepsilon' + (l - b_n) \quad (1) \end{aligned}$$

Por otro lado, $\forall n > N'$,

$$\begin{aligned} |b_n - l| = |l - b_n| < \varepsilon' &\leftrightarrow -\varepsilon' < b_n - l < \varepsilon' \\ &\leftrightarrow \xi < (b_n + \varepsilon') - l < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon \\ &\leftrightarrow -\varepsilon < l - (b_n + \varepsilon') < \xi \end{aligned}$$

Luego, si ponemos a $N'' = max\{N', N\}$, entonces de (1) tenemos que $\forall n > N''$,

$$\begin{aligned} l - (\varepsilon' + b_n) < a_n - b_n < \varepsilon' + (l - b_n) &\leftrightarrow -\varepsilon < l - (\varepsilon' + b_n) < a_n - b_n < \varepsilon' + (l - b_n) < \varepsilon \\ &\leftrightarrow -\varepsilon < a_n - b_n < \varepsilon \\ &\leftrightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - b_n| < \varepsilon$, $\forall n > N''$, esto es, $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \xi$, como se quería demostrar.

Reciprocamente, supongamos que $\text{lím}_{n\to\infty}(b_n) = l$, y que $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \xi$. Luego, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $|b_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N$, y $|a_n - b_n| < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Además, $\forall n > N$,

$$\begin{aligned} |b_n - l| < \varepsilon' &\leftrightarrow -\varepsilon' < b_n - l < \varepsilon' \\ &\leftrightarrow -\varepsilon' - \varepsilon' < b_n - l - \varepsilon' < \xi \\ &\leftrightarrow -\varepsilon < b_n - (l + \varepsilon') < \xi \end{aligned}$$

Ahora, sea $N'' = max\{N, N'\}$. De está manera, $\forall n > N''$,

$$\begin{aligned}
|a_n - b_n| < \varepsilon' &\leftrightarrow -\varepsilon' < a_n - b_n < \varepsilon' \\
&\leftrightarrow -\varepsilon' + b_n < a_n < \varepsilon' + b_n \\
&\leftrightarrow b_n - \varepsilon' - l < a_n - l < \varepsilon' + b_n - l \\
&\leftrightarrow -\varepsilon < b_n - (\varepsilon' + l) < a_n - l < \varepsilon' + (b_n - l) < \varepsilon \\
&\leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \\
&\leftrightarrow |a_n - l| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Así, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N'' = max\{N, N'\} \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$, $\forall n > N''$, en otras palabras, $\lim_{n\to\infty}(a_n) = l$, y por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = l$, quedando demostrado el teorema. $\square$

Nota 3.2.4. Una forma más sencilla de demostrar la primera parte del teorema anterior es haciendo uso del inciso (d) del teorema 2.3.17. En efecto; por hipótesis $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = l$, y por lo tanto, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen $N, N'' \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N$, y $|b_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces en virtud del inciso (d) del teorema 2.3.17, $|a_n - b_n| < |a_n - l| + |b_n - l| < \varepsilon$, $\forall n > N''$. De está manera, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - b_n| < \varepsilon$, $\forall n > N''$, esto es, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \xi$, como se quería demostrar.

Proposición 3.2.4. Si $x_n = \dfrac{\zeta}{n+\zeta}$, y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones definidas en un cuerpo arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tales que $\xi \leq a_n \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \xi$.

Demostración. Sea $\varepsilon > \xi$ arbitrario, y sea $N = [\dfrac{\zeta}{\varepsilon}] + \zeta$. Luego, $\forall n > N$;

$$\begin{aligned}
n > N &\rightarrow n > [\frac{\zeta}{\varepsilon}] + \zeta > \frac{\zeta}{\varepsilon} \\
&\rightarrow n + \zeta > \frac{\zeta}{\varepsilon} \\
&\rightarrow \varepsilon > \frac{\zeta}{n+\zeta} \geq a_n \\
&\rightarrow \varepsilon > |\frac{\zeta}{n+\zeta}| \geq |a_n|
\end{aligned}$$

De está manera, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\dfrac{\zeta}{n+\zeta}| < \varepsilon$, y $|a_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$, es decir, $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \xi$, como se quería demostrar. $\square$

Teorema 3.2.5. *(Teorema del Sandwich) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes definidas en un cuerpo arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). Si $a_n < b_n < c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y además $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = l$, entonces se cumple que $\lim_{n\to\infty}(b_n) = l$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que $a_n < b_n < c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde $\xi < b_n - a_n < c_n - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, también por hipótesis tenemos que $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = l$, y en virtud del teorema 3.2.4, $\lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \xi$. Luego, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - c_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$. De está manera, $\forall n > N$,

$$\begin{aligned}|a_n - c_n| < \varepsilon &\leftrightarrow |c_n - a_n| < \varepsilon\\ &\leftrightarrow -\varepsilon < c_n - a_n < \varepsilon\\ &\leftrightarrow -\varepsilon < b_n - a_n < c_n - a_n < \varepsilon\\ &\leftrightarrow -\varepsilon < b_n - a_n < \varepsilon\\ &\leftrightarrow |b_n - a_n| < \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - a_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$, en otras palabras, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \xi$, y por el teorema 3.2.4, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) = l$, como se quería demostrar. $\square$

Nota 3.2.5. Con todos los resultados obtenidos hasta el momento, ya estamos en condiciones de analizar con más detalle la situación que se nos presentó en la sección 2.3.13 con un elemento $x > \xi$ de un cuerpo arquimediano arbitrario que cumpla con la igualdad $x^2 = 2$. En el capítulo anterior demostramos que éste número no puede ser racional, y a ésta clase de números los definimos como números irracionales. Habíamos concluido, de manera intuitiva, o más bien sin mucha rigurosidad, que el elemento $x > \xi$, con $x^2 = 2$ de un cuerpo arquimediano arbitrario lo podemos escribir como $\sqrt{2} = 1,41421356237310...$, donde los puntos suspensivos nos dicen que los decimales se siguen prolongando de manera indefinida y no periódica. Lo anterior fue una deducción que se hizo gracias al teorema 2.3.19, aplicándolo al caso que estamos analizando ahora. Pero el teorema 2.3.19 nos dice estrictamente que a $x > \xi$, con $x^2 = 2$ lo podemos rodear, y aproximar por medio de una infinidad de números racionales mediante las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que aparecen en el la hipótesis del teorema 2.3.19, más no que $\sqrt{2} = 1,41421356237310....$

Ésta situación, descrita de manera ambigua en el capítulo anterior, la podemos formalizar observando que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a x. En otras palabras, el concepto más importante que estábamos esperando para darle un sentido riguroso a las igualdades $\sqrt{2} = 1,41421356237310...$, $\sqrt{3} = 1,7320508075688772935...$, $e = 2,71828182845904523536....$, y $\pi = 3,1415926535897932.....$ era el concepto de convergencia de sucesiones.

Lo afirmado en el párrafo anterior no se puede quedar sólo en palabras. El siguiente teorema es fundamental para entender a los números reales, nos mostrará una forma de construir a los números irracionales. En realidad, el teorema también nos dirá como escribir a cualquier elemento $x > \xi$ de un cuerpo arquimediano arbitrario como el limite una sucesión de números racionales construida a partir de $[x]$, y $\mathcal{F}(x)$.

Teorema 3.2.6. *Sea ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) un cuerpo arquimediano, y $x \in \mathbb{K}$, con $x > \xi$. Si definimos las siguientes sucesiones como:*

(a) $x_n = \dfrac{\mathcal{F}(10^{n-1}x_{n-1})}{10^{n-1}}$, *con* $x = x_0 > \xi$

(b) $k_n = [10^n x_n]$.

(c) $a_n = [x] + \sum_{l=1}^{n} \dfrac{k_l}{10^l} \in \mathbb{Q}$, *con* $a_0 = [x]$.

(d) $b_n = a_n + \dfrac{\zeta}{10^n} \in \mathbb{Q}$, *con* $n \geq 0$.

Entonces, $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = x$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{K}$ tal que $x > \xi$. En virtud del teorema 2.3.19, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n < x < b_n \quad &\leftrightarrow \quad a_n < x < a_n + \frac{\zeta}{10^n} \\ &\leftrightarrow \quad \xi < x - a_n < \frac{\zeta}{10^n} \quad (1) \end{aligned}$$

Ahora, sean $c_n = \xi$, y $d_n = \dfrac{\zeta}{10^n}$ las sucesiones que aparecen en los extremos de la desigualdad en (1). Claramente $\text{lím}_{n\to\infty}(c_n) = \xi$, por tratarse de una sucesión constante, y además, por la proposición 3.2.4, $\text{lím}_{n\to\infty}(d_n) = \xi$, pues es muy fácil ver que la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $\xi < d_n \leq \dfrac{\zeta}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $\text{lím}_{n\to\infty}(c_n) = \text{lím}_{n\to\infty}(d_n) = \xi$, y por el teorema del Sandwich, $\text{lím}_{n\to\infty}(x - a_n) = \xi$, de donde $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n) = x$, en virtud del teorema 3.2.4. De manera análoga se prueba que $\text{lím}_{n\to\infty}(b_n) = x$, quedando demostrado el teorema. □

Proposición 3.2.5. Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un cuerpo arquimediano ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). Tenemos que $\text{lím}_{k\to\infty}(x_{n_k}) = a$, si y sólo si, para todo $\varepsilon > \xi$, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para índices $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grandes.

Demostración. Tenemos que $\text{lím}_{k\to\infty}(x_{n_k}) = a$, si y sólo si, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\forall k > N$. Claramente $I = \{k \in \mathbb{N} : k > N\}$ es un conjunto infinito, lo cual significa que para todo $\varepsilon > \xi$, $x_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, para indices $n_k \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grandes.

Reciprocamente, sea $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{\zeta}{k + \zeta}$ una sucesión de radios para intervalos abiertos centrados en a. Si ponemos a $k = 0$, entonces tenemos que $\varepsilon_1 = \zeta > \xi$, y por hipótesis existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in (a - \zeta \ , \ a + \zeta)$. Para $k = 1$ tenemos que $\varepsilon_2 = \dfrac{\zeta}{2} > \xi$, y por lo tanto existe una infinidad de indices $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in (a - \dfrac{\zeta}{2} \ , \ a + \dfrac{\zeta}{2})$. En particular, debe existir un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_2 > n_1$, y $x_{n_2} \in (a - \dfrac{\zeta}{2} \ , \ a + \dfrac{\zeta}{2})$. Si repetimos éste proceso de manera indefinida, entonces podemos construir a un conjunto infinito $\mathbb{X} = \{ \ n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \ \}$ de índices $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tales que $x_{n_{k+1}} \in (a - \varepsilon_{k+1} \ , \ a + \varepsilon_{k+1}) \subset (a - \varepsilon_k \ , \ a + \varepsilon_k) \subset \cdots \subset (a - \varepsilon_2 \ , \ a + \varepsilon_2) \subset (a - \varepsilon_1 \ , \ a + \varepsilon_1)$.

En virtud de lo anterior, definimos a la subsucesión

$$\begin{array}{rccl} x' : & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & n_{k+1} & \longmapsto & x'(n_{k+1}) = x_{n_{k+1}}, \end{array}$$

la cual cumple que $x_{n_{k+1}} \in (a - \varepsilon_{k+1} \ , \ a + \varepsilon_{k+1})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, por (a) del teorema 2.3.16, $-\varepsilon_{k+1} < x_{n_{k+1}} - a < \varepsilon_{k+1}$, y por el teorema del sandwich, $\text{lím}_{k\to\infty}(x_{n_{k+1}} - a) = \xi$, pues es claro que $\text{lím}_{k\to\infty}(-\varepsilon_{k+1}) = \text{lím}_{k\to\infty}(\varepsilon_{k+1}) = \xi$. De está manera, $\text{lím}_{k\to\infty}(x_{n_{k+1}}) = a$, por el teorema 3.2.4, como se quería demostrar. □

Proposición 3.2.6. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones definidas en un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). Si $\text{lím}_{n\to\infty}(y_n) = \xi$, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces $\text{lím}_{n\to\infty}(y_n x_n) = \xi$.

Demostración. Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $|x_n| < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, $\text{lím}_{n\to\infty}(y_n) = \xi$, luego, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| < \varepsilon'$, $\forall n > N$. De está manera,

$$|y_n||x_n| = |y_n x_n| < \varepsilon' c = \varepsilon \tag{3.9}$$

Luego, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n x_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$, es decir, $\text{lím}_{n\to\infty}(y_n x_n) = \xi$, como se quería demostrar. □

Proposición 3.2.7. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente definida en un cuerpo arquimediano arbitrario $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$. Si $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = l$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n)^2 = l^2$.

Demostración. Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces por el teorema 3.2.2 está acotada. Luego existe $c \in \mathcal{P}$ tal que $|x_n| \leq c$, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$, por el teorema 3.1.1. Además, en virtud de la desigualdad triangular, $\forall x_n \in x(\mathbb{N})$;

$$|x_n| < c \leftrightarrow |x_n| + |l| < c + |l| \leftrightarrow |x_n + l| \leq |x_n| + |l| < c + |l| \tag{3.10}$$

Por otro lado, para $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c + |l|} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N$. Así;

$$|x_n^2 - l^2| = |(x_n - l)(x_n + l)| = |x_n - l||x_n + l| < \varepsilon'(c + |l|) = \varepsilon \tag{3.11}$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n^2 - l^2| < \varepsilon$, $\forall n > N$, en otras palabras, $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n)^2 = l^2$, como se quería probar. □

Proposición 3.2.8. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en un cuerpo arquimediano arbitrario $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$, y sea $c \in \mathbb{K}$. Si $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = l$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty}(cx_n) = cl$.

Demostración. Por hipótesis, para un $\varepsilon' = |\varepsilon||c| > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N$. Luego,

$$|x_n - l| < \varepsilon' \leftrightarrow\ |c||x_n - l| < |c|\varepsilon' \leftrightarrow |cx_n - cl| < \varepsilon \tag{3.12}$$

Así, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|cx_n - cl| < \varepsilon$, $\forall n > N$, es decir, $\text{lím}_{n\to\infty}(cx_n) = cl$, quedada demostrada la proposición. □

Proposición 3.2.9. Sea $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{\zeta}{b_n}$ una sucesión definida en un cuerpo arquimediano arbitrario $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$. Si $\text{lím}_{n\to\infty}(b_n) = b$, con $b \neq \xi$, entonces $\text{lím}_{n\to\infty}(b'_n) = \dfrac{\zeta}{b}$.

Demostración. Como $\text{lím}_{n\to\infty}(b_n) = b$, entonces para un $\varepsilon' = \dfrac{|b|}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \varepsilon'$, $\forall n > N$. Por otro lado, en virtud de (c) del teorema 2.3.17,

$$|b_n - b| < \varepsilon' \leftrightarrow |b| - |b_n| < |b - b_n| < \varepsilon' \leftrightarrow |b| - |b_n| < \varepsilon' \leftrightarrow |b_n| \geq |b| - \varepsilon' = \varepsilon' \tag{3.13}$$

Además,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \\ &= \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \\ &< \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \end{aligned}$$

Ahora, si ponemos a $\varepsilon'' = \dfrac{|b|^2\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \varepsilon''$, $\forall n > N'$. Luego, si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces $\forall n > N''$,

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| < |b_n - b|\frac{2}{|b|^2} < \frac{2}{|b|^2}\varepsilon'' = \varepsilon \tag{3.14}$$

De esta manera, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}| < \varepsilon$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$, quedada demostrada la proposición. □

Teorema 3.2.7. *(Aritmética de limites) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucesiones convergentes definidas en un cuerpo arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). Si $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$, y $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$, entonces se cumplen las siguientes proposiciones:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)\lim_{n\to\infty}(b_n) = ab$.

(c) $\lim_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)} = \dfrac{a}{b}$.

Demostración. (a). Sea $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, con $\varepsilon > \xi$ arbitrario. Luego existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $|a_n - a| < \varepsilon'$, $\forall n > N$, y $|b_n - b| < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Por otro lado, $\forall n > N''$, donde $N'' = max\{N, N'\}$,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon \tag{3.15}$$

Luego, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$, $\forall n > N''$, esto es, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b$, como se quería demostrar.

(b). De la identidad $2a_nb_n = (a_n + b_n)^2 - a_n - b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y en virtud del lo probado en los incisos anteriores,

$$\begin{aligned} 2\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) =& lim_{n\to\infty}((a_n + b_n)^2 - a_n - b_n) \\ =& (a + b)^2 - a - b \\ =& a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 \\ =& 2ab \end{aligned}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n)\lim_{n\to\infty}(b_n) = ab$, como se quería probar.

(c). En virtud de la proposición 3.2.9, y por el inciso anterior,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_nb_n) =& \lim_{n\to\infty}(a_n\frac{1}{b_n}) \\ =& \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \\ =& a\frac{1}{b} \\ =& \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim_{n\to\infty}(a_n)}{\lim_{n\to\infty}(b_n)} = \dfrac{a}{b}$, quedado demostrado el teorema. □

Proposición 3.2.10. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en un cuerpo arquimediano ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$, y sea $a \in \mathbb{K}$ fijo. Si $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq l$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y que $l < a$. De la desigualdad $l < a$ tenemos que $\varepsilon' = a - l > \xi$, y como $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N$. Además,

$$|x_n - l| < \varepsilon' \leftrightarrow -\varepsilon' < x_n - l < \varepsilon' \leftrightarrow -\varepsilon' - a < x_n - a - l < -l \leftrightarrow \varepsilon' - a + l < x_n - a < \xi \quad (3.16)$$

La desigualdad $x_n - a < \xi$ no se puede dar, pues por hipótesis tenemos que $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $x_n - a \geq \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, Si $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $a \leq l$, como se quería probar. □

Teorema 3.2.8. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones definidas en un cuerpo arquimediano ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = l$, e $\lim_{n\to\infty}(y_n) = l'$. Si $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $l \leq l'$.*

Demostración. Por hipótesis $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $y_n - x_n \geq \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, en virtud del teorema 3.2.7 y de la proposición 3.2.10 tenemos que $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = l' - l \geq \xi$, de donde $l \leq l'$, quedado demostrado el teorema. □

Proposición 3.2.11. Sea ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) un cuerpo ordenado arquimediano, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy definida en ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) \neq \xi$. Existe $\varepsilon_0 > \xi$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| > \varepsilon_0$, $\forall n > N$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que para todo $\varepsilon > \xi$ y para cualquier $N \in \mathbb{N}$ existe $n_0 > N$ tal que $|x_{n_0}| < \varepsilon$. Como $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces existe $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1}| < \varepsilon$. De manera análoga, $n_1 \in \mathbb{N}$. Luego existe $n_2 > n_1$ tal que $|x_{n_2}| < \varepsilon$. Si el proceso anterior lo seguimos haciendo de una manera indefinida, entonces podemos construir a un subconjunto infinito de los números naturales $\mathbb{X} = \{n_0 < n_1 < n_2 < \cdots\}$, donde $|x_{n_k}| < \varepsilon$, para $n_k \in \mathbb{X}$ arbitrario. Ahora, sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que su dominio sea $\mathbb{X}$. En virtud de la proposición 3.2.5, $\lim_{n\to\infty}(x_{n_k}) = \xi$, y por el teorema 3.2.3, $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \xi$, lo que contradice la hipótesis. □

Proposición 3.2.12. Sea ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) un cuerpo ordenado arquimediano, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy definida en ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) tal que no converge a ξ. La sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $y_n = \dfrac{\zeta}{x_n}$ si $x_n \neq \xi$, e $y_n = \xi$ si $x_n = \xi$ es una sucesión de Cauchy en ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$).

Demostración. En virtud de la proposición 3.2.11, existe $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_0 > \xi$ tal que $|x_n| > \varepsilon_0$, $\forall n, m > N$. Claramente $|x_n x_m| \neq \xi$, $\forall n, m > N$, y además $\dfrac{1}{|x_n x_m|} < \dfrac{1}{\varepsilon_0^2}$, $\forall n, m > N$.

Por otro lado, para $\varepsilon_1 = \varepsilon_0^2 \cdot \varepsilon$ existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon_1$, $\forall n, m > N'$. Luego, $\forall n, m > N'' = max\{N, N'\}$,

$$|y_n - y_m| = |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}| = |\frac{x_m - x_n}{x_n x_m}| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_n x_m|} < \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0^2} = \varepsilon \quad (3.17)$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - y_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N''$, esto es, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. □

El teorema que viene a continuación nos mostrará una infinidad de sucesiones que, aunque no sean convergentes en el espacio donde estén definidas, éstas deben ser convergentes en algún otro espacio. Éste resultado es muy importante para nosotros, pues nos mostrará otra forma de construir a los números irracionales. Podemos definir, por ejemplo; sucesiones en el cuerpo de los números racionales, no necesariamente convergentes en éste espacio, pero que pueden cumplir las condiciones del siguiente teorema, y por lo tanto el resultado nos va a garantizar que éstas sucesiones sean convergentes en algún otro espacio necesariamente completo.

Teorema 3.2.9. *(Teorema de Weierstrass) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en cuerpo arquimediano completo ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, y acotada superiormente, entonces converge a $Sup\ x(\mathbb{N})$. Análogamente, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente, y acotada inferiormente, entonces converge a $Inf\ x(\mathbb{N})$.*

Demostración. Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, y acotada superiormente, entonces existe $s = Sup\ x(\mathbb{N})$, pues el cuerpo ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) es completo. Luego, el teorema 2.3.9 nos dice que para cada $\varepsilon > \xi$, existe $x_n \in x(\mathbb{N})$ tal que $s - \varepsilon < x_n$. Como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces también tenemos que $s - \varepsilon < x_n < x_{n+1} < \cdots$. Ahora, si ponemos a $N = n - 1 \in \mathbb{N}$, entonces es claro que $\forall n > N$, $|x_n - s| < \varepsilon$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, pues $s - x_n > \xi$. Lo anterior significa que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = s$, como se quería demostrar. Para el caso en el que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea monótona decreciente, y acotada inferiormente, la demostración sería análoga a la que acabamos de hacer. $\square$

Ejemplo 3.2.2. La sucesión $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un cuerpo métrico $(\mathbb{K}, f)$ arbitrario converge cuando $f(r) < \zeta$. En particular, si definimos a la sucesión $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un cuerpo arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$), entonces ésta converge cuando $|r| < \zeta$. Éste caso es interesante porque en su demostración el teorema de Weierstrass es clave. Vamos a dar primero una demostración del caso particular, para luego dar la prueba del caso general. En efecto;

Demostración. Por hipótesis la sucesión $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple con la desigualdad $|r| < \zeta$, de donde $-\zeta < r < \zeta$. Tomemos primero el caso en el que $\xi < r < \zeta$. De la desigualdad anterior es evidente que $\xi < r^{n+1} < r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, la sucesión $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente, y acotada inferiormente, y por lo tanto ésta converge a $i = Inf\ \{r^n : \xi < r < \zeta\}$, en virtud del teorema de Weierstrass. Afirmamos que $i = \xi$. En efecto; supongamos por reducción al absurdo que existe $r' \in \mathbb{K}$ tal que $r' \in \mathcal{C}_I\ \{r^n : \xi < r < \zeta\}$, con $r > \xi$. Para los primeros $n + 1$ naturales tenemos que;

$$\begin{aligned}
r' &< 1 \\
r' &< r \\
r' &< r^2 \\
r' &< r^3 \\
&\vdots \\
r' &< r^n
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que $(n+1)r' < 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n$. Por otro lado, utilizando el principio de inducción se puede demostrar la igualdad $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, de donde $(n+1)r' < \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$. Ésta última desigualdad es imposible que se de, pues la sucesión que aparece en el lado izquierdo es divergente a $+\infty$, y utilizando el teorema 3.2.7 se puede ver que la sucesión que aparece en el lado derecho es convergente, por $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser convergente. Luego, $i = \xi$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty}(r^n) = \xi$, cuando $\xi < r < \zeta$.

Ahora tomemos el caso en el que $-\zeta < r < \xi$. Observemos que la sucesión $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la podemos descomponer en dos subsucesiones; éstas son $(r^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, y $(r^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. La primera subsucesión cumple con la igualdad $r^{2k} = (-r)^{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Luego, la subsucesión $(r^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ se identifica con la sucesión $((-r)^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, y de la desigualdad $-\zeta < r < \xi$ obtenemos que $\xi < -r < \zeta$. De está manera, $\lim_{k\to\infty}(r^{2k}) = \xi$, donde $-\zeta < r < \xi$. Por otro lado, afirmamos que la subsucesión $(r^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. En efecto;

$$r^{2k+1} < r^{2(k+1)+1} \leftrightarrow r^{2k}r < r^{2k}r^3 \leftrightarrow r < r^3 \leftrightarrow r^3 - r > \xi \leftrightarrow r(r^2 - \zeta) > \xi \tag{3.18}$$

La última desigualdad es cierta, pues $r < \xi$, y además $r^2 = (-r)^2 < \zeta$, en otras palabras, $r^2 - \zeta < \xi$, de donde $r(r^2 - \zeta) > \xi$. Por lo tanto, la sucesión$(r^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, y además está acotada superiormente, pues $\xi \in \mathcal{C}_S\ \{r^{2k+1} : -\zeta < r < \xi\}$. Ahora, el teorema de Weierstrass nos garantiza que la sucesión $(r^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $s = Sup\ \{r^{2k+1} : -\zeta < r < \xi\}$. Afirmamos que $s = \xi$. Por el inciso (a), de la proposición 2.3.10 tenemos que $\forall k \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned} s &= Sup\ \{r^{2k+1} : -\zeta < r < \xi\} \\ &= Sup\ -\{-r^{2k+1} : \xi < -r < \zeta\} \\ &= -Inf\ \{-r^{2k+1} : \xi < -r < \zeta\} \\ &= \xi \end{aligned}$$

Luego, $\lim_{k\to\infty}(r^{2k+1}) = \xi$, donde $-\zeta < r < \xi$. Con éste último resultado ya podemos concluir que $\lim_{n\to\infty}(r^n) = \xi$, cuando $|r| < \zeta$, como se quería probar.

Ahora vamos a demostrar el caso en el que la sucesión $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ éste definida en un cuerpo métrico $(\mathbb{K}, f)$ arbitrario. En éste caso tenemos que $f(r) < \zeta$, de donde $\dfrac{\zeta}{f(r)} - \zeta > -\zeta$. Además, la desigualdad de Bernoulli nos garantiza que $\forall n \geq 1$;

$$(\frac{\zeta}{f(r)})^n = (\zeta + (\frac{\zeta}{f(r)} - \zeta))^n \geq \zeta + n(\frac{\zeta}{f(r)} - \zeta). \tag{3.19}$$

Ahora, sea $\varepsilon > \xi$ arbitrario. En virtud de la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que;

$$\frac{\frac{\zeta}{\varepsilon} - \zeta}{\frac{\zeta}{f(r)} - \zeta} < N. \tag{3.20}$$

Luego, $\forall n > N$;

$$\frac{\frac{\zeta}{\varepsilon} - \zeta}{\frac{\zeta}{f(r)} - \zeta} < n \leftrightarrow \frac{\zeta}{\varepsilon} < \zeta + n(\frac{\zeta}{f(r)} - \zeta) \leq (\frac{\zeta}{f(r)})^n \tag{3.21}$$

De ésta manera;

$$\frac{\zeta}{f(r^n)} \geq \frac{\zeta}{\varepsilon} \leftrightarrow f(r^n) < \varepsilon,\ \forall n > N. \tag{3.22}$$

En otras palabras, $\lim_{n\to\infty}(r^n) = \xi$, cuando $f(r) < \zeta$. □

3.3. Sucesiones de Cauchy

Entendamos a una sucesión de Cauchy como una sucesión donde sus términos avanzados se aproximan tanto hasta hacerse prácticamente irreconocibles. Las sucesiones de Cauchy que no son convergentes en el espacio donde estén definidas siempre van a rodear a un hueco si pensamos a los puntos de la sucesión como elementos de una recta. Este hecho será clave en siguiente capítulo porque la esencia de la construcción que presentaremos está en llenar los huecos que se presentan en algún cuerpo ordenado arquimediano para convertirlo en un cuerpo ordenado completo.

Definición 3.3.1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, si y sólo si, para cada $\varepsilon > \xi$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$.

Proposición 3.3.1. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ es de Cauchy, si y sólo si, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Demostración. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Luego, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall m, n > N$. Por otro lado, si dejamos a un $n > N$ fijo por un momento, entonces es claro que para un $p \in \mathbb{N}$ arbitrario, $n + p \geq n > N$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente tenemos que para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Ahora, sean $n', m' \in \mathbb{N}$ arbitrarios tales que $n', m' > N$. Luego, en virtud de lo anterior, $f(x_{n'}, x_{n'+p}) < \varepsilon$, y $f(x_{m'}, x_{m'+p}) < \varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Por otro lado, $m' \leq n'$, o $n' \leq m'$. Si tomamos el primer caso, entonces existe $p' \in \mathbb{N}$ tal que $m' = n' + p'$, de donde $f(x_{n'}, x_{m'}) < \varepsilon$. Para el segundo caso tenemos que existe $p'' \in \mathbb{N}$ tal que $n' = m' + p''$, y de está manera $f(x_{m'}, x_{n'}) < \varepsilon$. Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$, esto es, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. $\square$

Proposición 3.3.2. Toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ también es de Cauchy.

Demostración. El resultado es evidente, pues si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy definida en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$, entonces para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$. Luego, si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de la sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces siempre podremos encontrar naturales n_k, m_k del dominio de la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $n_k, m_k > N$. $\square$

Teorema 3.3.1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy definida en el espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$, entonces ésta está acotada.*

Demostración. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces para un $\varepsilon > \xi$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$. Además es claro que $\varepsilon \leq f(x_{n'}, x_{m'})$, si y sólo si, $n', m' \leq N$, $n' > N$, y $m' \leq N$, o $m' > N$, y $n' \leq N$. Ahora, sea $C' = \{\ f(x_{n'}, x_{m'}) : \varepsilon \leq f(x_{n'}, x_{m'})\ \}$. Si ponemos a $C = max\ C'$, entonces es claro que $f(x_n, x_m) \leq C$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, en otras palabras, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en virtud de la proposición 3.3.1, quedando demostrado el teorema. $\square$

Teorema 3.3.2. *Sea $f : \mathcal{X}^2 \to (\ \mathbb{A},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ una métrica, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacía l, entonces ésta es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente hacía l, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, l) < \varepsilon'$, y $f(x_m, l) < \varepsilon'$, $\forall n, m > N$. Luego, en virtud de (C),

$$f(x_n, x_m) \leq f(x_n, l) + f(x_m, l) < \varepsilon \tag{3.23}$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$, esto es, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, como se quería probar. $\square$

Teorema 3.3.3. *Sea $f : \mathcal{X}^2 \to (\ \mathbb{A},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ una métrica, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. Si existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente hacia l, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge hacía l.*

Demostración. Por hipótesis, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente hacia l. Luego, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tal que

$f(x_n, x_m) < \varepsilon'$, $\forall n, m > N$, y $f(x_{n_k}, l) < \varepsilon$, $\forall n_k > N'$. Ahora, si $N'' = max\ \{N, N'\}$, entonces sean $n', n_{k'} > N''$. De está manera, $f(x_{n_{k'}}, l) < \varepsilon'$, y $f(x_{n_{k'}}, x_{n'}) < \varepsilon'$. Luego, en virtud de (C),

$$f(x_{n'}, l) < f(x_{n_{k'}}, l) < +f(x_{n_{k'}}, x_{n'}) < \varepsilon \tag{3.24}$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_{n'}, l) < \varepsilon$, $\forall n' > N''$, en otras palabras, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacía l, como se quería demostrar. □

Teorema 3.3.4. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones definidas en un cuerpo arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). Se cumple lo siguiente:*

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy.

(b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy, entonces la sucesión $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy.

Demostración. (a). Por hipótesis, las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy. Luego, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x_m| < \varepsilon'$, $\forall n, m > N$, e $|y_n - y_m| < \varepsilon'$, $\forall n, m > N'$. Por otro lado, si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces en virtud de la desigualdad triangular tenemos que $\forall n, m > N''$;

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon \tag{3.25}$$

De está manera, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| < \varepsilon$, $\forall n, m > N$, esto es, $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, como se quería demostrar.

(b). Observemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que;

$$|y_m||x_n - x_m| + |x_n||y_n - y_m| = |y_m x_n - y_m x_m| + |x_n y_n - x_n y_m| \geq |x_n y_n - x_m y_m| \tag{3.26}$$

Además, por el teorema 3.3.1 existen $C_1, C_2 \in \mathcal{P}$ tales que $|x_n| < C_1$, e $|y_n| < C_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y si ponemos a $C = max\{C_1, C_2\}$, entonces es claro que $|x_n| < C$, e $|y_n| < C$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy. Luego, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2C} > \xi$, donde $\varepsilon > \xi$ es arbitrario, existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x_m| < \varepsilon'$, e $|y_n - y_m| < \varepsilon'$, y si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces $\forall n, m > N''$;

$$|x_n y_n - x_m y_m| \leq |y_m||x_n - x_m| + |x_n||y_n - y_m| < C\varepsilon' + C\varepsilon' = \varepsilon \tag{3.27}$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n y_n - x_m y_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N''$, esto es, $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, como se quería probar. □

Nota 3.3.1. Como lo hemos venido haciendo, analizaremos a las sucesiones de Cauchy para el caso concreto del espacio métrico proveniente del valor absoluto definido en el teorema 2.3.15. En éste caso, la definición 3.3.1 equivale a afirmar que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, si y sólo si, para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$, $\forall n, m > N$. Observemos que a el $\varepsilon > \xi$ lo podemos hacer arbitrariamente pequeño; luego la pertenencia $x_n \in (x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$, $\forall n, m > N$ nos dice que los elementos avanzados de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se acercan tanto hasta hacersen prácticamente irreconocibles. Lo anterior lo podemos representar mediante la siguiente gráfica;

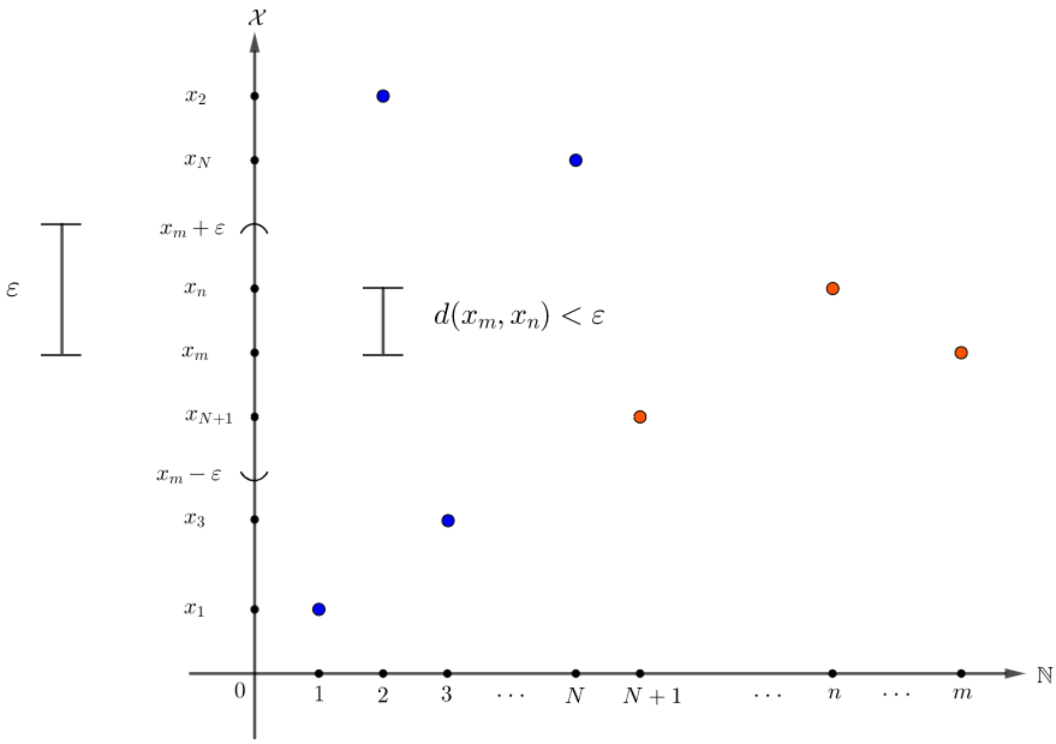


Figura 3.3: Sucesión Cauchy

3.4. Serie geométrica

A continuación definiremos una clase de sucesión muy importante en matemáticas. Las sucesiones que pertenecen a ésta clase son tradicionalmente llamadas series. Una serie es una sucesión que se construye a partir de otra sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: tomamos como primer término de la serie a x_0. Luego, el segundo término de la serie será x_0+x_1; es decir, el segundo término de la serie será la suma del primero con el segundo término de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El tercer término de la serie será $x_0+x_1+x_2$; el segundo término de la serie sumado con el tercer término de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si el proceso sigue, obtenemos que el término general de una serie está dado por la suma $x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}+x_n$, en otras palabras, el término general de una serie está dado por la suma del primer término de la sucesión a la que éste ligada hasta el término general de ésta sucesión. Vemos entonces que una serie es la generalización de la noción de suma aplicada a los términos de una sucesión arbitraria. En lo que sigue, presentaremos el concepto de serie de manera formal, y estudiaremos una serie muy particular llamada serie geométrica. Las series geométricas nos serán de gran utilidad en el siguiente capítulo.

Definición 3.4.1. Una serie en un cuerpo $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot\ )$ es una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyo término "*n-ésimo*" está dado en la forma $p_n=\sum_{m=0}^{n}x_m$, donde x_n es el término de orden n de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot\ )$. A los términos de la serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los llamaremos sumas parciales de la serie, y si la pareja $(\mathbb{K},\ f)$ tiene estructura de espacio métrico, entonces diremos que la serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene suma s cuando ésta sea convergente hacía s.

Definición 3.4.2. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie definida en un cuerpo $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot\ )$, con término general $p_n=\sum_{m=0}^{n}x_m$. La serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es finita, si y sólo si, existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $x_m=\xi$, $\forall m\geq j$.

Definición 3.4.3. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie definida en un cuerpo $(\mathbb{K},\ +,\ \cdot\ )$, con término general $p_n=\sum_{m=0}^{n}x_m$. La serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinita, si y sólo si, para cada $j\in\mathbb{N}$ existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $x_m\neq\xi$, donde $m>j$.

Nota 3.4.1. Cuando una serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un espacio métrico $(\mathbb{K},\ f)$, y con término general $p_n=\sum_{m=0}^{n}x_m$ sea convergente hacía s, entonces a ésta convergencia la notaremos como

$s = \lim_{n\to\infty}(p_n) = \sum_{m=0}^{\infty} x_m$, o simplemente $s = \sum_{m=0}^{\infty} x_m$.

A continuación vamos a demostrar un resultado bastante evidente, pero muy importante para nuestros propósitos. El resultado dice lo siguiente:

Proposición 3.4.1. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una serie finita definida en un espacio métrico $(\mathbb{K}, f)$, y con término general $p_n = \sum_{m=0}^{n} x_m$, entonces $\sum_{m=0}^{\infty} x_m = \sum_{m=0}^{j-1} x_m$, donde $j-1 = max\{l \in \mathbb{N} : x_l \neq \xi\}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > \xi$ arbitrario. Es claro que $f(\sum_{m=0}^{n} x_m, \sum_{m=0}^{j-1} x_m) = \xi < \varepsilon$, $\forall n > j-1$. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N = j-1 \in \mathbb{N}$ tal que $f(\sum_{m=0}^{n} x_m, \sum_{m=0}^{j-1} x_m) < \varepsilon$, $\forall n > j-1$, esto es, $\sum_{m=0}^{\infty} x_m = \sum_{m=0}^{j-1} x_m$, como se quería probar. □

Ejemplo 3.4.1. Observemos que el teorema 3.2.6 nos dice que a cada elemento x de un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario le podemos hacer corresponder una serie con término general $\sum_{l=1}^{n} \dfrac{k_l}{10^l}$ tal que $x = [x] + \sum_{l=1}^{\infty} \dfrac{k_l}{10^l}$, donde $k_n = [10^n x_n]$, y $x_n = \dfrac{\mathcal{F}(10^{n-1}x_{n-1})}{10^{n-1}}$, con $x = x_0 > \xi$.

Definición 3.4.4. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie infinita definida en un cuerpo métrico $(\mathbb{K}, f)$, con término general $p_n = \sum_{m=0}^{n} x_m$. Si existen $r \in \mathbb{K}$, y $a \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ tales que $x_n = ar^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces se dice que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una serie geométrica de razón $r \in \mathbb{K}$, y primer término $a \in \mathbb{K} - \{\xi\}$.

Proposición 3.4.2. Sea $(\mathbb{K}, f)$ un cuerpo métrico, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie geométrica de razón $r \in \mathbb{K}$ definida en $(\mathbb{K}, f)$, y $a \in \mathbb{K} - \{\xi\}$ el primer término de la serie. La igualdad $\sum_{m=0}^{\infty} ar^m = \dfrac{a}{\zeta - r}$ es cierta cuando $f(r) < \zeta$.

Demostración. Del ejemplo 3.2.2 sabemos que $\sum_{m=0}^{n} ar^m = a\dfrac{r^{n+1} - \zeta}{r - \zeta}$. Como $f(r) < \zeta$, entonces $\lim_{n\to\infty}(r^n) = \xi$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} ar^m &= \lim_{n\to\infty} a(\frac{r^{n+1} - \zeta}{r - \zeta}) \\
&= \frac{a}{r - \zeta} \lim_{n\to\infty} (r^{n+1} - \zeta) \\
&= \frac{a}{r - \zeta}(-\zeta) \\
&= \frac{a}{\zeta - r}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{m=0}^{\infty} x_m = \dfrac{a}{\zeta - r}$, cuando $f(r) < \zeta$.

De la proposición 3.4.2 podemos obtener una identidad bastante útil. En la proposición anterior vemos que el contador de la suma que aparece en dicha serie empieza en $m = 0$. Ésto se puede generalizar para un contador $m = t$, donde $t \in \mathbb{N}$ es arbitrario, obteniendo lo siguiente; □

Proposición 3.4.3. Sea $(\mathbb{K}, f)$ un cuerpo métrico, y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una serie geométrica de razón $r \in \mathbb{K}$ definida en $(\mathbb{K}, f)$. Para un $t \in \mathbb{N}$ arbitrario, se cumplen las identidades;

$$r^t \sum_{m=0}^{\infty} r^m = \sum_{m=t}^{\infty} r^m = \frac{r^t}{\zeta - r}, \tag{3.28}$$

Demostración. Tenemos que;

$$\begin{aligned} r^t \sum_{m=0}^{\infty} r^m &= r^t(\zeta + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n + \cdots) \\ &= r^t + r^{t+1} + r^{t+2} + \cdots + r^{n-1} + r^n + \cdots \\ &= \sum_{m=t}^{\infty} r^m \\ &= \frac{r^t}{\zeta - r} \end{aligned}$$

Luego, $r^t \sum_{m=0}^{\infty} r^m = \sum_{m=t}^{\infty} r^m = \dfrac{r^t}{\zeta - r}$, $\forall t \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 3.4.2. La serie cuyo término general es $p_n = \sum_{m=1}^{n}(\dfrac{\zeta}{10})^n$ es geométrica convergente, pues es claro que es de razón $r = \dfrac{\zeta}{10} < \zeta$. La proposición 3.4.3 nos dice que;

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{\zeta}{10})^n = \frac{\frac{\zeta}{10}}{\zeta - \frac{\zeta}{10}} = \frac{\frac{\zeta}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{\zeta}{9}. \tag{3.29}$$

Por lo tanto, $\sum_{m=1}^{\infty}(\dfrac{\zeta}{10})^n = \dfrac{\zeta}{9}$.

Ejemplo 3.4.3. Si a la serie cuyo término general es $p_n = \sum_{m=1}^{n}(\dfrac{\zeta}{10})^n$ la multiplicamos por 9, entonces en virtud de la proposición 3.4.2 tenemos la convergencia;

$$\sum_{m=1}^{\infty} 9(\frac{\zeta}{10})^n = \zeta. \tag{3.30}$$

La serie anterior es muy interesante porque a partir de ésta podemos escribir a una infinidad de números racionales como limites de alguna serie geométrica. Damos por terminado éste capitulo con algunos teoremas que nos serán de gran ayuda para demostrar otros teoremas del siguiente capitulo.

Teorema 3.4.1. *(Criterio de comparación directa) Sean $p_n = \sum_{m=0}^{n} x_m$ y $p'_n = \sum_{m=0}^{n} x'_m$ los términos generales de las series $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas en un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$. Si $0 \leq x_m \leq x'_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, y la serie $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces la serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge.*

Demostración. La serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, pues de la desigualdad $0 \leq x_m \leq x'_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ obtenemos que $0 \leq x_{n+1} \leftrightarrow p_n \leq p_n + x_{n+1} \leftrightarrow p_n \leq p_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por otro lado, $x_1 \leq x'_1$ implica $x_1 + x_2 \leq x'_1 + x'_2$, y haciendo éste mismo proceso "*n-véces*", entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$, de donde $p_n \leq p'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis la serie $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y por el teorema 3.2.2 está acotada. Luego, la serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también estaría acotada, además de ser monotona creciente. Lo anterior implica que la serie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, en virtud del teorema de Weierstrass. □

3.5. Densidad en términos de sucesiones

La densidad también se puede definir en términos de sucesiones como se mostrará a continuación:

Teorema 3.5.1. *Sea* $(\mathcal{X}, f)$ *un espacio métrico.* $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ *es denso en* $\mathcal{X}$*, si y sólo si, para todo* $x \in \mathcal{X}$ *existe una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{D}$ *convergente a* x*.*

Demostración. Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ es denso en $\mathcal{X}$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathcal{X}$ existe $d \in \mathcal{D}$ tal que $f(x, d) < \varepsilon$. En particular, para $0 < \varepsilon_0 < 1$ existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $f(x, d_0) < \varepsilon_0 < 1$. También tenemos que para $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$ existe $d_1 \in \mathcal{D}$ tal que $f(x, d_1) < \varepsilon_1 < \dfrac{1}{2}$. Éste proceso lo podemos hacer de manera indefinida, y obtendríamos a una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}$ tal que $f(x, d_n) < \varepsilon_n < \dfrac{1}{n+1}$. Como la sucesión $(\dfrac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a 0, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\dfrac{1}{n+1}| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, $\forall n > N$. Luego, $f(x, d_n) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Por lo tanto, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a x, como se quería probar.

Reciprocamente sean $x \in \mathcal{X}$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Luego existe una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}$ convergente a x. Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x, d_n) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Lo anterior implica la densidad de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{X}$ □

Proposición 3.5.1. El cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales es denso en cualquier cuerpo ordenado arquimediano.

Demostración. Consecuencia del teorema 3.2.6, pues éste nos dice que cualquier elemento de un cuerpo ordenado arquimediano es limite de una sucesión de números racionales. Luego, el resultado se da en virtud del proposición 3.4.2. □

Capítulo 4

Los números reales

En éste capítulo se definirá de varias formas la completitud de un conjunto, y se demostrará el resultado principal que permite establecer la unicidad del conjunto que estamos buscando construir; los números reales. Se demostrará que dos cuerpos ordenados completos cualesquiera son isomorfos. Cuando tengamos éste resultado a nuestra disposición ya podremos presentar la construcción de los números reales a partir de sucesiones de Cauchy, que intuitivamente consiste en rellenar todos los huecos o lagunas que presenta el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales con sucesionces de Cauchy de números racionales que sean convergentes a tales huecos o vacíos.

4.1. Desarrollos decimales

Definición 4.1.1. Sean $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $k(\mathbb{N}),\ p(\mathbb{N}) \subset \{m \in \mathbb{N} : 0 \leq m < 10\}$. Un desarrollo decimal, o número decimal asociado a las sucesiones anteriores es una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en un cuerpo ordenado arquimediano ($\mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq$), cuyo termino general está dado en la forma

$$d_n = \sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m}{10^m}, \tag{4.1}$$

donde $p_n = \sum_{m=0}^{n} p_m 10^m$ es el término "*n-ésimo*"de una serie finita $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y $p'_n = \sum_{m=1}^{n} \dfrac{k_m}{10^m}$ es el término general de una serie $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que puede ser finita o infinita.

Nota 4.1.1. En lo que sigue, siempre vamos a notar a un desarrollo decimal de la siguiente manera:

$$\sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m} = p_j p_{j-1} \cdots p_0, k_1 k_2 \cdots\ , \tag{4.2}$$

donde $j = max\{l \in \mathbb{N} : p_l \neq \xi\}$.

Proposición 4.1.1. Si $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario, entonces éste se puede escribir como un único desarrollo decimal;

$$n = \sum_{m=0}^{j} p_m 10^m, \tag{4.3}$$

con $j = max\{l \in \mathbb{N} : p_l \neq \xi\}$.

Ejemplo 4.1.1. Observemos que en virtud de la proposición 4.1.1, y del teorema 3.2.6 podemos afirmar que todo elemento de un cuerpo ordenado arquimediano tiene asociado un desarrollo decimal. En efecto; si x es un elemento arbitrario de algún cuerpo arquimediano, entonces por el teorema 2.3.19 tenemos que

$$x = [x] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m}. \tag{4.4}$$

Como $[x] \in \mathbb{Z}$, entonces por la proposición 4.1.1 existe un desarrollo decimal tal que

$$[x] = \sum_{m=0}^{j} p_m 10^m. \tag{4.5}$$

De está manera;

$$x = \sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m}. \tag{4.6}$$

Nota 4.1.2. Notemos que todos los términos de un desarrollo decimal arbitrario

$$\sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m} \tag{4.7}$$

están en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales, pero ésto no implica que su punto de convergencia, en caso de que exista, también esté en éste conjunto. Éste hecho se evidenció en el ejemplo del primer capítulo, cuando demostramos que $\sqrt{2}$ no pertenece al conjunto de los números racionales. Los desarrollos decimales que convergen en $\mathbb{Q}$ tienen un comportamiento distinto a los desarrollos decimales que no convergen en $\mathbb{Q}$. A continuación definiremos todos los tipos de desarrollos decimales que existen, para luego analizar la convergencia de cada tipo.

Definición 4.1.2. Un desarrollo decimal $\sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k_m}{10^m}$ es exacto, si y sólo si, existe $j' \in \mathbb{N}$ tal que $k_m = \xi$, $\forall m \geq j'$.

Definición 4.1.3. Se dice que un desarrollo decimal $\sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k_m}{10^m}$ es periódico puro, si y sólo si, existe $j' \in \mathbb{N}$ tal que $k_{j'+s} = k_s$, $\forall s \in \mathbb{N}$.

Definición 4.1.4. Un desarrollo decimal $\sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k_m}{10^m}$ es periódico mixto, si y sólo si, existen $j', r \in \mathbb{N}$ tales que $k_{(j'+r)+s} = k_{j'+(s-1)}$, $\forall s \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Definición 4.1.5. Un desarrollo decimal que no satisfaga ninguna de las tres definiciones anteriores se llama desarrollo decimal inexacto no periódico.

Observemos que todo desarrollo decimal exacto también es un desarrollo decimal periódico. El siguiente teorema nos brinda una infinidad de ejemplos de desarrollos decimales periódicos, todos convergentes en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. El enunciado es el siguiente;

Teorema 4.1.1. *Todo número racional es el limite de algún desarrollo decimal periódico.*

Demostración. Sea $\omega = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ arbitrario. Si $\omega \in \mathbb{Z}$, entonces la proposición 4.1.1 nos garantiza el resultado, y en caso contrario, el algoritmo de la división nos dice que existe una pareja única $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tal que

$$\omega = q + \frac{r}{10}\frac{10}{b}, \tag{4.8}$$

donde $0 < r < b$. Si aplicamos nuevamente el algoritmo de la división para el racional $\omega_1 = \dfrac{10}{b}$, entonces tenemos que existe $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ única la cual cumple que

$$\frac{10}{b} = q_1 + \frac{1}{10}\frac{10r_1}{b}, \tag{4.9}$$

donde $0 < r_1 < b$. Sustituyendo (4.9) en (4.8), entonces tenemos la igualdad;

$$\omega = q + \frac{rq_1}{10} + \frac{r}{10^2}\frac{10r_1}{b}, \tag{4.10}$$

y aplicando nuevamente el algoritmo de la división para el racional $w_2 = \dfrac{10r_1}{b}$, entonces existe $(q_2, r_2) \in \mathbb{N}^2$ única tal que

$$\frac{10r_1}{b} = q_2 + \frac{1}{10}\frac{10r_2}{b}, \tag{4.11}$$

donde $0 < r_2 < b$. Nuevamente, sustituyendo (4.11) en (4.10), entonces;

$$\omega = q + \frac{rq_1}{10} + \frac{rq_2}{10^2} + \frac{r}{10^3}w_3. \tag{4.12}$$

Observemos que el proceso anterior lo podemos hacer de una manera indefinida, obteniendo la identidad;

$$\begin{aligned} \omega &= q + \frac{rq_1}{10} + \frac{rq_2}{10^2} + \frac{rq_3}{10^3} + \cdots + \frac{rq_n}{10^n} + \cdots, \qquad (6) \\ &= q + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{rq_m}{10^m}, \end{aligned}$$

donde cada pareja $(q_n, r_n) \in \mathbb{N}^2$ es única, y aparece al aplicar el algoritmo de la división al racional

$$\omega_n = \frac{10r_{n-1}}{b}. \tag{4.13}$$

Si ponemos a $r = r_0$, entonces de todo lo demás es claro que $1 \leq r_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, $r_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, el conjunto $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, y su número de elementos es menor o igual a $b - 1$. De lo anterior pueden ocurrir dos cosas; que exista $j \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq j$, $r_m = 0$, o que $\forall j \in \mathbb{N}$, exista $m \geq j$, tal que $q_m \neq 0$. Si ocurre lo primero, entonces es evidente que el desarrollo que aparece en (6) es finito, luego periódico. Si ocurre lo segundo, entonces en éste caso existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $r_{j+1} = r_t$, donde $t \leq j$, pues el conjunto $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Por otro lado, sabemos que la pareja $(q_{j+1}, r_{j+1}) \in \mathbb{N}^2$ es única, y ésto implica que $q_{j+1} = q_t$, pues $r_{j+1} = r_t$. De está manera;

$$\omega = q + \sum_{m=1}^{t} \frac{rq_m}{10^m} + \sum_{m=t+1}^{j} \frac{rq_m}{10^m} + \frac{rq_t}{10^{j+1}} + \frac{r}{10^{j+2}}\frac{10r_t}{b}. \tag{4.14}$$

Si aplicamos nuevamente el algoritmo de la división al número racional $\omega_{t+1} = \dfrac{10r_t}{b}$, entonces volveremos a encontrar a la pareja $(q_{t+1}, r_{t+1}) \in \mathbb{N}^2$ tal que

$$\omega = q + \sum_{m=1}^{t} \frac{rq_m}{10^m} + \sum_{m=t+1}^{j} \frac{rq_m}{10^m} + \frac{rq_t}{10^{j+1}} + \frac{rq_{t+1}}{10^{j+2}} + \frac{r}{10^{j+3}}\frac{10r_{t+1}}{b}. \tag{4.15}$$

Luego, el proceso que se hizo para llegar a (6) lo podemos volver a realizar en (4.15), y obtendríamos la identidad;

$$\omega = q + (\frac{rq_1}{10} + \cdots + \frac{rq_{t-1}}{10^{t-1}}) + (\frac{rq_t}{10^t} + \cdots + \frac{rq_j}{10^j}) + (\frac{rq_t}{10^{j+1}} + \cdots + \frac{rq_j}{10^{2j}}) + \cdots \tag{4.16}$$

Se sigue de todo lo anterior que el racional $\omega = \dfrac{a}{b}$ se puede escribir como un desarrollo decimal periódico, obteniendo el resultado deseado. □

El siguiente teorema nos dice cuando dos desarrollos decimales pueden coincidir;

Teorema 4.1.2. *Sea* $\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k_m}{10^m}$ *un desarrollo decimal tal que a partir de algún índice* $j \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $k_m = 9$, $\forall m \geq j$. *Entonces existe un único desarrollo decimal finito* $\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k'_m}{10^m}$ *tal que* $\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k_m}{10^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k'_m}{10^m}$.

Demostración. Sea $\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{k_m}{10^m}$ un desarrollo decimal tal que a partir de algún índice $j \in \mathbb{N}$ se cumple que $k_m = 9$, $\forall m \geq j$. Luego, en virtud de la proposición 3.4.3,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m} &= \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_{j-1}}{10^{j-1}} + \sum_{m=j}^{\infty} \frac{9}{10^m} \\
&= \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_{j-1}}{10^{j-1}} + \frac{\zeta}{10^{j-1}} \\
&= \frac{k_1}{10} + \cdots + \frac{k_{j-2}}{10^{j-2}} + \frac{k_{j-1}+1}{10^{j-1}}.
\end{aligned}$$

Así, podemos definir a una sucesión $(k'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $k'_m = k_m$, si $m \leq j-2$, $k'_{j-1} = k_{j-1}+1$, y $k'_m = 0$, si $m \geq j$. Por lo tanto,

$$\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m} = \sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m}, \tag{4.17}$$

donde el desarrollo decimal

$$\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} \tag{4.18}$$

es finito, distinto al desarrollo decimal infinito

$$\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m}, \tag{4.19}$$

pero convergentes en el mismo punto. Ahora supongamos que existe otro desarrollo decimal

$$\sum_{m=0}^{n} p'_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m} \tag{4.20}$$

el cual cumple que

$$\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} = \sum_{m=0}^{n} p'_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m}. \tag{4.21}$$

Observemos que por la definición de la sucesión $(k'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k'_{m_0} < 9$. De está manera;

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} &= \sum_{m=1}^{m_0} \frac{k'_m}{10^m} + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} \\ &< \sum_{m=1}^{m_0} \frac{9}{10^m} + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9}{10^m} = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} < 1. \tag{4.22}$$

De lo anterior se sigue que

$$\sum_{m=0}^{n} p_m 10^m = \sum_{m=0}^{n} p'_m 10^m \tag{4.23}$$

y también

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m}, \tag{4.24}$$

en virtud de la proposición 2.3.18 y de la nota 2.3.12. De la proposición 4.1.1 obtenemos que $p_m = p'_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Ahora, supongamos que existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $k'_v \neq k''_v$, y consideremos a $v_0 = min\{v \in \mathbb{N} : k'_v \neq k''_v\}$. Lo anterior implica la igualdad;

$$\sum_{m=1}^{v_0-1} \frac{k'_m}{10^m} = \sum_{m=1}^{v_0-1} \frac{k''_m}{10^m}. \tag{4.25}$$

Por lo cual;

$$\sum_{m=1}^{v_0-1} \frac{k'_m}{10^m} + \frac{k'_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} = \sum_{m=1}^{v_0-1} \frac{k'_m}{10^m} + \frac{k''_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m}, \tag{4.26}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{k'_{v_0}}{10^{v_0}} &\leq \frac{k'_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{k'_m}{10^m} \\
&= \frac{k''_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m} \\
&< \frac{k''_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^m} \\
&= \frac{k''_{v_0}}{10^{v_0}} + \frac{1}{10^{v_0}}. \\
&= \frac{k''_{v_0}+1}{10^{v_0}},
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$k'_{v_0} < k''_{v_0} + 1, \tag{4.27}$$

en otras palabras,

$$k'_{v_0} \leq k''_{v_0}. \tag{4.28}$$

De manera análoga tenemos que;

$$\begin{aligned}
\frac{k''_{v_0}}{10^{v_0}} &\leq \frac{k''_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m} \\
&= \frac{k'_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{k''_m}{10^m} \\
&< \frac{k'_{v_0}}{10^{v_0}} + \sum_{m=v_0+1}^{\infty} \frac{9}{10^m} \\
&= \frac{k'_{v_0}}{10^{v_0}} + \frac{1}{10^{v_0}}. \\
&= \frac{k'_{v_0}+1}{10^{v_0}},
\end{aligned}$$

obteniendo la desigualdad

$$k''_{v_0} < k'_{v_0} + 1, \tag{4.29}$$

y de está manera

$$k''_{v_0} \leq k'_{v_0}. \tag{4.30}$$

De todo lo anterior concluimos la igualdad $k'_{v_0} = k''_{v_0}$, en contradicción con el supuesto de que $k'_{v_0} \neq k''_{v_0}$. Luego, $k'_m = k''_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, y éste último resultado demuestra el teorema. $\square$

Una diferencia muy importante entre los desarrollos decimales periódicos, y los desarrollos decimales inexactos no periódicos radica en su convergencia. El siguiente teorema analiza el punto de convergencia de cualquier desarrollo decimal. El teorema dice lo siguiente:

Teorema 4.1.3. *Un desarrollo decimal es exacto, o periódico, si y sólo si, es convergente en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales.*

Demostración. Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo decimal arbitrario, con término general

$$d_n = \sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m}{10^m}. \tag{4.31}$$

Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo decimal exacto, entonces por la definición 4.1.2 y la proposición 3.4.1 tenemos que;

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m} = \sum_{m=0}^{j} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{j'} \frac{k_m}{10^m} \in \mathbb{Q}, \tag{4.32}$$

donde $j = max\{l \in \mathbb{N} : p_l \neq \xi\}$, y $j' = max\{l \in \mathbb{N} : k_l \neq \xi\}$. Vemos que en éste caso $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en los racionales, como queríamos probar.

Ahora supongamos que el desarrollo decimal $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es periódico puro, es decir, supongamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $k_{j+s} = k_s$, $\forall s \in \mathbb{N}$. En virtud de proposición 3.4.2, y la proposición 4.1.1 tenemos que;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{10^m} &= (\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_j}{10^j}) + (\frac{k_1}{10^{j+1}} + \frac{k_2}{10^{j+2}} + \cdots + \frac{k_j}{10^{2j}}) + (\frac{k_1}{10^{2j+1}} + \frac{k_2}{10^{2j+2}} + \cdots + \frac{k_j}{10^{3j}}) + \cdots \\
&= (\frac{k_1}{10} + \frac{k_1}{10^{j+1}} + \frac{k_1}{10^{2j+1}} + \cdots) + (\frac{k_2}{10^2} + \frac{k_2}{10^{j+2}} + \frac{k_2}{10^{2j+2}} + \cdots) + \cdots + (\frac{k_j}{10^j} + \frac{k_j}{10^{2j}} + \frac{k_j}{10^{3j}} + \cdots) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_1}{10^{mj+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_2}{10^{mj+2}} + \cdots + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_j}{10^{(m+1)j}} \quad (1) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_1}{10}(\frac{\zeta}{10^j})^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_2}{10^2}(\frac{\zeta}{10^j})^m + \cdots + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_j}{10^j}(\frac{\zeta}{10^j})^m \\
&= \frac{k_1 10^j}{10^{j+1} - 10} + \frac{k_2 10^j}{10^{j+2} - 10^2} + \cdots + \frac{k_j 10^j}{10^{2j} - 10^j} \\
&= \frac{k_1 10^{j-1}}{10^j - 1} + \frac{k_2 10^{j-2}}{10^j - 1} + \cdots + \frac{k_j}{10^j - 1} \\
&= \frac{k_1 10^{j-1} + k_2 10^{j-2} + \cdots + k_j}{10^j - 1} \\
&= \frac{k_1 k_2 \cdots k_j}{10^j - 1} \in \mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es periódico puro, entonces converge en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales, por tratarse de una suma de dos series, ambas convergentes en $\mathbb{Q}$.

Para el caso en el que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea un desarrollo decimal periódico mixto, existen $j, r \in \mathbb{N}$ tales que $k_{(j+r)+s} = k_{j+(s-1)}$, $\forall s \in \mathbb{N} - \{0\}$. Si ponemos a $p'_{j-1} = \sum_{m=1}^{j-1} \frac{k_m}{10^m}$, entonces con un razonamiento análogo al anterior tenemos que;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_m}{10^m} &= p'_{j-1}+(\frac{k_j}{10^j}+\frac{k_{j+1}}{10^{j+1}}+\cdots+\frac{k_{j+r}}{10^{j+r}})+(\frac{k_j}{10^{j+(r+1)}}+\frac{k_{j+1}}{10^{j+(r+2)}}+\cdots+\frac{k_{j+r}}{10^{j+(2r+1)}})+\cdots \\
&= p'_{j-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k_j}{10^{j+m(r+1)}}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k_{j+1}}{10^{j+m(r+1)+1}}+\cdots+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_{j+r}}{10^{j+m(r+1)-1}} \\
&= p'_{j-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k_j}{10^j}(\frac{\zeta}{10^{r+1}})^m+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{k_{j+1}}{10^{j+1}}(\frac{\zeta}{10^{r+1}})^m+\cdots+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_{j+r}}{10^{j-1}}(\frac{\zeta}{10^{r+1}})^m \\
&= p'_{j-1}+\frac{k_j10^{r+1}}{10^j(10^{r+1}-1)}+\frac{k_{j+1}10^{r+1}}{10^{j+1}(10^{r+1}-1)}+\cdots+\frac{k_{j+r}10^{r+1}}{10^{j+r}(10^{r+1}-1)} \\
&= p'_{j-1}+\frac{k_j10^{r+1}}{10^j(10^{r+1}-1)}+\frac{k_{j+1}10^{r+1}}{10^{j+1}(10^{r+1}-1)}+\cdots+\frac{k_{j+r}10^{r+1}}{10^{j+r}(10^{r+1}-1)} \\
&= p'_{j-1}+\frac{k_j10^{r+1}}{10^j(10^{r+1}-1)}+\frac{k_{j+1}10^{r}}{10^{j}(10^{r+1}-1)}+\cdots+\frac{k_{j+r}10}{10^{j}(10^{r+1}-1)} \\
&= p'_{j-1}+\frac{k_j10^r+k_{j+1}10^{r-1}+\cdots+k_{j+r}}{10^{j-1}(10^{r+1}-1)}\in\mathbb{Q}
\end{aligned}$$

Por otro lado, al término p'_{j-1} lo podemos escribir de la siguiente manera;

$$\begin{aligned}
p'_{j-1} &= \frac{k_110^{j-2}+k_210^{j-3}+\cdots+k_{j-1}}{10^{j-1}} \\
&= \frac{(k_110^{j-2}+k_210^{j-3}+\cdots+k_{j-1})(10^{r+1}-1)}{10^{j-1}(10^{r+1}-1)} \\
&= \frac{k_110^{r+(j-1)}+k_210^{r+(j-2)}+\cdots+k_{j-1}10^{r+1}-(k_110^{j-2}+k_210^{j-3}+\cdots+k_{j-1})}{10^{j-1}(10^{r+1}-1)}
\end{aligned}$$

Además, de la proposición 4.1.1 obtenemos lo siguiente;

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_m}{10^m} &= p'_{j-1}+\frac{k_j10^r+k_{j+1}10^{r-1}+\cdots+k_{j+r}}{10^{j-1}(10^{r+1}-1)} \\
&= \frac{k_1k_2\cdots+k_{j+r}-k_1k_2\cdots k_{j-1}}{10^{j-1}(10^{r+1}-1)}\in\mathbb{Q}
\end{aligned}$$

De todo lo anterior se sigue que cualquier desarrollo decimal $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exacto, o periódico es convergente en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales, obteniendo el resultado deseado.

Reciprocamente, Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo decimal convergente en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. Además, sea $\omega=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ el punto de convergencia del desarrollo decimal $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por el teorema 4.1.1 sabemos que existe un desarrollo decimal periódico $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en ω. Si $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es exacto, entonces el teorema 4.1.2 nos garantiza que el desarrollo decimal $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es periódico. En el caso de que el desarrollo $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea infinito periódico, el teorema 4.1.2 no garantiza que $(d'_n)_{n\in\mathbb{N}}=(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o que el desarrollo $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea finito. En cualquier caso, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es periódico, como se quería demostrar. □

Nota 4.1.3. El teorema anterior es muy importante para nuestros propósitos porque una de las cosas que nos está diciendo es que cualquier desarrollo decimal que no sea periódico no puede ser convergente en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. ¿Qué podemos decir entonces de la convergencia de los desarrollos decimales que no son periódicos? ¿Será qué todos son convergentes o sólo algunos? El siguiente siguiente teorema responde a éstas inquietudes.

Teorema 4.1.4. *Todo desarrollo decimal es convergente.*

Demostración. Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo decimal, con término general

$$d_n = \sum_{m=0}^{n} p_m 10^m + \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m}{10^m}. \tag{4.33}$$

En la demostración del teorema 4.1.2 se demostró la desigualdad

$$\xi \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m}{10^m} < \zeta, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.34}$$

Luego, el razonamiento que se uso en la demostración del proposición 3.4.2 se puede aplicar a la desigualdad anterior para concluir que la serie $(p_n')_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, donde su término general está dado en la forma $p_n' = \sum_{m=1}^{n} \dfrac{k_m}{10^m}$. Lo anterior implica la convergencia del desarrollo decimal $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

4.2. Completitud

Hasta el momento hemos probado que todos los desarrollos decimales son convergentes, y como ya lo habíamos definido en el primero capítulo, los desarrollos decimales inexactos no periódicos convergen a un número irracional, además de que son los huecos o lagunas que presenta el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales, vistos como puntos de un recta. En el primer capítulo definimos lo que es un cuerpo ordenado completo, definición que debe cumplir un cuerpo para poder afirmar que es $\mathbb{R}$. La definición que se presentó en el primer capítulo no necesariamente tiene que ser formulada en términos de cuerpos, pues su efecto recae principalmente en conjuntos totalmente ordenados arbitrarios. La completitud de un conjunto también se puede definir en término de cuerpos ordenados arquimedianos. El siguiente análisis nos motivará a formular tal concepto. En efecto, como ya lo habíamos mencionado, los intervalos que aparecen en la conclusión del teorema 2.3.7 siempre van a rodear a algún número irracional, en caso de que el elemento del cuerpo que estemos considerando no pertenezca al cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. En cualquier caso, cualquier elemento de un cuerpo ordenado arquimediano siempre va a determinar infinitos intervalos que lo contienen, y que cada vez se acercan más a él. Si el elemento que estemos considerando no está en $\mathbb{Q}$, y pensamos en los números racionales como puntos de una recta numérica, vemos entonces que estos intervalos van a determinar, o van a rodear de manera infinita a un hueco o una laguna que presenta el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. Se concluye entonces que los intervalos que aparecen en la conclusión del teorema 2.3.7 son indispensables en el proceso de llenar huecos o lagunas que presenten el cuerpo arquimediano de los números racionales, o que es lo mismo, que son muy importantes en la construcción de los números irracionales. Dada su importancia, vale la pena dar una definición que los caracterice y los generalice.

Definición 4.2.1. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones definidas en un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$. Una sucesión de intervalos encajados en $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $c_n = [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y se cumple que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, además de que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \xi$.

Teorema 4.2.1. *Si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados en un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$, y si existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $a_n \leq a_{n+1} < x < b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty}(a_n) = x = \lim_{n\to\infty}(b_n)$, además de que $x \in \mathbb{K}$ es único.*

Demostración. De la hipótesis tenemos que;

$$a_n \leq x \leq b_n \leftrightarrow 0 \leq x - a_n \leq b_n - a_n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Luego, en virtud del teorema del Sandwich y del teorema 3.2.4;

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = x, \tag{4.36}$$

pues $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados. De manera análoga se puede probar que;

$$\lim_{n\to\infty} (b_n) = x, \tag{4.37}$$

y por el teorema 3.2.1 podemos concluir que $x \in \mathbb{K}$ es único, obteniendo el resultado deseado. □

Definición 4.2.2. Un cuerpo ordenado arquimediano $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ es completo, si y sólo si, para toda sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos encajados en $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ existe un único $x \in \mathbb{K}$ tal que $a_n \leq a_{n+1} < x < b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La completitud de un conjunto se puede definir también en términos de espacios métricos, como se muestra a continuación:

Definición 4.2.3. Un espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$ se dice que es completo, si y sólo si, toda sucesión de Cauchy es convergente en él.

Nota 4.2.1. La definición 4.2.3 ya es la tercera sobre la completitud de un conjunto. Notemos que cada concepto que se ha dado sobre completitud siempre está definido sobre una estructura concreta. Es de esperarse que todas éstas definiciones sean equivalentes, como se mostrará en el siguiente teorema:

Teorema 4.2.2. *Si* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *es un cuerpo ordenado arquimediano, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) En $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *toda sucesión de Cauchy es convergente.*

(b) Para toda sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *de intervalos encajados en* $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *existe un único* $x \in \mathbb{K}$ *tal que* $a_n \leq a_{n+1} < x < b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Todo $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ *acotado superiormente posee supremo* $s \in \mathbb{K}$.

Demostración. $(a) \to (b)$. Sea $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de intervalos encajados en $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$. Afirmamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, por $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ ser una sucesión de intervalos encajados, tenemos que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \xi$. Luego, para un $\varepsilon > \xi$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n < \varepsilon$, $\forall n > N$. Por lo tanto, para $m > n > N$, $a_n - a_m < b_n - a_n < \varepsilon$, pues $a_n < a_m < b_m < b_n$, donde $m > n > N$. Si suponemos que $n > m > N$, entonces el razonamiento en análogo. De lo anterior se concluye que $|a_n - b_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N$, y por lo tanto la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, luego convergente en $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$.

$(b) \to (c)$. Sea $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$ un conjunto acotado superiormente. Como $\mathbb{K}$ es un conjunto toltalmente ordenado, entonces podemos escribir a $\mathbb{X}$ como

$$\mathbb{X} = \{\cdots < x_j < x_{j+1} < x_{j+2} < \cdots < x_{j+(n-1)} < x_{j+n} < \cdots\}. \tag{4.38}$$

Ahora, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en $\mathbb{X}$ como $a_n = x_{j+(n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es claro que está sucesión así definida es monotona creciente, además de estar acotada superiormente. En virtud del teorema de Weierstrass tenemos que $\lim_{n\to\infty}(a_n) = s$, donde $s = Sup\ \mathbb{X}$. Ahora, sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida como $b_n = a_n + \dfrac{\zeta}{10^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados en $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$. En efecto;

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \frac{\zeta}{10^n} = \xi. \tag{4.39}$$

Además es claro que;

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.40}$$

Luego, $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos encajados, y por hipotesis $s \in \mathbb{K}$, como se quería probar.

$(c) \to (a)$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy definida en $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$. Por el teorema 3.3.1 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, y por el teorema 3.1.2 toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también está acotada. Ahora, en virtud del teorema 3.1.3 existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monótona. Si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, entonces el teorema de Weierstrass nos permite afirmar que esta es convergente a $s = Sup\ x(\mathbb{N})$. Si la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es monónota decreciente, entonces la subsucesión $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ definida como $x'_{n_k} = -x_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ es monotona creciente, luego convergente a $s' = Sup\ x'(\mathbb{N})$. Por el teorema 3.3.3 tenemos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a s, y por la unicidad del límite, $s = s'$. Por otro lado, la hipótesis nos permite afirmar que $s \in \mathbb{K}$, pues el conjunto $x(\mathbb{N})$ está acotado superiormente, obteniendo el resultado deseado. □

Teorema 4.2.3. *Si $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es un cuerpo ordenado completo, entonces es arquimediano.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es un cuerpo ordenado completo que no es arquimediano. Si $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ no es un cuerpo arquimediano, entonces su respectivo subconjunto de los números naturales está acotado superiormente, luego posee supremo $s = Sup\ \mathbb{N}$, pues $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es completo. En virtud del teorema 2.3.9, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $s - \varepsilon < n$. En particular, podemos colocar a $\varepsilon = \dfrac{\zeta}{2}$. Luego,

$$s - \frac{\zeta}{2} < n \leftrightarrow s < n + \frac{\zeta}{2} < n + \zeta \leftrightarrow s < n + \zeta. \tag{4.41}$$

La desigualdad $s < n+\zeta$ entra en contradicción con el hecho de que $s = Sup\ \mathbb{N}$. Luego, $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es arquimediano, como se quería probar. □

Teorema 4.2.4. *(Existencia de raíces) Sea $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ un cuerpo ordenado completo. Si $x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $y \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$ único tal que $y^n = x$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Si $x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, entonces $x = \xi$, o $x \in \mathcal{P}$. Si tomamos el primer caso, entonces el resultado es evidente, pues $\xi^n = \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para el segundo caso, sea $R = \{r \in \mathcal{P} : r^n < x\}$. Afirmamos que el conjunto R es no vació, y acotado superiormente. En efecto, pongamos a $r = \dfrac{x}{x+\zeta} > \xi$. Luego;

$$\begin{aligned} \xi < \zeta &\leftrightarrow x < x + \zeta \\ &\leftrightarrow \frac{x}{x+\zeta} < \zeta \\ &\leftrightarrow \xi < r < \zeta \end{aligned}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\xi < x^2 &\leftrightarrow x < x^2 + x \\
&\leftrightarrow x < x(x+1) \\
&\leftrightarrow \frac{x}{x+\zeta} < x \\
&\leftrightarrow r < x
\end{aligned}
$$

También,

$$
\begin{aligned}
r < \zeta &\leftrightarrow r^{n-1} < \zeta \\
&\leftrightarrow -r^{n-1} \geq -\zeta \\
&\leftrightarrow \xi \leq \zeta - r^{n-1} \\
&\leftrightarrow \xi \leq r(\zeta - r^{n-1}) \\
&\leftrightarrow \xi \leq r - r^n \\
&\leftrightarrow r^n \leq r < x \\
&\leftrightarrow r^n < x \\
&\leftrightarrow r \in R
\end{aligned}
$$

De está manera, el conjunto R no es vacío.

Por otro lado, supongamos que $x + \zeta \notin \mathcal{C}_S\ (R)$. Luego existe $r_0 \in R$ tal que $x + \zeta < r_0$. Así, $r_0^n < x < x+\zeta < r_0$, y por transitividad tenemos que $r_0^n < r_0$. Sabemos que la desigualdad anterior sólo se da cuando $\xi < r_0 < \zeta$, lo cual entra en contradicción con la desigualdad $\zeta < x + \zeta < r_0$. Por lo tanto, $x + \zeta \in \mathcal{C}_S\ (R)$.

Como el conjunto R no es vacío, y está acotado superiormente, entonces existe $y = sup\ R$, pues $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es un cuerpo ordenado completo. En virtud de (d), o $y^n < x$, o $y^n > x$, o $y^n = x$. Si tomamos el primer caso, entonces $x - y^n > \xi$, y por lo tanto, $\dfrac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}} > \xi$. Como el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales es un conjunto denso en si mismo, entonces podemos encontrar un $h \in \mathbb{Q}$ tal que $\xi < h < \zeta$, y $h < \dfrac{x - y^n}{n(y+\zeta)^{n-1}}$. Así,

$$
\begin{aligned}
\xi < h < \zeta &\leftrightarrow (y+h) < y + \zeta \\
&\leftrightarrow (y+h)^{n-1} < (y+\zeta)^{n-1} \\
&\leftrightarrow hn(y+h)^{n-1} < hn(y+\zeta)^{n-1} < x - y^n,
\end{aligned}
$$

y por la proposición 2.4.2,

$$
(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < hn(y+\zeta)^{n-1} < x - y^n, \tag{4.42}
$$

de donde $(y+h)^n - y^n < x - y^n$, y de está manera $(y+h)^n < x$. Como $y + h > \xi$, entonces por la definición de R, $y + h \in R$. Además, $y^n < x$, en otras palabras, $y \in R$. Pero como $y = Sup\ R$, entonces $y = max\ R$. Luego, $y + h < y$, esto es, $h < \xi$, lo cual es absurdo. Si tomamos el segundo caso, entonces tenemos que $y^n - x > \xi$, de donde $\dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}} > \xi$. Además,

$$\begin{aligned} -x < (n-\zeta)y^n &\leftrightarrow y^n - x < ny^n \\ &\leftrightarrow \xi < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} < y \end{aligned}$$

Ahora, sea r_1 tal que $r_1 \geq y - \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$. Por la proposición 2.4.2;

$$\begin{aligned} r_1 \geq y - \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} &\leftrightarrow -r_1^n < -(y - \frac{y^n - x}{ny^{n-1}})^n \\ &\leftrightarrow y^n - r_1^n < y^n - (y - \frac{y^n - x}{ny^{n-1}})^n \\ &\leftrightarrow y^n - r_1^n < y^n - (y - \frac{y^n - x}{ny^{n-1}})^n < (\frac{y^n - x}{ny^{n-1}})ny^{n-1} = y^n - x \\ &\leftrightarrow y^n - r_1^n < y^n - x \\ &\leftrightarrow -r_1^n < -x \\ &\leftrightarrow r_1^n \geq x \\ &\leftrightarrow r_1 \notin R \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que si $r_1 \geq y - \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, entonces $r_1 \notin R$, o equivalentemente, si $r_1 \in R$, entonces $r_1 < y - \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}}$, en otras palabras, $y - \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}} \in \mathcal{C}_S\ (R)$, lo que es absurdo, pues $y - \dfrac{y^n - x}{ny^{n-1}} < y$, e $y = Sup\ R$. Como no se cumplen las desigualdades $y^n < x$, e $y^n > x$, entonces obligatoriamente $y^n = x$. Además, el inciso (a) de la proposición 2.3.9 nos dice que $y = Sup\ R$ es único, obteniendo el resultado deseado. $\square$

Nota 4.2.2. Si ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$) es un cuerpo ordenado completo, $x \in \mathcal{P} \cup \{0\}$, y $n \in \mathbb{N}$, entonces al $y \in \mathcal{P} \cup \{0\}$ tal que $y^n = x$ lo llamaremos raíz "*n-ésima*" de x, y la notaremos como $y = \sqrt[n]{x}$.

Teorema 4.2.5. *Sean $(\mathcal{X}, f)$ e $(\mathcal{Y}, g)$ espacios métricos, con $(\mathcal{Y}, g)$ completo. Además, sea $(\mathcal{A}, f)$ un subespacio métrico de $(\mathcal{X}, f)$ con $\mathcal{A}$ denso en $\mathcal{X}$. Si la aplicación $i : (\mathcal{A}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una inmersión isométrica tal que $i(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{Y}$, entonces existe una única isometría $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ donde $I(a) = i(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Por hipótesis $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{X}$. Luego, para un $a \in \mathcal{X}$ arbitrario existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$. Ahora, sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{Y}$ definida como $b_n = i(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{Y}, g)$. En efecto, por el teorema 3.3.2 la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Por lo tanto, para cada $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(a_n, a_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$. Como la aplicación $i : (\mathcal{A}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una inmersión isométrica, entonces tenemos que $f(a_n, a_m) = g(i(a_n), i(a_m)) = g(b_n, b_m) < \varepsilon$, $\forall n, m > N$, en otras palabras, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Además, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $(\mathcal{Y}, g)$, pues éste espacio es completo. Definamos a la relación $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ como $I(a) = \lim_{n\to\infty}(b_n)$, $\forall a \in \mathcal{X}$. Tenemos que $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una relación funcional. En efecto, si suponemos que para $a \in \mathcal{X}$ arbitrario $I(a) = \lim_{n\to\infty}(b_n)$ y $I(a) = \lim_{n\to\infty}(d_n)$, entonces existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{A}, f)$ tales que $i(a_n) = b_n$ e $i(c_n) = d_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(c_n) = a$. Es claro que la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{A}, f)$ definida como $e_n = a_n$, si n es par, y $e_n = c_n$, si n es impar cumple con la igualdad $\lim_{n\to\infty}(e_n) = a$. Así, podemos definir a una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $f_n = i(e_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y como ya lo hemos probado, existe $y \in \mathcal{Y}$ tal que $\lim_{n\to\infty}(f_n) = y$. Es evidente que las sucesiones $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son subsucesiones de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y por el teorema 3.2.3 tenemos que $\lim_{n\to\infty}(f_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}(d_n) = y$. Luego, $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una relación funcional.

Probemos ahora que la aplicación $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una isometría de espacios métricos. En efecto, sean $a, c \in \mathcal{X}$. Por $\mathcal{A}$ ser denso en $\mathcal{X}$ existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{A}, f)$ tales que $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n) = a$ e $\text{lím}_{n\to\infty}(c_n) = c$. Ahora, sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida como $z_n = f(a_n, c_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$ existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $f(a_n, a) < \varepsilon'$ e $f(c_n, c) > \varepsilon'$, $\forall n > N''$, donde $N'' = max\ \{N, N'\}$. Además, por la proposición 2.3.15 tenemos que;

$$|z_n - f(a, c)| \leq |z_n - f(a_n, c)| + |f(a_n, c) - f(a, c)| \leq f(c_n, c) + f(a_n, a) < \varepsilon. \tag{4.43}$$

Por lo tanto, para cada $\varepsilon > \xi$ existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - f(a, c)| < \varepsilon$, $\forall n > N''$, esto es, $\text{lím}_{n\to\infty}(z_n) = f(a, c)$. De manera análoga se puede demostrar que $\text{lím}_{n\to\infty}(z'_n) = g(I(a), I(c))$, donde la sucesión $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esta definida como $z'_n = g(i(a_n), i(c_n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como la aplicación $i : (\mathcal{A}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una inmersión isométrica, entonces $z_n = z'_n$, $n \in \mathbb{N}$, y por la unicidad de limites, $f(a, c) = g(I(a), I(c))$, $\forall a, c \in \mathcal{X}$, en otras palabras, la aplicación $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una inmersión isométrica.

Ahora vamos a probar que la inmersión isométrica $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una isometría de espacios métricos. En virtud de la proposición 2.3.16 la aplicación $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es inyectiva. Demostremos que ademas es sobreyectiva. En efecto, sea $y \in \mathcal{Y}$ arbitrario. Como el conjunto $i(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{Y}$, entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $i(\mathcal{A})$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}(y_n) = y$. Luego existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ tal que $i(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = x$, donde $x \in \mathcal{X}$. Claramente $I(x) = y$, de donde $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es sobreyectiva, y por lo tanto una isometría de espacios métricos.

Por otro lado, sea $a \in \mathcal{A}$ arbitrario. Por la densidad de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{X}$ existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n) = a$. Por $i : (\mathcal{A}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ ser una inmersión isométrica, entonces $f(a, a_n) = g(i(a), i(a_n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $\text{lím}_{n\to\infty}(i(a_n)) = i(a)$, pues $\text{lím}_{n\to\infty}(a_n) = a$. Así, $I(a) = \text{lím}_{n\to\infty}(i(a_n)) = i(a)$, por definición de I, de donde $I(x) = i(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Supongamos ahora que existe otra inmersión isométrica $I' : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ tal que $I'(a) = i(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Sea $x \in \mathcal{X}$ arbitrario. Por $\mathcal{A}$ ser denso en $\mathcal{X}$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = x$. Como $I' : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es una inmersión isométrica, entonces tenemos que $f(x, x_n) = g(I'(x), I'(x_n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De lo anterior se sigue que $\text{lím}_{n\to\infty}(I'(x_n)) = I'(x)$, pues $\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = x$ implica que para todo $\varepsilon > \xi$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x, x_n) < \varepsilon$, $\forall n > N$, y por lo tanto, $g(I'(x), I'(x_n)) < \varepsilon$, $\forall n > N$. Además, $x_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De está manera;

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty}(I'(x_n)) = \lim_{n\to\infty}(i(x_n)) = I(x). \tag{4.44}$$

Lo anterior implica que $I'(x) = I(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, esto es, $I = I'$. Luego, la inmersión isométrica $I : (\mathcal{X}, f) \to (\mathcal{Y}, g)$ es única, y con éste último resultado queda demostrado el teorema. □

Si el teorema anterior lo aplicamos al caso de cuerpos métricos, entonces obtenemos un resultado muy importante, pues éste nos permitirá afirmar que cualquier cuerpo ordenado completo es único salvo ifomorfismo.

Teorema 4.2.6. *Sean $(\mathbb{K}, v_1)$ y $(\mathbb{L}, v_2)$ cuerpos métricos, con $(\mathbb{L}, v_2)$ completo. Además, sea $(\mathbb{A}, v_1)$ un subcuerpo denso del cuerpo métrico $(\mathbb{K}, v_1)$. Si la aplicación $i : (\mathbb{A}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ es una inmersión isométrica de cuerpos métricos tal que $i(\mathbb{A})$ es denso en $\mathbb{L}$, entonces existe una única isometría de cuerpos métricos $I : (\mathbb{K}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ tal que $I(a) = i(a)$, $\forall a \in \mathbb{A}$.*

Demostración. Sean $(\mathbb{K}, d_{v_1})$ y $(\mathbb{L}, d_{v_2})$ los espacios métricos inducidos por los cuerpos métricos $(\mathbb{K}, v_1)$ y $(\mathbb{L}, v_2)$. La inmersión isométrica de cuerpos métricos $i : (\mathbb{A}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ induce una inmersión isométrica de espacios métricos $i : (\mathbb{A}, d_{v_1}) \to (\mathbb{L}, d_{v_2})$, pues para $x, y \in \mathbb{A}$ arbitrarios se tiene que;

$$d_{v_1}(x,y) = v_1(x-y) = v_2(i(x-y)) = v_2(i(x)-i(y)) = d_{v_2}(i(x),i(y)). \tag{4.45}$$

En virtud del teorema 4.2.5 existe una única isometría de espacios métricos $I : (\mathbb{K}, d_{v_1}) \to (\mathbb{L}, d_{v_2})$ tal que $I(a) = i(a)$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Afirmamos que la isometría anterior induce una única isometría de cuerpos métricos $I : (\mathbb{K}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ tal que $I(a) = i(a)$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Primero probemos que $I : (\mathbb{K}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ es un monomorfismo. En efecto, si $x, y \in \mathbb{K}$, entonces existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathbb{A}, d_{v_2})$ tales que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ e $\lim_{n\to\infty}(y_n) = y$. Por el teorema 3.2.7,

$$I(x+y) = \lim_{n\to\infty}(i(x_n+y_n)) = \lim_{n\to\infty}(i(x_n)) + \lim_{n\to\infty}(i(y_n)) = I(x) + I(y). \tag{4.46}$$

Por lo tanto, $I(x+y) = I(x) + I(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{K}$. Razonando de la misma manera también podemos concluir que $I(xy) = I(x)I(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{K}$. Luego, $I : (\mathbb{K}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ es un homomorfismo de cuerpos. Además, la proposición 2.3.16 nos dice que $I : (\mathbb{K}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ es inyectiva, luego un monomorfismo.

Ahora, sea $x \in \mathbb{K}$ arbitrario. Como $I : (\mathbb{K}, d_{v_1}) \to (\mathbb{L}, d_{v_2})$ es una isometría de espacios métricos, entonces;

$$v_1(x) = v_1(x-\xi) = d_{v_1}(x,\xi) = d_{v_2}(I(x),I(\xi)) = v_2(I(x)-I(\xi)) = v_2(I(x)). \tag{4.47}$$

Por lo tanto, $I : (\mathbb{K}, v_1) \to (\mathbb{L}, v_2)$ es una única isometrìa de cuerpos métricos tal que $I(a) = i(a)$, $\forall a \in \mathbb{A}$. $\square$

El teorema anterior nos permite hacer una afirmación poderosa:

Teorema 4.2.7. *Dos cuerpos ordenados completos cualesquiera son isomorfos.*

Demostración. Sean $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ y $(\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ cuerpos ordenados completos arbitrarios. En virtud del teorema 4.2.5 y de la proposición 3.5.1 existe un subcuerpo denso $(\ \mathbb{Q}',\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ del cuerpo $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ isomorfo al cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. De manera análoga, podemos encontrar a un subcuerpo denso $(\ \mathbb{Q}'',\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ del cuerpo $(\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ también isomorfo al cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. Lo anterior implica la existencia de un isomorfismo de cuerpos ordenados $i : (\ \mathbb{Q},\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{Q}'',\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$, pues la relación de de isomorfismos es una relación de equivalencia. Por otro lado, el isomorfismo de cuerpos ordenados $i : (\ \mathbb{Q}',\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{Q}'',\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ es también una isometría de cuerpos métricos, ésto en virtud de la proposición 2.3.17. Vemos entonces que existe una inmersión isométrica $i : (\ \mathbb{Q}',\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$, donde el conjunto $i(\mathbb{Q}')$ es denso en $\mathbb{L}$. Así, el teorema 4.2.6 nos dice que existe una única isometría de cuerpos métricos $I : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ tal que $I(x) = i(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$. Por otro lado, sean $x, y \in \mathbb{K}$ arbitrarios tales que $x \leq y$. Luego, $y - x \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$, y por el teorema 4.2.4 existe $z \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$ tal que $y - x = z^2$. Además, $I(y-x) = I(y) - I(x) = I(z^2) = I(z)^2 \in \mathcal{P} \cup \{\xi\}$. Por lo tanto, $I(x) \leq I(y)$, lo cual implica que la aplicación $I : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ es un isomorfismo de cuerpos ordenados, como se quería demostrar. $\square$

Un caso concreto del teorema anterior es el siguiente resultado:

Teorema 4.2.8. *Todo cuerpo ordenado arquimediano* $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ *es isomorfo a un subcuerpo de algún cuerpo ordenado completo* $(\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$.

Demostración. El cuerpo $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ tiene inmerso a un subcuerpo denso $(\ \mathbb{Q}'\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ isomorfo al cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. También existe un subcuerpo denso $(\ \mathbb{Q}'',\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ del cuerpo $(\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ también isomorfo al cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales. Luego existe un isomorfismo de cuerpos ordenados $i : (\ \mathbb{Q}',\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{Q}'',\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ que también es una isometría de cuerpos métricos. En virtud del teorema 4.2.6

existe una única inmersión isométrica de cuerpos métricos $I : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ con $I : (\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ ) \to (\ I(\mathbb{K}),\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ claramente un isomorfismo de cuerpos métricos. □

El teorema anterior nos permite establecer otra característica de los cuerpos ordenados completos:

Teorema 4.2.9. *Todo desarrollo decimal es convergente en un cuerpo ordenado completo.*

Demostración. Sea $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ un cuerpo ordenado arquimediano en donde todo desarrollo decimal converge, y sea $(\ \mathbb{L},\ \oplus,\ \odot,\ \leq\ )$ un cuerpo ordenado completo. Por el teorema 4.2.8, $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Por otro lado, sea $x \in \mathbb{L}$ arbitrario. En virtud del teorema 3.2.6 podemos encontrar un desarrollo decimal convergente a x, y por lo tanto $x \in \mathbb{K}$. Luego, $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$, de donde $\mathbb{L} = \mathbb{K}$. □

El teorema anterior nos permite presentar otro concepto de cuerpo ordenado completo:

Definición 4.2.4. Un cuerpo ordenado $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es completo, si y sólo si, en él todo desarrollo decimal es convergente.

El siguiente resultado nos va a simplificar considerablemente el problema de construir un cuerpo ordenado completo, que por el teorema 4.2.7 sabemos que sería único salvo isomorfismo.

Teorema 4.2.10. *Sea $(\mathcal{X}, f)$ un espacio métrico y $(\mathcal{A}, f)$ un subespacio métrico denso en $(\mathcal{X}, f)$. Si toda sucesión de Cauchy en $(\mathcal{A}, f)$ es convergente en $(\mathcal{X}, f)$, entonces $(\mathcal{X}, f)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy definida en $(\mathcal{X}, f)$. Como el espacio métrico $(\mathcal{A}, f)$ es denso en $(\mathcal{X}, f)$, entonces para todo $\varepsilon > \xi$ y para cada $x \in \mathcal{X}$ existe $d \in \mathcal{A}$ tal que $f(x, d) < \varepsilon$. En particular, para $\varepsilon_0 = \zeta$ y para $x_0 \in \mathcal{X}$ existe $d_0 \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_0, d_0) < \zeta$. De la misma manera, para $\varepsilon_1 = \dfrac{\zeta}{2}$ y para $x_1 \in \mathcal{X}$ existe $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_1, d_1) < \dfrac{\zeta}{2}$. Si el proceso anterior lo seguimos haciendo de una manera indefinda, entonces podemos encontrar a una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en $(\mathcal{A}, f)$ y a una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $\varepsilon_n = \dfrac{\zeta}{n+\zeta}$ tal que $f(x_n, d_n) < \varepsilon_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En virtud de la proposición 3.2.4, la sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ξ. Luego, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{3} > \xi$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\zeta}{n+\zeta} < \varepsilon'$, $\forall n > N$. Además, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, y por lo tanto existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon'$, $\forall n, m > N'$. Si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces, $\forall n, m > N''$;

$$
\begin{aligned}
|d_n - d_m| &\leq |d_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - d_m| \\
&\leq \frac{\zeta}{n+\zeta} + \varepsilon' + \frac{\zeta}{m+\zeta} \\
&< 3\varepsilon' = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Luego, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|d_n - d_m| < \varepsilon$, $\forall n, m > N''$, es decir, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, y por hipótesis converge en $(\mathcal{X}, f)$. Sea $x \in \mathcal{X}$ el punto de convergencia de la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afirmamos que la sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es convergente a $x \in \mathcal{X}$. En efecto, para un $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$ existen $N, N' \in \mathbb{N}$ tales que $\dfrac{\zeta}{n+\zeta} < \varepsilon'$, $\forall n > N$, y $|d_n - l| < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Luego, si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces $\forall n > N''$;

$$
\begin{aligned}
|x_n - l| &\leq |x_n - d_n| + |d_n - l| \\
&\leq \frac{\zeta}{n+\zeta} + \varepsilon' \\
&< 2\varepsilon' = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall n > N''$, esto es, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in \mathcal{X}$, como se quería demostrar. □

Nota 4.2.3. Observemos que el teorema anterior es muy útil al momento de probar la completitud de algún espacio métrico $(\mathcal{X}, f)$, pues éste nos dice que sólo basta con probar la existencia de un subespacio métrico denso $(\mathcal{A}, f)$ tal que en éste toda sucesión de Cauchy sea convergente en $(\mathcal{X}, f)$, ignorando las demás sucesiones de Cauchy que puedan ser convergentes en $(\mathcal{X}, f)$. En otras palabras, el teorema anterior nos está diciendo que si existe tal subespacio denso en $(\mathcal{X}, f)$, entonces toda sucesión de Cauchy en $(\mathcal{X}, f)$ es convergente en él.

4.3. Contrucción de un cuerpo ordenado completo

Ya estamos listos para dar la construcción de un cuerpo ordenado completo, que por su unicidad salvo isomorfismo, llamaremos el cuerpo ordenado completo de los números reales, $\mathbb{R}$.

Definición 4.3.1. Sea $\mathbb{K}C$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy definidas en un cuerpo ordenado arquimediano arbitrario ($\mathbb{K}$, $+$, $\cdot$, $\leq$). En $\mathbb{K}C$ definimos la suma $(+)$ de sucesiones de Cauchy de la siguiente manera: para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$ arbitrarias, tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (+)\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El producto $\otimes$ de sucesiones de Cauchy estará definido de manera análoga: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$ arbitrarias, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \otimes (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observemos que en virtud del teorema 3.3.4 tenemos que la suma y el producto de sucesiones de Cauchy es otra sucesion de Cauchy. Luego, éstas operaciones definen en $\mathbb{K}C$ dos leyes de composición interna. No es díficil demostrar, que $\mathbb{K}C$, con éstas operaciones, tiene estructura de anillo conmutativo, asociato y con elemento unitario. Es claro que la sucesión nula $(\xi)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$ es el neutro en $(\mathbb{K}C, (+))$. Además, para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$ existe $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ (+)\ (-x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\xi)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$. También tenemos que elemento unitario en $(\mathbb{K}C, \otimes)$ es la sucesión $(\zeta)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$. Lo demás es rutina. Luego tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1. *La terna $(\mathbb{K}C, (+), \otimes)$ tiene estructura de anillo conmutativo, asociato y con elemento unitario, donde $(+)$ es la suma de sucesiones de Cauchy, y $\otimes$ es el producto de sucesiones de Cauchy.*

También es pura rutina demostrar lo siguiente;

Proposición 4.3.1. El conjunto $\mathbb{I}C_\xi$ de sucesiones de Cauchy convergentes a ξ es un ideal en el anillo $(\mathbb{K}C, (+), \otimes)$.

Teorema 4.3.2. *Si $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo, e I es un ideal en $(\mathbb{A}, +, \cdot)$, entonces la aplicación $\rho : (\mathbb{A}, +, \cdot) \to (\mathbb{A}/I, \oplus, \odot)$ definida como $\rho(x) = Nx$, $\forall x \in \mathbb{A}$ define un epimorfismo de $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ sobre $(\mathbb{A}/I, \oplus, \odot)$.*

Ya podemos demostrar que existe un cuerpo ordenado completo que es único salvo isomorfismo. El siguiente cuerpo será al que identificaremos con el cuerpo ordenado completo de los números reales, $\mathbb{R}$.

Teorema 4.3.3. *La terna $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo, donde $\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$ es el conjunto cociente generado por el subgrupo normal $\mathbb{I}C_\xi$, $\oplus$ es la suma de clases laterales en el conjunto cociente $\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$, y $\odot$ es el producto entre clases laterales de $\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$.*

Demostración. La terna $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$ tiene estructura de anillo conmutativo, asociativo y con elemento unitario, ésto en virtud del teorema anterior. Es claro que el elemento unitario en el anillo $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$ es la clase lateral $\mathbb{I}C_\xi(\zeta)_{n\in\mathbb{N}}$, y el elemento neutro en el grupo $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus)$ es la clase lateral $\mathbb{I}C_\xi$. Por otro lado, proposición 2.1.2 nos da que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$, entonces $\mathbb{I}C_\xi(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, donde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, si y sólo si, $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \xi$. En particular, $\mathbb{I}C_\xi(\zeta)_{n\in\mathbb{N}} = [(\zeta)_{n\in\mathbb{N}}]$. Ahora, sea $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi - \{\mathbb{I}C_\xi\}$ arbitraria. Por la proposición 3.2.12, para cualquier sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, existe una sucesión de inversos $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C - \mathbb{I}C_\xi$ definida como $z_n = \xi$, si $y_n = \xi$, y $z_n = y_n^{-1}$, si $y_n \neq \xi$. Los términos de la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $z_n = \xi$ tienen que ser finitos, pues de no ser así, entonces $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendría una subsucesión, donde todos sus términos son ξ, y por lo tanto convergente a ξ, una contradicción. Luego, existe una sucesión $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C - \mathbb{I}C_\xi$ definida como $z'_n = y_n^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \otimes (z'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\zeta)_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \odot [(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(\zeta)_{n\in\mathbb{N}}]$. De todo lo anterior podemos concluir que la terna $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo, como queríamos probar. □

Lo que sigue es dotar al cuerpo $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$ de una estructura de orden.

Definición 4.3.2. Diremos que una clase lateral $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$ es un elemento del conjunto $\mathcal{P}'$, si y sólo si, para cualquier $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, existe $c > \xi$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > c$, $\forall n > N$.

El conjunto $\mathcal{P}'$ es un subconjunto de elementos positivos del cuerpo $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$, como se demostrará a continuación:

Teorema 4.3.4. *La terna $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot)$ tiene estructura de cuerpo ordenado, donde su respectivo subconjunto de elementos positivos es el conjunto $\mathcal{P}'$.*

Demostración. (A) y (B) se cumplen trivialmente. Para demostrar (C), sea $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$ arbitraria. Si $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(\xi)_{n\in\mathbb{N}}]$, entonces cualquier $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ es convergente a ξ. Luego, para todo $\varepsilon > \xi$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| < \varepsilon$, $\forall n > N$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$. Luego existe $\varepsilon' > \xi$ y $N' \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces de lo anterior tenemos que $|y_n| < \varepsilon'$ y $|y_n| > \varepsilon'$, $\forall n > N''$, una contradicción. Por otro lado, si $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(\xi)_{n\in\mathbb{N}}]$, entonces cualquier sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ no es convergente a ξ. Por la proposición 3.2.11 existe $\varepsilon' > \xi$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| > \varepsilon'$, $\forall n > N$, o lo que es lo mismo, existe $\varepsilon' > \xi$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > \varepsilon'$ o $y_n < -\varepsilon'$, $\forall n > N$. Si tomamos el primer caso, entonces es claro que $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$, y si tomamos el segundo, entonces también es claro que $-[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$, pues $y_n < \varepsilon'$, es equivalente a tener $-y_n \geq \varepsilon'$. Lo que no puede ocurrir es que se den los dos casos a la vez, pues de ser así, entonces tendríamos que $y_n > \varepsilon'$ e $y_m < -\varepsilon'$, $\forall n, m > N$, de donde $|y_n - y_m| \geq 2\varepsilon' > \xi$, $\forall n, m > N$. Lo anterior no puede ocurrir, pues $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$. Concluimos que cualquier $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$, o $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(\xi)n \in \mathbb{N}]$, o $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$, o $-[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$, es decir, se satisface (C).

En virtud del teorema 1.2.4, el cuerpo $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot, \leq)$ es totalmente ordenado. Luego, es un cuerpo métrico con el valor absoluto definido el teorema 2.3.15, y por el teorema 2.3.18 también es un espacio métrico. Lo que sigue es demostrar que con la distancia inducida por su valor absoluto, el cuerpo ordenado $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot, \leq)$ es completo. □

Teorema 4.3.5. *La aplicación $i : (\mathbb{K}, +, \cdot, \leq) \to (\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot, \leq)$, donde $i(x) = [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$, $\forall x \in \mathbb{K}$ define un monomorfismo de cuerpos ordenados.*

Demostración. Es trivial que la aplicación i es un homomorfismo de cuerpos. Vamos a demostrar que la aplicación i es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{K}$ arbitrarios tales que $i(x) = i(y)$. Por la definición de i, $[(x)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y)_{n\in\mathbb{N}}]$, de donde es inmediato que la sucesión constante $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, y por la unicidad de límites, $x = y$. Por lo tanto, i es una aplicación inyectiva. Ahora vamos a probar que la aplicación i conserva el orden. Para ésto, supongamos que $x < y$, es decir, supongamos que $y - x \in \mathcal{P}$. Afirmamos que $[(y-x)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [(y-x)_{n\in\mathbb{N}}]$ arbitraria. Luego, para cada $\varepsilon > \xi$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - (y-x)| < \varepsilon$, $\forall n > N$. De la desigualdad $|x_n - (y-x)| < \varepsilon$ obtenemos que $-\varepsilon < x_n - (y-x) < \varepsilon$, en otras palabras, $x_n > (y-x) - \varepsilon$. Si dejamos fijo a un $\varepsilon' > \xi$ tal que $y - x > \varepsilon'$, entonces existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > (y-x) - \varepsilon'$, $\forall n > N'$, de donde $[(y-x)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{P}'$. Además, $[(y-x)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y)_{n\in\mathbb{N}}] - [(x)_{n\in\mathbb{N}}] = i(y) - i(x) \in \mathcal{P}'$. Por lo tanto, $i(x) < i(y)$. De todo lo anterior concluímos que la aplicación $i : (\mathbb{K}, +, \cdot, \leq) \to (\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, \oplus, \odot, \leq)$ define un monomorfismo de cuerpos ordenados.

Del teorema anterior obtenemos que la aplicación $i : (\mathbb{K}, +, \cdot, \leq) \to (i(\mathbb{K}), \oplus, \odot, \leq)$ define un isomorfismo de cuerpos ordenados, y por la proposición 2.3.17 también es una isometría de espacios métricos. Además, cualquier sucesión definida en $i(\mathbb{K})$ proviene de una sucesión definida en $\mathbb{K}$. En efecto, sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión definida en $i(\mathbb{K})$. La sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de clases de equivalencia de sucesiones constantes. Luego existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tal que $i(x_n) = [(x_n)_{n'\in\mathbb{N}}] = y_n$. Luego, cualquier sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $i(\mathbb{K})$ la podemos identificar con una sucesión $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$. □

Teorema 4.3.6. *El espacio métrico* $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, d)$ *es completo.*

Demostración. Primero vamos a demostrar que el subespacio $i(\mathbb{K})$ es denso en el espacio métrico $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, d)$ usando el Teorema 3.5.1. Para esto, sea $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$ arbitraria. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty}(i(x_n)) = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. En efecto, sea $[(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(\xi)_{n\in\mathbb{N}}]$ cualquiera. Luego existen $\varepsilon > \xi$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\varepsilon_n > \xi$, $\forall n > N$. Además, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}C$. Por lo tanto, para $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > \xi$ existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon'$, $\forall n > N'$. Si ponemos a $N'' = max\{N, N'\}$, entonces $\forall n, m > N''$;

$$\varepsilon_n - x_n + x_m > \varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon'. \tag{4.48}$$

Si dejamos fijo a x_n por un momento, entonces tenemos que existe $N'' \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon' > \xi$ tal que $\varepsilon_m - x_n + x_m > \varepsilon'$, $\forall m > N''$, en otras palabras, la clase $[(\varepsilon_m - x_n + x_m)_{m\in\mathbb{N}}] = [(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}] - i(x_n) + [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(\xi)_{n\in\mathbb{N}}]$. Por lo tanto, $i(x_n) - [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. También tenemos que $\forall n, m > N''$;

$$x_n - x_m + \varepsilon_m > \varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon'. \tag{4.49}$$

Luego, utilizando un razonamiento similar al anterior obtenemos la desigualdad $-[(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}] < i(x_n) - [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] < [(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, es decir, $|i(x_n) - [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]| < [(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. En resumen, para toda $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$ arbitraria, existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que $|i(x_n) - [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]| < [(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}], \forall n > N''$, esto es, $\lim_{n\to\infty}(i(x_n)) = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, con lo que concluímos que el subespacio $i(\mathbb{K})$ es denso en el espacio métrico $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, d)$. Por otro lado, como la aplicación i es una isometría de espacios métricos, entonces cualquier sucesión de Cauchy $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ definida en $i(\mathbb{K})$ proviene de una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en $\mathbb{K}$, y sabemos que $\lim_{n\to\infty}(i(x_n)) = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$. Luego, todas las sucesiones de Cauchy definidas en $i(\mathbb{K})$ son convergentes en $\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$, y por el teorema 4.2.10, el espacio métrico $(\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi, d)$ es completo. □

Conclusiones.

Se concluye que el sistema de números reales construido a partir de sucesiones de Cauchy de números racionales cumple todas las propiedades que el conjunto de los números reales definidos axiomáticamente. Como resultado del teorema anterior se obtiene que el cuerpo ordenado $(\ \mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \leq\ )$ es un cuerpo ordenado completo. Una vez establecida la definición del conjunto de los números reales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de numero racionales, se identifican los números reales como los limites de sucesiones de números racionales y se opera con el cuerpo ordenado completo de los números reales usual. Podemos hacer una clasificación de los números reales utilizando los desarrollos decimales de la siguiente manera:

En el teorema 4.1.4 demostramos que cualquier desarrollo decimal es convergente. Luego, cualquier desarrollo decimal es una sucesión de Cauchy. También demostramos en el teorema 4.1.3 que los desarrollos decimales exactos o periódicos son convergentes en el cuerpo ordenado arquimediano de los números racionales mientras que los desarrollos decimales inexactos no periódicos convergen en el conjunto de los números irracionales. Podemos tomar como representantes de los números racionales al conjunto formado por todos los desarrollos decimales exactos o periódicos y como representantes de los números irracionales al conjunto formado por todos los desarrollos decimales inexactos no periódicos.

Bibliografía

[1] Muñoz Q, José M. *Introducción a la teoría de conjuntos*, 2002. Panamericana, Formas e Impresos S.A.

[2] CHARLES C. PINTER. *A Book of Set Theory.*

[3] Luis R. Jiménez B. Jorge E. Gordillo A. Gustavo N. Rubiano O. *Teoría de números para principiantes*, 2004. Pro-Offset Editorial Ltda.

[4] I.N. Herstein. *Algebra moderna*, 1980. Editorial Trillas, S.A.

[5] John B. Fraleigh. *Algebra Abstracta; 3 ed*, 1982. Adison- Wesley Iberoamericana.

[6] Lima, Elon Lages. *Curso de análise; V.1. 14 ed*, 2017. Gian Calvi criação Visual Ltda. e Sérgio R. Vaz.

[7] Tom M. Apostol. *Cálculus; v.1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. 2 ed*, 1984. Editorial Reverté, S.A.

[8] Walter. Rudin. *Principios de Análisis Matemático; 3 ed*, 1980. Editorial McGraw Hill.

[9] Yu Takeuchi. *Sucesiones y series; tomo 1*, 1980. Editorial Limusa.

[10] Carlos Ivorra Castillo. *ANÁLISIS MATEMÁTICO.*

Lista de símbolos especiales

SÍMBOLO	SIGNIFICADO-PAGINA DE REFERENCIA
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\mathbb{P}$	Números pares
$\mathbb{P}'_{\mathbb{N}}$	Números impares
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{I}$	Números Irracionales
$\mathcal{P}(X)$	Partes del conjunto X (p2)
$\emptyset$	Conjunto vacío (p2)
$\#(X)$	Cardinal del conjunto X (p2)
X'_Y	Complemento del conjunto X respecto del conjunto Y (p3)
S_x	Conjunto de sucesiones de Cauchy convergentes a x (p4)
$\mathcal{R} : A \to B$	Relación binaria del conjunto A en el conjunto B (p6)
$C(\mathcal{R})$	Campo de una relación $\mathcal{R}$ (p6)
$D(\mathcal{R})$	Dominio de una relación $\mathcal{R}$ (p6)
$R(\mathcal{R})$	Recorrido de una relación $\mathcal{R}$ (p7)
$\mathcal{R}^{-1}$	Relación inversa (p7)
$[x]$	Clase de equivalencia del elemento x (p8)
$X/\mathcal{R}$	Conjunto cociente inducido por la relación $\mathcal{R}$ (p8)
$f : X \to Y$	Relación funcional de X en Y (p10)
I_X	Función identidad (p10)
$f^{-1} : Y \to X$	Función inversa (p10)
$f(A)$	Imagen directa del conjunto A mediante la función f (p11)
$f^{-1}(B)$	Imagen inversa del conjunto B (p11)
$x * y = z$	x operado con y mediante la ley de composición interna $*$ (p12)
$[*]$	Ley de composición interna por paso al cociente (p12)
$\backsim$	Equivalencia de números enteros, relación de equivalencia (p17)
$\oplus$ y $\odot$	Leyes de composición interna
$\sim$	Relación de congruencia módulo un subgrupo (p23)
Hx	Clase lateral derecha de x en H (p23)
AB	Producto entre conjuntos (p24)
$N \triangleleft G$	N subgrupo normal en G (p24)
$\circ$	Producto entre subconjuntos de un grupo G (p25)
$-x$	Inverso aditivo de un elemento x en un anillo (p26)
x^{-1}	Inverso multiplicativo de un elemento x en un anillo (p27)
ξ	Neutro aditivo en un anillo (p26)
ζ	Neutro multiplicativo en un anillo (p27)
I	Ideal bilateral en un anillo (p27)
$\cong$	Relación de isomorfismo (p30)
$\overline{m}$	Residuo de la división de m con p (p34)
$\mathcal{P}$	Conjunto de elementos positivos (p37)
$b = max\ \mathbb{X}$	Máximo de un conjunto $\mathbb{X}$ (p45)

$a = min\ \mathbb{X}$	Mínimo de un conjunto $\mathbb{X}$ (p45)
$\mathcal{C}_I(\mathbb{X})$	Conjunto de cotas inferiores de un conjunto $\mathbb{X}$ (p45)
$\mathcal{C}_S(\mathbb{X})$	Conjunto de cotas superiores de un conjunto $\mathbb{X}$
$s = Sup\ \mathbb{X}$	Supremo del conjunto $\mathbb{X}$ (p45)
$i = Inf\ \mathbb{X}$	Ínfimo del conjunto $\mathbb{X}$ (p45)
$\lvert x \rvert$	Valor absoluto del elemento x (p54)
$[x]$	Parte entera del elemento x (p60)
$\mathcal{F}(x) = x - [x]$	Parte fraccionaria del elemento x (p60)
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Sucesión (p66)
$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$	Subsucesión (p67)
$\text{lím}_{n\to\infty}(x_n) = l$	Límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (p69)
$c_n = [a_n, b_n]$	Sucesión de intervalos encajados (p96)
$\mathbb{K}C$	Conjunto de todas las sucesiones de Cauchy definidas en un cuerpo ordenado arquimediano $\mathbb{K}$ (p104)
$\mathbb{I}C_\xi$	Conjunto de sucesiones de Cauchy convergentes a ξ (p104)
$\mathbb{K}C/\mathbb{I}C_\xi$	Conjunto cociente generado por el subgrupo normal $\mathbb{I}C_\xi$ (p104)