Neiva, 25 de Enero

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

Los suscritos:

Laura Jimena Trujillo Nieva, con C.C. No. 1075.296.243,

Diego Alejandro Sánchez Chacón, con C.C. No.

1004.147.693.

Autores de la tesis y/o trabajo de grado titulado ESTRATEGIA METODOLÓGICA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE MATEMÁTICAS PARA OLIMPIADAS EN LOS GRADOS SEXTO Y SÉPTIMO presentado y aprobado en el año 2020 como requisito para optar al título de Licenciado en matemáticas.

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Laura Trujillo N.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Diego Alejandro Sánchez

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Estrategia Metodológica para la implementación de Matemáticas para Olimpiadas en los grados sexto y séptimo.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Trujillo Nieva	Laura Jimena
Sánchez Chacón	Diego Alejandro

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto
Gutiérrez Hoyos	Hernando

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2020 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 86

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas_X_ Fotografías___Grabaciones en discos___Ilustraciones en general___Grabados___ Láminas___Litografías___Mapas___Música impresa___Planos___Retratos___ Sin ilustraciones___Tablas o Cuadros_X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Portable Document Format

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés
1. Número racional	Rational Number
2. Número real	Real Number
3. Razones	Reasons
4. Proporciones	Proportions
5. Congruencia	Congruence
6. Progresiones	Proportions
7. Teoría de Números	Number theory
8. Criterios de divisibilidad	Divisibility Criteria

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

La solución de problemas es tan antigua como la Matemática misma y hace parte del aprendizaje significativo de la disciplina. Los programas de Olimpiadas en Colombia han sido liderados por la Universidad Antonio Nariño desde finales de la década de los 70 del siglo pasado. Esa institución de educación superior ha publicado bastante literatura sobre el tema, en forma de folletos, cartillas y pequeños libros los cuales han sido tenidos en cuenta para la elaboración de este trabajo de grado. El trabajo se compone de seis capítulos que fueron escogidos teniendo en cuenta los temas que comúnmente aparecen en los concursos de olimpiadas en el nivel elemental. Todos los capítulos tienen la misma estructura: se empieza con algunos conceptos de carácter intuitivo (no aparecen definiciones demasiado rigurosas), un listado de resultados elementales sobre cada tema (No aparecen demostraciones) y ejercicios resueltos. Es de resaltar que la gran mayoría de los problemas presentados en este trabajo han sido seleccionados de temas de olimpiadas ya realizadas.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Problem solving is as old as mathematics itself and is part of the meaningful learning of the discipline. The Olympics programs in Colombia have been led by the Antonio Nariño University since the late 1970s. This higher education institution has published a lot of literature on the subject, in the form of brochures, primers and small books which have been taken into account for the preparation of this degree work. The work consists of six chapters that were chosen taking into account the themes that commonly appear in Olympic competitions at the elementary level. All the chapters have the same structure: it begins with some intuitive concepts (too rigorous definitions do not appear), a list of elementary results on each topic (no demonstrations appear) and solved exercises. It is noteworthy that the vast majority of the problems presented in this work have been selected from topics of Olympics already held.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Julio Cesar Duarte

Firma:

Nombre Jurado: Augusto Silva Silva.

Firma:

Nombre Jurado: Hernando Gutiérrez Hoyos.

Firma:

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Estrategia Metodológica para la implementación de Matemáticas para Olimpiadas en los grados sexto y séptimo

Laura Jimena Trujillo Nieva
Diego Alejandro Sánchez Chacón

Neiva, Huila
2020

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Estrategia Metodológica para la implementación de Matemáticas para Olimpiadas en los grados sexto y séptimo

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Laura Jimena Trujillo Nieva
20122113053
Diego Alejandro Sánchez Chacón
20141127223

Neiva, Huila
2020

Jefe de Programa
Doctor Julio César Duarte Vidal

Asesor
Magister Augusto Silva Silva

Segundo Lector
MSc.

Nota de aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseamos expresar nuestro eterno agradecicimiento a Dios, ya que este trabajo de grado ha sido una bendición en todo sentido. A los miembros de nuestras familias quienes nos han brindado su apoyo en los momentos más díficiles, especialmente a nuestros padres, esposa e hijo porque con ellos compartimos una ilusión común: culminar este trabajo de grado, tarea que también ha sido de ellos.

A nuestros profesores, por ser nuestros guías y transmitir sus conocimientos y experencias las cuales serán de suma importancia en nuestro desempeño profesional.

A nuestros compañeros quienes nos brindaron la oportunidad de compartir sus vivencias y su vida durante esta etapa de permanencia en la universidad.

Al profesor Augusto Silva Silva, quien se desempeñó como asesor de este trabajo de grado. Gracias por la confianza que nos brindó, por su apoyo, dedicación, paciencia y por el respeto a nuestras ideas.

A todos, muchas gracias.

Laura Jimena Trujillo Nieva.
Diego Alejandro Sánchez Chacón.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado, llamado Estrategia Metodológica para la implementación de Matemáticas para Olimpiadas en los grados sexto y séptimo, hace una contribución para mejorar el aprendizaje significativo de los jóvenes de sexto y séptimo grado de las instituciones educativas públicas y privadas de nuestra región.

Las estadísticas muestran que el 80 % de los estudiantes que abandonan su formación universitaria, de carreras donde la matemática es el componente fundamental, lo hacen por falta de bases sólidas en su formación inicial. Esta situación se debe a varias razones entre las cuales se destaca la falta de interés de los estudiantes por recibir la formación en matemática al percibirla como una ciencia desconectada de la vida diaria, asequible solo para estudiantes destacados y de la cual puede prescindirse sin mayores consecuencias.

A pesar de lo mencionado anteriormente, es importante resaltar que existen muchos jóvenes con excelente disposición hacia las matemáticas, con habilidades excepcionales para resolver problemas , los cuales deben ser cuidadosamente direccionados en su formación para motivarlos para que a futuro se hagan verdaderos profesionales de las Matemáticas.

La solución de problemas es tan antigua como la Matemática misma y hace parte del aprendizaje significativo de la disciplina. Los programa de Olimpiadas en Colombia han sido liderados por la Universidad Antonio Nariño desde finales de la década de los 70 del siglo pasado. Esa institución de educación superior ha publicado bastante literatura sobre el tema, en forma de folletos, cartillas y pequeños libros los cuales han sido tenidos en cuenta para la elaboración de este trabajo de grado.

El trabajo se compone de seis capítulos que fueron escogidos teniendo en cuenta los temas que comunmente aparecen en los concusros de olimpiadas en el nivel elemental. Todos los capítulos tienen la misma estructura: se empieza con algunos conceptos de caracter intuitivo (no aparecen definiciones demasiado rigurosas), un listado de resultados elementales sobre cada tema (No aparecen demostraciones) y ejercicios resueltos. Es de resaltar que la gran mayoría de los problemas presentados en este trabajo han sido seleccionados de temas de olimpiadas ya realizadas.

Los capítulo son:

- **Capítulo I:** Razones y Proporciones.Se hace énfasis en el principio fundamental de las proporciones, sus propiedades básicas y en las magnitudes proporcionales.
- **Capítulo II:** Semejanza, Congruencia y Transformaciones de Figuras Planas. El tema

central de este capítulo es la semejanza y congruencia de triángulos incluyendo los criterios de semejanza de triángulos.

- **Capitulo III:** Progresiones. Se introducen los conceptos de progresión aritmética y progresión geométrica; se enuncian sus propiedades básicas más elementales y se definen los conceptos de media aritmética y media geométrica.
- **Capítulo IV:** Áreas. A partir del área del cuadrado se establecen las fórmulas para el área de los rectángulos, los triángulos, los trapecios y algunos cuadriláteros. Se presentan además algunos resultados elementales que relacionan las áreas con las razones y proporciones.
- **Capítulo V:** Teoría de Números. Aparecen los siguientes temas: múltiplos y divisores, criterios de divisibilidad, números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- **Capítulo VI:** Banco de Preguntas. Este capítulo incluye aproximadamente 40 problemas relacionados con todos los temas del trabajo los cuales pueden usarse para jornadas de entrenamiento y preparación para Olimpiadas.

JUSTIFICACIÓN

La elaboración de este Trabajo de Grado se justifica por las siguientes razones:

1. La resolución de problemas es el motor que dinamiza el desarrollo, eseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho de otra manera, la solución de problemas es un factor decisivo en la producción de conocimiento matemático.

2. La estrategia de implementar Olimpidas de Matemáticas, desde la formación inicial del estudiante, es un buen pretexto para lograr que los niños y jóvenes desarrollen competencias matemáticas significativas desde sus primeros años de formación.

3. La Olimpiadas de Matemáticas permiten conseguir en los jóvenes y niños buenos niveles de motivación hacia las matemáticas y verla como una disciplina útil e indescartable en la vida cotidiana.

4. La implementación de Olimpiadas permite descubrir niños y jóvenes talentosos en la solución de problemas y en el aprendizaje de las Matemáticas, los cuales deben ser tenidos en cuenta para direccionar su formación académica.

5. Los programas de Olimpiadas fomentan la convivencia, la solidaridad, el respeto, la superación y la persistencia. Valores de mucha trascendencia en la formación de todo ser humano.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL.

Motivar a los estudiantes de sexto y séptimo grado en la actividad de resolver problemas, tomándola como una dinámica que le permita aprender matemáticas, afianzar sus conocimientos, desarrollar su intelecto, apreciar la utilidad de las matemáticas y resolver problemas de la vida y de otras ciencias.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

1. Integrar grupos de estudiantes que tengan buenas capacidades en la solución de problemas para motivarlos a que se formen profesionalmente en el área de las matemáticas.
2. Preparar al estudiante para que pueda competir en pruebas matemáticas al interior de cada institución educativa y a nivel regional.
3. Crear una sana competencia por medio de OLIMPIADAS MATEMÁTICAS como estrategia metodológica.

METODOLOGÍA.

La implementación de un proyecto de Olimpiadas en una institución educativa puede hacerse siguiento las siguientes etapas.

a. Ambientación del proyecto.

b. Convocatoria amplia de participación.

c. Prueba exploratoria de diagnóstico.

d. Capacitación y entrenamiento.

e. Aplicación de la prueba.

f. Socialización de los resultados.

Índice general

Capítulo 1

RAZONES Y PROPORCIONES.

1.1. Generalidades.

Dos magnitudes m y n pueden compararse desde el punto de vista de su tamaño de dos maneras: restándolas ó dividiéndolas. Cuando se restan se establece en cuanto excede una magnitud a la otra y cuando se dividen se determina cuántas veces cabe la una en la otra.

Definición 1: Sí m, n son dos magnitudes, la diferencia indicada $m-n$ es una razón aritmética y el cociente indicado $\frac{m}{n}$ es una razón geométrica. En ambos casos m es el antecedente y n es el consecuente.
La diferencia $m-n$ puede escribirse $m :: n$, y , el cociente $\frac{m}{n}$ puede escribirse $m : n$

Así por ejemplo, la razón aritmética $5-2$, puede escribirse como $5 :: 2$ y la razón geométrica $\frac{2}{5}$ como $2 : 5$.

Definición 2: La igualdad de dos razones aritméticas es una proporción aritmética y la igualdad de dos razones geométricas es una proporción geométrica.

En las proporciones

$$a-b=c-d$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Los números a y d se llaman extremos y los números b y c medios.

1.2. Principio Fundamental de las Proporciones.

En toda proporción aritmética, la suma de los medios es igual a la suma de los extremos; en toda proporción geométrica el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Simbólicamente :

$$a - b = c - d \text{ equivale a : } a + d = b + c$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ equivale a : } a \cdot d = b \cdot c$$

El principio fundamental, significa que las proporciones pueden tratarse con los métodos corrientes del álgebra.

De ahora en adelante trataremos solo con proporciones geométricas, de manera que a tales proporciones geométricas la llamaremos simplemente proporciones.

Cuando se tenga la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ diremos que los números a, b , y , c, d son proporcionales.

1.3. Propiedades Básicas de la Proporciones.

Las proporciones tienen varias propiedades, entre las cuales, por su utilidad, destacamos las siguientes:

a. Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

b. Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

c. Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

En efecto:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ equivale a $a \cdot d = b \cdot c$

Dividiendo por ac, obtenemos: $\frac{a.d}{a.c} = \frac{b.c}{a.c}$

o sea $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ como se quería.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, adicionando uno en los dos términos de la igualdad obtenemos $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$
ó sea $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. La igualdad $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ se obtiene de manera similar.

Definición 3: Sí a, b, c son números positivos y $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, entonces b es la media geométrica de a y c.

Por el principio fundamentlal: $a \cdot c = b \cdot b$ ó $b^2 = a \cdot c$, lo cual equivale a $b = \sqrt{ac}$.

La media geométrica también se llama Media Proporcional.

1.4. Magnitudes Proporcionales.

Dos magnitudes son proporcionales, si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número. La proporcionalidad puede ser directa o inversa. Hay proporcionalidad directa, cuando al multiplicar una de las magnitudes por un número la otra queda multiplicada por el mismo número; hay proporcionalidad inversa, cuando al multiplicar una de las magnitudes por un número la otra queda dividida por el mismo número.

1.4.1. Magnitudes directamente proporcionales:

- La base de un rectángulo y su área: Si la base de un rectángulo se duplica, su área también se duplica.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \ ; \ A^* = \frac{(2b) \cdot h}{2} = b \cdot h \ ; \ A^* = 2A$$

- En un tiempo determinado (por ejemplo en 1 hora) la velocidad y el espacio recorrido: si la velocidad se triplica, el espacio recorrido también se triplica.

$$e = v \cdot t \ ; \ e^* = v(3t) \ ; \ e^* = 3(vt) = 3e$$

1.4.2. Magnitudes inversamente proporcionales:

- El número de obreros y el tiempo empleado en hacer una obra: si el número de obreros se duplica, el tiempo se reduce a la mitad.
- Cuándo el espacio es fijo (por ejemplo 100km) la velocidad es inversamente proporcional al tiempo.

Definición 4: Se llama tercera proporcional de dos números positivos a y b a un valor x que cumpla la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Definición 5: Se llama cuarta proporcional de tres números a,b y c, a un valor x que cumpla la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

Definición 6: Si a los segmentos a y b se corresponden con los segmentos c y d de tal manera que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se dice que dichos segmentos son proporcionales.

1.5. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 1. La razón geométrica de dos números es $\frac{13}{5}$ y su diferencia es 72. Hallar el número mayor.

Solución :

a: número mayor
b: número menor

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{13}{5}; \\
a - b &= 72 \\
\frac{a}{b} - 1 &= \frac{13}{5} - 1 \\
\frac{a-b}{b} &= \frac{13-5}{5} = \frac{8}{5} \\
\frac{72}{b} &= \frac{8}{5} \\
72 \cdot 5 &= 8 \cdot b \\
b &= 45
\end{aligned}
$$

Sabiamos qué:

$$
\begin{aligned}
a - b &= 72 \\
a &= 72 + b \\
a &= 72 + 45 \\
a &= 117
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el número mayor es 117.

Ejercicio 2. La edad del padre y de su hijo están en la relación 3 :1 . Sí el hijo tiene 15 años,¿Cuántos años tiene el padre?

Solución:

El enunciado permite escribir la siguiente proporción

$$3 : 1 = P : 15 \text{ ó } \tfrac{3}{1} = \tfrac{P}{15}$$

Por el principio fundamental:

$$3 \cdot 15 = P \cdot 1 \text{ ó } P = 45$$

El padre tiene 45 años.

Ejercicio 3. El largo y ancho de un rectágulo está en la relación 5:2, si el ancho tiene 14 cm, ¿Cuánto mide el largo?.

Solución:

Podemos escribir la proporción:

$$5 : 2 = L : 14 \text{ ó } \tfrac{5}{2} = \tfrac{L}{14}$$

Luego:

$$5 \cdot 14 = 2 \cdot L, \text{ así qué } L = 5 \cdot 7 = 35$$

El largo del rectángulo mide 35 cm.

Ejercicio 4. La razón de dos números es $\frac{8}{3}$ y su diferencia es 55 hallar los números.

Solución:

Sí x , y , y son los números podemos escribir:

$$\tfrac{x}{y} = \tfrac{8}{3} \text{ , y , } x - y = 55.$$

Entonces,

$$\frac{x}{y} - 1 = \frac{8}{3} - 1$$

O sea,

$$\frac{x-y}{y} = \frac{5}{3}$$

Cómo,

$$x - y = 55$$

Luego,

$$\frac{55}{y} = \frac{5}{3}$$

Y por el principio fundamental:

$$\begin{aligned} 5 \cdot y &= 55 \cdot 3 \\ 5 \cdot y &= 11 \cdot 5 \cdot 3 \\ y &= 33 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y = 33, x = 88$$

Capítulo 2

SEMEJANZA,CONGRUENCIA Y TRANSFORMACIONES DE FIGURAS PLANAS.

2.1. Semejanza.

En términos corrientes, dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Otra manera de expresar esta idea es diciendo que dos figuras son semejantes, si una de ellas es un modelo a escala de la otra. Por ejemplo, dos circunferencias son semejantes, dos cuadrados también lo son, dos triángulos equiláteros son semejantes, etc.

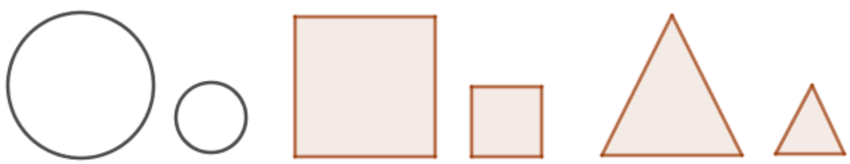


Figura 1. Sección 2.1

Teorema 1.(Teorema de THALES)

Sí tres o más paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

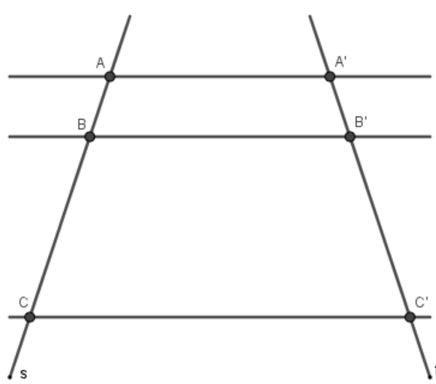


Figura 2. Sección 2.1

En la ilustración del teorema, s y t son las rectas tranversales; se han trazado además las paralelas AA', BB' y CC' . En estas condiciones valen las igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ , ó , } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Teorema 2. (De la Paralela): Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.

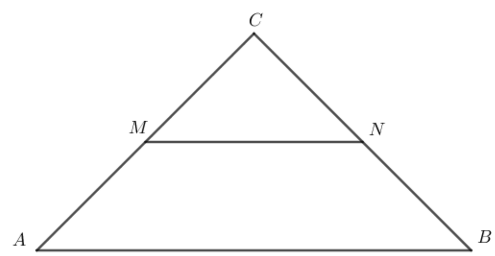


Figura 3. Sección 2.1

$\overline{MN}$ es la paralela al lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC . Entonces:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} \text{ , ó , } \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{NB}}$$

Este resultado que se deriva del Teorema de Tales tiene las siguientes consecuencias:

a. El recíproco se verifica: si un segmento divide a dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces es paralelo al otro lado.

b. El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a su mitad.

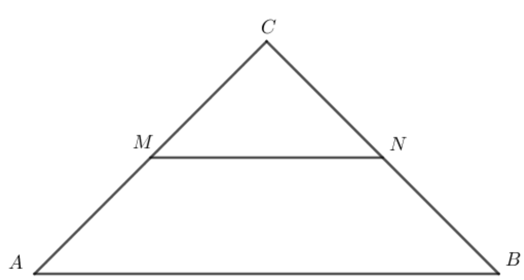


Figura 4. Sección 2.1

M es el punto medio de $\overline{AC}$,

N es el punto medio de $\overline{BC}$.

Entonces $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$ y además

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Teorema 3. (Propiedad de la Bisectriz de un Ángulo Interior de un Triángulo): La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

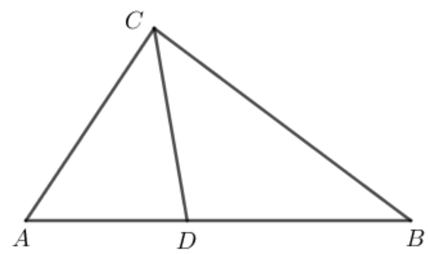


Figura 5. Sección 2.1

$\overline{CD}$ es la bisectriz de $\angle BCA$. Entonces:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} \text{ , ó , } \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

2.2. Semejanza de Triángulos.

Definición 1: Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados proporcionales. Si ABC y $A'B'C'$ son triángulos semejantes, escribimos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Definición 2: En dos triángulos semejantes, se llaman lados homólogos a los lados que se oponen a ángulos iguales.

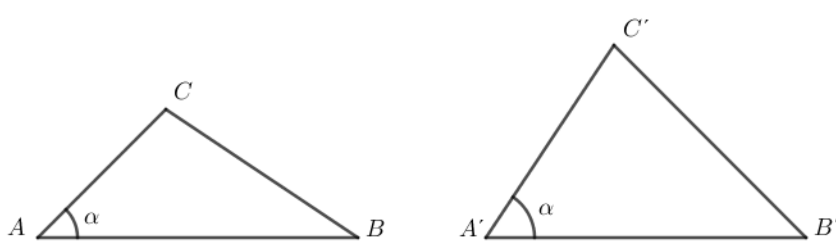


Figura 1. Sección 2.2

$\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ son lados homólogos, ambos son opuestos al ángulo $\propto$.

Teorema 4.(Teorema Fundamental de Existencia de Triángulos Semejantes) :

Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero.

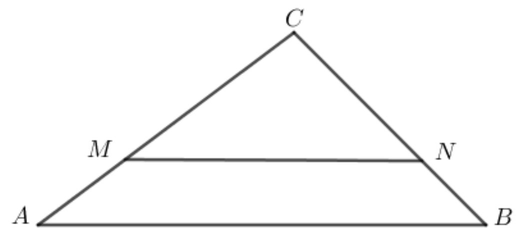


Figura 2. Sección 2.2

En el triángulo de la figura $\overline{MN}$ es paralelo a $\overline{AB}$. Entonces $\Delta ABC \sim \Delta MNC$.

El recíproco de este resultado también es verdadero: Sí dos triángulos son semejantes, uno de ellos puede obtenerse trazando una paralela a alguno de los lados en el otro triángulo.

2.2.1. Criterios de Semejanza:

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si tienen:

1. Dos ángulos respectivamente congruentes.
2. Dos lados proporcionales y congruente el ángulo comprendido entre ellos.
3. Los tres lados respectivamente proporcionales.

En el caso de los triángulos rectángulos, los criterios se reducen a: Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen:

1. Un ángulo agudo igual.
2. Los catetos proporcionales.
3. La hipotenusa y un cateto proporcionales.

Teorema 5: Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, las siguientes afirmaciones se verifican:

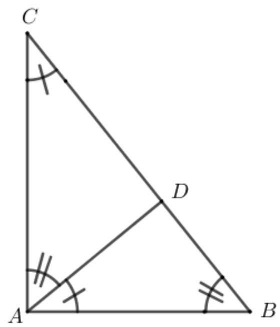


Figura 3. Sección 2.2

a. Los triángulos rectángulos resultantes son semejantes entre sí y semejantes al triángulo dado.
b. La altura es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.
c. La altura es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.
d. Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
e. La razón de los cuadrados de los catetos es igual a la razón de los segmentos que la altura determina en la hipotenusa.

En Simbolos:

a. $ABC \sim ADC \sim ADB$

b. $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad \left(\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}\right)$

c. $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \qquad \left(\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}\right)$

d. $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \qquad \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$

e. $\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$

2.3. Congruencia.

En el lenguaje corriente, dos figuras geométricas son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Esto quiere decir que dos figuras son congruentes si al sobreponerlas, coinciden exactamente o que la una es copia de la otra a escala 1:1. Dos cuadrados de lado 1 son congruentes, dos triángulos rectángulos de catetos iguales son congruentes, etc.

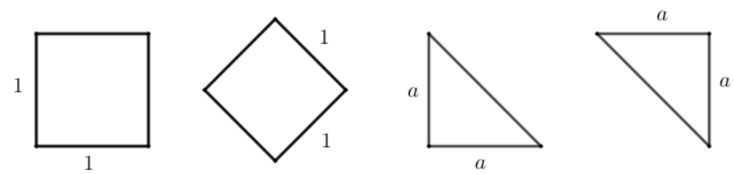


Figura 1. Sección 2.3

Debe destacarse que si dos figuras son congruentes entonces son semejantes, pero si dos figuras son semejantes, no necesariamente son congruentes. Por ejemplo, dos cuadrados de lados 3 y 4 respectivamente son semejantes, pero no son congruentes.

2.4. Congruencia de Triángulos.

Definición 3 : Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices de manera que cada par de lados y ángulos correspondientes son congruentes.

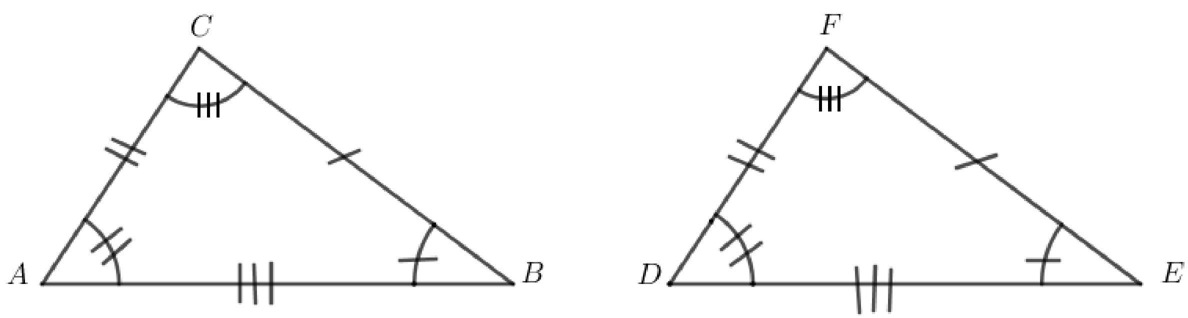


Figura 2. Sección 2.4

Sí $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, DEF$ son congruentes escribimos:

$$\triangle\, ABC \cong \triangle\, DEF$$

2.4.1. Criterios de Congruencia de Triángulos:

Dos tríangulos, dígamos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, CDE$ son congruentes sí:

1. Tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también congruente. Este criterio se conoce como LAL.
2. Tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido también congruente. Se conoce este criterio como ALA.
3. Tienen los tres lados congruentes. Es el criterio LLL.

2.5. Transformación de Figuras Planas.

Reflexiones: Sea l una recta del plano y G es una figura geométrica situada a un lado de l; si asumimos a l como un espejo, la imagen G' de G, situada del otro lado de l, es la **Reflexión** de G con respecto a l.

El siguiente gráfico ilustra esta idea para el caso en que G es un triángulo.

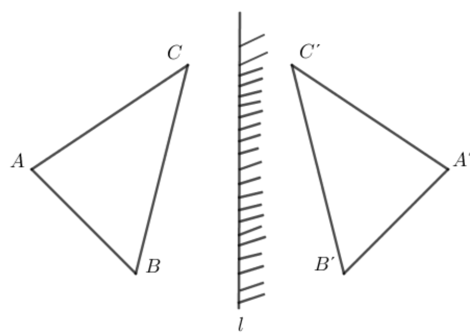


Figura 3. Sección 2.5

Con mayor precisión se tienen la siguiente,

Definición 4 : En un plano, una Reflexión sobre una recta l es una Transformación que a cada punto P del plano le hace corresponder otro punto P' del plano de la siguiente manera:

1. Sí P está en l, $P' = P$
2. Sí P no está en l, entonces l es la mediatríz del segmento. $\overline{PP'}$

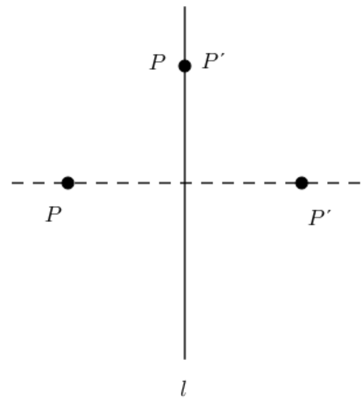


Figura 4. Sección 2.5

Diremos que P' es la imágen de P ó que P es la preimagen de P'. De acuerdo a la definición, la imagen de un segmento es otro segmento de igual longitud y la de un ángulo es otro ángulo de igual medida. Luego, la imagen de un triángulo, es otro triángulo congruente con el primero.

Traslaciones: Sí $\overrightarrow{AA'}$ es una flecha (un vector) y G es una figura del plano, la traslación de G según la flecha $\overrightarrow{AA'}$ es otra figura G', obtenida "deslizando"la figura G según la dirección y longitud de dicha flecha.

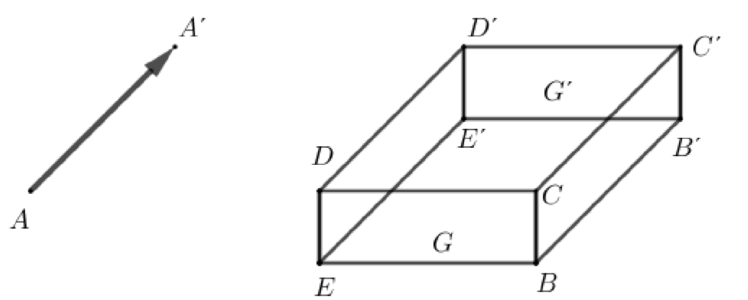


Figura 5. Sección 2.5

Se tiene la siguiente,

Definición 5 : Dada una flecha $\overrightarrow{AA'}$, la imagen trasladada de un punto P según la flecha $\overrightarrow{AA'}$ es el punto P' dónde:

1. $m(\overline{AA'}) = m(\overline{PP'})$, ó , $\overline{AA'} = \overline{PP'}$
2. Las flechas $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{PP'}$ tienen la misma dirección.

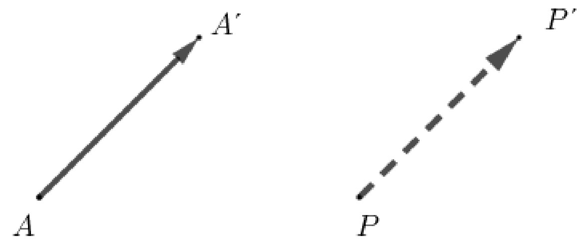


Figura 6. Sección 2.5

Rotaciones: Una rotación con centro O y ángulo α, transforma cada punto P del plano en otro punto P' de la siguiente manera:

1. Sí $P = O$, entonces $P' = O$.
2. Sí $P \neq O$, entonces $\overline{P'}\ \overline{O} = \overline{PO}$, ó , mejor $\overline{P'O} \cong \overline{PO}$ y la medida del ángulo POP' es α.

P' es la imagen rotada de P.

El siguiente diagrama ilustra las rotaciones:
Supongamos qué $\alpha = 45^o$

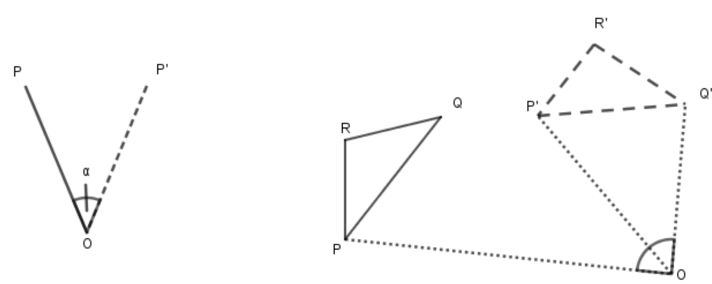
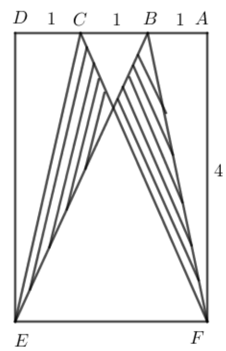


Figura 7. Sección 2.5

Debe tenerse: $\angle POP' = \angle QOQ' = \angle ROP' = \alpha = 45^o$;$\overline{PO} = \overline{P'O}$; $\overline{QO} = \overline{Q'O}$; $\overline{RO} = \overline{R'O}$.
La imagen de $\triangle\ PQR$ es el $\triangle\ P'Q'R'$.

2.6. Ejercicios Resueltos:

Ejercicio 1: El rectángulo $DEFA$, tiene dimensiones $DE = 4$, $DA = 3$ con $DC = CB = BA = 1$. Hallar el área sombreada (Alas de Murciélago).



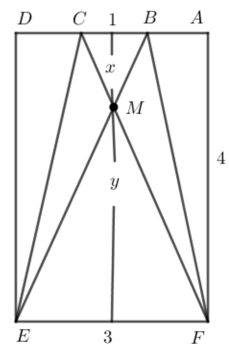


Figura 1. Sección 2.6

Solución :

$\Delta CBM \sim \Delta EMF$ **(Definición 1. Sección 2.2)**

Luego: $\frac{x}{1} = \frac{y}{3}$ ó $x = \frac{y}{3}$. Entonces: $x + y = \frac{y}{3} + y$

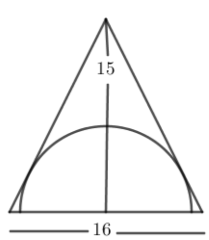
Así que: $4 = \frac{4y}{3}$, en consecuencia $y = 3, x = 1$

El área del triángulo BMF es:

$$\begin{aligned} A(\Delta BMF) &= A(\Delta CAF) - A(\Delta CBM) - A(\Delta BAF) \\ &= \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} \\ &= 4 - \frac{1}{2} - 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

El área sombreada es: $2 \cdot a(\Delta BMF) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

Ejercicio 2:



Un semicirculo está inscrito en un triángulo isósceles con base 16 y altura 15 de manera que el diámetro del semicirculo está contenido en la base del triángulo, como se muestra en la figura.¿Cuál es el radio del semicirculo?

$$(2.1)$$

Solución:

Trazamos el radio del círculo que es perpendicular al lado BC determinando el punto M. Los triángulos rectángulos ΔOBC, ΔOBM y ΔOMC son semejantes (Definición 1. Sección 2.2). La hipotenusa del ΔOBC es $h^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, así que $h = 17$. Luego:

$\frac{17}{8} = \frac{15}{x}$, $x = \frac{8{,}15}{17} = \frac{120}{17}$

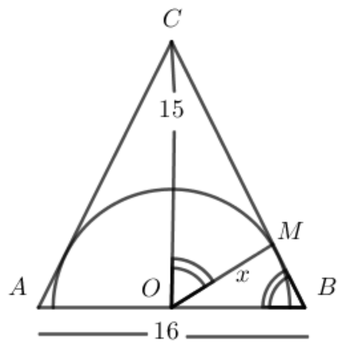


Figura 2-3. Sección 2.6

El radio del circulo es $\frac{120}{17}$

Ejercicio 3: Si las medidas en grados de los ángulos de un triángulo están en razón 3 : 3 : 4; ¿Cuál es la medida en grados del mayor ángulo del triángulo?

Solución :

Si α, β y θ son los ángulos.

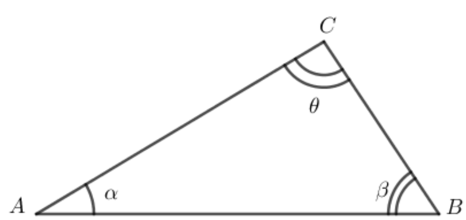


Figura 4. Sección 2.6

Puede escribirse la cadena de igualdades:

$$\frac{3}{\alpha} = \frac{3}{\beta} = \frac{4}{\theta}$$

De donde obtenemos que $\alpha = \beta$ y como $3 \cdot \theta = 4 \cdot \beta = 4 \cdot \alpha$,y , además,

$$
\begin{aligned}
180^{o} &= \alpha + \beta + \theta \\
&= \alpha + \alpha + \theta \\
&= 2\alpha + \theta \\
&= \theta + \frac{3}{2}\theta \\
&= \frac{5}{2}\theta
\end{aligned}
$$

Luego $\theta = \frac{2 \cdot 180^{o}}{5} = 2 \cdot 36^{o} = 72^{o}$

Ejercicio 4: En el triángulo rectángulo ABC, $AC = 12$, $BC = 5$ y el ángulo C es recto, tal como se muestra, hay un semicirculo inscrito en el triángulo. ¿Cuál es el radio del semicirculo?

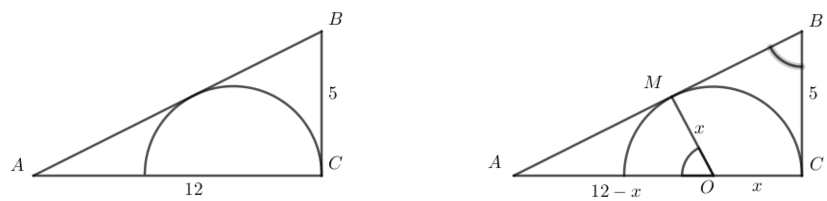


Figura 5. Sección 2.6

Solución:

$$\overline{AB}^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

Luego

$$\overline{AB} = 13 \text{ Como } \Delta ABC \sim \Delta AOM, \textit{ (Definición 1. Sección 2.2).}$$

Entonces:

$$\tfrac{13}{12-x} = \tfrac{5}{x} \text{ ó } 13 \cdot x = 60 - 5x$$

Luego: $18x = 60$; $x = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$

Ejercicio 5: Dos circulos congruentes con centros en los puntos A y B pasan cada uno por el centro del otro. La línea recta que contiene a A y B se extiende para intersectarse con los círculos en los puntos C y D. Los dos círculos se intersectan en dos puntos uno de los cuales es E. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo CED?

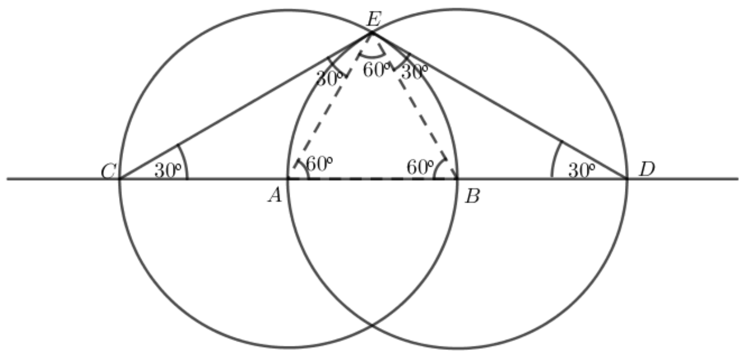


Figura 6. Sección 2.6

Solución:

El triángulo ΔEBA es equilátero, luego:

$$\measuredangle AEB = \measuredangle EBA = \measuredangle EAB = 60^{o}$$

Y, además, los tríangulos CEB y DEA son rectángulos. (Los radios son perpendiculares).

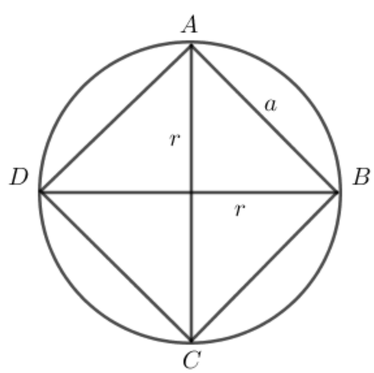
En consecuencia:

$$\measuredangle CEA = \measuredangle BED = 30^{o}$$

Por lo tanto,

$$\measuredangle CED = 30^{o} + 60^{o} + 30^{o} = 120^{o}$$

Ejercicio 6: ¿Cuál es la proporción entre el área de un cuadrado inscrito en un círculo y el área de un cuadrado inscrito en uno de sus semicírculos?



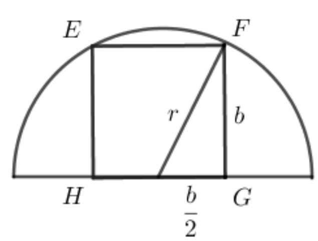


Figura 7. Sección 2.6

Solución:

Para el cuadrado $ABCD$:

$$a^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

Para el cuadrado $EFGH$:

$$r^2 = b^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{5b^2}{4}$$

Luego:

$$b^2 = \frac{4r^2}{5}.$$

La razón pedida es:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2r^2}{\frac{4r^2}{5}} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 7: En la figura E, F, G y H son los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$.

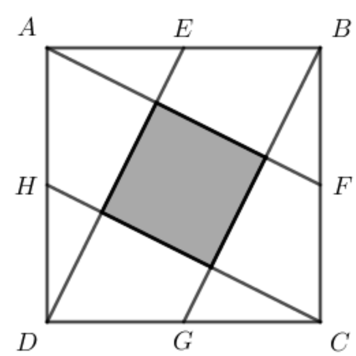


Figura 8. Sección 2.6

a. ¿En qué proporción está el área del cuadrado sombreado con respecto al área del cuadrado grande?

b. ¿En qué proporción está el área del triángulo BGC con respecto al área del cuadrado grande?

Solución:

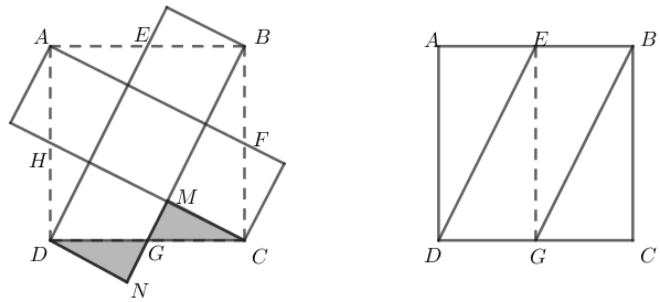


Figura 9. Sección 2.6

a. Los triángulos rectángulos GND y GMC son congruentes, pues sus tres ángulos son iguales y su hipotenusa también. Luego el cuadrado grande es equivalente a 5 cuadrados sombreados. La razón pedida es $\frac{1}{5}$.

b. El cuadrado grande es igual a 4 triángulos congruentes con BCG. La razón es $\frac{1}{4}$.

Ejercicio 8: Sea A el área de un triángulo con lados de longitudes 25, 25 y 30. Sea B el área de un triángulo con lados de longitudes 25, 25 y 40 ¿Cuál es la relación entre A y B?

Solución: Los dos triángulos son isósceles, tomando como base el lado mayor en cada triángulos tenemos:

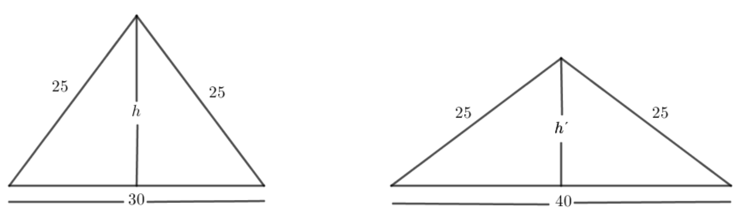


Figura 10. Sección 2.6

$h^2 = 25^2 - 15^2 = 400$, luego $h = 20$

$h'^2 = 25^2 - 20^2 = 225$, luego $h'^2 = 15$

$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 20}{\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 15} = \frac{60}{60} = 1$; la relación es $A : B = 1 : 1$.

Ejercicio 9: Hay 270 estudiantes en una escuela de secundaria de Moniquirá, siendo la proporción entre chicos y chicas 5 : 4. Hay 180 estudiantes en una escuela de secundaria en Barbosa, siendo la proporción entre chicos y chicas 4 : 5. Las dos escuelas organizan una fiesta a la cual asisten todos los estudiantes de las dos escuelas. ¿Qué fracción de los estudiantes en la fiesta son chicas?

Solución:

En Moniquirá: $\frac{n}{m} = \frac{5}{4}$. En donde n: chicos, m: chicas.

Con $n + m = 270$. Luego:

$$\frac{n}{m} + 1 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$

Así que:

$$\frac{n+m}{m} = \frac{9}{4} \text{ ó } \frac{270}{m} = \frac{9}{4} \text{ ó } 9m = 270 \cdot 4$$

Entonces:

$$m = 120$$

En la escuela de Moniquirá 120 estudiantes son chicas y 150 son chicos.

En Barbosa:

$$\frac{n}{m} = \frac{4}{5} \text{ con } n + m = 180$$

Luego:

$$\frac{n}{m} + 1 = \frac{4}{5} + 1, \text{ ó } \frac{m+n}{m} = \frac{9}{5} \text{ ó } \frac{180}{m} = \frac{9}{5}$$

Entonces: $9m = 180 \cdot 5$, así que $m = 100$

En la escuela de Barbosa: 80 son chicos y 100 son chicas.

En la fiesta hay: $100 + 120 = 220$ chicas y $80 + 150 = 230$ chicos.

La fracción pedida es: $\frac{220}{450} = \frac{22}{45}$.

Capítulo 3

PROGRESIONES.

3.1. Progresiones Aritméticas.

Una progresión aritmética es una secuencia o listado de términos formado de la siguiente manera: el primer término de la lista es cualquier número; todos los términos de la lista a partir del segundo se hallan sumándole al anterior un número fijo llamado razón o la diferencia de la progresión.

La secuencia de términos $3, 5, 7, 9, 11$ es una progresión aritmética: El primer término es 3 y cada término a partir del segundo se obtiene del anterior sumándole 2: $5 = 3 + 2$; $7 = 5 + 2$; $9 = 7 + 2$, y $11 = 9 + 2$. La diferencia o razón de esta progresión aritmética es 2.

3.1.1. Propiedades de las Progresiones Aritméticas:

Las progresiones aritméticas tienen muchas propiedades entre las cuales destacamos las siguientes.

1. En toda progresión aritmética la diferencia o razón se encuentra restando de un término cualquiera el anterior.
2. En toda progresión aritmética, cada término a partir del segundo, es igual al primer término más la razón multiplicada por el número de términos que le preceden.

$$
\begin{aligned}
\textit{Primer término} &: a_1 = a\\
\textit{Segundo término} &: a_2 = a_1 + d = a + d\\
\textit{Tercer término} &: a_3 = a_2 + d = a + d + d = a + 2.d\\
\textit{Cuarto término} &: a_4 = a_3 + d = a + 2.d + d = a + 3.d\\
\textit{Quinto término} &: a_5 = a_4 + d = a + 3.d + d = a + 4.d\\
&.\\
&.\\
&.\\
n\textit{- ésimo término} &: a_n = a + (n-1).d
\end{aligned}
$$

Nota: d es la diferencia o razón.

3. La suma de todos los términos de la progresión aritmética 1,2,3,...,n es el útimo número de la progresión n, multiplicado por el siguiente $(n+1)$ dividido entre 2.

Los siguientes ejemplos, ilustran estas propiedades:

a). Dada la progresión :

$$2, 4, 6, 8, 10.$$

Para obtener la diferencia de la progresión, basta con tomar un término de la progresión que no sea el primer término y restarlo con el término que lo antecede.

Veamos cómo se hace:

$$
\begin{aligned}
10 - 8 &= 2\\
8 - 6 &= 2\\
6 - 4 &= 2\\
4 - 2 &= 2
\end{aligned}
$$

Por lo que podemos observar que la diferencia o razón de la progresión es 2.

b). Si tenemos la progresión:

$$4, 9, 14, 19, 24, 29.$$

Para obtener la diferencia de la progresión, basta con tomar un término de la progresión que no sea el primer término y restarlo con el término que lo antecede.

Veamos cómo se hace:

$$\begin{aligned} 9-4&=5\\ 14-9&=5\\ 19-14&=5\\ 24-19&=5\\ 29-24&=5 \end{aligned}$$

Por lo que podemos observar la diferencia de la progresión es 5.

c). Consideremos la progresión 1, 2, 3, ...n para varios valores de n:

Sí $n=2$: 1, 2 la suma de sus términos es:

$$S=1+2=3$$

Con la fórmula dada el valor de la suma es:

$$\begin{aligned} S&=\frac{2\cdot 3}{2}=3\\ S&=1+2\\ S&=2+1 \end{aligned}$$

$$\overline{2S=3+3.\text{ Luego, } S=\tfrac{2\cdot 3}{2},}$$

Si $n=3$: 1, 2, 3, la suma de sus términos es:

$$S=1+2+3=6$$

Con la fórmula dada la suma es:

$$\begin{aligned} S&=\frac{3\cdot 4}{2}=6\\ S&=1+2+3\\ S&=3+2+1 \end{aligned}$$

$$\overline{2S=4+4+4.\text{ Luego, } S=\tfrac{3\cdot 4}{2},}$$

Si $n=4$: 1, 2, 3, 4, la suma de sus términos es:

$$S=1+2+3+4=10$$

Con la fórmula dada es:

$$S = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$S = 4 + 3 + 2 + 1$$

$$2S = 5 + 5 + 5 + 5. \text{ Luego, } S = \tfrac{4 \cdot 5}{2}$$

De forma general la suma de sus términos es:

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) ... + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$
$$2S = n(n+1)$$

Luego:

$$S = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

Ejemplo 1: Calcular la suma de los primeros 25 números naturales.

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 25$$
$$S = 25 + 24 + 23 + ... + 1$$

$$2S = 26 + 26 + 26 ... + 26$$
$$S = \tfrac{25 \cdot 26}{2} = 325$$

3.2. Medios Aritméticos.

Se llaman **Medios Aritméticos** a los términos de una progresión aritmética que se hallan entre el primero y el último término de la progresión. Interpolar medios aritméticos entre dos números dados es formar una progresión aritmética cuyos extremos sean los dos números dados.

Ejemplo 2: Entre 2 y 26, interpolar 2 medios aritméticos.

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2 + d \\
a_3 &= 2 + 2d \\
a_4 &= 26 = 2 + 3d \\
\textit{Luego, } d &= 8.
\end{aligned}
$$

Los medios aritméticos son 10 y 18. La progresión es:

$$2,\ 10,\ 18,\ 26.$$

Ejemplo 3: Entre 50 y 80, interpolar cinco medios aritméticos.

La progresión va a tener 7 términos, el primero es 50 y el último 80. Luego, debe ser:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 50 \\
a_2 &= 50 + d \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_7 &= 50 + 6d = 80 \\
6d &= 80 - 50 \\
d &= \frac{30}{6} = 5
\end{aligned}
$$

La diferencia o razón de la progresión es 5.

La progresión es entonces:

$$50\ ,\ 55\ ,\ 60\ ,\ 65\ ,\ 70\ ,\ 75\ ,\ 80.$$

Los cincos medios aritméticos son:

$$55\ ,\ 60\ ,\ 65\ ,\ 70\ ,\ 75.$$

3.3. Progresiones Geométricas.

Una **Progresión Geométrica** es una secuencia o listado de términos obtenidos de la siguiente manera: el primer término de la lista es cualquier número; todos los términos de la lista a partir del segundo se hallan multiplicando el anterior por un número fijo llamado la razón de la progresión.

La secuencia de términos 5, 10, 20, 40 es una progresión geométrica: el primer término es 5; cada término a partir del segundo, se obtiene multiplicando el anterior por 2 : 10 = 5. 2 : 20 = 10. 2 : 40 = 20. La razón de la progresión es 2.

3.3.1. Propiedades de las Progresiones Geométricas:

Al igual que las progresiones aritméticas, las progresiones geométricas tienen varias propiedades; destacamos las siguientes:

1. En toda progresión geométrica la razón se encuentra dividiendo un término por el anterior.
2. En toda progresión geométrica, un término es igual al primer término multiplicado por la potencia de la razón igual al número de términos que le preceden.

$$\begin{aligned}
\textit{Primer término: } & a_1 = a \\
\textit{Segundo término: } & a_2 = ar = ar \\
\textit{Tercer término: } & a_3 = a_2 r = arr = ar^2 \\
\textit{Cuarto término: } & a_4 = a_3 r = ar^2 r = ar^3 \\
\textit{Quinto término: } & a_5 = a_4 r = ar^3 r = ar^4 \\
& . \\
& . \\
& . \\
\textit{n-ésimo término: } & a_n = a_{n-1} r = ar^{n-2} r = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

La suma de los términos de la progresión geométrica, $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{(n-1)}$ puede obtenerse así:

$$\begin{aligned}
S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} \\
rS &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + a.r^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S - rS &= a - ar^n \\
(1 - r)S &= a - ar^n
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que:

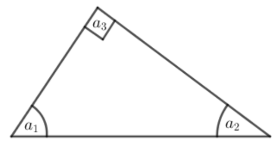
$$S = \frac{a - ar^n}{1 - r} \ , \ (r \neq 1)$$

3.4. Medios Geométricos.

Se llaman medios geométricos a los términos de una progresión geométrica que se hallan entre el primero y el último término de la progresión. Interpolar medios geométricos entre dos números dados es formar una progresión geométrica cuyos extremos sean los dos números dados.

3.5. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 1: Hallar el valor de los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética.



Solución:

El enunciado del problema permite suponer que los ángulos son: $90° - 2d$, $90° - d$,$90°$.

Luego:

$$
\begin{aligned}
(90° - 2d) + (90° - d) + (90°) &= 180^o \\
Es\ decir : 3d &= 90^o \\
Así\ que,\ d &= 30°
\end{aligned}
$$

Los ángulos son entonces: $a_1 = 30^o$, $a_2 = 60^o$, $a_3 = 90^o$.

Ejercicio 2: ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión aritmética 3, 8, 13, 18 ... Si está compuesta de 7 términos?

Claramente, la diferencia de la progresión es $d = 5$. Luego podemos escribir:

Solución:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 3 + d \\
a_3 &= 3 + 2d \\
a_4 &= 3 + 3d \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_7 &= 3 + 6d
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 3 + (1 \times 5) = 8 \\
a_3 &= 3 + (2 \times 5) = 13 \\
a_4 &= 3 + (3 \times 5) = 18 \\
a_5 &= 3 + (4 \times 5) = 23 \\
a_6 &= 3 + (5 \times 5) = 28 \\
a_7 &= 3 + (6 \times 5) = 33
\end{aligned}$$

Otra Solución:

$$\begin{aligned}
S_7 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 \\
&= a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \cdots + a_1 + 6d \\
&= 7a_1 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)d \\
&= 7 \times 3 + (\frac{6 \times 7}{2})5 \\
&= 21 + 105 \\
&= 126
\end{aligned}$$

Por lo tanto los 7 términos de la progresión aritmética son: 3 , 8 , 13 , 18 , 23 , 28 , 33. La suma de los 7 términos de la progresión aritmética es 126.

Ejercicio 3: Búsquese la suma de los términos de la progresión aritmética 2, 5, 8, 11 ... que tiene 7 términos.

Solución:

La diferencia es $d = 3$ Luego:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= 2 + (1 \times 3) = 5 \\
a_3 &= 2 + (2 \times 3) = 8 \\
a_4 &= 2 + (3 \times 3) = 11 \\
a_5 &= 2 + (4 \times 3) = 14 \\
a_6 &= 2 + (5 \times 3) = 17 \\
a_7 &= 2 + (6 \times 3) = 20
\end{aligned}$$

Otra Solución:

$$\begin{aligned}
S_7 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 \\
&= a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \cdots + a_1 + 6d \\
&= 7a_1 + (1+2+3+4+5+6)d \\
&= 7 \times 2 + (\frac{6 \times 7}{2})3 \\
&= 14 + 63 \\
&= 77
\end{aligned}$$

Por lo tanto los 7 términos de la progresión aritmética son: 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17 , 20. La suma de los 7 términos de la progresión es 77.

Ejercicio 4: Búsquense 8 números en progresión aritmética, conociendo que su suma es 196 y el primer término es 7.

Solución:

Podemos escribir:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 7 \\
a_2 &= 7 + d \\
a_3 &= 7 + (2 \cdot d) \\
a_4 &= 7 + (3 \cdot d) \\
a_5 &= 7 + (4 \cdot d) \\
a_6 &= 7 + (5 \cdot d) \\
a_4 &= 7 + (6 \cdot d) \\
a_8 &= 7 + (7 \cdot d)
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$\begin{aligned}
196 &= 8 \cdot 7 + 28d \\
28d &= 196 - 56 \\
28d &= 140 \\
d &= \frac{140}{28} \\
d &= 5
\end{aligned}$$

Luego, $d = 5$. Los números son entonces:

$$7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42$$

Ejercicio 5: El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Hallar el primer término.

Solución:

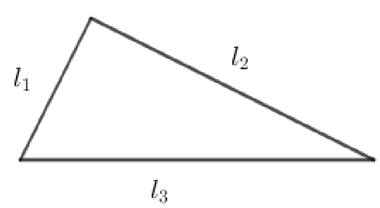
Podemos escribir :

$$\begin{aligned}
45 &= a_1 + 9 \cdot 4 \\
45 &= a_1 + 36 \\
a_1 &= 9
\end{aligned}$$

Luego, el primer término de la progresión aritmética es 9.

Ejercicio 6: Los lados de un triángulo escaleno están en progresión aritmética si el lado mayor mide 5 cm y su perímetro es de 12 cm. Calcular la longitud de sus otros dos lados.

Solución:



Nota: Las medidas de los lados están en relación aritmética, y por lo tanto sí $l_2 = a$, entonces. Debe tenerse:

$$\begin{aligned}
l_1 &= a - d \\
l_2 &= a \\
l_3 &= a + d
\end{aligned}$$

Donde d es la razón o diferencia.

Sumando miembro a miembro obtenemos:

$$l_1 + l_2 + l_3 = 12 = 3a \quad \text{(El perímetro es la suma de todos sus lados)}$$

Luego:

$$a = 4$$

Como el lado más largo mide 5, debe tenerse: $l_3 = a + d = 4 + d = 5$. Entonces $d = 1$.

Los lados del triángulo son: 3, 4 y 5.

Ejercicio 7: Un Trabajador tiene que regar 30 árboles yendo y viniendo de un pozo. El pozo dista del primer árbol 10 metros. Los árboles distan entre si 6 metros y al final deja la regadera al lado del pozo. Se pide calcular la distancia total que debe recorrer.

Solución:

El primer recorrido que debe hacer es de 20 metros porque es lo que camina de ida y vuelta al pozo. Por lo tanto el primer término de la progresión es 20.

La diferencia de la progresión es 12 porque es lo que se debe recorrer de un árbol al siguiente.

Luego:

$$\begin{aligned} a_1 &= 20 \\ a_2 &= 20 + (1 \times 12) \\ a_3 &= 20 + (2 \times 12) \\ a_4 &= 20 + (3 \times 12) \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_{30} &= 20 + (29 \times 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_t &= (20 \times 30) + 12(1 + 2 + ... + 29) \\ &= 600 + 12(\frac{29 \times 30}{2}) \\ &= 600 + 12(15 \times 29) \\ &= 5820 \end{aligned}$$

La distancia total recorrida es 5.820 m.

Ejercicio 8: Búsquense cuatro números en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el cuarto y el tercero es de 108, y la diferencia entre el segundo y el primero es de 12.

Solución:

Supongamos que la progresión es:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3$$

Entonces:

$$\begin{aligned} ar^3 - ar^2 &= 108 \\ ar - a &= 12 \\ r^2(ar - a) &= 108 \end{aligned}$$

Como $ar - a = 12$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} r^2 \cdot 12 &= 108 \\ r^2 &= \frac{108}{12} \\ r^2 &= 9 \end{aligned}$$

Luego $r = 3$ ó $r = -3$.

Sí $r = 3$, $3a - a = 12$; $a = 6$ y la progresión es:

$$6\ ,\ 18\ ,\ 54\ ,\ 162.$$

Sí $r = -3$, $-3a - a = 12$; $a = -3$ y la progresión es:

$$-3,\ 9,\ -27\ ,\ 81$$

Ejercicio 9: Búsquense cinco números en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el último y el primero es de 1872, y la diferencia entre el tercero y el primero es de 72.

Solución:

Supongamos que la progresión es:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &\textit{(1)}\ ar^4 - a = 1872 \Longrightarrow a(r^4 - 1) = 1872 \\ &\textit{(2)}\ ar^2 - a = 72 \Longrightarrow a(r^2 - 1) = 72 \end{aligned}$$

Dividiendo *(1)* entre *(2)* tenemos:

$$r^2 + 1 = 26 \Longrightarrow r^2 = 25.$$

Luego:

$$r = 5 \text{ ó } r = -5$$

Si $r = 5$:

$$\begin{aligned} 25a - a &= 72 \\ 24a &= 72 \\ a &= \frac{72}{24} \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la progresión es:

$$3,\ 15,\ 75,\ 375,\ 1875.$$

Si $r = -5$:

$$\begin{aligned} 25a - a &= 72 \\ 24a &= 72 \\ a &= 3. \end{aligned}$$

La progresión es :

$$3\ ,\ -15\ ,\ 75\ ,\ -375\ ,\ 1875.$$

Capítulo 4

ÁREAS

4.1. Regiones Poligonales.

Definición 1: Una región triangular es la reunión de un triángulo y su interior.

Definición 2: Una región poligonal es la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersectan, su intersección es o bien un punto o un segmento.

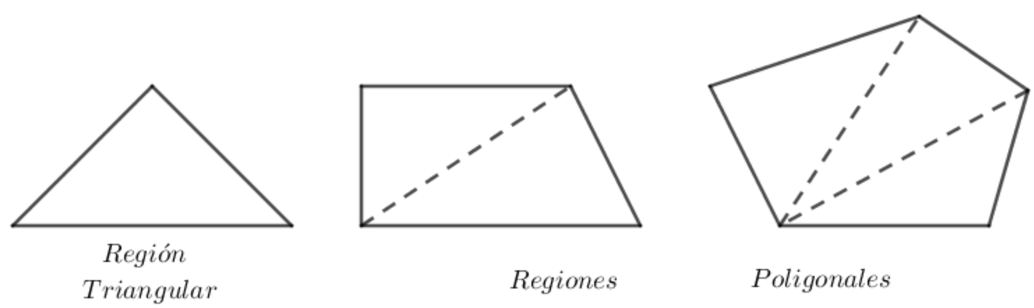
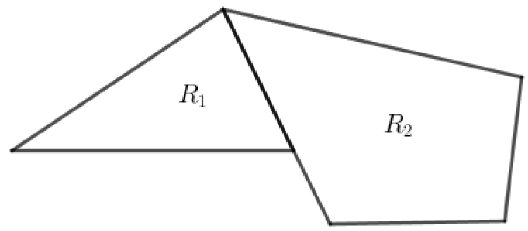


Figura 1. Sección 4.1

Para estudiar las áreas de las regiones poligonales y obtener la forma de calcularlas, se introducen los siguientes axiomas.

- **Axioma 1:** A toda región poligonal R, le corresponde un número positivo único, llamado su área y representado con el simbolismo **A(R).**
- **Axioma 2 :** Sí dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares determinadas por ellos tienen la misma área.
- **Axioma 3 :** Supongamos que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2. Suponamos que R_1 y R_2 se intersecan a lo sumo en un número finito de segmentos y puntos. Entonces:

$$\mathbf{A(R).} = \mathrm{A}(R_1)+\mathrm{A}(R_2).$$



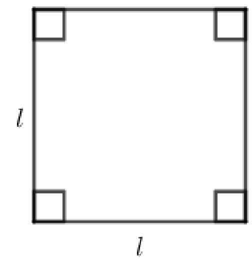


Figura 2. Sección 4.1

- **Axioma 4 :** El área de una región cuadrada es el cuadrado de la longitud de su lado.

De ahora en adelante, para abreviar, diremos simplemente el área de un cuadrado, de un rectángulo o de un triángulo para referirnos al área de la región correspondiente.

4.2. Área del Rectángulo, del Triángulo y del Trapecio.

Teorema 1: El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.

Demostración 1 : Consideremos la figura adjunta: Se trata de un cuadrado de lado b+h; A es el área desconocida.

Luego:

$$(b+h)^2 = b^2 + h^2 + 2A, \textit{ o sea,}$$
$$b^2 + h^2 + 2bh = b^2 + h^2 + 2A$$

Entonces:

$$2A = 2bh$$

Luego: $A = bh$, como se quería probar.

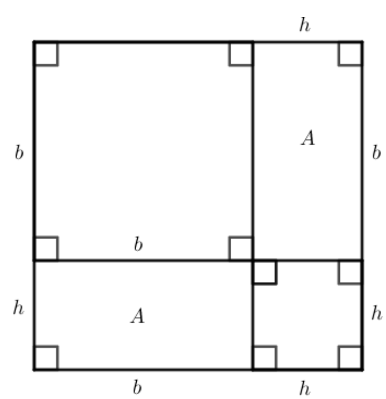


Figura 1. Sección 4.2.

Teorema 2 : El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos.

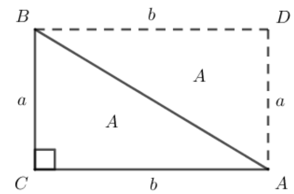


Figura 2. Sección 4.2.

Demostración 2 : Dado el triángulo rectángulo BCA con ángulo recto en C, se forma con sus catetos el rectángulo $BCAD$. Los dos triángulos BCA y BDA son congruentes, luego tienen la misma área. Sí llamamos A el valor de su área, tendremos:

$$A + A = ab \text{ ó } 2A = ab. \text{ Luego } A = \tfrac{1}{2}\, ab$$

Teorema 3: El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura correspodiente a esa base.

Demostración 3: Sean b y h la base y la altura respectivamente, A el área.Consideramos tres casos:

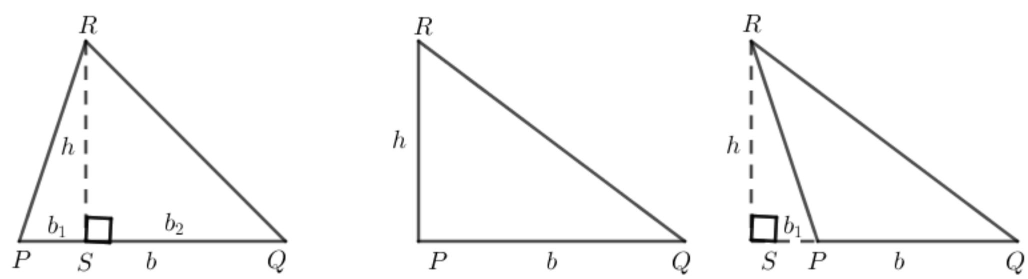


Figura 3. Sección 4.2.

a. El pié de la altura está entre los extremos de la base. En éste caso el triángulo es la reunión de dos triángulos rectángulos, luego:

$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h, \text{ ó},$$
$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

Cómo $b_1 + b_2 = b$, entonces $A = \frac{1}{2}bh$.

b. El pie de la altura es un extremo de la base; en este caso, el triángulo es rectángulo y de acuerdo al teorema anterior, su área es:

$$A = \tfrac{1}{2}\ bh$$

c. El pie de la altura está por fuera de la base. Tendremos entonces:

$$\frac{1}{2}b_1h + A = \frac{1}{2}(b + b_1)h,\ \acute{o},$$
$$\frac{1}{2}b_1h + A = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}b_1h$$

Luego: $A = \frac{1}{2}\ bh$, como queríamos demostrar.

Teorema 4 : El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.

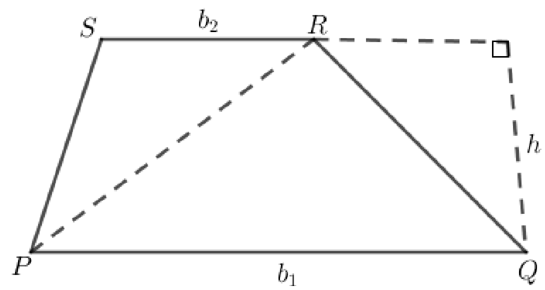


Figura 4. Sección 4.2.

Demostración 4 : Sea A, el área del trapecio $PQRS$. Cualquier diagonal del trapecio lo divide en dos triángulos de bases b_1 y b_2 y la misma altura h.

Luego:

$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h,\ \acute{o},$$
$$= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

El área de los cuadriláteros, puede calcuarse usando la misma técnica: dividirlo en triángulos. En particular se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5: El área de un paralelogramo es el producto de una base cualquiera y la altura correspondiente.

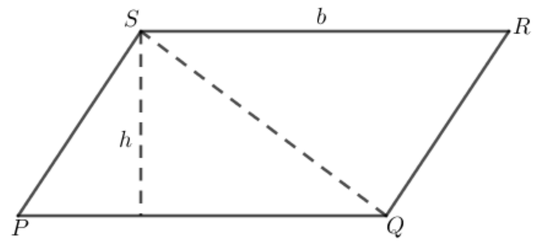


Figura 5. Sección 4.2.

Demostración 5 : Sea A el área del paralelogramo $PQRS$. La diagonal SQ divide el paralelogramo $PQRS$ en dos triángulos congruentes de área $\frac{1}{2}\ bh$.

Luego:

$$A = \frac{1}{2}\ bh + \frac{1}{2}\ bh = bh.$$

Como se quería mostrar.

La fórmula para el área del triángulo tienen dos consecuencias muy elementales pero muy útiles.

1. Sí dos triángulos tienen la misma base y la misma altura, sus áreas son iguales.

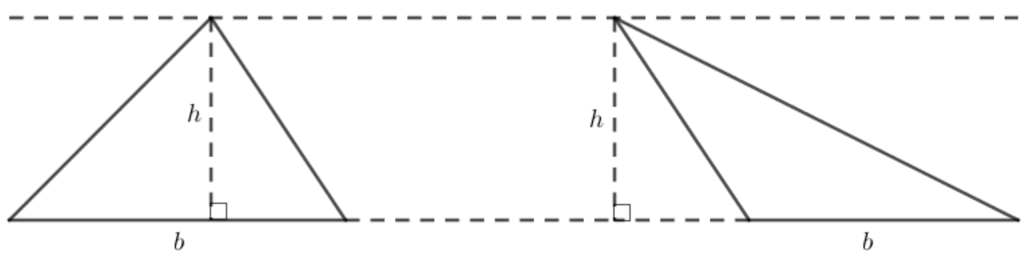


Figura 6. Sección 4.2.

   Sí A y B son las áreas, entonces $A = \frac{1}{2}\ bh$, $B = \frac{1}{2}\ bh$.

2. Sí dos triángulos tienen la misma altura, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases.

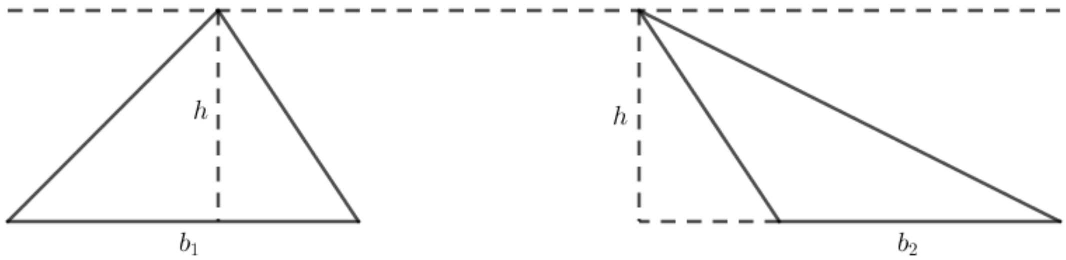


Figura 7. Sección 4.2.

Sí A y B son las áreas entonces : $A = \frac{1}{2}\ b_1\ h$; $B = \frac{1}{2}\ b_2\ h$.

Luego:

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}b_1 h}{\frac{1}{2}b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}$$

Teorema 6 (El Teorema de Pitágoras).

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

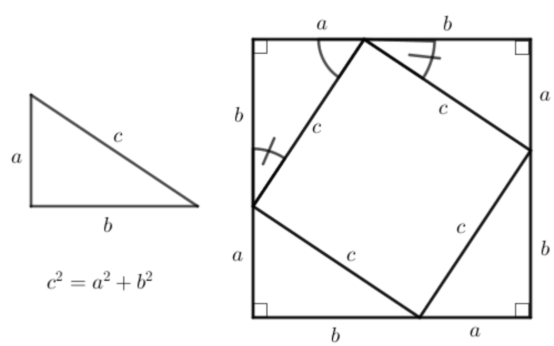


Figura 8. Sección 4.2.

Demostración 6 : Construimos un cuadrado de lado $(a+b)$ y cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b como lo muestra la figura. El cuadrilátero de lado c, inscrito en el cuadrado, es a su vez un cuadrado, dado que la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo vale 90°.

Luego:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4.\frac{ab}{2},\ ó,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Así qué:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como se quería mostrar.

Es importante destacar que el recíproco del **Teorema de Pitágoras** es verdadero: Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo, es un triángulo rectángulo, con su ángulo recto opuesto al lado más largo.

4.3. Triángulos Especiales.

4.3.1. Triángulo rectángulo isósceles.

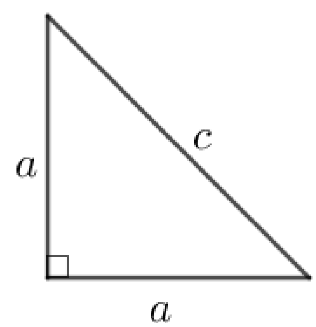


Figura 1. Sección 4.3.

Por el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

Luego:

$$c = a\sqrt{2}.$$

Lo anterior significa que en el triángulo rectángulo isósceles, la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo de un cateto. Estos triángulos se conocen como triángulos $45 - 90$.

4.3.2. Triángulos 30 - 60 - 90.

En los triángulos equiláteros, la altura sobre uno o cualquiera de sus lados lo divide en dos triángulos rectángulos congruentes con ángulos agudos de $60°y$ $30°$.

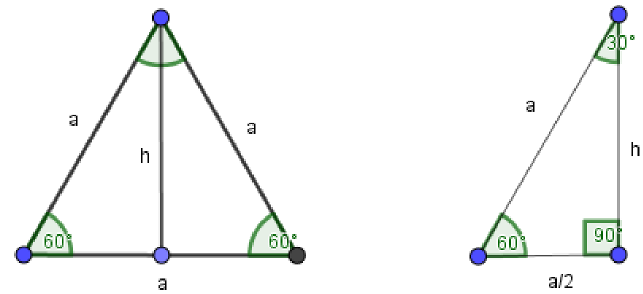


Figura 2. Sección 4.3.

Aplicando el teorema de Pitágoras a uno de éstos triángulos podemos escribir:

$$a^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2, \ es\ decir,$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2, \ o\ sea,$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

En los triángulos $30 - 60 - 90$ el cateto más largo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces el largo de la hipotenusa.

4.4. Longitud de la Circunferencia y Área del Círculo.

Dadas las dos circunferencias de longitudes C y C' y diámetros d y d' respectivamente, se cumple que la razón entre las longitudes es igual a la razón entre sus diámetros. Luego:

$$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'} \text{ , es decir , } \frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}$$

El valor común de éstas dos razones se representa con la letra griega $\pi(Pi)$, su valor aproximado es $\pi \approx 3,1416$

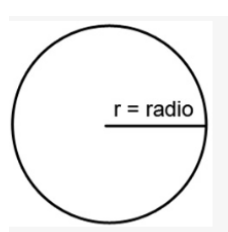


Figura 1. Sección 4.4.

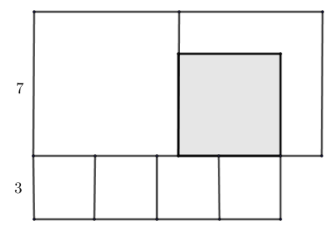
Luego la longitud de una circunferencia de diámetro d, es $C = \pi \cdot d$. Si escribimos $d = 2r$ donde r es el radio de la circunferencia entonces $C = 2\pi r$.

El área de círculo de radio r, es el producto de π por el radio al cuadrado. Entonces:

$$A = \pi \cdot r^2$$

4.5. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 1: En la figura que se muestra, hay dos cuadrados grandes con lado de 7 unidades cada uno, cuatro cuadrados pequeños con 3 unidades de lado cada uno. ¿Cuál es el área de la figura sombreada, si tanbién es un cuadrado?

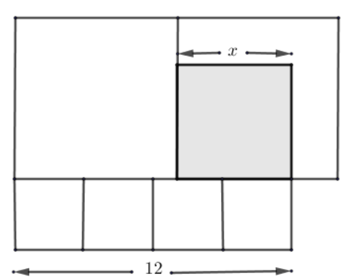


Solución:

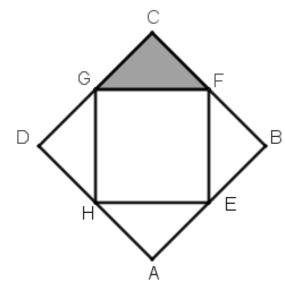
Observe el diagrama.

Si x representa la longitud del lado del cuadrado sombreado, entonces $x = 12 - 7 = 5$ unidades. El área del cuadrado sombreado es :

$$A = x^2 = 25.$$

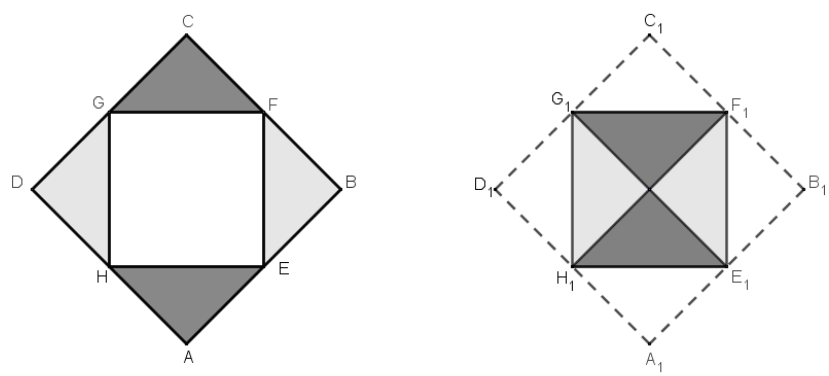


Ejercicio 2: En el cuadrado $ABCD$, los puntos E, F, G y H son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. Si el área del triángulo GFC es 2 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado $ABCD$?

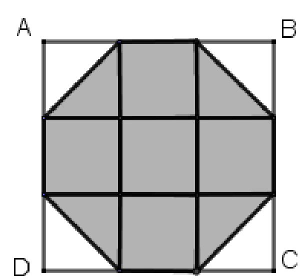


Solución:

Si se doblan hacia el centro los triángulos con ángulo en los vértices del cuadrado $ABCD$, como se muestra en la figura, se observa que cubren el cuadrado $EFGH$, es decir que el área del cuadrado $ABCD$ es el doble del área del cuadrado $EFGH$. Como el área de cada uno de los triángulos es $2\ cm^2$, entonces el área del cuadrado $ABCD$ es $8(2\ cm^2) = 16\ cm^2$ y por lo tanto su lado mide $4\ cm$.



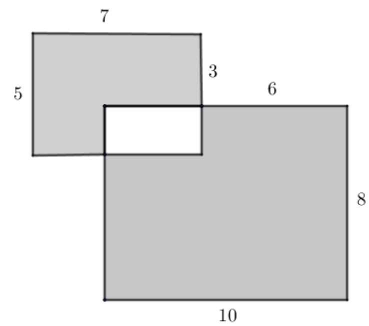
Ejercicio 3: El cuadrado $ABCD$ se ha divido en 9 cuadrados iguales, como se muestra en la figura. El área de la región sombreada es $14\ cm^2$. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$ en centímetros cuadrados?



Solución:

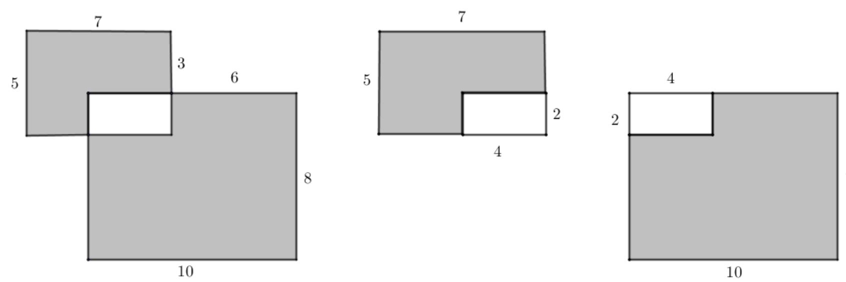
Solamente se encuentra sombreada la mitad de los cuadrados de las cuatro esquinas. Entonces hay cuatro mitades sin sombrear y con ellas completamos 2 cuadrados. Por lo tanto, la parte sombreada ocupa solamente 7 cuadrados. Se tiene la siguiente relación: Como 7 cuadrados tienen 14 cm^2 de área, entonces 1 cuadrado tendrá 2 cm^2 de área y los 9 tienen 18 cm^2 de área.

Ejercicio 4: En el dibujo de los dos rectángulos que se traslapan (comparten área) se muestra la longitud en centímetros de cada segmento. Halle la suma de las áreas de las regiones sombreadas.



Solución:

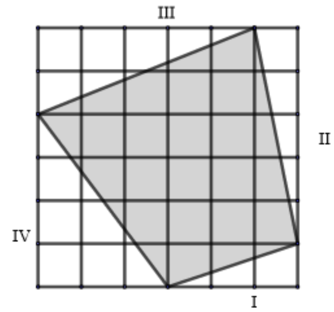
Si al área de cada uno de los dos rectángulos que se traslapan se le quita el área de la región traslapada y luego se suman estas áreas se obtiene el área total de la región sombreada:



Área de la región sombreada:

$$
\begin{aligned}
A &= [(7 \times 5)] - [(4 \times 2)]cm^2 + [(10 \times 8)] - [(4 \times 2)]cm^2 \\
A &= [35 - 8]cm^2 + [80 - 8]cm^2 \\
A &= (27 + 72)cm^2 \\
A &= 99cm^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5: La figura muestra un cuadrado de lado 6 cm ¿ Cuál es el área de la región sombreada?



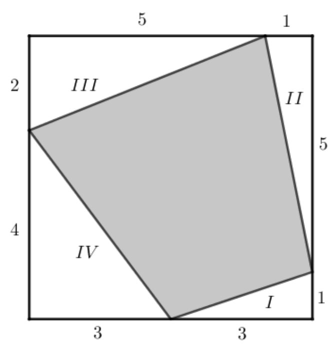
Solución :

El área del cuadrado sobre el que está dibujada la figura sombreada es de $6 \times 6 = 36\ cm^2$. El área de cada uno de los triángulos (**I, II, III Y IV**) exteriores a la figura sombreada son: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, 5 y 6 cm^2 respectivamente. Entonces, el área de la figura sombreada es igual al área del cuadrado menos la suma de las áreas de los triángulos exteriores. La suma de las áreas de los triángulos exteriores es:

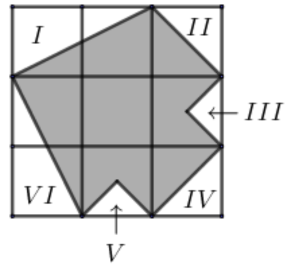
$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 5 + 6 = 15.$$

El área pedida es:

$$A = 36 - 15 = 21\ cm^2.$$



Ejercicio 6: En el cuadrado de la figura, cada uno de los pequeños cuadrados tiene área 1 cm^2, hallar el área de la región sombreada.



Solución:

Calculamos el área de la región no sombreada y restamos del área total. La parte no sombreada puede descomponerse en 6 triángulos. Estos (tomados en sentido horario desde el vértice superior izquierdo) tienen áreas:

I. $\frac{2\times1}{2} = 1$

II. $\frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$

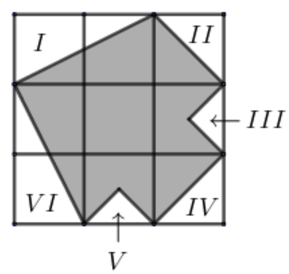
III. $\frac{1\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

IV. $\frac{1\times1}{2} = \frac{1}{2}$

V. $\frac{1\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$

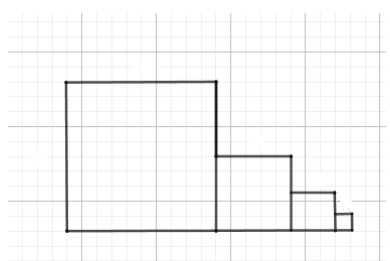
VI. $\frac{2\times1}{2} = 1$

La suma de estas áreas es: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$



El área de la región sombreada es, por lo tanto, (9- $\frac{7}{2}$)= $\frac{11}{2}$ cm^2.

Ejercicio 7: En la figura se tienen cuatro cuadrados; cada uno (después del primero) tiene lado igual a la mitad del lado del cuadrado a su izquierda. El perímerto del más grande es 448 cm ¿Cuál es el perímetro de la figura?

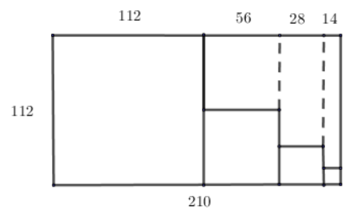


Solución:

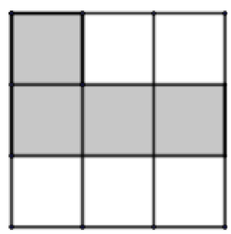
Como el primer cuadrado tiene perímetro de 448 cm, su lado mide $\frac{448}{4} = 112cm$. Luego los lados de los otros cuadrados miden 56, 28, 14 cm respectivamente. El perímetro de la figura es el perímetro de un rectángulo de base $112 + 56 + 28 + 14 = 210$ cm y altura 112 cm. Luego el perímetro es:

$$2 \cdot 210 + 2 \cdot 112 = 420 + 224$$
$$= 644cm.$$

Solución gráfica:



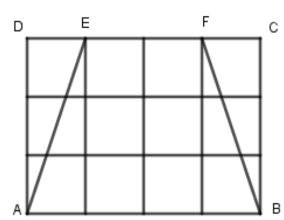
Ejercicio 8: La figura muestra un cuadrado compuesto por 9 cuadrados iguales. El perímetro de la región sombreada es 50 cm. Hallar su área.



Solución:

La región sombreada está compuesta por 4 cuadrados iguales y su perímetro está compuesto por 10 lados del cuadrado pequeño. Se sigue que cada uno de estos lados mide $50/10 = 5$ cm. Luego, el área de cada cuadrado pequeño es 5^2=25cm^2 y el área de la región sombreada es $4 \times 25 = 100$ cm^2

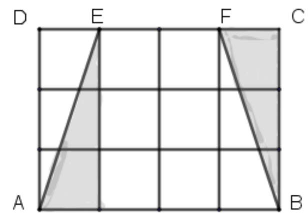
Ejercicio 9: $ABCD$ es un rectángulo cuya área es 12 cm^2. En centímetros cuadrados ¿Cuál es el área del trapecio $EFBA$?



Solución:

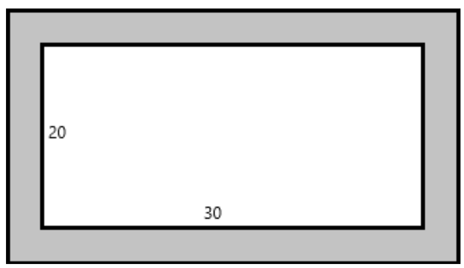
Los triángulos sombreados son congruentes. Luego el área del trapecio equivale al área de un cuadrado de lado 3, es decir 9 cm^2

Otra Solución:

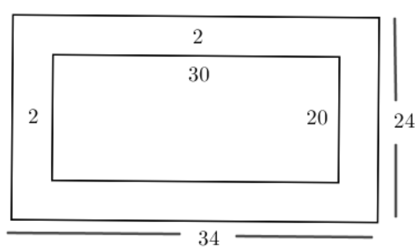


$$
\begin{aligned}
\acute{A}rea\ del\ trapecio\ ABEF &= \frac{(base\ mayor + base\ menor) \times (altura)}{2} \\
&= \frac{(4cm + 2cm) \times 3cm}{2} \\
&= \frac{6cm \times 3cm}{2} = 9cm^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10: En la figura la región sombreada representa el borde de una piscina reactangular. Las dimensiones de la piscina son 20 metros de ancho por 30 metros de largo. El borde está completamente enchapado con una hilera de baldosas cuadradas y enteras de 2 metros de lado. ¿Cuántas baldosas se necesitaron para enchapar completamente el borde?



Solución:

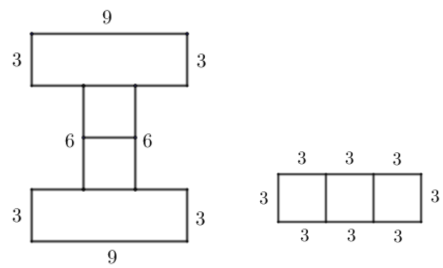


El borde de la piscina tiene área:

$$
\begin{aligned}
A &= (34 \times 24) - (30 \times 20) \\
&= 816 - 600 \\
&= 216 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 54 = 4 \cdot 54
\end{aligned}
$$

Luego, son necesarias 54 baldosas 2×2 para enchapar el borde.

Ejercicio 11: Carlos armó esta figura con dos fichas cuadradas y dos rectangulares iguales. Si tres fichas como las cuadradas arman una ficha rectangular y la ficha rectangular tiene perímetro igual a 24 cm, ¿Cuál es el perímetro de la figura que armó Carlos?

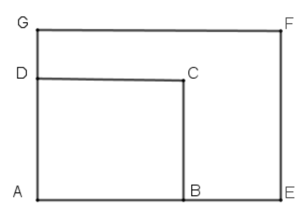


Solución:

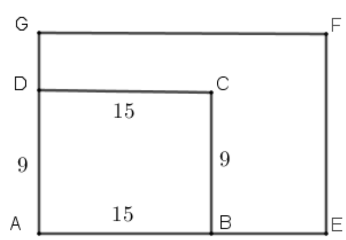
El perímetro del rectángulo se compone de 8 segmentos iguales al lado del cuadrado. Luego el lado del cuadrado es 3.

El perímetro de la figura que armó Carlos se compone de 18 segmentos cada uno de longitud 3, luego el perímetro vale $18 \times 3 = 54$ cm.

Ejercicio 12: El rectángulo $AEFG$ tiene 72 cm de perímetro y el rectángulo $ABCD$ tiene 48 cm de perímetro, $AB = 15$ cm y $BE = 2DG$. ¿Cuál es la longitud de AG?



Solución:



En el rectángulo $ABCD$, $AB + AD$ es la mitad del perímetro, es decir, 24 cm entonces $AD = 9$ cm puesto que $AB = 15$ cm. En el rectángulo $AEFG$, $AE + AG = 36$ cm, Luego:

$$\begin{aligned} 36 &= AB + BE + AD + DG \\ &= 15 + 2DG + 9 + DG \\ &= 24 + 3DG \end{aligned}$$

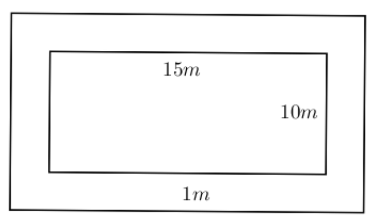
Luego:

$$\begin{aligned} 3DG &= 12 \\ DG &= 4 \end{aligned}$$

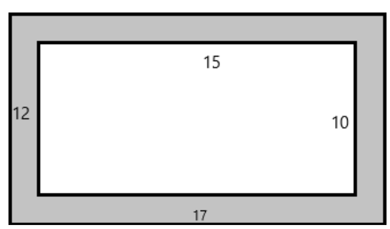
Entonces:

$$AG = 9 + 4 = 13 \ cm$$

Ejercicio 13: Un jardín rectangular tiene 10 m de ancho por 15 m de largo y esta rodeado por un andén de 1 m de ancho como lo muestra la figura. ¿Cuál es el área del andén?



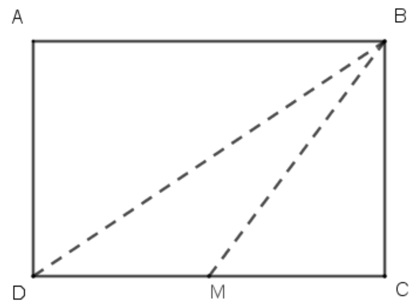
Solución:



El jardín y el antejardín forman un rectángulo de 17×12 , el jardín es otro rectángulo de 15×10. Luego, el área del andén es:

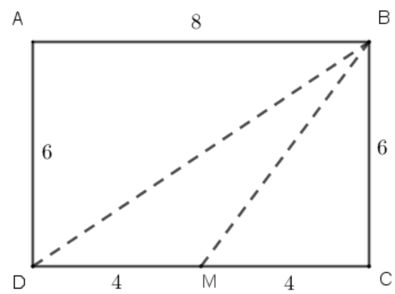
$$(17 \times 12) - (15 \times 10) = 204 - 150 = 54 \ m$$

Ejercicio 14: En el rectángulo $ABCD$ de la figura $\overline{AD} = 6$,$\overline{AB} = 8$. M es el punto medio de $\overline{DC}$. Hallar el área del triángulo BDM es:



Solución:

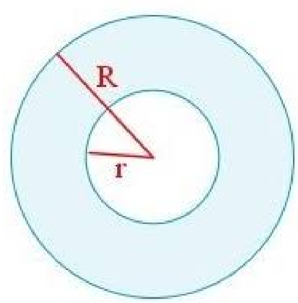
Como $DC = AB = 8$ y M es el punto medio de DC , entonces $DM = 4$. Luego:



el área del triángulo BDM es:

$$\frac{Base \times altura}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

Ejercicio 15: En un parque de forma circular de 70 m de radio hay situada en el centro una fuente, también de forma circular, de 5 m de radio. Calcula el área de la zona de paseo.



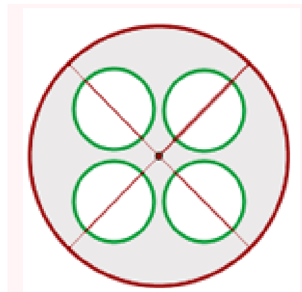
Solución:

Calculamos el área de los dos círculos y luego su diferencia.

$$\begin{aligned} A &= \pi(70)^2 - \pi(5)^2 \\ &= \pi(70^2 - 5^2) \\ &= 3,1416(4900 - 25) \\ &= 15{,}315,3m^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el área de la zona de paseo es de 15,315, 3 m^2.

Ejercicio 16: Calcular el área de la parte sombreada, si el radio del círculo mayor mide 6 cm y el radio de los círculos pequeños miden 2 cm.



Solución:

Calculamos el área del círculo mayor, la de los círculos menores y luego su diferencia.

$$A = \pi(6^2 - 4 \cdot 2^2) = 62,832$$

Por lo tanto el área de la parte sombreada es 62, 832 cm^2.

Capítulo 5

TEORÍA DE NÚMEROS.

5.1. Generalidades.

Para empezar, recordaremos que al conjunto $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ se le denomina el conjunto de los números naturales y se denota por $\mathbb{N}$ .El conjunto formado por los números $\{-1, -2, -3, ...\}$ se conoce como el conjunto de los enteros negativos y se denota por $\mathbb{Z}^{-}$. La unión de los enteros negativos y los números naturales forman el conjunto de los números enteros que se denota por $\mathbb{Z}$, es decir, $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$.

El conjunto de los números racionales, que lo vamos a denotar por $\mathbb{Q}$, se construye a partir de los números enteros de la siguiente manera: Un número racional es el cociente entre dos números enteros cualesquiera, siempre y cuando el denominador sea distinto de cero. Es decir, $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \neq 0\}$. Además, dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales si y sólo si se satisface que $ad = bc$.

Definición 1: La suma y la multiplicación entre números racionales se definen de la siguiente manera:

$$\text{(1.) } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
$$\text{(2.) } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Consideremos cualquier número racional positivo $\frac{m}{n}$. Mediante las reglas de la división entre números enteros llevemos este número a la forma decimal:

$$\tfrac{m}{n} = \alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$$

Donde α_0 es un entero no negativo y α_1, α_2, α_3, ... son dígitos. Al número $\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$ lo llamaremos la expansión decimal de $\frac{m}{n}$ Así por ejemplo $\frac{1}{8} = 0{,}125$, $\frac{1}{3} = 0{,}3333...$, $\frac{7}{99} = 0{,}070707...$ En los ejemplos anteriores vemos que la expansión decimal de un número racional puede ser finita o infinita; además notamos que la expansión de $\frac{1}{3}$ o $\frac{7}{99}$ es infinita y además periódica, es decir, en la expansión de estos racionales se encuentra un "bloque"de dígitos que se repite indefinidamente. Al número de dígitos que se repiten periódicamente se le llama *el periodo* (En la expansión de $\frac{1}{3}$ el bloque que se repite está formado por el dígito 3 y por lo tanto tiene período 1).

5.2. Múltiplos y Divisores.

Cuando un número entero m se divide por 2, el residuo puede ser cero o puede ser 1. Si el residuo es cero, m puede escribirse como $m = 2k$, donde k es el cociente de la división. Si éste es el caso, también se dice que m es un múltiplo de 2 o que 2 es un divisor de m.

$$\begin{array}{r|l} \mathrm{m} & 2 \\ \cline{2-2} & \mathrm{k} \\ 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \mathrm{m} & 2 \\ \cline{2-2} & \mathrm{l} \\ 1 & \end{array}$$

Si el residuo es 1, entonces $m = 2 \cdot l + 1$, donde l es el cociente de la división. En el primer caso (cuando el residuo es 0) diremos que m es par; en el segundo caso diremos que m es impar. Los enteros positivos pares son:

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots$$

Los enteros positivos impares son:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$$

El comportamiento de los números pares e impares con respecto a la suma y la multiplicación se resume en las siguientes tablas:

+	Par	Impar
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

×	Par	Impar
Par	Par	Par
Impar	Par	Impar

De manera más general, si m y n son enteros y la división de m por n, es exacta, o sea el residuo es cero, entonces $m = n \cdot k$, donde k es el cociente de la división. En este caso decimos que m es divisible por n; que m es múltiplo de n o que n divide a m.

Las propiedades más importantes de la divisibilidad son las siguientes:

1. Si m y n, ambos son divisibles por a, entonces m+ n y m - n también son divisibles por a.

2. Si m es divisible por a y n es cualquier entero, el producto $m \cdot n$ es divisible por a.

5.3. Criterios de divisibilidad.

Los criterios de divisbilidad son reglas que nos permiten decidir si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. Algunas de estas reglas son:

- Un número es **divisible por 2**, si acaba en cifra par.

Ejemplo: 334 y el 430 son divisibles entre 2.

- Un número es **divisible por 3**, cuando la suma de sus cifras es divisible por 3.

Ejemplo: El número 681 es divisible entre 3, ya que al sumar sus cifras: $6 + 8 + 1 = 15$, el 15 es múltiplo de 3.

- Un número es **divisible por 4**, si el número formado por las dos últimas cifras es divisible por 4.

Ejemplo: El 824 y el 7200 son divisibles por 4.

- Un número es **divisible por 5**, si acaba en cero o en 5.

Ejemplo: El 675 y el 980 son divisibles entre 5.

- Un número es **divisible por 6**, si es divisible por 2 y por 3 a la vez.

Ejemplo: El 528 es divisible por 6 porque es divisible por 2 (ya que acaba en cifra par) y también es divisible por 3 (ya que al sumar sus cifras da un número múltiplo de 3, como se ve a continuación $5 + 2 + 8 = 15$).

- Un número es **divisible por 9**, cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

Ejemplo: El 684 es divisible entre 9, ya que la suma de sus cifras: $6 + 8 + 4 = 18$ y el 18 es un múltiplo de 9.

- Un número es **divisible por 10**, si su última cifra es 0.

Ejemplo: 540 y 230 son divisibles entre 10, ya que su última cifra es 0.

- Un número es **divisible por 11**, cuando la diferencia de la suma de las cifras del lugar par y la suma de las cifras del lugar impar es múltiplo de 11. (La resta se hace en el sentido que sea posible).

Ejemplo:96855 es divisible entre 11, ya que si sumamos las cifras de lugar impar $5+8+9 = 22$ y las de lugar par $5 + 6 = 11$ y luego las restamos $22 - 11 = 11$, el resultado es múltiplo de 11.

5.4. Números Primos y Números Compuestos.

Los **números primos** son todos los números naturales, mayores que 1, que son divibles únicamente por sí mismos y por la unidad. Cuando un número no es primo se dice que es **compuesto**.

Para averiguar si un número dado a es o no primo, se averigua si a es o no divisible por los primos que son menores que a:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$$

Para los primeros primos 2, 3, 5 pueden usarse los criterios de divisibilidad, para los primos $7, 11, 13, \cdots$ se hace la división. Si alguna división es exacta el número es compuesto, si todas las divisiones dejan residuo distinto de cero el número es primo. Este proceso puede terminarse cuando el cociente de la división sea menor o igual que el divisor respectivo.

Ejemplo 1: Averiguar si 239 es ó no un número primo.

- 239 : No es divisible por 2: No acaba en cifra par.
- 239: No es divisible por 3: La suma de las cifras es 14, la cual no es divisible entre 3.
- 239: No es divisible por 5: No termina en 0 ni en 5.

$$\begin{array}{r|l} 239 & \underline{\;7\;\;} \\ 29 & 34 \\ 1 & \end{array}$$

- 239 : No es divisible por 7.
- 239 : No es divisible por 11 : $9 + 2 = 11$; $11 - 3 = 8$, que no es divisible por 11.

$$\begin{array}{r|l} 239 & \underline{\;13\;} \\ 109 & 18 \\ 05 & \end{array}$$

- 239 : No es divisible por 13.

$$\begin{array}{r|l} 239 & \underline{\;17\;} \\ 69 & 14 \\ 1 & \end{array}$$

- 239 : No es divisible por 17.

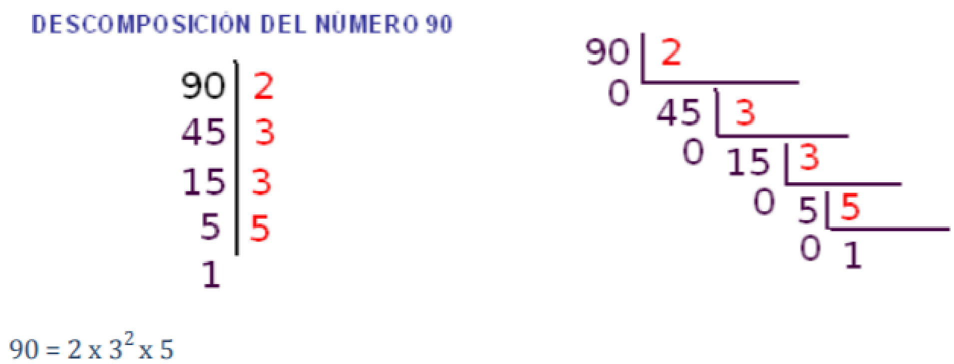
Como $17 > 14$, 239 es primo.

5.4.1. Descomposición de un número en factores primos.

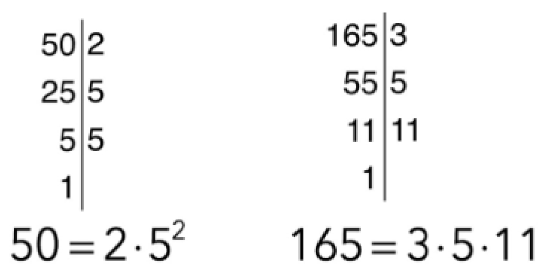
Cualquier número compuesto se puede **descomponer de forma única** en productos de factores primos. El orden de los factores primos puede variar al hacer la descomposición.

Para hacer la descomposición usamos un esquema muy sencillo que conocerás a través del siguiente ejemplo: Vamos a descomponer el número 90: Aplicando las reglas de divisibilidad, observamos que 90 es divisible entre 2, entre 3 y entre 5.

Vamos dividiendo 90 entre sus divisiores comenzando por el más pequeño (aunque podríamos empezar por el que quisiéramos) y reflejamos los resultados en el siguiente esquema:



Ejemplo 2: Descompner en factores primos los números 50 y 165. Utilizando la misma estrategia del ejemplo anterior, tenemos:



5.5. Máximo Común Divisor.

Sean m, n dos números enteros. Un entero a se llama divisor común de m y n, si a los divide a ambos.

Por ejemplo:

3 es un divisor común de 12 y 27.
5 es un divisor común de 25 y 80.

El máximo común divisor entre m y n, es el divisor común más grande.

Un procedimiento para calcular el máximo común divisor de m y n es el siguiente:

1. Escriba los divisores de m.
2. Escriba los divisores de n.
3. Escriba los divisores comunes de m y n.
4. Escoja el divisor común más grande.

Ejemplo 3: Hallar el máximo común divisor entre 12 y 30.

Divisores de 12**:** 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Divisores de 30**:** 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Divisores comunes: 1, 2, 3, 6.

Máximo común divisor: 6.

Otra forma de calcular el máximo común divisor entre m y n es la siguiente:

1. Descomponga los dos números m y n en factores primos.
2. El máximo común divisor entre m y n es el número formado con los factores primos comunes tomados con el menor exponente.

Ejemplo 4: Hallar el máximo común divisor de 12 y 30.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

Luego de acuerdo a la regla el máximo común divisor es: $2 \cdot 3 = 6$.

Ejemplo 5: Hallar el máximo común divisor de 15 y 45.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$15 = 3 \cdot 5$
$45 = 3^2 \cdot 5$

Luego de acuerdo a la regla el máximo común divisor es $3 \cdot 5 = 15$.

5.6. Mínimo Común Múltiplo.

Un número M es un múltiplo común de m y n, sí M es múltiplo de m y M es múltiplo de n. Por ejemplo, 36 es múltiplo en común de 6 y de 12, porque $36 = 6 \cdot 6$ y $36 = 3 \cdot 12$.

El múltiplo común más pequeño de m y n es el Mínimo Común Múltiplo entre m y n.

Un procedimiento para calcular el Mínimo Común Múltiplo entre m y n es el siguiente:

1. Escriba los múltiplos de m.
2. Escriba los Múltiplos de n.
3. Escriba los múltiplos comunes de m y n.
4. Escoja el múltiplo común más pequeño.

Ejemplo 6: Hallar el Mínimo Común Múltiplo entre 12 y 16.

1. Múltiplos de 12 = 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, . . .
2. Múltiplos de 16 = 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128,...
3. Múltiplos comunes: 48 , 96, ...
4. El mínimo común múltiplo es 48.

Otro método para calcular el Mínimo Común Múltiplo es el siguiente:

1. Descomponga los dos números m y n en factores primos.
2. El mínimo común múltiplo entre m y n es el número formado con los factores primos comunes y no comunes de las dos escrituras, tomados con su mayor exponente.

Ejemplo 7: Hallar el mínimo común múltiplo entre 12 y 16.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$ $16 = 2^4$

El mínimo común múltiplo es $2^4 \cdot 3 = 48$

5.7. Ejercicios Resueltos.

Ejercicio 1: ¿Cuál de los siguientes valores es el más grande?

A. $2+0+1+7$

B. $2\times 0+1+7$

C. $2+0+1\times 7$

D. $2\times 0+1\times 7$

E. $2\times 0\times 1\times 7$

Solución:

A. $2+0+1+7=10$

B. $2\times 0+1+7=8$

C. $2+0+1+7=9$

D. $2\times 0\times 1\times 7=0$

E. $2+0\times 1+7=9$

El valor más grande corresponde a $2+0+1+7$

Ejercicio 2: ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{1+2+3+4+5}$$

Solución:

$$\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{1+2+3+4+5}=\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{15}=\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{3\times 5}=8$$

El valor de la expresión anterior es 8.

Ejercicio 3: El partido de tenis más largo de la historia duró 11 horas y 5 minutos.¿Cuántos minutos duro?

Solución:

11 horas equivalen a:

$$11\times 60=660 \text{ minutos.}$$

Luego el partido duró:

$$660+5=665 \text{ minutos.}$$

Ejercicio 4: El número que al sumarle 5, restarle 2, y luego dividirlo por 3 es igual a 5 es:

Solución:

Usando las operaciones contrarias ó inversas nos regresamos desde el último paso dado trabajando sobre el resultado obtenido, empezando con el resultado 5, el número es:

$$5 \times 3 + 2 - 5 = 15 + 2 - 5 = 12$$

El número es 12.

Ejercicio 5: En la siguiente multiplicación incompleta, ABC es un número de 3 cifras, las rayitas representan dígitos que faltan.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & B & C \\
 & & A & B & C \\
\hline
 & & _ & _ & 6 \\
 & _ & _ & 2 & \\
_ & _ & 4 & & \\
\hline
\end{array} \times$$

Solución:

El valor de $A + B + C$ es: Como $C \times C$, termina en 6, C puede ser 4.

Como $B \times 4$, termina en 2, B puede ser 3.

Como $A \times 4$, termina en 4, A puede ser 1.

Un número ABC, puede ser 134, y $A + B + C = 8$.

Ejercicio 6: ¿Qué número debe colocarse en el círculo para que se mantenga la igualdad en la suma de fracciones que se muestra?

$$\frac{\bigcirc}{3} + \frac{\bigcirc}{2} = \frac{15}{6}$$

Solución:

Aplicando el proceso de suma de fracciones a $\frac{\bigcirc}{3} + \frac{\bigcirc}{2} = \frac{15}{6}$, se tiene que $\frac{2\bigcirc+3\bigcirc}{6}$.

Entonces $2\bigcirc + 3\bigcirc = 15$ luego; $\bigcirc = 3$.

Ejercicio 7: Bety quiere comprar una bicicleta, pero le faltan 23.000 pesos. Clara también quiere comprar la misma bicicleta pero le faltan 25.000 pesos. Si Bety y Clara reunen su dinero, tendrán exactamente el dinero para comprar la bicicleta.¿Cuál es el precio de la bicicleta?

Solución:

Si P representa el precio de la bicicleta, entonces:

Bety tiene $P - 23{,}000$ *pesos*

Clara tiene $P - 25{,}000$ *pesos*

Entre las dos tienen $2P - 48{,}000$ *pesos*. Luego $2P - 48{,}000$ *pesos* es el precio de la bicicleta, es decir, $2P - 48{,}000 pesos = P$. donde $P = 48{,}000$ es el precio de la bicicleta.

Por lo tanto, $P = 48{,}000$

Ejercicio 8: Simplificar la expresión.

$$\frac{1}{3+\frac{1}{(3+\frac{1}{3})}}$$

Solución:

Para simplificar la expresión se resuelve la operación entre paréntesis empezando por la operación a la derecha.

$$\frac{1}{3+\frac{1}{(3+\frac{1}{3})}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{(3+\frac{3}{10})} = \frac{1}{\frac{33}{10}} = \frac{10}{33}$$

Capítulo 6

BANCO DE PREGUNTAS.

1. La razón geométrica de dos números es $\frac{13}{5}$ y su razón aritmética es 72. Hallar el número mayor.
   - *a*) 117.
   - *b*) 115.
   - *c*) 119.
   - *d*) 118.
   - *e*) 110.
2. La razón geométrica entre la suma de dos números y su diferencia es $\frac{5}{3}$. Hallar la razón geométrica entre ambos números.
   - *a*) 2.
   - *b*) 4.
   - *c*) 6.
   - *d*) 8.
   - *e*) N.A.
3. Lalo recibe 240 euros de su padre. Después de hacer una compra, la razón ente el valor de la compra y lo que le queda es de 5 a 11. ¿Cuánto le queda a Lalo después de hacer la compra?
   - *a*) 165.
   - *b*) 90.
   - *c*) 75.
   - *d*) 15.
   - *e*) 55.
4. Una cinta de 90m se divide en dos trozos en la razón $\frac{2}{3}$. ¿Cuánto mide cada trozo?
   - *a*) 36cm y 54 cm.

b) 48cm y 52 cm.

c) 37cm y 17 cm.

d) 54cm y 37cm.

e) Ninguna de las anteriores.

5. En un curso la razón entre la cantidad de hombres y mujeres es de 3:2, si hay 24 hombres ¿cuántos estudiantes hay en total en el curso?

   a) 36.

   b) 40.

   c) 48.

   d) 39.

   e) Ninguna de las anteriores.

6. El año pasado se limpió un canal de regadío en 14 días con 120 operarios. En este año se requiere efectuar el mismo trabajo, pero con 60 operarios. ¿Cuántos días se demorarían en limpiar el canal?

   a) 14 días.

   b) 18 días.

   c) 28 días.

   d) 34 días.

   e) Ninguna de las anteriores.

7. 3 metros de género valen $6000 ¿Cuánto valen 11 metros del mismo género?

   a) $12.000

   b) $25.000

   c) $18.000

   d) $22.000

   e) Ninguna de las anteriores.

8. Una moto recorre 100 m en 4 segundos. ¿Qué distancia recorre en 50 segundos, si mantiene la misma velocidad?

   a) 1.150 m

   b) 1.250 m

   c) 3.245 m

   d) 1.050 m

   e) Ninguna de las anteriores.

9. Durante una jornada de trabajo 6 operarios cavan una zanja de 80 m de longitud. ¿cuántos metros cavarán 42 operarios trabajando en las mismas condiciones?

   a) 360 m

   b) 468 m

   c) 560 m

   d) 650 m

   e) Ninguna de las anteriores.

10. Un edificio da una sombra de 3 m y muy cerca se encuentra un poste de 4 m de altura, que proyecta una sombra de 2 m. La altura del edificio es:

   a) 2 m.

   b) 3 m.

   c) 6 m.

   d) 8 m.

   e) Ninguna de las anteriores.

11. Una moto que va a una velocidad de 100 km/h, demora 20 m en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad debería llevar para hacer el recorrido en 16 min?

   a) 125 km/h

   b) 130 km/h

   c) 115 km/h

   d) 80 km/h

   e) Ninguna de las anteriores.

12. Para recorrer los 360 km que hay entre A y B un auto tardó 3 h, a una velocidad de 120 km/h, si aumenta la velocidad a 160km/h. ¿Cuánto tardaría?

   a) 4 h.

   b) 5 h.

   c) 7 h.

   d) 6 h.

   e) 8 h.

13. Una receta de torta de manzana, especifíca los siguientes ingredientes para 6 personas. 365 gr de harina.

   4 huevos.

   300 gr de mantequilla.

250gr de azúcar.

6 manzanas.

Calcule los ingredientes necesarios para una torta de manzana para quince personas.

a) Harina 912.5 gr, Huevos 10, Mantequilla 750 gr, azúcar 625 gr, manzanas 15 u.

b) Harina 424 gr, Huevos 32, Mantequilla 450 gr, Azúcar 345 gr, Manzanas 10 u.

c) Harina 1000 gr, Huevos 14, Mantequilla 550 gr, Azúcar 540 gr, Manzanas 10 u.

d) Ninguna de las anteriores.

14. De las siguientes afirmaciones ¿cuál NO es verdadera?

a) Dos triángulos congruentes son siempre semejantes.

b) Dos triángulos equilateros son siempre semejantes.

c) Dos circunferencias son siempre semejantes.

d) Dos triángulos isóceles son siempre semejantes.

e) Dos cuadrados son siempre semejantes.

15. Los lados de un triángulo mide 6cm, 4cm, 9cm, si el lado menor de un triángulo semejante mide 6cm, entonces los otros dos lados miden:

a) 9 cm, 11 cm.

b) 8 cm, 11 cm.

c) 9 cm, 13,5 cm.

d) 10 cm, 13 cm.

e) Ninguna de las anteriores.

16. Se construye un jardín rectangular de 12 m de largo por 9 m de ancho en el centro de una plaza rectangular, con los lados paralelos al jardín. Bordeando el jardín ha quedado un espacio que será embaldosado. Si el largo de la plaza tiene 4m más que el largo del jardín, y si los dos rectángulos son semejantes. Hallar el área de la superficie embaldosada.

a) 152 m^2

b) 84 m^2

c) 68 m^2

d) 78 m^2

e) Ninguna de las anteriores.

17. Con un cable de 50 m se requiere conseguir un polígono regular semejante a otro de 90 m de perímetro. ¿Cuánto medirá el lado del primer polígono homólogo a un lado del segundo polígono que mide 5 m.

a) 2 m.

b) 6 m.

c) 6,5 m.

d) 2,77 m.

e) Ninguna de las anteriores.

18. Si dos triángulos rectángulos son semejantes, y sus hipotenusas miden respectivamente 26cm y 39 cm, y el menor de los catetos del primer triángulo mide 10 cm. ¿Cuánto miden los otros lados en ambos triángulos?

    a) a= 24 cm y b= 37 cm

    b) a= 24 cm y b= 36 cm

    c) a= 24 cm y b= 34 cm

    d) a= 24 cm y b= 35 cm

    e) Ninguna de las anteriores.

19. Un piso de forma cuadrada está cubierto con baldosas cuadradas del mismo tamaño. Si el número total de baldosas en las dos diagonales es 17, ¿Cuántas baldosas cubren el piso?

    a) 49.

    b) 81.

    c) 83.

    d) 79.

    e) 80.

20. Una urna contiene 40 bolas rojas y 30 bolas blancas. Se saca de la urna, al azar, una bola se observa su color y se deposita en otra urna. ¿Cuántas veces hay que repetir el experimento para tener certeza de sacar 2 bolas blancas?

    a) 42.

    b) 40.

    c) 35.

    d) 32.

    e) 41.

21. En la I.E Policarpa Santos se presentaron dos candidatos para elegir Personero: Catalina Robayo y Pedro Paternina. Los porcentajes de votación furon 70 % y 30 % respectivamente. Si Pedro tuvo 150 votos. ¿Cuál fue el número total de votantes?

    a) 510.

    b) 500.

    c) 350.

d) 450.

e) 490.

22. Entre un grupo de 50 estudiantes, se tiene que: exactamente 25 estudian Biología, exactamente 20 estudian Español y exactamente 12 estudian ambas materias. ¿Cuántos de los 50 estudiantes no estudian ni Biología ni Español?

    a) 11 estudiantes.

    b) 14 estudiantes.

    c) 10 estudiantes.

    d) 15 estudiantes.

    e) 12 estudiantes.

23. El equipo olímpico que representa al colegio está integrado por estudiantes de los grados cuarto, quinto y sexto únicamente. Siete estudiantes son de quinto grado, once son de sexto grado y una tercera parte del equipo es de grado cuarto. ¿Cuántos estudiantes integran el Equipo Olímpico del colegio?

    a) 30 estudiantes.

    b) 27 estudiantes.

    c) 35 estudiantes.

    d) 29 estudiantes.

    e) 31 estudiantes.

24. La boleta para la entrada a la función de teatro es de 300 pesos por cada niño y 700 pesos por cada adulto. Un grupo de 12 personas pagan 6400 pesos por la entrada. ¿Cuántos niños hay en el grupo?

    a) 9 niños.

    b) 8 niños.

    c) 5 niños.

    d) 7 niños.

    e) 6 niños.

25. Suponga que se tiene un reloj común de 12 horas y que en este momento muestra las 10:45 am. ¿Qué hora mostrará este reloj dentro de 100 horas?

    a) 3:45

    b) 2:45

    c) 4:45

    d) 1:45

e) 5:45

26. Patricia está leyendo una novela de la siguiente manera: Los lunes lee una página, los martes lee dos páginas, los miércoles lee tres páginas y así continúa hasta el domingo cuando lee siete páginas. Patricia lee cada página exactamente una vez y cada día de la semana lee exactamente el número de páginas indicado. Supongamos que Patricia empieza leyendo la página 1 el día lunes. ¿Qué día de la semana leerá la página 100?

    a) Lunes.

    b) Miércoles.

    c) Viernes.

    d) Sábado.

    e) Domingo.

27. ¿Cuál es el valor de

$$\begin{gathered}123 + 123 + 123 + 123 + 123+\\ 123 + 123 + 123 + 123 + 123+\\ 123 + 123 + 123 + 123 + 123+\\ 123 + 123 + 123 + 123 + 123 =?\end{gathered}$$

    a) 2460.

    b) 2462.

    c) 2358.

    d) 2466.

    e) 2398.

28. ¿Cuántos números pares hay entre 45 y 109?

    a) 36.

    b) 34.

    c) 32.

    d) 28.

    e) 30.

29. Kelly realiza dos compras. Ella le da al cajero 20.000 pesos por un *CD* (*compact disc*) y recibe 6.000 pesos de vueltas; luego le da a otro cajero 15.000 pesos por un brazalete y recibe 3.000 pesos de vueltas. Después de realizadas las compras, Kelly se queda con 28.000 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Kelly antes de hacer las compras?

    a) 50000.

    b) 54000.

    c) 52000.

d) 48000.

e) 53000.

30. La suma de dos números es 576, su cociente 20, y el residuo de su división 9. ¿Cuáles son estos números?

    a) 549 y 27.

    b) 549 y 26.

    c) 550 y 27.

    d) 550 y 26.

    e) 548 y 26.

31. El técnico de la selección Colombia de Fútbol convocó a 6 delanteros (Falcao, Muriel, Baca, Teofilo, Hernadez y Borja). ¿De cuántas maneras diferentes puede el técnico conformar la delantera del equipo Colombiano, si ha decidido jugar con tres delanteros?

    a) 22 alineaciones.

    b) 21 alineaciones.

    c) 18 alineaciones.

    d) 19 alineaciones.

    e) 20 alineaciones.

32. Sandy escribió todos los números desde 1 hasta el 100. ¿Cuántas veces escribió Sandy el dígito 2?

    a) 20.

    b) 18.

    c) 19.

    d) 17.

    e) 21.

33. En la adición que se muestra, las letras diferentes respresentan dígitos diferentes. ¿Qué dígitos representa cada una de las letras A, B ,C y D?

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 6 & B & 5 & 2 \\
+ & & & 9 & C & 4 \\
 & & A & 3 & 7 & D \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

a) A=3, B=7, C=8, D=5.

b) A=7, B=3, C=8, D=5.

c) A=5, B=7, C=8, D=7.

d) A=8, B=7, C=7, D=5.

e) A=4, B=7, C=8, D=5.

34. Al interpolar entre 6 y 14 tres mediios aritméticos se obtiene la progresión.

    a) 6,7,9,11,14

    b) 6,9,11,12,14

    c) 6,8,10,12,14

    d) 6,7,8,12,14

    e) Ninguna de las anteriores.

35. Un comerciante ha empleado 25.600 pesos en un negocio; cada año el capital se aumenta la cuarta parte. ¿Cuál es el valor de este capital al cabo de 6 años?

    a) 68.235

    b) 78.325

    c) 78.125

    d) 49.125

    e) Ninguna de las anteriores.

36. ¿Cuáles son los cuatro ángulos de un cuadrilátero, Sabiendo que están en progresión geométrica, y que la razón es 2?

    a) 24,48,96,192

    b) 26,49,91,142

    c) 46,68,100,172

d) 66,57,48,212

e) Ninguna de las anteriores.

37. ¿Cuáles son los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que están en progresión aritmética, y que la razón es 21 m?

    a) 56,87,95

    b) 65,89,115

    c) 63,84,105

    d) 66,57,108

    e) Ninguna de las anteriores.

38. Buscar cuatro números en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el cuarto y el tercero es de 108, y la diferencia entre el segundo y el primero es de 12.

    a) 6,18,54,162

    b) 4,54,23,134

    c) 6,15,34,124

    d) 8,16,24,32,64

    e) Ninguna de las anteriores.

39. El décimo término de una progresión aritmética es 45 y la diferencia es 4. Hallar el primer término.

    a) 8

    b) 6

    c) 9

    d) 7

    e) Ninguna de las anteriores.

40. Búsquese ocho números en progresión aritmética, conociendo su suma 196 y el primero 7.

    a) 7,12,17,15,24,25,41

    b) 7,8,9,10,11,12,13,14

    c) 3,4,6,12,16,14,23,36

    d) 7,12,17,22,27,32,37,42

    e) Ninguna de las anteriores.

CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo de grado tardó en su realización un tiempo aproximado de dos años. Su culminación nos permite expresar, a manera de conclusiones, las enseñanzas que de esta actividad se derivan:

1. La solución de problemas es una estrategia metodologica que debe ser tenida en cuenta en todos los niveles de enseñanza por las siguientes razones: en primer lugar, resolviendo prolemas se aprenden matemáticas. Frecuentemente la solución de un problema requiere de la revisión juiciosa de definiciones, teoremas y algoritmos que se aplican a menudo mecánicamente sin tener en cuenta alcances y limitaciones de los resultados. En segundo lugar, la solución de problemas afianza los conocimientos matemáticos. A veces cada persona, a través de la solución de problemas, hace elaboraciones intelectuales propias que le permiten consolidar sus conocimientos, y en tercer lugar, esta actividad permite desarrollar valores fundamentales en la persona humana. Generalmente cada problema admite varias soluciones (a veces soluciones insospechadas curiosas). Esta situación permite cultivar valores como la solidaridad, el respeto por el otro, la persistencia y la disciplina.

2. La solución de problemas, muestra la estrecha relación entre las matemáticas y otras ciencias, especialmente la geometría, la química y la física.

3. Los pronlemas de las Olimpiadas, no son ejercicios rutinarios; tienen un mayor nivel de exigencia. Por esta razón el entrenamiento en este tipo de competencias es necesario. Este adiestramiento debe ser gradual y bien dirigido. La revisión bibliográfica hecha con ocasión de la ralización del trabajo permitió, de una parte, escoger los temas que finalmente aparecen; y de otra el grado de profundidad con el que son abordados.

4. El trabajo de grado puede adaptarse como una guía de entrenamiento para los niños de sexto y séptimo grados que tengan la buena intención de llevar a cabo programas de Olimpiadas en las instituciones educativas públicas o privadas de la región.

Bibliografía

[1] Alan Sultan and Alice F. *The Mathematics that every secondary school math teacher needs to know* , Art2t. Ed. Routledge, New York and London, 2011.

[2] Richard Courant y Herbert Robbins. *¿Qué es la Matemática?* , Editorial Aguilar; Madrid, 1979.

[3] Edwin E, Moise y Floyd L. Downs Jr.*Geometría Moderna*, Editorial Addison - Wsley Iberoamericana, S.A; Wilmington, Delaware, E.U.A.,1970.

[4] Stanley R. Clemens, y otros. *Geometría*, Editorial Pearson Educación; México, 1998.

[5] J.A. Baldor. *Geometría y Trigonometría*, Grupo Editorial Patria; México, 2009.

[6] Aurelio Baldor. *Álgebra*, Editorial Publicaciones Cultural; México, 1996.

[7] Aurelio Baldor. *Áritmética*, Editorial Publicaciones Cultural; México, 1998.

[8] Diana María Silva Sierra. *Cartilla didáctica para el desarrollo de competencias matemáticas básicas, profundizando en conceptos del componente numérico - variacional, por medio de contextos de las Ciencias de la tierra.* Universidad Nacional de Colombia; Bogotá, 2019.