Neiva, 25 de enero de 2021

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Orlando Ortiz Rivera, con C.C. No. 1075262902

Cristian Duvan Peralta Ortigoza, con C.C. No. 1006089172

Autores del trabajo de grado titulado**:**
"Tres Fuertes Teoremas Fuertes Del Análisis Matemático Básico"
Presentado y aprobado en el año 2021 como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

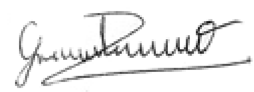
EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:



____

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: "Tres Teoremas Fuertes Del Análisis Matemático Básico"

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Ortiz Rivera Peralta Ortigoza	Orlando Cristian Duvan

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutiérrez Hoyos Guzmán García	Hernando Mauricio

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutiérrez Hoyos	Hernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciados en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2021 **NÚMERO DE PÁGINAS: 44**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas_X_ Fotografías____Grabaciones en discos___Ilustraciones en general_Grabados__ Láminas________Litografías____Mapas_____Música impresa___Planos_____Retratos_____ Sin ilustraciones____Tablas o Cuadros___

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Ninguno.

MATERIAL ANEXO: Ninguno

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*: Mención Meritoria

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés
1. Números reales	Real numbers
2. Funciones	Function
3. Continuidad de funciones	Continuity of functions
4. Límites	Limits
5. Continuidad uniforme	Uniform continuity
6. Valor Intermedio	Intermediate value
7. Cotas de conjuntos	Bounded sets
8. Teoremas fuertes	Strong Theorems
9. Aproximaciones	Approximations

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se resalta tres Teoremas fuertes cuyos resultados son aplicados en las funciones continuas. Se inicia con un recorrido histórico, haciendo mención a momentos que han sido trascendentales para el desarrollo del análisis Matemático. Desde una presentación de axiomas y teoremas de números Reales se introducen bases para abordar desde el formalismo matemático la continuidad de funciones.

Las funciones son, sin dudarlo, uno de los conceptos más significativos dentro de las llamadas matemáticas modernas. Las investigaciones acerca del análisis matemático que hoy por hoy se desarrollan, están centradas fundamentalmente en el estudio de las funciones. El concepto de función ha evolucionado con la suficiente claridad para definir conceptos como el de límite con exactitud y avanzar en una de las categorías fundamentales del análisis como es la exploración de la continuidad como condición necesaria para validar y aceptar las formulaciones en relación con los procesos infinitesimales.

El eje central de este trabajo de grado se basa en el estudio de los procesos de aproximación infinitesimal; por tal razón en él se encuentran definiciones rigurosas de conceptos como el límite, la continuidad, la continuidad Uniforme, todos estos en las funciones de variable Real. Los tres Teoremas fuertes son los que en la mayoría de libros de matemáticas aparecen como el Teorema de Bolzano, el Teorema de acotación de funciones continuas y el teorema de Weiertrass de máximos y mínimos. Posteriormente se culmina con algunos ejemplos ilustrativos que resaltan la importancia de estos Tres Teoremas que hemos denominado como fuertes.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this work three strong theorems are highlighted, the results of which are applied in continuous functions. It begins with a historical journey, making mention of moments that have been transcendental for the development of mathematical analysis. Starting from a presentation of axioms and theorems of real numbers, bases are introduced to approach the continuity of functions from the mathematical formalism.

Functions are, without a doubt, one of the most significant concepts in modern mathematics calls. Research on mathematical analysis that is being developed today is mainly focused on the study of functions. The concept of function has evolved with sufficient clarity to define concepts such as limit with precision and to advance in one of the fundamental categories of analysis, such as the exploration of continuity as a necessary condition to validate and accept formulations in relation to processes infinitesimals.

The central axis of this degree work is based on the study of the processes of infinitesimal approximation; for this reason, it contains rigorous definitions of concepts such as the limit, continuity, and Uniform continuity, all of these in the real variable functions. The three strong theorems are those that appear in most mathematics books as Bolzano's Theorem, the Bounding Theorem of Continuous Functions, and Weiertrass Theorem of Maxima and Minima. Later, it ends with some illustrative examples that highlight the importance of these Three Theorems that we have called strong.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Julio Cesar

Duarte Firma:

Nombre Jurado: Hernando Gutiérrez Hoyos

Firma:

Nombre Jurado: Mauricio Guzmán

Firma: Mauricio Guzmán G

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Tres Teoremas Fuertes Del Análisis Matemático Básico

Cristian Duvan Peralta Ortigoza
Orlando Ortiz Rivera

Neiva, Huila
2020

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Tres Teoremas Fuertes Del Análisis Matemático Básico.

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Cristian Duvan Pearlta Ortigoza
20142130147
Orlando Ortiz Rivera
20151137550

Asesor:
Hernando Gutierrez Hoyos

Neiva, Huila
2020

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Diciembre de 2020

Agradecimientos

Este trabajo es fruto de los saberes impartidos por cada uno de los profesores que de una u otra manera aportaron a nuestra formación profesional. Este aporte tan enriquecedor merece nuestros más sinceros agradecimientos a cada uno de ellos.

De igual forma, nos sentimos enteramente agradecidos con nuestros **familiares** por su apoyo tanto económico como emocional, el cual ha sido clave para no desfallecer en este proceso de formación.

Expresamos nuestros agradecimientos a la **Universidad Surcolombiana** por abrirnos sus puertas para permitirnos crecer como personas integras. Fue un escenario propicio en el que se vivieron momentos únicos e irrepetibles que sin duda alguna han dejado huellas imborrables en nuestra vida.

Desde luego nuestros agradecimientos más sinceros para nuestro Asesor, el profesor **Hernando Gutiérrez Hoyos**, por su acompañamiento, su entera disposición, su colaboración tan significativa para lograr el desarrollo de este trabajo. Por supuesto agradecemos por cada consejo que nos brinda, siempre tan precisos y oportunos que nos hacen sujetar de nuevo el timón para seguir navegando con más entusiasmo.

Agradecemos a nuestro círculo de amigos y allegados, los cuales han hecho de nuestro paso por la **USCO** una experiencia muy significativa. Agradecemos al **centro de estudio Leonhard Euler** por permitirnos compartir ratos agradables y hacernos sentir como en familia. Gracias, muchas gracias, a cada persona que aporto en el transcurrir de este momento educativo. Quizás a muchos de ellos no los expusimos de manera concreta dentro de estos párrafos pero les estamos eternamente agradecidos.

Introducción

En el presente trabajo de grado se busca resaltar la importancia de tres Teoremas que se usan con gran frecuencia en el área de las matemáticas pero en muy pocas ocasiones, a pesar de su importancia, son incluidos dentro de los currículos de los cursos que tienen aproximaciones a esta ciencia. Aun así, estos tres resultados, a pesar de que no se estudian a profundidad, son reiterativos con su presencia en múltiples temas abordados durante los estudios de la carrera.

Inicialmente se busca acercar al lector a la temática, contextualzándolo históricamente mediante un rápido recorrido sobre los más importantes problemas que dieron origen al análisis matemático al igual que las referencias a los más connotados matemáticos que en cada una de las épocas transitadas contribuyeron a la solución de dichos problemas y a la consolidación de las actuales teorías del cálculo y el análisis matemático.

Se hará una presentación formal de los Axiomas y teoremas del cuerpo de los Números Reales con el fin de que el lector tenga conocimiento de cómo se introducen las bases necesarias para poder responder a los requerimientos y exigencias exploratorias que justifiquen los resultados básicos sobre la continuidad y el manejo de procesos de aproximación infinitesimal que trascienden lo intuitivo.

Dado que el eje central de este trabajo de grado se basa en el estudio de procesos de aproximación infinitesimal, consideramos necesario dedicar un capitulo para el límite y la continuidad de las funciones. De este modo familiarizamos al lector con el tipo de escritura y la definición precisa de cada concepto, así se evitaran ambigüedades en el desarrollo del trabajo con los tres Teoremas Fuertes. En dicho capítulo haremos mención a un tema con el que muy pocas veces las personas que estudian el cálculo tanto diferencial como integral, lo trabajan. Se trata del concepto de continuidad uniforme, aunque es de aclarar que éste se trata de manera muy superficial dado que no es la idea central del trabajo, pero se considera importante para cualquier persona que tenga un acercamiento básico con el análisis matemático.

La idea de calificar como "tres teoremas fuertes" los resultados principales de este trabajo de grado, nace del título del capítulo 7 del libro de Michael Spivak, el cual es la fuente bibliográfica principal para el desarrollo del último capítulo. En este capítulo se presentan los tres Teoremas y sus respectivas demostraciones, las cuales se trataron de hacer de la forma más detallada con el fin de que sea muy entendible para cualquier lector. Hicimos algunos ejemplos en los que nos apoyamos gráficamente para esclarecer cualquier duda que haya quedado en el enunciado de los tres teoremas, también usamos otro ejemplo escogido de manera muy precisa con el fin de mostrarle al lector que los tres teoremas tienen como hipótesis, condiciones necesarias más no suficientes. Finalmente planteamos 4 ejercicios en cuya solución se usan los tres teoremas Fuertes de manera precisa, pero aclaramos que estos tres Teoremas no toman relevancia por este tipo de problemas si no por su importancia para el desarrollo de otros en los que ya estos resultados no se asumen de manera tan trivial.

Justificación

Gran parte del desarrollo de las matemáticas se centra en el estudio de las funciones. Trabajamos con ellas asumiendo que gozan de características que muy pocas veces se estudian a profundidad, lo cual causa que se vayan creando vacios que posteriormente dificultaran el estudio de esta ciencia.

Este trabajo busca convertirse en una fuente de consulta para cuando se desea complementar conceptos acerca de algunos tópicos abordados en los cursos de cálculo diferencial, pues desde nuestra experiencia consideramos que en muchas ocasiones temas centrales que se estudian en este trabajo se pasan por alto en el currículo de los cursos base de la carrera de Licenciatura en Matemáticas.

Esta iniciativa surge con el ánimo de reforzar conceptos que sabemos son importantes para asumir estudios superiores y por tanto decidimos recoger en el trabajo una parte de los fundamentos con los que debe estar familiarizado el estudiante de Matemáticas que aspire a dichos estudios.

Consideramos que la evolución histórica de los resultados con los que trabajamos en la carrera muy pocas veces se socializa en clase. En algunas ocasiones esto se debe a la falta de conocimiento que tiene el docente dado que poco a poco el estudio de la historia de la evolución del conocimiento matemático se ha ido perdiendo y quizás, ellos, dentro de su formación complementaria tampoco recibieron este conocimiento. Por tal motivo decidimos iniciar nuestro trabajo dedicando un capitulo para la contextualización histórica del desarrollo del cálculo infinitesimal, buscando así que el lector se fascine con la evolución que han tenido los conceptos durante centenares de años.

Objetivos

Objetivo general

Presentar tres Teoremas Fuertes para el Análisis Matemático básico, mostrando su importancia con el fin que se retomen como un tópico esencial en los currículos de los cursos de Cálculo diferencial.

Objetivos específicos

- Recrear, de manera resumida, el desarrollo histórico del análisis Matemático.
- Presentar Formalmente las características de la estructura de cuerpo Ordenado completo que poseen los números reales, para solidificar las bases del análisis matemático básico.
- Presentar de manera precisa los conceptos de límite y continuidad de una función.

Índice general

Capítulo 1

Contextualización Histórica

El trabajo se inicia haciendo énfasis en la presentación formal del concepto de límite de una función como recurso básico para la fundamentación y el desarrollo de la teoría de continuidad de funciones y sus consecuencias, al igual que los procesos que impliquen aproximaciones infinitesimales. Cabe aclarar que se hará uso de una notación moderna al presentar los límites, las funciones y las aproximaciones, es decir, para el limite se hará uso de la siguiente notación, $\lim_{x \to a} f(x) = L$, una función se notará como $y = f(x)$, las aproximaciones con ε y δ y los incrementos infinitesimales con $\triangle$. todo esto con el fin de poder explicar de manera clara y precisa algunos métodos del análisis matemático.

Los contenidos y problemas que dieron origen al análisis matemático son, en lo fundamental, los mismos problemas de los cuales se han ocupado los matemáticos a través de la historia con recursos y métodos de la aritmética, la geometría, y el álgebra. Los problemas originales se mantienen y, asociados a ellos y a los nuevos métodos, surgen otros problemas.
Cada problema se intenta resolver en el momento en que aparece con las herramientas que se tienen para ese momento, es por ello que muchos de los problemas matemáticos no se pudieron resolver en determinadas épocas por falta de herramientas apropiadas. Por otro lado, muchos de los problemas que sí pudieron ser resueltos como por ejemplo trazar una recta tangente a una curva, hallar rectas normales, la cuadratura de figuras geométricas, la construcción de polígonos regulares, la construcción de rectas perpendiculares, paralelas, mediatrices etc. Posibilitaron que los métodos ya existentes fueran mejorados tanto para simplificar los procesos de resolución de los problemas enfrentados como para potencializar soluciones de nuevos problemas. Así, por ejemplo. observamos que inicialmente los mismos problemas fueron resueltos de manera aritmética para luego ser resueltos con recursos geométricos, posteriormente se introdujeron métodos algebraicos con el planteamiento de ecuaciones, para culminar con los procesos infinitesimales y el paso al límite como una de las herramientas más efectivas y revolucionarias en el desarrollo de la matemática.

Según el estudio realizado por **Fernández Plaza** (2010), titulado "Unidad didáctica: Limite y continuidad de funciones", al referirse a la evolución histórica del concepto de límite en el cálculo infinitesimal lo aborda en tres etapas que se inician con el **PERIODO CLÁSICO**, en el cual se habla sobre el método que implementaron **Eudoxo De Cnido** y **Arquímedes de Siracusa** (el denominado **método de exhaución**). A quien se le atribuye este método es a **Eudoxo**, pero al matemático que se le reconoce más la utilización del mismo es a **Arquímedes** por su hábil manejo en el cálculo de áreas y volúmenes.
Otros matemáticos que hicieron parte de este periodo fueron: **Zenón de Elea** (con su paradoja: Aquiles y la tortuga, para poner en discusión lo continuo y lo discreto), **Aristóteles** (que trabajó el concepto de infinito potencial e inició la sistematización de la Lógica Bivalente) e **Hipócrates** (quien trabajó las famosas cuadraturas de Lúnulas como secciones circulares).

La **SEGUNDA ETAPA** se inicia con la **Revolución científica** en el **siglo XVI (inicialmente con Copérnico y Kepler)** y se extiende hasta el **siglo XVII** con **Newton** y **Leibniz**. Se caracteriza, para nuestros propósitos, por la presencia de los métodos y recursos para explorar los procesos que implicaban tanto lo infinitamente grande como lo infinitamente pequeño. Brevemente, relacionamos algunos de los más destacados Científicos de esta época y sus principales aportes al respecto.

KEPLER (1571 – 1630). Construyó el **método de los infinitésimos** para hallar volúmenes y áreas partiendo de que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes ya sean de áreas o volúmenes y que a su vez estas infinitas partes se hacen infinitamente pequeñas. **GALILEO** (1564 – 1642), elaboró un método similar para mostrar que el área bajo la curva en tiempo y velocidad corresponde al espacio recorrido.

CAVALIERI (1598 – 1647). Propuso y desarrolló el método de los **INDIVISIBLES** para hallar las áreas de figuras planas y el volumen de los cuerpos. En últimas, este método consiste en sumar las infinitas magnitudes llamadas indivisibles, en donde las áreas se agotan a través de rectángulos que tienden a convertirse en líneas (es decir de área cero) y los volúmenes en cuerpos que tienden a ser planos (es decir de volumen cero). El método terminó asociándose con el inicio del cálculo de una integral definida.

FERMAT (1601 – 1665). Construyó un método para buscar extremos de curvas, empleando incrementos infinitamente pequeños. Así por ejemplo, si se requiere estudiar el comportamiento de un proceso identificado con la función $f(x)$ en un determinado punto x_0 se procede de la siguiente manera: Cuando ε es tan pequeño como se quiera, los valores $f(x_0)$ y $f(x_0 + \varepsilon)$ se aproximan tanto entre sí que se puede terminar considerando que son iguales, es decir $f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon)$, luego se divide por ε a ambos lados de esta igualdad y se desestiman los términos que contengan ε (algo así como si ε fuera igual a cero). Esto generó controversia para la comunidad matemática y filosófica, por el hecho de dividir por una cantidad considerada cero. Pero es de aclarar que la idea de **Fermat** era superar la indeterminación ya que tenía claro la imposibilidad de dividir por cero. Para ello se debía llegar a una ecuación donde el denominador fuera totalmente independiente de ε. Aunque este método no describe el límite, se puede pensar que en él ya estaba implícita esta idea.
En el método de las tangentes **Fermat** y **Descartes** (1596 – 1650) cada uno construye su propio método de como calcular rectas tangentes en un punto de la curva. Lo que se pretende es trazar la recta tangente a un punto, **Descartes** lo hizo mediante la construcción de la recta normal trazando círculos, mientras que para **Fermat** fue necesario calcular la subtangente mediante el criterio de semejanza de triángulos, para ello se construyen los segmentos necesarios considerando $f(x+\varepsilon) - f(x)$ y se procede como en el caso anteriormente descrito, es decir que en cierto sentido se estaría hallando el límite en un punto de la abscisa. **Fermat** no concibió el concepto de límite ya que no utilizo la fórmula para hallar la pendiente de la recta tangente, solo la aplico para hallar la recta subtangente. También cabe mencionar que **BARROW** (1630 – 1677), construyó un método similar al de **Fermat** que consiste en aplicar $\frac{a}{e}$ que equivale a decir la razón de incrementos $\frac{\triangle_y}{\triangle_x}$.

NEWTON (1648 – 1727). Fue quien ideó la denominada teoría de las fluxiones, que se conoce actualmente como derivada, en relación con la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. Para ello, **Newton** consideró trayectos de espacio relativamente cortos alrededor del punto donde quiere hallarse la velocidad instantánea y calculó la velocidad promedia con la cual se recorre ese espacio. A medida que el espacio se va reduciendo alrededor del punto en cuestión, la velocidad promedia se puede considerar como constante a lo largo del trayecto obtenido, y en una reducción **AD-INFINITUM** del espacio, puede considerarse la velocidad del **ESPACIO LÍMITE** como la velocidad instantánea. Ésto, implícitamente, equivale a desarrollar $\lim\limits_{\triangle_t \to 0} \frac{\triangle_x}{\triangle_t} = v_i$ (velocidad instantánea); sin duda toda una genialidad que **Newton** intentó aclarar diciendo que: "Al tomar una aproximación a un objeto, ésta se desvanece más que cualquier diferencia dada, lo que equivale a decir que cuando se toma aproximaciones infinitamente pequeñas estas tienden a un valor que será llamado límite".

LEIBNIZ (1646 – 1716). Al igual que **Newton**, no logró dar claridad al concepto de límite refiriéndose a las aproximaciones como cantidades infinitamente pequeñas, pero sí logró contribuir al inicio del análisis infinitesimal refiriéndose a la derivada como el cociente de dos magnitudes infinitesimales llamadas diferenciales. Superó a **Newton** en cuanto a la sencillez y la funcionalidad de la notación usada, hasta el punto que es la que se emplea actualmente. Junto con **Newton** es considerado el creador del cálculo (Tanto el Diferencial como el Integral).

TERCERA ETAPA: Inicia a mediados del siglo XVIII y se extiende hasta el siglo XIX y comienzos del siglo XX con la necesidad de definir el concepto de función para una mejor comprensión y un manejo más riguroso tanto de los nuevos conceptos introducidos como de las técnicas desarrolladas en la solución de los problemas relacionados con dichos conceptos. Esta etapa finaliza con la construcción formal del concepto de límite..

Las funciones son, sin dudarlo, uno de los conceptos más significativos dentro de las llamadas matemáticas modernas. Las investigaciones acerca del análisis matemático que hoy por hoy se desarrollan, están centradas fundamentalmente en el estudio de las funciones. Es de aclarar que las funciones se han definido a través del tiempo de distintas formas pero ninguna contradice a la otra; por el contrario, con cada una de ellas el concepto de función ha evolucionado con la suficiente claridad para definir con exactitud conceptos como el de límite y avanzar en una de las categorías fundamentales del análisis como es la exploración de la continuidad como condición necesaria para validar y aceptar las formulaciones en relación con los procesos infinitesimales.

Según la revista: El Cálculo y su Enseñanza, en el artículo "El concepto de función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones", **Días Gómez** (2013), de acuerdo con otro autor citado por ÉL (**Rüthing** (1984)), dice que: **JEAN BERNOULLI** $(1667-1748)$, fue quien creo el primer concepto de lo que es una función. **Bernoulli** en 1718 define el concepto de función de la siguiente manera; "***Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes***".A continuación reseñamos, brevemente, algunos connotados matemáticos y sus principales aportes a la construcción de este concepto.

EULER $(1707-1743)$. Retomó el concepto de función de su maestro **Bernoulli** e introdujo, por primera vez, la idea de la fórmula con la cual se define la función: "***Por función de una cantidad variable denotamos aquí una expresión analítica construida de un modo u otro con esta cantidad variable y números o constantes***".

JOSEPH LAGRANGE $(1736-1813)$. Define el concepto de función de la siguiente manera, "A cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes".

NICOLAS DE CONDORCET $(1743-1794)$. Define el concepto de función de la siguiente manera, "Asumo que tengo un cierto número de cantidades x, y, z,.,., y para cada valor definido de x, y, z,.,., F tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos; yo digo que F es una función de x, y, z".

FOURIER $(1768-1830)$. Define el concepto de función de la siguiente manera: "En general, la función f(x) representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Para una infinidad de valores dados a la abscisa x, hay un número igual de ordenadas f(x). Todas tienen verdaderos valores numéricos, ya sean positivos o negativos o nulos. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen una a la otra, de cualquier manera, como sea, y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad única".

CAUCHY $(1789-1857)$. Define el concepto de función de la siguiente manera, "Cuando cantidades variables están relacionadas entre sí de tal manera que los valores de algunos de los unos se dan, puede encontrar todos los demás, consideramos estas distintas cantidades que se expresa por medio de varios de ellos que, por lo tanto, toman el nombre variables independientes. Las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se denominan funciones de esas mismas variables".

Según la revista digital: **Matemática, Educación e internet**, en el artículo: "Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje", **Ugalde**, menciona que **Lobachevsky**, **Dirichlet** y **Riemann**, cada uno de manera independiente, aportan una definición semejante a la que actualmente se utiliza la cual es de más rigor y de mayor generalización que la producida por Euler.

LOBACHEVSKY (1792 – 1856). Define el concepto de función de la siguiente manera, "El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida.".

Las palabras de **Lobachevsky** merecen dos observaciones:

• Establece por primera vez la condición de que la función debe asignar un valor a todo "número" en (lo que sería) su dominio.

• Se desliga la necesidad de conocer en forma expresamente analítica el criterio de asignación de valores.

El primer matemático en dar una definición satisfactoria del concepto de función fue **DIRICHLET** (1792 – 1856). Hay dos definiciones atribuidas a **Dirichlet**, ambas del año 1837:

Definición 1: "Una cantidad variable "y" se llama función de la cantidad variable "x" si a cada valor de "x" le corresponde un solo y determinado valor de "y" ".

Definición 2: "Si una variable "y" está relacionada con otra variable "x" de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x."

Para **Dirichlet** una función podía ser expresada, incluso solamente con palabras.

Un ejemplo presentado por Dirichlet de lo que es describir una función sin la utilización de una formula netamente algebraica:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & si \;\; x \;\; \text{es un número irracional.} \\ 1, & si \;\; x \;\; \text{es un número racional.} \end{cases}$$

RIEMANN (1826 – 1866). Define en 1858 el concepto de función de la siguiente manera, "Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x con y".

Retomando el artículo realizado por **Días Gómez** (2013), de acuerdo con (**Rüthing** (1984)), dice que a principios del siglo XX las funciones Adquieren una nueva apariencia definidas a través de conjuntos arbitrarios. **BOURBAKI** en 1939 define el concepto de función de la siguiente manera, ***"Sean E y F dos conjuntos, que pueden ser distintos o no. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional en y, si para toda x de E, existe un único y de F el cual está en la relación dada con x"***.

Bourbaki, dio una formulación general de función como una regla de correspondencia entre el dominio y el rango, donde ambos conjuntos son arbitrarios.

Según el estudio realizado por **Shílov** (2004), el primer problema que necesitó de una definición general de función, fue el problema de la cuerda vibrante. Problema que fue resuelto por **D'Alembert** y **Euler** de forma independiente. La definición del concepto de función en este punto, se convierte en un argumento sólido para poder justificar resultados.

Hasta el momento hemos hecho un recorrido sobre la evolución histórica e intuitiva del concepto de límite y de la evolución del concepto de función hasta llegar a la formulación actual de este último. Ahora haremos un recorrido histórico sobre los esfuerzos para formalizar el concepto de límite y llegar hasta su presentación actual.

D'ALEMBERT (1717 – 1783). Es uno de los propulsores de la teoría de límites y presenta dicho concepto de la siguiente manera:

"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobre pasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable".

JOSEPH LAGRANGE (1736 – 1813). Trabajó con desarrollos de funciones en series de potencias Los resultados conseguidos le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

CAUCHY (1789 – 1857). Se desliga de las formulaciones propuestas por Lagrange acerca de los procesos infinitésimos y define el concepto de límite de la siguiente manera, "cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".

WEIERSTRASS (1815-1897). Contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis, dando una definición satisfactoria del concepto de límite. **Weierstrass** criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que, según él, esto sugiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, que aparece en la obra de su discípulo Heine, es la siguiente:

"Si, dado cualquier ε, existe un η_0, tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$".

En un artículo titulado "Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad", Blázquez y Ortega (2002), dice que:

En el siglo pasado se sustituye la η de **Weierstrass** por δ, noción que en la actualidad se suele considerar en todos los manuales de análisis matemático, aunque desde un análisis didáctico se descubren variaciones bastante notorias (sobre ellas estamos trabajando). La siguiente definición está tomada de **Michael Spivak** (1981), "La función f tiende hacia el límite l en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Hasta este punto, ya hemos estudiado históricamente el desarrollo del concepto de función como el de límite, ahora veremos cómo se desarrolló históricamente el concepto de continuidad.

BOLZANO (1781-1848). Da una definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

Según la revista **Iberoamericana De Educación Matemática** en el artículo: "Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Economía", (2010), Gatica, Machado, May, Cosci, Echevarría y Renaudo dice que:

A principios del siglo XIX se inició la formulación rigurosa del concepto de continuidad, así se tiene que **Bolzano** la define como:

"$f(x)$ es continua en un intervalo, si para todo valor de x en un intervalo, la diferencia $f(x + \triangle x) - f(x)$ llega a ser y permanece menor que cualquier cantidad dada $\triangle x$ suficientemente pequeña, ya sea positiva o negativo".

Posteriormente **Cauchy** dio otra definición que no es esencialmente diferente que la anterior:

"La función $f(x)$ permanecerá continua respecto a x entre límites dados, si entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable, produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma".

Con Cauchy se llegó entonces a la formulación definitiva y rigurosa del concepto de continuidad, tal como ahora lo conocemos, por medio de la siguiente definición:

"$f(x)$ es continua dentro de un intervalo, si el límite de la variable $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0 es $f(x_0)$, para todo x del intervalo".

Una vez hecho este breve recorrido histórico acerca del análisis infinitesimal que va desde la precisión del concepto de función hasta la formalización del concepto de continuidad, pasando por el concepto de límite, entonces, entraremos a desarrollar de acuerdo a las modernas teorías dichos conceptos.

Capítulo 2

Axiomas Para El Sistema De Números Reales

Hablamos con frecuencia de los números reales ($\mathbb{R}$) cuando estudiamos matemáticas, y solemos usarlos sin tener en cuenta los principios en los que se fundamentan. Por ello, consideramos importante dentro de este capitulo hacer mención de los axiomas que caracterizan a este conjunto como cuerpo completo, además sera de importancia para el estudio de los capítulos posteriores.

2.1. $\mathbb{R}$ Es Un Cuerpo

En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones binarias (unicidad en el resultado y cierre) llamadas suma y multiplicación, que cumplen ciertas condiciones.
Para cualquier par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$. La suma $(+)$ se define como una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de tal manera que al par (x, y) se le asigna un único real, notado por $x + y$. De igual manera, la multiplicación $(\cdot)$ es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de tal manera que al par (x, y) se le asigna un único real, notado por $x \cdot y$.
Estas dos operaciones asistidas por las propiedades que se relacionan a continuación en forma de axiomas, le dan a $\mathbb{R}$ una estructura de cuerpo.

Axioma 2.1.1 (Asociatividad)**.** Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (+) : \quad & (x + y) + z = x + (y + z) \\ (\cdot) : \quad & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

Axioma 2.1.2 (Conmutatividad)**.** Para cualesquiera $x, y, \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (+) : \quad & x + y = y + x \\ (\cdot) : \quad & x \cdot y = y \cdot x \end{aligned}$$

Axioma 2.1.3 (Elementos Identidad)**.** Existen en $\mathbb{R}$ dos elementos distintos 0 y 1 tales que $x + 0 = 0 + x = x$ y $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Axioma 2.1.4 (Opuesto e inverso)**.** Todo $x \in \mathbb{R}$ posee un *opuesto adictivo* $-x \in \mathbb{R}$, tal que; $x + (-x) = (-x) + x = 0$ y si $x \neq 0$, también posee un *inverso multiplicativo* $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que; $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Solemos notar x^{-1} como $\dfrac{1}{x}$.

Axioma 2.1.5 (Distributividad)**.** Para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

De estos axiomas resultan todas las reglas familiares del cálculo con números reales. Los mas importantes se recogen en los siguientes teoremas:

Teorema 2.1.1. Los elementos identidad e inversos son únicos.

Demostración. (Unicidad del 0*).* Supongamos que al menos existen 0 y 0^*, tal que:
$a = a + 0 = 0 + a$ y $a = a + 0^* = 0^* + a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, de modo que;

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0^* && 0^* \text{ es el cero de los Reales} \\ &= 0^* + 0 && \text{Axioma 2.1.2} \\ &= 0^* && 0 \text{ es el cero de los Reales} \\ 0 &= 0^* \end{aligned}$$

□

Demostración. (Unicidad del 1*).* Supongamos que al menos existen 1 y 1^*, tal que:
$a = a \cdot 1 = 1 \cdot a$ y, $a = a \cdot 1^* = 1^* \cdot a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, de modo que;

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1^* && 1^* \text{ es el uno de los Reales} \\ &= 1^* \cdot 1 && \text{Axioma 2.1.2} \\ &= 1^* && 1 \text{ es el uno de los Reales} \\ \therefore\ 1 &= 1^* \end{aligned}$$

□

Demostración. (Unicidad de $-a$*).* Supongamos que al menos existen $-a$ y $-a^*$ que son inversos aditivos de a para todo $a \in \mathbb{R}$, es decir:
$0 = a + (-a) = (-a) + a$, y, $0 = a + (-a^*) = (-a^*) + a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, luego;

$$\begin{aligned} &[(-a) + a] + (-a^*) = 0 + (-a^*) && \text{Axioma 2.1.4} \\ &\Rightarrow (-a) + [a + (-a^*)] = 0 + (-a^*) && \text{Axioma 2.1.1} \\ &\Rightarrow (-a) + [a + (-a^*)] = (-a^*) && \text{Axioma 2.1.3} \\ &\Rightarrow (-a) + 0 = (-a^*) && \text{Axioma 2.1.4} \\ &\Rightarrow -a = -a^* && \text{Axioma 2.1.3} \end{aligned}$$

□

Demostración. (Unicidad de a^{-1}*).* Supongamos que al menos existen a^{-1} y a_*^{-1} que son inversos multiplicativos de a para todo $a \in \mathbb{R}$, es decir :
$1 = a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a$ y $1 = a \cdot a_*^{-1} = a_*^{-1} \cdot a$, para todo $a \in \mathbb{R}$, luego;

$$\begin{aligned} &[a_*^{-1} \cdot a] \cdot (a^{-1}) = 1 \cdot (a^{-1}) && \text{Axioma 2.1.4} \\ &\Rightarrow a_*^{-1} \cdot [a \cdot (a^{-1})] = 1 \cdot (a^{-1}) && \text{Axioma 2.1.1} \\ &\Rightarrow a_*^{-1} \cdot [a \cdot (a^{-1})] = (a^{-1}) && \text{Axioma 2.1.4} \\ &\Rightarrow a_*^{-1} \cdot 1 = (a^{-1}) && \text{Axioma 2.1.3} \\ &\Rightarrow a_*^{-1} = a^{-1} && \text{Axioma 2.1.3} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.2. Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene que $a = b$, si y sólo si $a + c = b + c$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Tenemos que,

$$\begin{aligned}
a + c &= (a + c) + 0 && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= (a + c) + b + (-b) && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= a + (c + b) + (-b) && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= a + (-b) + (b + c) && \text{Axioma 2.1.2}\\
&= b + (-b) + (b + c) && \text{Hipótesis}\\
&= [b + (-b)] + (b + c) && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= 0 + (b + c) && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= b + c && \text{Axioma 3}
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Tenemos que,

$$\begin{aligned}
a &= a + 0 && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= a + [c + (-c)] && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (a + c) + (-c) && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= (b + c) + (-c) && \text{Hipótesis}\\
&= b + [c + (-c)] && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= b + 0 && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= b && \text{Axioma 2.1.3}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.3. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $-(-a) = a$

Demostración. Sea $(-a) = d$, es decir, que $d \in \mathbb{R}$ por tanto, en virtud al axioma 2.1.4 existe $-d$, luego:

$$\begin{aligned}
a + (-a) &= 0 && \text{Axioma 2.1.4}\\
a + d &= 0 && \text{Hipótesis}\\
(a + d) + (-d) &= 0 + (-d) &&\\
a + [d + (-d)] &= [0 + (-d)] && \text{Axioma 2.1.1}\\
a + 0 &= -d && \text{Axioma 2.1.3}
\end{aligned}$$

Luego por hipótesis tenemos que $d = -a$ por tanto, $a = -(-a)$ □

Teorema 2.1.4. Para todo $a, b, x \in \mathbb{R}$ se tiene que $a + x = b$, entonces $x = b + (-a)$.

Demostración.

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
x &= x + 0 && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= x + [a + (-a)] && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (x + a) + (-a) && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= (a + x) + (-a) && \text{Axioma 2.1.2}\\
&= b + (-a) && \text{Hipótesis}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.5. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $b - a = b + (-a)$

Demostración. Sea $x = b - a$, y, $y = b + (-a)$, lo que haremos es probar que $x = y$.
$y + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b$; y como $x = b - a$, por el teorema 2.1.4 tenemos que $b = x + a$. Ahora bien, como $y + a = b$ y $b = x + a$, entonces $y + a = x + a$, y por el teorema 2.1.1 se tiene $x = y$, es decir, $b - a = b + (-a)$. □

Teorema 2.1.6. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene $a \cdot 0 = 0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= a \cdot 0 + [a + (-a)] && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (a \cdot 0 + a) + (-a) && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= a \cdot (0 + 1) + (-a) && \text{Axioma 2.1.5}\\
&= a \cdot 1 + (-a) && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= a + (-a) && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= 0 && \text{Axioma 2.1.4}
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.7. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \cdot b = 0$, sí y solo sí $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración. Tenemos que,

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; (a = 0 \vee b = 0)$$

Haremos la prueba por contradicción:
($\Rightarrow$) Tendríamos,

$$a \cdot b = 0 \;\wedge\; (a \neq 0 \;\wedge\; b \neq 0)$$

luego;

$$\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= a \cdot (b \cdot b^{-1}) && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (a \cdot b) \cdot b^{-1} && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= 0 \cdot b^{-1} && \text{Hipótesis}\\
&= 0 && \text{Teorema 2.1.6 } (\rightarrow\leftarrow)
\end{aligned}$$

De manera análoga sucedería con b.
($\Leftarrow$) Tendríamos,

$$(a = 0 \;\vee b = 0) \;\wedge\; a \cdot b \neq 0$$

La demostración en este sentido es trivial. □

Teorema 2.1.8. Para todo $p \in \mathbb{R}$, se tiene $(p^{-1})^{-1} = p$

Demostración. Tenemos que $p \cdot p^{-1} = 1$ y $(p^{-1})^{-1} \cdot p^{-1} = 1$ (Axioma 2.1.4), es decir, p y $(p^{-1})^{-1}$ son inversos multiplicativos de p^{-1}, luego por el teorema 2.1.1 podemos concluir que $(p^{-1})^{-1} = p$. □

Teorema 2.1.9. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

Demostración. Tenemos,

$$(x \cdot y) \cdot (x \cdot y)^{-1} = 1$$

Luego;

$$\begin{aligned}
(x\cdot y)\cdot(x^{-1}\cdot y^{-1}) &= (y\cdot x)\cdot(x^{-1}\cdot y^{-1}) && \text{Axioma 2.1.2}\\
&= y\cdot(x\cdot x^{-1})\cdot y^{-1} && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= y\cdot 1\cdot y^{-1} && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (y\cdot 1)\cdot y^{-1} && \text{Axioma 2.1.1}\\
&= y\cdot y^{-1} && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= 1 && \text{Axioma 2.1.4}
\end{aligned}$$

en efecto, en virtud al teorema 2.1.1, podemos concluir $(x\cdot y)^{-1} = x^{-1}\cdot y^{-1}$. □

Teorema 2.1.10. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se tiene que;

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + c\cdot d}{b\cdot d}$$

.

Demostración. Como $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= a\cdot b^{-1} + c\cdot d^{-1} && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (a\cdot b^{-1})\cdot 1 + (c\cdot d^{-1})\cdot 1 && \text{Axioma 2.1.3}\\
&= (a\cdot b^{-1})\cdot(d\cdot d^{-1}) + (c\cdot d^{-1})\cdot(b\cdot b^{-1}) && \text{Axioma 2.1.4}\\
&= (a\cdot d)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) + (c\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) && \text{Axiomas 2.1.2 y 2.1.1}\\
&= (a\cdot d + c\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot d^{-1}) && \text{Axioma 2.1.5}\\
&= (a\cdot d + c\cdot b)\cdot(b\cdot d)^{-1} && \text{Teorema 2.1.8}\\
&= \frac{a\cdot d + c\cdot d}{b\cdot d} && \text{Axioma 2.1.4}
\end{aligned}$$

□

Nota 2.1.1. *Por cuestiones de escritura manejaremos de aquí en adelante a $(x\cdot y)$ como (xy).*

Para poner en manifiesto; los teoremas anteriores surgen de los axiomas, existen otros que se pueden obtener de estos, pero no se enunciaran por tratarse de una muestra de uso frecuente

2.2. $\mathbb{R}$ Es Un Cuerpo Ordenado

Hasta el momento hemos mostrado que el conjunto de los números Reales tiene estructura de cuerpo. Ahora describiremos algunos elementos aprovechando que existe en $\mathbb{R}$ un subconjunto al cual notamos como $\mathbb{R}^+$ que nos permitirá caracterizar a $\mathbb{R}$ como un cuerpo ordenado.

Nota 2.2.1. *El conjunto $\mathbb{R}^+$ se denomina conjunto de números reales positivos.*

Dicho conjunto satisface los siguientes tres axiomas:

Axioma 2.2.1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:
a). $(x + y) \in \mathbb{R}^+$.
b). $(x\cdot y) \in \mathbb{R}^+$.

Axioma 2.2.2. Dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple una y solo una de las siguientes opciones:

$$x = 0 \qquad \text{ó} \qquad x \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{ó} \qquad -x \in \mathbb{R}^+.$$

Axioma 2.2.3. $0 \notin \mathbb{R}^+$

Con base en los axiomas anteriores, podemos definir las relaciones:
∗ *Ser menor que.*
∗ *Ser Mayor que.*
∗ *Ser Menor o igual que.*
∗ *Ser Mayor o igual que.*

Las cuales nos permiten enunciar lo siguiente:

Definición 2.2.1. Dados dos números reales a y b, se dice que a es mayor que b (lo cual se puede notar de las siguientes maneras $b < a$,o, $a > b$)

Nota 2.2.2. *$b < a$ se lee, b menor que a o a mayor que b; y $a > b$ se lee, a mayor que b o b menor que a.*

Definición 2.2.2. Dados dos números reales a y b, se dice que a es mayor o igual que b (lo cual se puede notar de las siguientes maneras $b \leq a$,o, $a \geq b$)

Nota 2.2.3. *$b \leq a$ se lee, b menor o igual que a o a mayor o igual que b; y $a \geq b$ se lee, a mayor o igual que b o b menor igual que a.*

El conjunto de los números reales positivos, también puede caracterizarse como aquellos números reales que son mayores que cero. Es decir, $a \in \mathbb{R}^+$, sí y solo sí $0 < a$. En efecto;

$$\begin{aligned} a &= a + 0 \\ &= a + (-0) \\ &= a - 0 \end{aligned}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+$ y $a = a - 0$, entonces, $(a - 0) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $0 < a$.
si $a \in \mathbb{R}$, tal que $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces diremos que a es un número real negativo. Al conjunto de los números reales negativos lo denotaremos como $\mathbb{R}^-$, por lo tanto $a \in \mathbb{R}^-$.
Al conjunto de los números reales negativos lo podemos caracterizar como aquellos números reales que son menores que cero. Es decir, $a \in \mathbb{R}^-$, sí y solo sí,$a < 0$. En efecto;

$$\begin{aligned} -a &= -a + 0 \\ &= 0 - a \end{aligned}$$

Como $-a \in \mathbb{R}^+$ y $-a = 0 - a$, entonces $0 - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < 0$.
De los axiomas de orden se deducen todas reglas para el cálculo con desigualdades, a continuación enunciaremos algunas de ellas como teoremas:

Teorema 2.2.1. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple una y solo una de las siguientes opciones:

$$x = y \qquad \text{ó} \qquad x < y \qquad \text{ó} \qquad x > y.$$

Demostración. El enunciado anterior puede escribirse así:

$$\begin{array}{ccc} y - x = 0 \quad \veebar \quad y - x \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad y - x \in \mathbb{R}^- \\ \text{siendo} \qquad p = y - x, \qquad \text{tendríamos:} \\ p = 0 \quad \veebar \quad p \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad p \in \mathbb{R}^- \end{array}$$

En virtud del axioma 2.2.1 tenemos que p solo cumpliría una y solo de las tres opciones anteriores, en efecto, $x < y$, ó, $x > y$, ó, $x = y$. □

Esto se conoce como *Ley de la Tricotomía en* $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2.2. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$,si se tiene que $x < y$, $y < z$ entonces $x < z$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(y-x)\in\mathbb{R}^+ \wedge (z-y)\in & \quad \mathbb{R}^+\\
(y-x)+(z-y)\in & \quad \mathbb{R}^+\\
(y-x+z-y)\in & \quad \mathbb{R}^+\\
(z-x+y-y)\in & \quad \mathbb{R}^+\\
(z-x)+(y-y)\in & \quad \mathbb{R}^+\\
(z-x)+0\in & \quad \mathbb{R}^+\\
z-x\in & \quad \mathbb{R}^+\\
z-x & \quad >0\\
x & \quad <z
\end{aligned}$$

□

Esta es la *propiedad transitiva* de la desigualdad en $\mathbb{R}$, la cual se puede escribir así, $x<y<z$

Teorema 2.2.3. Para todo $x, y, c \in \mathbb{R}$. Si $x<y$, entonces se tiene que $x+c<y+c$.

Demostración. Hagamos $\qquad P=x+c \qquad$ y $\qquad S=y+c$

$$\begin{aligned}
S-P &= (y+c)-(x+c)\\
S-P &= y+c-x-c\\
S-P &= y-x+c-c\\
S-P &= (y-x)+(c-c)\\
S-P &= (y-x)+0\\
S-P &= y-x
\end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos $x<y$ por tanto $y-x>0$, luego $S-P>0$; es decir, $P<S$, en consecuencia, $x+c<y+c$. □

Esto se conoce como *Monotonía de la adición* en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2.4. Para todo $x, y, c \in \mathbb{R}$. Si $x<y$ y $0<c$, entonces $xc<yc$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
x<y \ \wedge \ 0<c \quad &\Rightarrow \quad y-x\in\mathbb{R}^+ \ \wedge \ c\in\mathbb{R}^+\\
&\Rightarrow \quad (y-x)c \ \in\mathbb{R}^+\\
&\Rightarrow \quad (cy-cx) \ \in\mathbb{R}^+\\
&\Rightarrow \quad cx<cy
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.5. Para todo $x\in\mathbb{R}$. Si $x<0$ entonces, $-x>0$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
x<0 \quad &\Rightarrow \quad 0<0-x\\
&\Rightarrow \quad 0<-x\\
&\Rightarrow \quad -x>0
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.6. *Para todo $x, y, c \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ y $c < 0$, entonces $xc > yc$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} x < y \ \wedge \ c < 0 \quad &\Rightarrow \quad y - x \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ c \in \mathbb{R}^- \\ &\Rightarrow \quad y - x \in \mathbb{R}^+ \ \wedge \ (-c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad (y-x)(-c) \ \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad (-cy + cx) \ \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad (cx - cy) \ \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad cx > cy \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.7. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ se tiene que $x^2 \in \mathbb{R}^+$.*

Demostración. Caso (1). si $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^+ \quad &\Rightarrow \quad x^2 = x \cdot x \\ &\Rightarrow \quad x \cdot x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad x^2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Caso (2). si $x \notin \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} x \notin \mathbb{R}^+ \wedge x \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad -x \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) \\ &\Rightarrow \quad (-x) \cdot (-x) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow \quad x^2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

□

Gracias a la estructura de Cuerpo Ordenado, que tiene el conjunto de los números reales, se puede definir el valor absoluto de un número real, de la siguiente manera:

Definición 2.2.3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Nota 2.2.4. $|x|$ *Léase valor absoluto de x.*

De otra forma podemos definir el $|x|$ como el mayor de los números Reales x y $-x$, es decir, $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$; por tanto se tiene que $x \leq |x|$, o , $-x \leq |x|$. Multiplicando la segunda relación por -1, se tiene, $-|x| \leq x$, luego $-|x| \leq x \leq |x|$.
Por definición de valor absoluto se tiene que; $|x|$ es el único número real no negativo cuyo cuadrado es x^2, es decir, $|x|^2 = x^2$.
En efecto;

$$|x|^2 = |x||x| = \left\{ \begin{array}{rcl} (x)(x) = x^2 & \text{si} & x \geq 0 \\ (-x)(-x) = x^2 & \text{si} & x < 0 \end{array} \right\} = x^2$$

El valor absoluto de un número real cumple con otras propiedades; enunciaremos algunas de ellas a continuación:

Teorema 2.2.8. para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:
a) si $b \geq 0$ se cumple $|a| \geq b \ \Leftrightarrow \ -a \geq b \ \veebar \ a \geq b$
*b)*si $b \geq 0$ se tiene $|a| \leq b \Leftrightarrow \ -b \leq a \leq b$

Demostración. a) En efecto;
$(\Rightarrow)$
Caso 1: si $a \geq 0$, se tiene que $|a| = a$, por hipótesis $|a| \geq b$, por tanto $a \geq b$
Caso 2: si $a \leq 0$, se tiene que $|a| = -a$, por hipótesis $|a| \geq b$, por tanto $-a \geq b$

$(\Leftarrow)$
Caso 1: Si $a \geq b$, se tiene que, $|a| \geq a \geq b$, luego por la propiedad transitiva de de los números reales se concluye que, $|a| \geq b$.
Caso 2: Si $-a \geq b$, se tiene que, $|a| \geq -a \geq b$, luego por la propiedad transitiva de de los números reales se concluye que, $|a| \geq b$. □

Demostración. b) En efecto;
$(\Rightarrow)$
Por hipótesis tenemos que $|a| \leq b$ y por definición de valor absoluto se tiene que $a \leq |a|$, en virtud al teorema 2.2.2 tendríamos $a \leq b$ (1). De igual forma por la definición de valor absoluto se tiene que $-a \leq |a|$ y por hipótesis $|a| \leq b$, por la propiedad transitiva de los números reales se tiene $-a \leq b$, luego, multiplicando está desigualad por menos uno, se tendría que $-b \leq a$ (2). por (1) y (2) se puede concluir que $-b \leq a \leq b$
$(\Leftarrow)$
Por hipótesis se tiene que $-b \leq a$ y $a \leq b$, luego multiplicando la primera desigualdad por -1, se tiene que, $-a \leq b$, es decir, $a \leq b$ y $-a \leq b$, por tanto; $\max\{a, -a\} \leq b$, de aquí se puede concluir que $|a| \leq b$. □

Teorema 2.2.9. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene; $|x + y| \leq |x| + |y|$

Demostración. Por definición tenemos,

$$x \leq |x| \quad \wedge \quad y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y| \tag{1}$$

Por otro lado tenemos también que:

$$\begin{aligned} -|x| \leq x \quad \wedge \quad -|y| \leq y &\Rightarrow -x \leq |x| \quad \wedge \quad -y \leq |y| \\ &\Rightarrow -(x + y) \leq |x| + |y| \qquad (2) \end{aligned}$$

Luego, de (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \max\{x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y| \\ &\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.10. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene $|xy| = |x||y|$

Demostración. En efecto;
$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2$$

Luego;

$$\begin{aligned} |xy|^2 &= |x|^2|y|^2 \\ \sqrt{|xy|^2} &= \sqrt{|x|^2|y|^2} \\ |xy| &= \sqrt{|x|^2}\sqrt{|y|^2} \\ |xy| &= |x||y| \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.11. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene $|x - y| = |y - x|$

Demostración.

$$\begin{aligned} |x-y| &= |-(y-x)| \\ &= |-1(y-x)| \\ &= |-1||y-x| \\ &= 1|y-x| \\ &= |y-x| \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.12. Para todo $x \in \mathbb{R}$. Se tiene $\sqrt{x^2} = |x|$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= |x| \\ (\sqrt{x^2})^2 &= |x|^2 \\ (\sqrt{x^2})(\sqrt{x^2}) &= |x|^2 \\ (x)(x) &= x^2 \\ x^2 &= x^2 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.13. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Demostración.

$$\begin{aligned} |x| &= |x+0| \\ |x| &= |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \\ |x| &\leq |x-y| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x-y| \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.14. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demostración. En virtud al teorema 2.2.13 tendríamos:

$$|x| - |y| \leq |x - y| \qquad (1)$$

ademas, $|y| - |x| \leq |y - x|$ luego por el teorema 2.2.11 tendríamos, $|y| - |x| \leq |x - y|$, es decir,

$$-(|x| - |y|) \leq |x - y| \Leftrightarrow -|x - y| \leq |x| - |y| \qquad (2)$$

Luego, de (1) y (2) se tiene que:

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

□

Teorema 2.2.15. Si $x \in \mathbb{R}_0^+$ es tal que $x < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

Demostración. Como $x \geq 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x > 0$. La posibilidad $x > 0$ no es posible, por hipótesis, $x < \varepsilon$, Para todo $\varepsilon > 0$. En particular , $\varepsilon = x$ se cumpliría $x < x$, lo cual es imposible. Luego, debe cumplirse que $x = 0$. □

Usaremos la siguiente notación para representar tipos especiales de conjuntos de números reales, llamados intervalos:

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\leq b\} \qquad (-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}:x\leq b\}$$
$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\} \qquad (-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}:x<b\}$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x<b\} \qquad [a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a\leq x\}$$
$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\leq b\} \qquad (a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}:a<x\}$$
$$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$$

Los cuatro intervalos de la izquierda están acotados, sus extremos son a y b. El intervalo $[a,b]$ es cerrado, (a,b) es abierto, $[a,b)$ es cerrado por la izquierda y $(a,b]$ cerrado por la derecha. Los cinco intervalos a la derecha son no acotados: $(-\infty,b]$ es la semirrecta cerrada a la derecha con origen en b. Los demás tienen denominaciones análogas. Cuando $a=b$, el intervalo [a, b] se reduce a un único elemento y se llama *intervalo degenerado.*

Es muy útil imaginar el conjunto $\mathbb{R}$ como una recta *(la recta real)* y los número reales como sus puntos. Entonces la relación $x<y$ significa que el punto x está a la izquierda de y (e y a la derecha de x), los intervalos son segmentos de la recta y $|x-y|$ es la distancia del punto x al punto y. Tales interpretaciones geométricas constituyen un valioso auxilio para comprender los conceptos y teoremas del Análisis Matemático.

2.3. $\mathbb{R}$ Es Un Cuerpo Ordenado y Completo.

Completaremos nuestra fundamentación del conjunto de los números Reales, haciendo mención de algunos *condiciones* que cumplen sus elementos, que nos permiten caracterizarlo como un *Cuerpo Completo.*

2.3.1. Cota De Un Conjunto

Si tenemos $X\subset\mathbb{R}$ se puede llegar a decir de X:

Definición 2.3.1. Se dice que X es acotado superiormente si existe $m\in\mathbb{R}$ tal que $x\leq m$ para todo $x\in X$. En tal caso m es una cota superior de X

Definición 2.3.2. Se dice que X es acotado inferiormente si existe $n\in\mathbb{R}$ tal que $n\leq x$ para todo $x\in X$. En tal caso n es una cota inferior de X.

Si X es acotado inferior y superiormente de manera simultánea diremos que X es un conjunto acotado o, equivalentemente, que existe un $k>0$ tal que para todo $x\in X$ $|x|\leq k$.

Nota 2.3.1. *Un valor particular de k (En caso de ser x acotado) es el mayor valor absoluto entre una cota inferior o superior, es decir:*

$$k=max\{|n|,|m|\}$$

2.3.2. Elemento Máximo y Mínimo De Un Conjunto

Sea $\emptyset\neq X\subset\mathbb{R}$, se dice que X tiene *elemento máximo r,* si $r\in X$ y para todo $x\in X$ se cumple que $x\leq r$, se escribe $r=max(X)$; recíprocamente se dice que X tiene *elemento mínimo s,* si $s\in X$ y para todo $x\in X$ se cumple que $s\leq x$, en este caso se escribe $s=min(X)$.

2.3.3. Extremo Superior y Extremo Inferior De Un Conjunto.

Si $X\subset\mathbb{R}$ es un conjunto acotado superiormente y no vacío. Un número $b\in R$ se llama *extremo superior o supremo* del conjunto X cuando es la menor de las cotas superiores de X; en tal caso se escribe $(b=SupX)$. Esta definición anterior se formaliza de forma rigurosa de la siguiente manera.

Definición 2.3.3. $\alpha\in\mathbb{R}$, se denomina extremo superior o supremo de X si y solo si:
C.1. Para todo $x\in X$, $x\leq\alpha$ (α es cota superior de X).
C.2. Dado $\varepsilon>0$ existe $x\in X$ tal que $\alpha-\varepsilon<x\leq\alpha$.

De manera similar, si $X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Un número $a \in R$ se llama *extremo inferior o ínfimo* del conjunto X cuando es la mayor de las cotas inferiores de X; en este caso se escribe $a = Inf X$. Formalmente se define de la siguiente manera.

Definición 2.3.4. $\beta \in \mathbb{R}$, se denomina extremo inferior o ínfimo de X si y solo si:
P.1. Para todo $x \in X$, $x \geq \beta$ (β es cota inferior de X).
P.2. Dado $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $\beta \leq x < \beta + \varepsilon$.

El $max(X)$ y el $min(X)$ son casos particulares de $SupX$, e, $InfX$, sucede cuando éstos dos últimos pertenecen al conjunto X.

Axioma 2.3.1 (Axioma De Completez Para $\mathbb{R}$.)**.** Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, tiene extremo superior o Supremo.

A partir del Axioma 2.3.1 se puede escribir la siguiente afirmación:

Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, tiene extremo inferior o ínfimo.

Ahora mostraremos algunos ejemplos de conjuntos que nos permiten sintetizar un poco la importancia del axioma de completez.

Ejemplo 2.3.1. *El conjunto Vacío es acotado, pero no posee ni Sup ni Inf.*

En efecto; todo $x \in \mathbb{R}$ es una cota superior de vació, de no ser así, debe existir en vació por lo menos un elemento que es mayor o igual que ese x, lo cual contradice el hecho de que vació no posee elementos.

De igual forma, todo $x \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de vació de no ser así, debe existir en vació por lo menos un elemento que es menor o igual que ese x, lo cual también contradice el hecho de que vació no posee elementos. Luego, a pesar de que vació es acotado, no posee ínfimo ni supremo, dado que cualquier elemento podría ser *Sup* o Inf al mismo tiempo, lo cual es absurdo.

Ejemplo 2.3.2. *El conjunto de los números Naturales no esta acotado superiormente.*

Supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, por el Axioma 2.3.1 tendríamos que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\alpha = Sup\mathbb{N}$ y tomando $\varepsilon = 1$, por la definición rigurosa del *Sup* de un conjunto, tendríamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$\alpha - 1 < n \leq \alpha$$

$$\alpha < n + 1 < \alpha + 1$$

de aquí, $\alpha < n + 1$, por tanto $n + 1$ es mayor que α y como $(n + 1) \in \mathbb{N}$ entonces se concluye que α no es *Sup* de $\mathbb{N}$. Ahora presentamos algunos teoremas que satisface el extremo superior y el extremo inferior de un conjunto.

Teorema 2.3.1. Si existe extremo superior y extremo inferior de un conjunto X, estos son únicos.

Demostración. Probaremos la unicidad del extremo superior o supremo del conjunto X.
En efecto, Supongamos que p y r son extremos superiores de X, es decir que se cumple que $p \geq r$ dado que r es extremo superior de X, a su vez $r \geq p$ dado que p es extremo superior de x; luego $p = r$. □

De manera análoga, se puede probar la unicidad de el extremo inferior o ínfimo del conjunto X.

Teorema 2.3.2. Dados dos conjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, sea C el conjunto

$C = \{c : c = a + b; a \in A, \text{ y, } b \in B\}$ se cumple que:

a) Si A y B poseen extremo superior, entonces C tiene extremo superior y, además

$$SupC = SupA + SupB.$$

b) Si A y B poseen extremo inferior, entonces C tiene extremo inferior y, además

$$InfC = InfA + InfB.$$

Demostración. **a)** Se tiene que A y B poseen supremo; Es decir, para todos $a \in A$ y $b \in B$ se cumple que:

$$a \leq SupA$$
$$b \leq SupB$$

sumando las dos inecuaciones

$$a + b \leq SupA + SupB$$

de aqui

$$c \leq SupA + SupB$$

Como $c \in C$ y es arbitrario, $SupA + SupB$ es una cota superior de C.

Debemos mostrar que $SupA + SupB$ es el $SupC$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existen $a + b \in C$ tal que;

$$(SupA + SupB) - \varepsilon < a + b \leq (SupA + SupB).$$

En efecto;
Como A y B tienen supremo si tomamos $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene que;

$$SupA - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq SupA \ (1).$$
$$SupB - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq SupB \ (2).$$

Luego sumando (1) y (2) se tiene que;

$$(SupA + SupB) - \varepsilon < a + b \leq SupA + SupB.$$

Luego se concluye que;

$$SupC = SupA + SupB.$$

b) Se prueba de igual forma que el inciso **a**. □

2.3.4. Entorno o Vecindad De Un Punto.

Definición 2.3.5. Cualquier intervalo abierto que contenga un punto a como su punto medio se denomina entorno de a. Se denota como $B(a; r)$, gráficamente se representa en la figura 2.1.

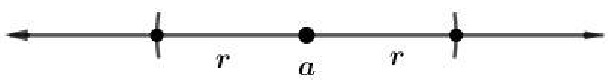


Figura 2.1: Entorno de a de radio r.

2.3.5. Punto De Acumulación De Un Conjunto.

Definición 2.3.6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, y $x \in \mathbb{R}$, diremos que x es un punto de acumulación de A tal que $x \in A$ si todo entorno $B(x, r)$ contiene algún punto de A, que sea diferente de x.

Capítulo 3

Límites Y Continuidad De Funciones

Este capitulo esta destinado a definir el límite de una función de la manera formal, con el fin de pasar a unas delas ideas más fascinantes e importantes de la matemáticas que es la continuidad de una función.

3.1. Límite De Una Función

3.1.1. Presentación Intuitiva De Límite De Una Función

Consideremos a A un subconjunto de números reales y x_0 un punto de acumulación (x_0 puede pertenecer o no pertenecer a A). Si f es una función de variable real y valor real, determinada en A, se dice que un número real L, es el límite de la función f cuando $x \Rightarrow x_0$, si x está próximo a x_0, entonces $f(x)$ está próximo a L.

Ejemplo 3.1.1. *Dada la función $f(x) = 3x - 1$ estudiaremos lo que ocurre en el punto de acumulación $x_0 = 1$, es decir, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.*

Esto significa, cuando x toma valores próximos a 1, $f(x)$ toma valores próximos a L.

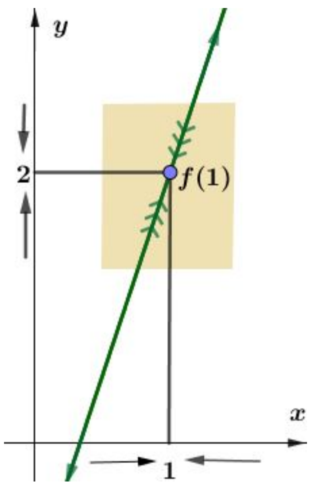


Figura 3.1: función $f(x)$

Para efecto del trabajo a desarrollar, la presentación intuitiva del concepto de límite puede quedarse corta, por ende es necesario presentar mediante una definición que evite ambigüedades como aquella de que significa estar próximo o cerca.

3.1.2. Definición Formal De Límite

Formalmente el limite de una función en punto se define de la siguiente manera:

Definición 3.1.1. Dada f una función de variable real y valor real definida en $A \subseteq \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, es L el límite de f cuando x se aproxima al punto de acumulación $a \in \mathbb{R}$, ($\lim_{x \to a} f(x) = L$).
Sí y solo sí, dado $\varepsilon > 0$, existe; $\delta > 0$, tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces, $|f(x) - L| < \varepsilon$

Nota 3.1.1. *Para efectos del límite estudiaremos lo que sucede en las proximidades de a. No interesa lo que suceda en a, es decir, si $f(a)$ existe o no es irrelevante.*

Una interpretación geométrica de la definición de límite de una función f se muestra en la figura 3.2, la cual presenta una porción de la grafica de f cerca del punto donde $x = a$. Como f no está necesariamente definida en a, no existe un punto en la grafica f con abscisa a. Observe que si x, en el eje horizontal , esta entre $a - \delta$ y $a + \delta$, entonces $f(x)$, en el eje vertical, estará entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$. En otras palabras, al restringir x, en el eje horizontal, de modo que esté entre $a - \delta$ y $a + \delta$, se restringe $f(x)$, en el eje vertical, de manera que esté entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$. Así:

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces, } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esta definición nos permite siempre hacernos la siguiente pregunta: ¿Que tan cerca de a se debe tomar un valor para x de modo que $f(x)$ diste de L un numero ε fijo?

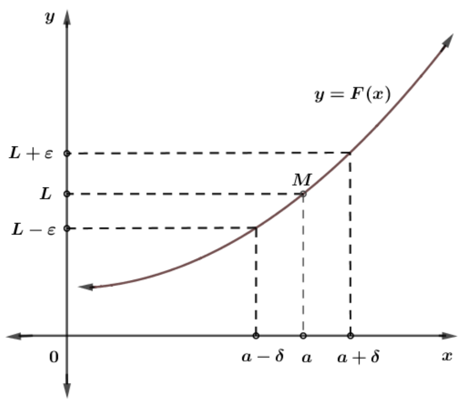


Figura 3.2: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Ahora se mostraran dos ejemplos, para ilustrar analíticamente la definición de límite.

Ejemplo 3.1.2. *Encontrar un δ que verifique la definición del límite si $\lim\limits_{x \to 1} 2x + 1 = 3$ y $\varepsilon = 0.1$.*

Solución.
Dado que $\varepsilon = 0.1$, se desea encontrar un δ que satisfaga. Tenemos :

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &< \varepsilon \\ |2x + 1 - 3| &< 0.1 \\ |2x - 2| &< 0.1 \\ 2|x - 1| &< 0.1 \\ |x - 1| &< 0.05 \end{aligned}$$

Todo esto significa, que si x dista de 1 en menos de 0.05, entonces $f(x)$ dista de 3 en menos de 0.1.

Ejemplo 3.1.3. *Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ pruebe que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 6$.*

.
Solución.

Dado $\varepsilon > 0$, debemos hallar el $\delta > 0$ que satisfaga; para ello buscamos todos los valores de x que satisfacen $|f(x) - 6| < \varepsilon$.

En efecto:

$$\begin{aligned} |(3x^2 + 2x + 1) - 6| &< \varepsilon \\ |3x^2 + 2x - 5| &< \varepsilon \\ |(x-1)(3x+5)| &< \varepsilon \\ |x-1||3x+5| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora, debemos hallar una acotación para $|3x + 5|$ para ello, como nos interesan los valores próximos a 1 podemos tomar $\delta_1 = \frac{1}{3}$ así;

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \\ &2 < 3x < 4 \\ &7 < 3x + 5 < 9 \end{aligned}$$

Luego, como hemos garantizado que, $3x + 5$ es positivo. Tendríamos:

$$7 < |3x + 5| \text{ y } |3x + 5| < 9$$

.
Luego;

$$\begin{aligned} &7 < |3x+5| \\ &\frac{1}{7} > \frac{1}{|3x+5|} \\ &\frac{\varepsilon}{7} > \frac{\varepsilon}{|3x+5|} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} |x-1||3x+5| &< \varepsilon \\ |x-1| &< \frac{\varepsilon}{|3x+5|} \\ |x-1| &< \frac{\varepsilon}{|3x+5|} < \frac{\varepsilon}{7} \\ |x-1| &< \frac{\varepsilon}{7} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que: $\delta = min\{\frac{1}{3}, \frac{\varepsilon}{7}\}$.

3.1.3. Propiedades De Los Límites

A continuación presentaremos algunas propiedades de los límites como teoremas:

Teorema 3.1.1 (Unicidad del limite)**.** Si una función f tiene límite; este es único, es decir,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Demostración. Será suficiente probar que si $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$ entonces $|L_1 - L_2| = 0$ por lo tanto $L_1 = L_2$

En efecto:

$$\begin{aligned}|L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &= |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \\ &\leq |(L_1 - f(x))| + |(f(x) - L_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Es decir: $|L_1 - L_2| < \varepsilon$, entonces, $L_1 = L_2$. □

Teorema 3.1.2 (Teorema del Sándwich.)**.** sea f, g y h funciones de modo que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in B(a;r)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, entonces, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 talque;

$$\begin{aligned}0 < |x-a| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad (1) \\ 0 < |x-a| < \delta_2 &\Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \quad (2)\end{aligned}$$

Si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Por (1) y (2) como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, se tiene que $L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$, tendríamos,

$$\begin{aligned}0 < |x-a| < \delta &\Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon\end{aligned}$$

En efecto, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

□

Teorema 3.1.3 (Propiedades de operaciones con limites.)**.** Sea f, g funciones y k una constante de modo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces:

***i*).** $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$

***ii*).** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$

***iii*).** $\lim\limits_{x\to a}[Kf(x)] = K \lim\limits_{x\to a} f(x) = KL$

***iv*).** $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$, si $L \neq 0$

***v*).** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

Demostración. ***i*).** Por hipótesis tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, en particular $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existen δ_1 y δ_2 de modo que;

$$\begin{aligned}0 < |x-a| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1) \\ 0 < |x-a| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)\end{aligned}$$

Si tomamos Si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ y sumamos (1) y (2) tendríamos,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

En virtud al teorema 2.2.9 se tiene que;

$$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

por tanto (3) sería,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \varepsilon \quad \therefore$$

ii). por hipótesis se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2|l|}$ y $\varepsilon_3 = 1$, existen δ_1, δ_2 y δ_3 de modo que:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$$

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|)}$$

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - M| < 1$$

$$\Leftrightarrow |g(x)| < 1 + |M|$$

Ahora si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, debemos ver que $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - g(x)L + g(x)L - LM| \\
&= |g(x)[f(x) - L] + L[g(x) - M]| \\
&\leq |g(x)[f(x) - L]| + |L[g(x) - M]| \\
&= |g(x)||[f(x) - L]| + |L||[g(x) - M]| \\
&< (1 + |M|)\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} + |L|\frac{\varepsilon}{2|L|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

En efecto, $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon \therefore$

iii). En virtud a la hipótesis se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, en particular $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|k|}$, existe $\delta > 0$ de modo que:

$$
\begin{aligned}
0 < |x-a| < \delta \Rightarrow & \, |f(x) - L| < \varepsilon_1 \\
& \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|} \\
& \Rightarrow |k||f(x) - L| < \varepsilon \\
& \Rightarrow |Kf(x) - KL| < \varepsilon \quad \therefore
\end{aligned}
$$

iv). Por hipótesis se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon_1 = \frac{|L|}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{|L|^2\varepsilon}{2}$, existen δ_1 y δ_2 de modo que:

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{|L|}{2} \qquad (1)$$

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{|L|^2\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

En virtud al teorema 2.2.14, se tiene que $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$, luego de (1) tendríamos:

$$
\begin{aligned}
& ||f(x)| - |L|| < \frac{|L|}{2} \\
\Rightarrow & \quad \frac{-|L|}{2} < |f(x)| - |L| < \frac{|L|}{2} \\
\Rightarrow & \frac{-|L|}{2} + |L| < |f(x)| < \frac{|L|}{2} + |L| \\
\Rightarrow & \frac{|L|}{2} < |f(x)| < \frac{3|L|}{2} \\
\Rightarrow & \frac{2}{3|L|} < \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|L|} \\
\Rightarrow & \frac{2}{3|L||L|} < \frac{1}{|f(x)||L|} < \frac{2}{|L||L|} \\
\Rightarrow & \frac{2}{3|L|^2} < \frac{1}{|f(x)||L|} < \frac{2}{|L|^2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Ahora si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, debemos ver que $|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}| < \varepsilon$, entonces,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right| &= \left|\frac{L-f(x)}{f(x)L}\right| \\ &= \frac{|L-f(x)|}{|f(x)L|} \\ &= \frac{|f(x)-L|}{|f(x)||L|} \\ &= \frac{1}{|f(x)||L|}|f(x)-L|\end{aligned}$$

por (2) y (3) se tiene que,

$$< \frac{2}{|L|^2}\,\frac{|L|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

En efecto, $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right| < \varepsilon$

v). Se tiene que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,\dfrac{1}{g(x)}$, luego lo que queríamos demostrar seria $\lim\limits_{x\to a} f(x)\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, por tanto es un resultado directo de *ii* y *iv*. □

3.2. Límites Laterales

Consideremos la función $f(x) = \sqrt{x-1}$. Se tiene que $f(x)$ no existe para los $x < 1$, es decir que f no esta definida para toda $B(1,r)$. En efecto $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ no tiene significado cuando x toma valores a la izquierda de uno. En este caso $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}$ como solo tiene sentido cuando x toma valores cercanos a uno por la derecha. En esta situación hablamos de ***límite lateral derecho.***

3.2.1. Definición De Límite Por La Derecha

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo abierto (a,b). Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a (a) por la derecha es L, se denota por $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, } 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

3.2.2. Definición De Límite Por La Izquierda

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo abierto (a,b). Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a (b) por la izquierda es M, se denota por $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = M$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, } 0 < b-x < \delta \Rightarrow |f(x)-M| < \varepsilon$$

Teorema 3.2.1. *El* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe y es igual a* L *sí y solo sí* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *existen y son iguales* L.

Demostración. $(\Rightarrow)$

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L, \wedge, \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

En efecto;

Por hipótesis se tiene:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Luego;

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow -\delta < x - a < \delta \\ &\Rightarrow a - \delta < x < a + \delta \end{aligned}$$

De aquí;

$$a - \delta < x, \ \wedge, \ x < a + \delta$$

Es decir, si $x \in (a - \delta, a)$, se tiene;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

Por otro lado, si $x \in (a, a + \delta)$, se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

$(\Leftarrow)$

Si el $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, y, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Por hipótesis se tiene:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, si. } 0 < a - x < \delta_1, \text{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ademas,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0, \text{ tal que, si. } 0 < x - a < \delta_2 \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

De aquí,

$$0 < a - x < \delta_1, \ \wedge, \ 0 < x - a < \delta_2$$

.

Luego si tomamos, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Se tiene;

$$0 < -(x-a) < \delta, \ \wedge, \ 0 < x - a < \delta$$

Es decir,

$$0 < \max\{-(x-a), (x-a)\} < \delta \ \Rightarrow |x-a| < \delta$$

Por tanto se tiene;

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, si. $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

$\square$

3.3. Continuidad De Una Función

Definición 3.3.1 (Definición De Función Continua En Un Número)**.** Se dice que la función f es continua en a si y sólo sí satisfacen las tres condiciones siguientes:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = L$;

(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = L = f(a)$

Nota 3.3.1. *Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a, entonces se dice que la función f es discontinua en a.*

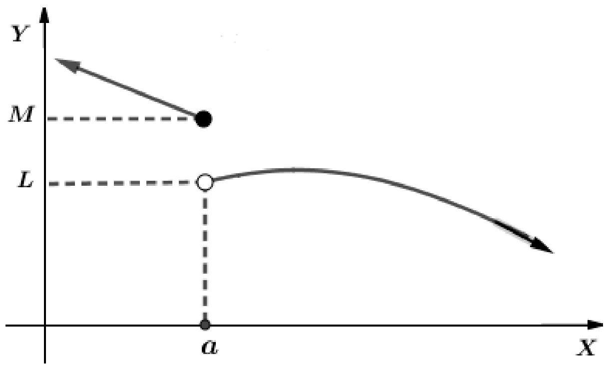


Figura 3.3: Discontinuidad en a.

Notemos que en la *figura 3.3* se muestra una gráfica de una función f, donde $f(a) = M$ por otro lado, se tiene que $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = M$ por tanto decimos que la función f no es continua en el punto a, dado que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no existe porque $M \neq L$.

La anterior definición, es la de combate, pero lo que se requiere para el desarrollo teórico de la matemática es emplear la notación ε, δ.
Sea una función f continua en un número a. Luego se tiene que: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ así, pues, aplicando la definición de limite con $L = f(a)$ se tiene que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Teorema 3.3.1. Si f y g son dos funciones continuas en el número a, entonces

***i*).** $f + g$ es continua en a

***ii*).** $f - g$ es continua en a

***iii*).** $f \cdot g$ es continua en a

***iv*).** f/g es continua en a es continua en a, considerando que $g(a) \neq 0$.

Demostración. ***i*).** En virtud al Teorema 3.1.3 inciso ***i***, se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}[f(x) + g(a)]$$

además por hipótesis tenemos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ en consecuencia
$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$ por tanto $f + g$ es continua en a

De manera análoga se resuelven los otros incisos.

□

3.3.1. Continuidad Uniforme

En este apartado haremos mención a un tema que pasa desapercibido en los libros de calculo, pero nos parece relevante estudiarlo con el fin de contrastar la *continuidad de una función* con la denominada **continuidad uniforme** de la misma función. La continuidad de una función es una propiedad local referido a los entornos o proximidades de un punto de referencia; por el contrario la continuidad uniforme es una propiedad global la cual hace referencia al comportamiento de una función dentro de un conjunto.

Definición Intuitiva De Continuidad Uniforme

Intuitivamente, se puede interpretar la continuidad uniforme de la siguiente manera: Se acota arbitrariamente la variación de la función f en cualquier subconjunto de su dominio y en consecuencia, para dicha acotación, siempre es posible hallar una distancia tal que para todos los puntos del conjunto comprometido que se encuentre dentro de esa distancia, se mantenga la acotación de la función.

Definición Formal De Continuidad Uniforme

Consideremos una función f de variable real definida en $D \subseteq \mathbb{R}$, diremos que f es uniformemente continua si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que para cualquier $x, y \in D$ se cumple que $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Notemos que en la continuidad de una función el δ dependía de ε y de x, por el contrario en la continuidad uniforme δ depende solo de ε.

Ejemplo 3.3.1. *Demostrar que* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 2x + 5$ *es uniformemente continua.*

Solución.

Dado $\varepsilon > 0$, debemos probar que existe $\delta > 0$ tal que para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - fy)| < \varepsilon$. (Lo importante es que δ sólo depende ε y no de un punto en particular).

En efecto;

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |2x + 5 - (2y + 5)| \\
&= |2x + 5 - 2y - 5| \\
&= |2(x - y)| \\
&= 2|x - y| < 2\delta = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon \\
&= \delta = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.2. *Demostrar que* $f(x) = x^2$ *no es uniformemente continua en el intervalo de* $[0, +\infty)$

Solución.

Supongamos que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua, esto significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque, para todo $x, y \in [0, +\infty)$ se cumple $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

En particular para $\varepsilon = 1$ debe existir un $\delta > 0$ tal que, para todo $x, y \in [0, \infty)$ se cumple $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < 1$.

Consideremos un intervalo de radio menor que δ (si el radio δ cumple, el de radio menor que δ también cumple con la definición).

En efecto;

Sea n_0 un número natural fijo y consideremos $\frac{1}{n_0} < \delta$ de manera que $x = n_0$, $y = n_0 + \dfrac{1}{n_0}$. Por tanto si $1x - y| < \frac{1}{n_0} < \delta$ debe suceder que $|f(x) - f(y)| < 1$.

Veamos;

$$|f(x) - f(y)| = \left| n_0^2 - \left(n_0 + \frac{1}{n_0} \right)^2 \right|$$

$$= \left| n_0^2 - \left(n_0^2 + 2 + \frac{1}{n_0^2} \right) \right|$$

$$= \left| n_0^2 - n_0^2 - 2 - \frac{1}{n_0^2} \right|$$

$$= \left| -2 - \frac{1}{n_0^2} \right|$$

$$= \left| -1 \left(2 + \frac{1}{n_0^2} \right) \right|$$

$$= |2 + \frac{1}{n_0^2}|$$
$$= 2 + \frac{1}{n_0^2} > 1$$

Lo cual es una contradicción por tanto $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $[0, +\infty)$.

Teorema 3.3.2. Toda función uniformemente continua, es continua.

Demostración. Dada f una función uniformemente continua, tendríamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque para cualquier x, y en el dominio de f se tiene que;

$$|x - y| < \delta \;\text{ entonces }\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Como x y y son arbitrarios y representan cualquier punto del dominio de f, entonces podemos tomar $y = a$; de esta manera tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| z\delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, es decir, que f es continua en a.

El reciproco de este teorema no se cumple y esto se puede evidenciar en el ejemplo 3.3.2 que hemos expuesto; es decir, el hecho de que f es una función continua no implica que f sea uniformemente continua.

□

Capítulo 4

Tres Teoremas Fuertes Del Análisis Matemático Básico

Hasta el momento hemos trabajado la continuidad de una función referida a un punto de su dominio; es decir, la continuidad puntual o focal. A partir de la continuidad puntual, podemos extender la definición de continuidad de una función a un conjunto de su dominio, para ello basta que sea continua en cada punto del conjunto.
Los tres teoremas siguientes tiene la particularidad de usar como hipótesis la continuidad de una función en un intervalo cerrado de números reales. Estos se consideran herramientas básicas, para soportar algunos resultados importantes del análisis matemático y garantizar la existencia de soluciones para problemas que deriven de ecuaciones algebraicas. Debido a estos hechos es que se conocen como teoremas fuertes del calculo.

4.1. Presentación De Los Tres Teoremas Fuertes Del Análisis Matemático Básico

Teorema 4.1.1. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$ (Lo cual equivale a decir $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos), entonces existe algún c en $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Teorema 4.1.2. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$; es decir, existe $N \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $x \in [a, b]$.*

Teorema 4.1.3. *si f es continua $[a, b]$, entonces f alcanza en $[a, b]$ sus valores máximo y mínimo.*

4.2. Demostraciones De Los Tres Teoremas Fuertes

El primer teorema enunciado aquí, se suele encontrar en los libros de análisis como *teorema de Bolzano*, para demostrarlo nos apoyaremos en la siguiente propiedad de las funciones continuas, la cual estableceremos como teorema.

Teorema 4.2.1. ***conservación del signo de funciones continuas**:*
Sea f continua en c y $f(c) \neq 0$. Existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

Demostración. Supongamos que $f(c) > 0$; como f es continua en c, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Tomando en particular $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que;

$$\begin{aligned}
c-\delta < x < c+\delta &\Rightarrow |f(x)-f(c)| < \frac{f(c)}{2} \\
&\Rightarrow -\frac{f(c)}{2} < f(x)-f(c) < \frac{f(c)}{2} \\
&\Rightarrow f(c)-\frac{f(c)}{2} < f(x) < f(c)+\frac{f(c)}{2} \\
&\Rightarrow \frac{2f(c)-f(c)}{2} < f(x) < \frac{2f(c)+f(c)}{2} \\
&\Rightarrow \frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}
\end{aligned}$$

Luego, como $f(c) > 0$ entonces concluimos que $f(x) > 0$ y por tanto, $f(c)$ y $f(x)$ tienen el mismo signo en $(c-\delta, c+\delta)$.

De manera análoga procedemos si $f(c) < 0$, pero tomando $\varepsilon = -\dfrac{f(c)}{2}$ con el fin de garantizar que $\varepsilon > 0$.

□

Nota 4.2.1. *Si existe continuidad solo en un lado de c, entonces existe los intervalos* $[c, c+\delta)$ *o* $(c-\delta, c]$*, en el cual f tiene el mismo signo que* $f(c)$*.*

Demostración. **Teorema 4.1.1**

Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$; debemos encontrar por lo menos un valor de x entre a y b para el cual $f(x) = 0$. Notemos que pueden haber varios valores de x entre a y b para los cuales $f(x) = 0$, pero en nuestra demostración nos centraremos en encontrar el mayor x para el cual $f(x) = 0$.

En efecto; sea S el conjunto formado por todo los puntos del intervalo $[a, b]$ para los cuales $f(x) \leq 0$. veamos que $S \neq \emptyset$, en efecto; por lo menos $a \in S$ dado que asumimos $f(a) < 0$. Ahora bien; como $S \neq \emptyset$ y S esta acotado superiormente ($S \subseteq [a, b]$), entonces tiene extremo superior. Llamemos a este supremo c, es decir, $SupS = c$. El objetivo es demostrar que $f(c) = 0$.

Como $f(c) \in \mathbb{R}$; por la ley de tricotomía tendríamos que $f(c) > 0$ ó $f(c) < 0$ ó $f(c) = 0$.

Consideremos que $f(c) > 0$. Luego por el *teorema 4.2.1*, tendríamos que existe un intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ para el cual $f(x) > 0$ si x esta en este intervalo; por tanto, por la condición que tienen los puntos que pertenecen a S se tiene que ninguno de ellos podría estar a la derecha de $c-\delta$; es decir, que $c-\delta$ seria una cota superior de S, pero $c-\delta < c$ y como c es el $SupS$ esto es imposible. Es decir, se ha llegado a una contradicción a partir del supuesto que $f(c) > 0$; en consecuencia, esta opción no puede darse.

Consideremos que $f(c) < 0$. De nuevo por el *teorema 4.2.1* tenemos que existe $(c-d, c+d)$ para el cual $f(x) < 0$ si x pertenece a este intervalo; es decir, para algún $x > c$, se tiene que $f(x) < 0$ lo cual contradice que c sea una cota de S, en consecuencia asumir que $f(c) < 0$ nos lleva a una contradicción. Queda solo la posibilidad que $f(c) = 0$; y como $a < c < b$ dado que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, quedando así demostrado nuestro primer teorema fuerte. □

Nuestro segundo teorema se suele encontrar como teorema de acotación para funciones continuas, para demostrarlo primero enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2. *Sea f una función continua en a, entonces existe un intervalo* $(a-\delta, a+\delta)$ *en el cual f es acotada.*

Demostración. Se tiene que f es continua en a, es decir, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque para todo x, si $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Solo basta con aplicar esta propiedad para un $\varepsilon > 0$ en particular, (cualquier $\varepsilon > 0$ nos serviría). Tomando $\varepsilon = 1$ se deduce que existe un $\delta > 0$ tal que para todo x si:

$$\begin{aligned} a-\delta < x < a+\delta &\Rightarrow |f(x)-f(a)| < 1 \\ &\Rightarrow -1 < f(x)-f(a) < 1 \\ &\Rightarrow -1+f(a) < f(x) < 1+f(a) \end{aligned}$$

De aquí se tiene que $f(x)$ esta acotado superiormente por $1+f(a)$ e inferiormente por $-1+f(a)$; es decir, $f(x)$ es acotada si $x \in (a-\delta, a+\delta)$. □

Demostración. **Teorema 4.1.2**

Supongamos que f no es acotada en $[a,b]$. Tomemos c_1 como el punto medio de $[a,b]$, de esta forma $[a,b]$ tendría dos subintervalos $[a,c_1]$ y $[c_1,b]$; en el que por lo menos en uno de ellos f no es acotada, pues de no ser así f seria acotada en $[a,b]$. Sea $[a_1,b_1]$ el intervalo en el cual f no es acotada; tomemos c_2 como el punto medio de $[a_1,b_1]$ de este modo ocurriría el mismo suceso anterior; es decir, f no es acotada en $[a_1,c_2]$ o en $[c_2,b_1]$; de nuevo llamemos $[a_2,b_2]$ al intervalo en el cual f no es acotada. Es de aclarar que f puede no ser acotada en ninguno de los dos intervalos que surgen después de tomar los puntos medios, pero asumamos que si continuamos el proceso reiteradamente el intervalo $[a_n,b_n]$ es la mitad izquierda de cada uno. Notemos que la longitud del intervalo $[a_n,b_n]$ tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$.

Sea A él conjunto de los extremos izquierdos $a, a_1, a_2, ..., a_n$; A es diferente de vació (como mínimo $a \in A$), y a su vez A es acotado superiormente, por tanto posee un $Q \in [a,b]$ que es su extremo superior. Como f es continua en $[a,b]$ entonces es continua en Q; por tanto por el *teorema 4.2.2*, se tiene que f esta acotada superiormente por $f(Q)+1$ en el intervalo $(Q-\delta, Q+\delta)$.

Si $Q = a$ el intervalo seria $[a, Q+\delta)$ y si $Q = b$ el intervalo seria $(Q-\delta, b]$. Como se tiene que la longitud de los intervalos $[a_n,b_n]$ tiende a 0, entonces $[a_n,b_n]$ es un subconjunto de $(Q-\delta, Q+\delta)$ para un valor de n apropiado, por tanto f también es acotada en $[a_n,b_n]$; lo cual es una contradicción, por ende nuestro supuesto inicial es falso. Es decir, f si es acotada en $[a,b]$. De esta manera queda demostrado nuestro segundo teorema. □

Nuestro tercer Teorema significativo, es el *teorema de Weiertrass de máximos y mínimos*, para demostrarlo razonaremos vía reducción al absurdo.

Demostración. **Teorema 4.1.3**

Por hipótesis se tiene que f es continua en el intervalo $[a,b]$; por el *teorema 4.1.2* se tiene que f es acotada en dicho intervalo; es decir, el conjunto de las imágenes de f para el intervalo $[a,b]$ es acotado, de modo que existe $m, n \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq n$, por tanto este conjunto al ser diferente de vacío y acotado posee extremo superior e inferior.

Demostremos que f alcanza un valor máximo en el intervalo $[a,b]$, el cual corresponde precisamente al extremo superior (que llamaremos n) del conjunto de los $f(x)$ con $x \in [a,b]$. Es decir, existe almenos un $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = n$.

Supongamos que $f(x) \neq n$ para todo $x \in [a,b]$. Consideremos a g una función definida de la forma $g(x) = \dfrac{1}{n-f(x)}$, para todo $x \in [a,b]$. Notemos que g es continua en $[a,b]$ pues bajo nuestro supuesto $n - f(x)$ es diferente de 0. Además, $g(x)$ es mayor que cero para todo $x \in [a,b]$.

En virtud al *teorema 4.1.2* tenemos que la función g es acotada; luego, tomando t como una cota superior se tiene:

$$
\begin{aligned}
g(x) \leq t &\Rightarrow \frac{1}{n - f(x)} \leq t \\
&\Rightarrow n - f(x) \geq \frac{1}{t} \\
&\Rightarrow -f(x) \geq \frac{1}{t} - n \\
&\Rightarrow f(x) \leq n - \frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

De lo anterior se tiene que $n - \dfrac{1}{t}$ es una cota superior de f en el intervalo $[a, b]$. Es decir, $f(x) \leq n - \dfrac{1}{t} < n$ lo cual es absurdo dado que $Sup f = n$. Como hemos negado nuestra tesis y hemos llegado a algo absurdo, solo nos queda aceptar que f si alcanza un punto máximo en el intervalo $[a, b]$; es decir, existe un $x_1 \in [a, b]$ para el cual $f(x_1) = n$.

De manera análoga el lector puede probar que f alcanza un punto mínimo en el intervalo $[a, b]$; para esto podrá tomar a h como una función auxiliar definida de la forma $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - m}$, si $x \in [a, b]$.

□

Habíamos dicho que estos tres teoremas fuertes, tienen la particularidad de que su hipótesis es que la función sea continua en cada punto del intervalo $[a, b]$, pues de no ser así, la tesis de cada uno de los teoremas podrían no darse. Está salvedad se hace con el objetivo de resaltar, que para todo $x \in [a, b]$ la función f debe ser continua en x. Para completar este propósito, analizaremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.2.1. *Sea la función f definida de la forma:*

$$
f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \quad 1 \leq x \leq 5 \\ \\ -3 & si \quad -2 \leq x < 1 \end{cases}
$$

la cual se representa en el siguiente gráfico.

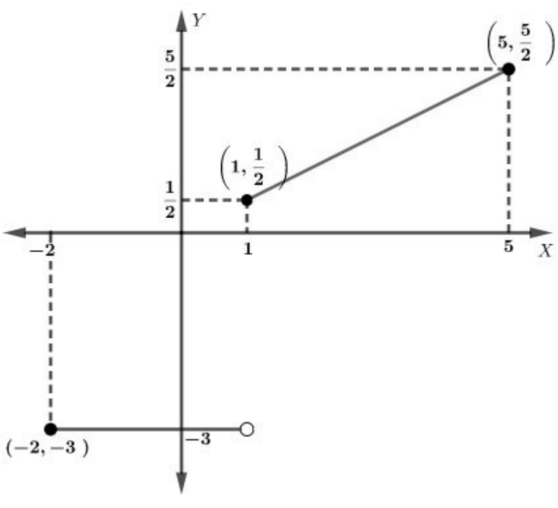


Figura 4.1: función $f(x)$

Notemos que f está definida en el intervalo $[-2, 5]$ y que $f(-2) < 0 < f(5)$; pero f no es continua en el punto $x = 1$, lo cuál es suficiente para que no exista un $x \in [-2, 5]$ tal que $f(x) = 0$, así observamos que por único punto de discontinuidad se invalida la conclusión del *teorema 4.1.1.*

Ejemplo 4.2.2. *Ahora consideremos la función h definida de la siguiente forma:*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

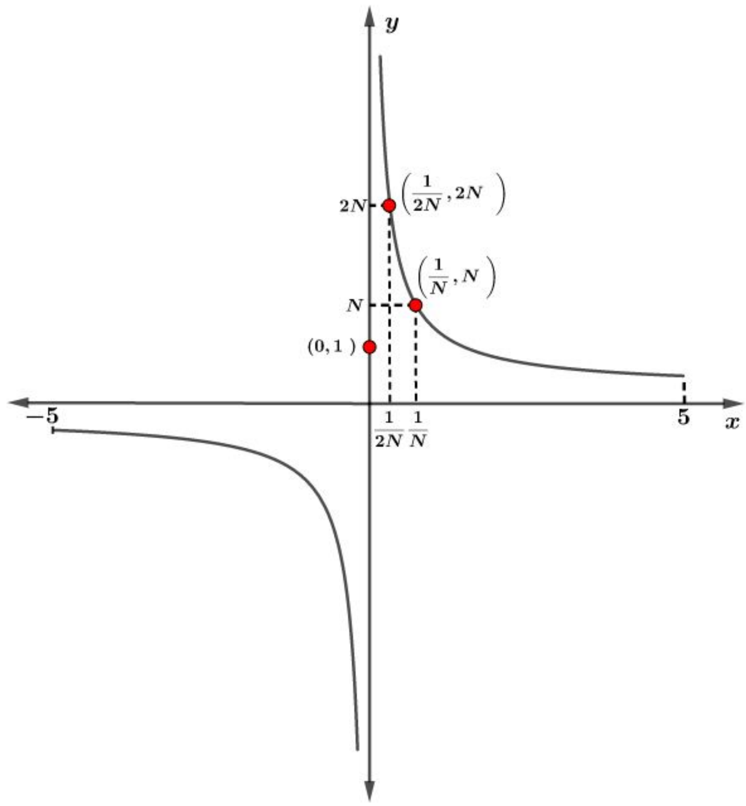


Figura 4.2: función $h(x)$

El dominio de la función h, son todos los $x \in \mathbb{R}$, centrándonos en el intervalo $[-5, 5]$, por supuesto h esta definida en cada punto de dicho intervalo pero no es continua en 0, dado que $\lim_{x \to 0} h(x)$ no existe.Veamos que h no esta acotado en el intervalo $[-5, 5]$. En efecto, tomemos un $N > 0$ como cota superior de h, entonces $\dfrac{1}{2N} \in [-5, 5]$. Ahora $h(\frac{1}{2N}) = 2N$ y $2N > N$ entonces ningún $N > 0$ es cota superior de $h(x)$ si $x \in [-5, 5]$; es decir, h no es acotada. De esta manera, nos damos cuenta que h no satisface la tesis del *teorema 4.1.2* si la estudiamos en cualquier intervalo que contenga a cero, dado que h no es continua en éste punto.

Ejemplo 4.2.3. *Consideremos la función g, definida mediante:*

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x < \frac{3}{2} \\ 0 & si \quad x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

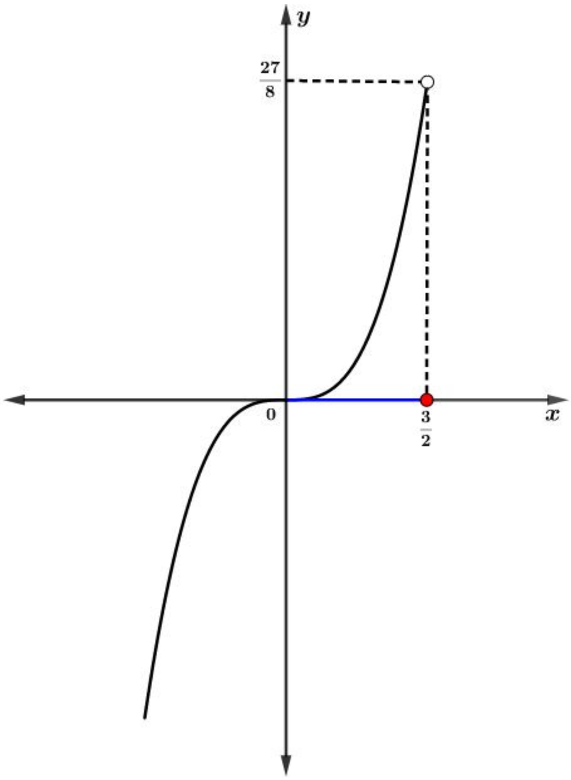


Figura 4.3: función $g(x)$

Si analizamos a g en el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$, notamos que $5 > g(x)$ lo cual satisface la conclusión del *teorema 4.1.2*, aunque g no es continua en el punto $\frac{3}{2}$ porque $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} g(x)$ no existe.
Notemos que no existe $y_1 \in [0, \frac{3}{2}]$ tal que $g(y_1)$ sea el máximo valor que alcanza g en dicho intervalo. De manera desprevenida se puede pensar que $\frac{27}{8}$ es el máximo de g si $y_1 = \frac{3}{2}$; pero esto no es así, dado que el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{8}\right)$ no es de g.
Este ejemplo muestra lo fuerte que es el *teorema 4.1.3*, en consideración con el *teorema 4.1.2*.

Ejemplo 4.2.4. *Por ultimo, definimos la función t de la forma:*

$$t(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ -2x + 10 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

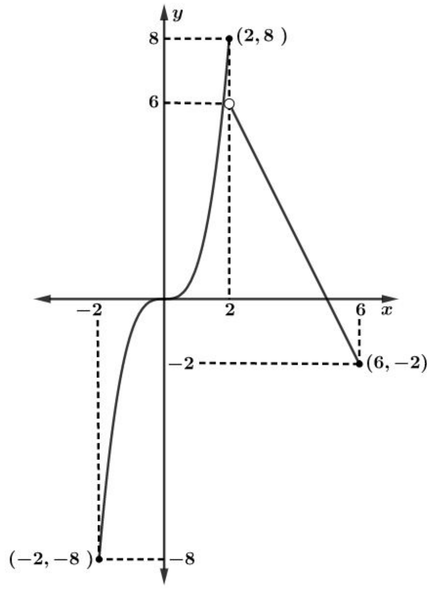


Figura 4.4: función $t(x)$

Analicemos la función t en el intervalo $[-2, 6]$. veamos que t esta definida para cada punto del intervalo en cuestión, pero no es continua en $x = 2$; a pesar de esto, se evidencia que t cumple las conclusiones de los tres teoremas fuertes. es decir existe un $x_0[-2, 6]$ para el cual $t(x_0) = 0$; además t es acotada (cualquier valor mayor a 8 es cota superior de $t(x)$ y por su puesto la función t alcanza su valor máximo cuando $x = 2$.
A partir de este ejemplo, podemos evidenciar que los tres teoremas fuertes tienen como hipótesis condiciones suficientes más no necesarias, es decir, se puede asegurar que la conclusión de los tres teoremas se alcanza siempre y cuando la función sea continua en un intervalo cerrado; pero no sabemos si se alcanzan o no las condiciones al presentar discontinuidad.

Una generalización del teorema 4.1.1 se define de la siguiente manera;

Teorema 4.2.3. *si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a) < p < f(b)$ ó $f(b) < p < f(a)$ existe por lo menos algún $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = p$.*

Las siguientes gráficas nos ilustran la generalización del teorema 4.1.1, es decir;

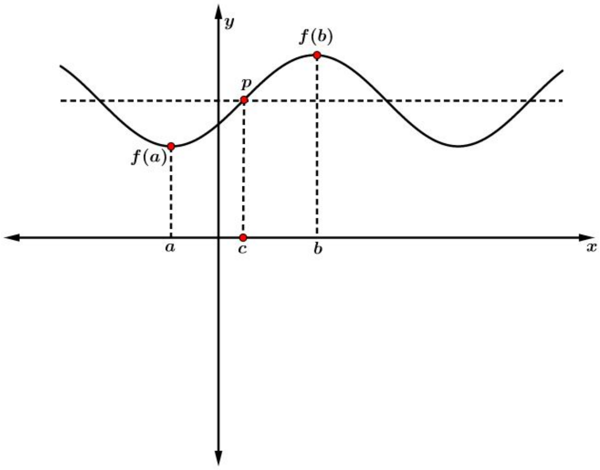


Figura 4.5: función f

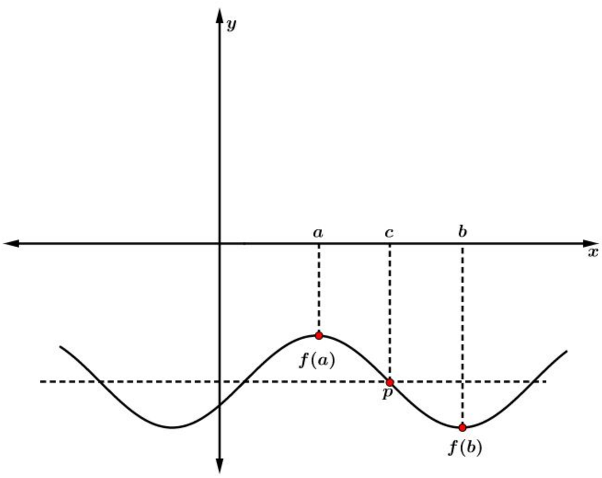


Figura 4.6: función f

La figura 4.5 representa el caso cuando $f(a) < p < f(b)$, mientras que la figura 4.6 representa el caso cuando $f(b) < p < f(a)$.

Demostración. verifiquemos el primer caso, es decir;

si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < p < f(b)$ debemos ver que $f(c) = p$ para algún $c \in [a, b]$ en efecto;

Se construye una función g se la siguiente manera, $g(c) = f - p$, para todo $c \in [a, b]$. Esta función g es continua por corresponder a una diferencia de funciones continuas, por hipótesis se tiene que $g(a) < p < f(b)$ esto implica que $f(a) - p < p - p < f(b) - p$ y como $g(a) = f(a) - p$

entonces $g(a) < 0 < g(b)$, en virtud al teorema 4.1.1 existe algún $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$ esto a su vez significa que $0 = f(c) - p$, por tanto $f(c) = p$.

Gráficamente seria :

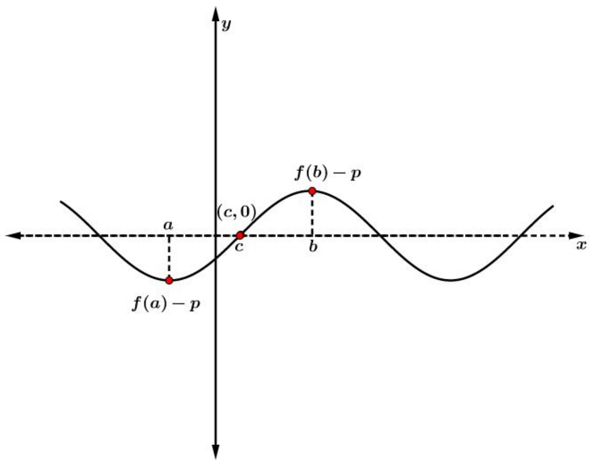


Figura 4.7: función $g = f - p$

ahora verifiquemos el segundo caso es decir;

si f es continua en $[a, b]$ y $f(b) < p < f(a)$ debemos ver que $f(c) = p$ para algún $c \in [a, b]$ en efecto;

Como f es continua entonces $-f$ también es continua en $[a, b]$ (producto de dos funciones continuas). por hipótesis se tiene que $f(b) < p < f(a)$ entonces $-f(a) < -p < -f(b)$.
En virtud al primer caso, existe algún $c \in [a, b]$ tal que $-f(c) = -p$; esto a su vez significa que $f(c) = p$ □

Nota 4.2.2. *Esta generalización recibe el nombre de teorema del valor medio.*

Enunciaremos como teorema una extensión del valor medio.

Teorema 4.2.4. *Todo número positivo posee una raíz cuadrada. en otras palabras, si $\alpha > 0$, entonces existe algún número c tal que $c^2 = \alpha$.*

Demostración. consideremos la función $f(x) = x^2$, y, $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$ en efecto:
como $\alpha > 0$ y $f(b) > \alpha$ entonces $f(0) < \alpha < f(b)$ en virtud al teorema del valor intermedio aplicado en el intervalo $[0, b]$ se tiene que: existe algún $c \in [0, b]$ tal que $f(c) = \alpha$ y como $f(c) = c^2$ esto significa que $c^2 = \alpha$. □

De manera análoga se puede demostrar que todo número positivo posee una raíz n-ésima, para cualquier valor de n. Este resultado es más amplio en el caso de que n sea un numero impar, dado que todo $\alpha \in \mathbb{R}$ posee una raíz n-ésima; afirmar esto implica la siguiente ecuación:

$$x^n - \alpha = 0$$

Esta ecuación da pie a la siguiente generalización definida como teorema.

Teorema 4.2.5. *si n es impar entonces cualquier ecuación*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

posee una raíz real.

Demostración. Consideremos la función

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0;$$

Ahora debemos ver que f puede ser positiva o negativa, intuitivamente se puede interpretar de la siguiente manera; para un x tal que $|x|$ sea muy grande, la función f se puede interpretar como $g(x) = x^n$. Ya que la fusión depende de los valores que tome x, cuando x sea mayor que cero la función es positiva y cuando x sea menor que cero la fusión es negativa.

Con el fin de interpretar el comportamiento de la función f escribamos de la siguiente manera.

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = x^n \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \tfrac{a_0}{x^n}\right)$$

Tengamos en cuenta lo siguiente; aplicando la desigualdad triangular a partir de $\frac{a_{n-1}}{x}$ se tiene lo siguiente;

$$\left|\tfrac{a_{n-1}}{x} + \tfrac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \tfrac{a_0}{x^n}\right| \leq \tfrac{|a_{n-1}|}{|x|} + ... + \tfrac{|a_0|}{|x^n|}$$

En consecuencia si elegimos un x que satisfaga.

$|x| > 1, 2n|a_{n-1}|, ..., 2n|a_0|,$

entonces $|x^k| > |x|$ esto implica que, se cumple la siguiente desigualdad;

$$\tfrac{|a_{n-k}|}{|x^k|} < \tfrac{|a_{n-k}|}{|x|} < \tfrac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \tfrac{1}{2n}$$

luego

$$\left|\tfrac{a_{n-1}}{x} + \tfrac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \tfrac{a_0}{x^n}\right| \leq \tfrac{1}{2n} + ... + \tfrac{1}{2n}$$

de manera que

$$\left|\tfrac{a_{n-1}}{x} + \tfrac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \tfrac{a_0}{x^n}\right| \leq \tfrac{1}{2}$$

aplicando la propiedad de valor absoluto se tiene que

$$-\tfrac{1}{2} \leq \tfrac{a_{n-1}}{x} + \tfrac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \tfrac{a_0}{x^n} \leq \tfrac{1}{2}$$

es evidente que

$$\tfrac{1}{2} \leq 1 + \tfrac{a_{n-1}}{x} + \tfrac{a_{n-2}}{x^2} + ... + \tfrac{a_0}{x^n}$$

consideramos un $x_1 > 0$ que satisfaga $|x_1| > 1, 2n|a_{n-1}|, ..., 2n|a_0|$ entonces al multiplicar por x_1^n se cumple que:

$$\tfrac{x_1^n}{2} \leq x_1^n \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x_1} + \tfrac{a_{n-2}}{x_1^2} + ... + \tfrac{a_0}{x_1^n}\right) = f(x_1)$$

por tanto $f(x_1) > 0$.

En cambio si consideramos un $x_2 < 0$ que satisfaga $|x_2| > 1, 2n|a_{n-1}|, ..., 2n|a_0|$ entonces es evidente que al multiplicar por x_2^n la desigualdad cambia, es decir;

$$\tfrac{x_2^n}{2} \geq x_2^n \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x_2} + \tfrac{a_{n-2}}{x_2^2} + ... + \tfrac{a_0}{x_2^n}\right) = f(x_2)$$

por tanto $f(x_2) < 0$.

Finalmente aplicando el teorema 4.1.1 al intervalo $[x_1, x_2]$ implica que existe algún $c \in [x_1, x_2]$ tal que $f(c) = 0$.

como $f(c) = 0$, esto prueba que, si n es impar entonces la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$ tiene una raíz real.

$\square$

A través de los siguientes ejercicios mostraremos el uso de de alguno de los teoremas mencionados en este capitulo.

Ejercicio 4.2.1. Dada la función $f(x) = e^x + 2x$, hallar un intervalo de longitud menor a 0.2, en el cual se encuentre una raíz real para f.

Solución.

Para poder usar el Teorema de Bolzano, debemos garantizar que $f(x)$ es continua el un intervalo cerrado y a su vez el producto de las imágenes de los extremos del intervalo deberá ser menor a cero.
Notemos que $f(x)$ es continua en todo su dominio, por lo tanto es continua en el intervalo $[-1, 0]$, ahora veamos si se cumple que $f(-1) \cdot f(0) < 0$.
$f(-1) = e^{-1} + 2(-1) = \dfrac{1}{e} - 2 \approx -1.6321$

$f(0) = e^0 + 2(0) = 1 + 0 = 1$
a partir de lo anterior, se puede afirmar que existe $x \in [-1, 0]$ tal que $f(x) = 0$. es decir que podemos seguir hallando intervalos que estén contenidos en $[-1, 0]$, en los cuales se cumpla la hipótesis del teorema de Bolzano.
Para esto procederemos de la siguiente forma; dividiremos el intervalo en dos sub-intervalos, tomando el punto medio de $[-1, 0]$, obteniendo de esta manera los intervalos $[-1, -0.5]$ y $[-0.5, 0]$, ahora hallamos $f(-0.5) = e^{-0.5} + 2(0.5) \approx -0,3934$, es decir que podemos afirmar que la solución esta en intervalo $[-0.5, 0]$ dado que en este intervalo se cumple la hipótesis del teorema de Bolzano, puesto que $f(-0.5) \cdot f(0) < 0$. Procederemos de igual forma, hasta encontrar el intervalo de longitud menor a 0.2.
Los nuevos sub-intervalos son $[-0.5, -0.25]$ y $[-0.25, 0]$.
Luego $f(-0.25) = e^{-0.25} + 2(0.25) \approx 0,2788$, es decir que el intervalo que satisface es $[-0.5, -0.25]$.
Los nuevos sub-intervalos son $[-0.5, -0.25]$ y $[-0.25, 0]$.
Luego $f(-0.25) = e^{-0.25} + 2(0.25) \approx 0,2788$, es decir que el intervalo que satisface es $[-0.5, -0.25]$.
Ahora los nuevos sub-intervalos son $[-0.5, -0.375]$ y $-0.375, -0.25]$
Luego $f(-0.375) = e^{-0.375} + 2(0.375) \approx 0,0628$, es decir que el intervalo que satisface es $[-0.375, -0.25]$.
Notemos que la longitud de este intervalo es menor a 0.2 y en virtud al teorema de Bolzano existe $x \in [-0.375, -0.25]$ talque $f(x) = 0$.
El algoritmo anterior se puede hacer de manera infinita, y de este modo conseguir una mejor aproximación a la solución, pero es de aclarar que si en dado caso alguno de los extremos del intervalo que se escoja tiene como imagen 0, en ese momento hemos encontrado la solución exacta.

Ejercicio 4.2.2. Demuestre que para cada ecuación existe al menos un $x \in R$ talque x las satisface.

i) $sen x + x + 1 = 0$.

ii) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + sen^2 x} = 119$.

Solución.

i. Hagamos $f(x) = sen x + x + 1$, de esta manera debemos mostrar que existe $x_1 \in R$ talque

$f(x_1) = 0$.

Notemos que f es una función continua en todo su dominio, en particular en el intervalo $[-1, 0]$; como, $f(-1) = sen(-1) - 1 + 1 = sen(-1) = -sen(1) \approx -0,84$ y $f(0) = sen(0) + 0 + 1 = 1$, es decir, $f(-1)f(0) < 0$, por tanto f satisface la hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 0]$, el cual nos garantiza que existe $x_1 \in [-1, 0]$ para el cual $f(x_1) = 0$, en efecto; existe $x = x_1 \in \mathbb{R}$ que es solución a la ecuación $senx + x + 1 = 0$.

ii) tenemos que $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + sen^2 x} = \dfrac{x^{179} + x^{181} + x^{179} sen^2 x + 163}{1 + x^2 + sen^2 x} = 119$ luego sea; $g(x) = \dfrac{x^{179} + x^{181} + x^{179} sen^2 x + 163}{1 + x^2 + sen^2 x}$; es claro, que g es continua en todo el eje real, por lo tanto lo es en el intervalo $[0, 1]$. Además, tenemos que $g(0) = 163$ y $g(1) = \dfrac{166 + sen^2(1)}{2 + sen^2(1)} \approx 61,55$; es decir, $g(1) < 119 < g(0)$; por lo tanto g satisface la hipótesis del teorema 4.2.3 lo cual nos garantiza que existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $g(\alpha) = 119$. Por lo cual hemos probado que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que x es solución de la ecuación $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + sen^2 x} = 119$ y este x es precisamente $x = \alpha$

Ejercicio 4.2.3. sea f y g funciones continuas, tales que $f^2 = g^2$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; demuestre que $f(x) = g(x)$ ó $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

Supongamos que existe $x_1 \in \mathbb{R}$ talque $f(x_1) \neq g(x_1)$ y $f(x_1) \neq -g(x_1)$; es decir, $f(x_1) - g(x_1) \neq 0$ y $f(x_1) + g(x_1) \neq 0$. Lo que implica que;

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow [f(x_1) - g(x_1)][f(x_1) + g(x_1)] \neq 0 \\
&\Rightarrow [f(x_1)]^2 - [g(x_1)]^2 \neq 0 \\
&\Rightarrow [f(x_1)]^2 \neq [g(x_1)]^2
\end{aligned}$$

Es decir, existe $x_1 \in \mathbb{R}$ talque $f^2 \neq g^2$; lo cual contradice nuestra hipótesis, por tanto nuestro supuesto es falso; quedando así demostrado que para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = g(x)$ ó $f(x) = -g(x)$.

Ejercicio 4.2.4. *si f y g son funciones continúan en $[a, b]$ talque $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ entonces sus gráficas se cortan.*

Solución.

Definamos la función t de modo que $t(x) = f(x) - g(x)$, es claro que t es continua en el intervalo $[a, b]$. Tenemos que $t(a) = f(a) - g(a) > 0$ y $t(b) = f(b) - g(b) < 0$, por tanto la función t satisface la hipótesis del teorema de Bolzano, el cual nos garantiza que existe $c \in [a, b]$ tal que $t(c) = 0$; por tanto, $f(c) - g(c) = 0$ en consecuencia $f(c) = g(c)$, es decir, que en $x = c$ las gráficas de las funciones f y g se cortan.

Bibliografía

[1] Spivak, Michael. *Cálculo Infinitesimal. 2 ed.* Barcelona: Reverté, S.A. 1996.

[2] Apostol, Tom M. *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal; V.1. 2 ed.* Barcelona: Reverté, S.A. 1999.

[3] Lima, Elon Lages. *Curso de análise; V.1. 14 ed*, 2017. Gian Calvi criação Visual Ltda. e Sérgio R. Vaz.

[4] Fernández Plaza, José Antonio. (2010). *Unidad didáctica: Límite y continuidad de funciones (tesis de maestría no publicada)* . Universidad de Granada, España. Disponible en:

http://funes.uniandes.edu.co/856/

[5] Mendoza Guzmán, Jorge Enrique. *De la ecuación a la función: las primeras Huellas del análisis.* "Revista Ejes, Educación Matemática", 2015, V.3, fasc.N/A, p. 79-85, ISSN: 2357-3724 Disponible en:

http://funes.uniandes.edu.co/9804/1/Mendoza2015De.pdf

[6] Días Gómez, José Luis. *El concepto de función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones.* "Revista El Cálculo y su Enseñanza", 2013, V.4, Cinvestav-IPN, p. 13-25. Disponible en:

http://funes.uniandes.edu.co/14913/1/Diaz2013El.pdf

[7] Molfino Vigo, Verónica; Buendía Abalos, Gabriela. *El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización.* "Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias", 2010, V.5, N^o.1, p. 27-41, E-ISSN: 1850-6666. Disponible en:

https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319425002

[8] Bingham, Thomas R. *Newton y el desarrollo del cálculo.* "Revista Boletín de matemáticas", 1973, V.7, N^o.2, p. 113- 130, ISSN-e 0120-0380. Disponible en:

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6960123

[9] Ugalde, William J. *Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje.* "Revista digital Matemática, Educación e Internet", 2014, V.14, N^o.1, p. 1-48, ISSN: 1659-0643. Disponible en:

https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1564

[10] Shílov, Gueorguiy Evguéniyevich. *¿Qué es una función?* . "Revista rusa matematika v Shkole (Matemática en la Escuela)", 2004, N^o.25, p. 137-147, ISSN: 1131-7787. Disponible en:

https://docplayer.es/224317-Que-es-una-funcion-g-e-shilov.html

[11] Blázquez, sonsoles; Ortega, Tomas; Gatica, Stella; Benegas, Julio. *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad.* "RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa", 2006, V.9, N^o.2, p. 189-209, ISSN: 1665-2436. Disponible en:

http://funes.uniandes.edu.co/9738/1/Blazquez2006Una.pdf