

<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>							
<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>							
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-06</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 3</b>

Neiva, 23 de marzo del 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Las suscritas:

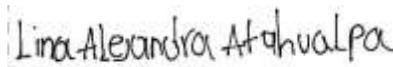
Lina Alejandra Atahualpa, con C.C. No.1004253099 y Catalina Vizcaya Garzón, con C.C. No. 1003812306 autoras del trabajo de grado titulado: DINAMICA DE UN MODELO DEPREDADOR-PRESA TIPO GAUSE CON INMIGRACIÓN DENSO-DEPENDIENTE Y EFECTO ALLEE EN LAS PRESAS. Presentado y aprobado en el año 2017 como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas.

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

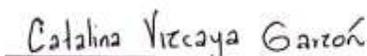
- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “Open Access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-ROM o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Firmas:



Lina Alejandra Atahualpa Cuellar



Catalina Vizcaya Garzón

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

	<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>						
	<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-06</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 3</b>

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

		<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>					
		<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>					
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 3</b>

DINAMICA DE UN MODELO DE PREDADOR-PRESA TIPO GAUSE CON INMIGRACIÓN DENSO-DEPENDIENTE Y EFECTO ALLEE EN LAS PRESAS

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Atahualpa Cuellar	Lina Alejandra
Vizcaya Garzón	Catalina

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Reyes Bahamon	Francisco Javier

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Reyes Bahamon	Francisco Javier

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Licenciadas en Matemáticas

**FACULTAD:** Educación

**PROGRAMA O POSGRADO:** Licenciatura en Matemáticas

**CIUDAD:** Neiva                      **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2022      **NÚMERO DE PÁGINAS:** 23

**TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):**

Diagramas\_\_ Fotografías\_\_\_\_ Grabaciones en discos\_\_\_\_ Ilustraciones en general   X   Grabados\_\_\_\_

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 3</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

Láminas \_\_\_\_\_ Litografías \_\_\_\_ Mapas \_\_\_\_ Música impresa \_\_\_\_ Planos \_\_\_\_ Retratos \_\_\_\_ o Cuadros \_\_\_\_ Sin ilustraciones  
\_\_\_\_\_ Tablas

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: NO

**MATERIAL ANEXO:** SIMULACIONES P-PLANE

**PREMIO O DISTINCIÓN:** NO

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

**Español**

1. Sistema
2. Modelo Depredador-presa tipo Gause
3. Efecto Allee
4. Inmigración denso-dependiente
5. Respuesta funcional
6. Equilibrio

**Inglés**

- System
- Gause-type predator-prey model
- Allee Effect
- Dense-dependent Immigration
- Functional Response
- Equilibrium

**RESUMEN (Máximo 250 palabras)**

Este trabajo de investigación presenta el análisis de un modelo depredador-presa tipo Gause con inmigración denso-dependiente y el efecto Allee en la presa. El modelo se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomo y no lineal, la respuesta funcional de los depredadores es lineal, el crecimiento de las presas sin presencia de migraciones se ve afectado por el efecto Allee. Interesantes situaciones dinámicas aparecen en el sistema. Se determinan las condiciones de existencia y estabilidad local de los puntos de equilibrio. Además, las principales propiedades de los modelos se examinan desde un punto de vista ecológico. Algunas simulaciones se realizan en Pplane para ilustrar los resultados analíticos.



DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO

<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>3 de 3</b>
---------------	---------------------	----------------	----------	-----------------	-------------	---------------	---------------

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This research paper presents the analysis of a Gause-type predator-prey model with density-dependent immigration and the Allee effect on the prey. The model is expressed through a system of ordinary differential equations, autonomous and nonlinear, the functional response of predators is linear, the growth of prey without the presence of migrations is affected by the Allee effect. Interesting dynamic situations appear in the system. The conditions of existence and local stability of the equilibrium points are determined. In addition, the main properties of the models are examined from an ecological point of view. Some simulations are performed in Pplane to illustrate

**APROBACION DE LA TESIS**

Francisco Javier Reyes Bahamon

Nombre Jurado: Johnny Fernando Alvis



*Universidad Surcolombiana*

---

---

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

**DINÁMICA DE UN MODELO  
DE PREDADOR-PRESA TIPO  
GAUSE CON INMIGRACIÓN  
DENSO-DEPENDIENTE Y  
EFECTO ALLEE EN LAS PRESAS**

Lina Alejandra Atahualpa Cuellar  
Catalina Vizcaya Garzón

Neiva, Huila

2022



*Universidad Surcolombiana*

---

---

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

**DINÁMICA DE UN MODELO  
DE PREDADOR-PRESA TIPO  
GAUSE CON INMIGRACIÓN  
DENSO-DEPENDIENTE Y  
EFECTO ALLEE EN LAS PRESAS**

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al  
título de Licenciada en Matemáticas

Lina Alejandra Atahualpa Cuellar (20171158414)  
Catalina Vizcaya Garzón (20171159773)

Asesor:

Ms. Francisco Javier Reyes Bahamón

Neiva, Huila

2022

# Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

Jefe de Programa

---

Director

---

Segundo Lector

## Contenido

<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>5</b>
<b>1. RESUMEN</b> .....	¡Error! Marcador no definido.
<b>2. INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>7</b>
2.1 Modelo Tipo Gause .....	7
2.2 Respuesta funcional de los depredadores .....	7
2.3. El efecto Allee e Inmigración denso-dependiente.....	8
<b>MODELO</b> .....	<b>11</b>
3.1 Resultados principales.....	13
3.2. Resultados preliminares.....	16
3.2.1. Equilibrios.....	16
3.2.2 Naturaleza del punto de equilibrio sobre el eje.....	17
<b>EFFECTO ALLEE DÉBIL (<math>m=0</math>)</b> .....	<b>20</b>
4.1. Equilibrios .....	20
4.2. Naturaleza del punto de equilibrio sobre el eje: .....	20
<b>ALGUNAS SIMULACIONES NUMÉRICAS</b> .....	<b>22</b>
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>23</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>24</b>

# AGRADECIMIENTOS

Las autoras presentan su agradecimiento a:

**FRANCISCO JAVIER REYES BAHAMÓN**, Licenciado en Matemáticas, docente catedrático de la Universidad Surcolombiana y asesor del presente trabajo, por apoyarnos y guiarnos en este proceso. Sin su colaboración la elaboración de este trabajo de grado sería irrealizable.

Al Ms. **JULIO CESAR DUARTE** docente del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana por sus asertivas recomendaciones, a través de su experiencia en el campo docente por varios años, y que colaboro en la revisión del trabajo.

A los docentes del Programa de Licenciatura en Matemáticas que siempre estuvieron dispuestos a resolver las dudas y acompañar el proceso de formación, de forma generosa y desinteresada; en general expresamos sentimiento de gratitud a todas las personas que ayudaron y nos apoyaron en el desarrollo del presente documento.

# 1.RESUMEN

Este trabajo de investigación presenta el análisis de un modelo depredador-presa tipo Gause con inmigración denso-dependiente y el efecto Allee en la presa. El modelo se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, autónomo y no lineal, la respuesta funcional de los depredadores es lineal, el crecimiento de las presas sin presencia de migraciones se ve afectado por el efecto Allee. Interesantes situaciones dinámicas aparecen en el sistema. Se determinan las condiciones de existencia y estabilidad local de los puntos de equilibrio. Además, las principales propiedades de los modelos se examinan desde un punto de vista ecológico. Algunas simulaciones se realizan en Pplane para ilustrar los resultados analíticos.

## 2. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza un modelo depredador-presa tipo Gause en un tiempo continuo [1], teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- La acción de los depredadores o respuesta funcional, es lineal.
- El crecimiento de la presa se ve afectado por el efecto Allee. [2]; [3]; [4].

En el análisis de los modelos depredador-presa se consideran diferentes fenómenos ecológicos que afectan a una población o ambas poblaciones. Estos fenómenos pueden tener fuertes consecuencias en la relación entre ellos y modificar las propiedades dinámicas de un sistema que lo describe.

**2.1 Modelo Tipo Gause:** Un modelo depredador-presa de tipo Gause clásico [1]; [5] está representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$X_n: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - h(x)y \\ \frac{dy}{dt} = (\psi(x) - c)y \end{cases} \quad (1.1)$$

Donde  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$  indican el tamaño de la población de presas y depredadores para todo tiempo  $t \geq 0$ , respectivamente,  $c > 0$  representa la muerte natural de los depredadores. Las funciones  $g(x)$ ,  $h(x)$  y  $\psi(x)$  tienen las propiedades apropiadas [5]; [6]; [7].

El sistema 1.1 ha sido ampliamente estudiado, determinando la estabilidad y las bifurcaciones [11], demostrando el punto de equilibrio positivo [8] o demostrar unicidad [8]; [5] y [1]; o existencia de ciclos límite [10]; [11].

### 2.2 Respuesta funcional de los depredadores

La función  $h(x)$  en el modelo 1.1, denominada respuesta funcional de los depredadores o función de tasa de consumo, se refiere al cambio en la densidad de presas atacadas por unidad de tiempo por depredador a medida que cambia la densidad de presas [1].

En la mayoría de los modelos de depredador-presa considerados en la literatura ecológica, la respuesta del depredador a la densidad de presa se supone que es cada vez más monótono [12]; una suposición inherente lo cual significa que cuantos más animales de presa haya en el medio ambiente, mejor para el depredador.

En este trabajo se ha asumido que la respuesta funcional se expresa por la función  $h(x) = qx$ , lineal, donde  $q$  representa la tasa máxima de consumo per cápita.

### 2.3. El efecto Allee e Inmigración denso-dependiente

El efecto Allee es un fenómeno que afecta a algunas poblaciones [13], el cual se caracteriza porque existe una relación positiva entre la tasa de crecimiento y el tamaño de la población en densidades bajas [13] principalmente debido a la cooperación entre los individuos (comportamiento social) [14].

Este fenómeno, llamado así por el ecologista estadounidense Warder Clyde Allee (1885-1955), también se conoce con diferentes nombres; ha sido nombrada como dependencia de la densidad o dependencia de la densidad positiva [14];[15] o dispensación en las Ciencias Pesqueras. [16]; [15].

Las poblaciones pueden exhibir dinámicas de efecto Allee debido a una amplia gama de fenómenos biológicos, por ejemplo, vigilancia reducida contra depredadores, termorregulación social, deriva genética, dificultad de apareamiento, defensa reducida contra depredadores y alimentación deficiente a bajas densidades; sin embargo, varias causas pueden conducir a este fenómeno. [17]

Este fenómeno ecológico se puede clasificar en dos tipos principales llamados efecto Allee fuerte [18] o dispensación crítica [16]; [15], y efecto Allee débil [13] o dispensación no crítica [16]; [15].

En este trabajo se usará la forma matemática más común en la literatura ecológica [19]; [20] y [21] representada por la siguiente ecuación polinomial:

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m)x \quad (1.2)$$

Donde  $r$  representa la tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas,  $K$  es la capacidad de carga del medio ambiente y  $m$  es el umbral de población viable o constante del efecto Allee.

De acuerdo a la definición de este efecto [13];[14], se debe cumplir que  $\frac{dx}{dt} > 0$  para un cierto rango de valores del parámetro  $m$ ; claramente esto se cumple si  $-K < m \ll K$ . El *efecto Allee fuerte* implica la existencia de un nivel umbral de población  $m > 0$  [22]; [23]; [24], bajo el cual, la población se extingue. Esto requiere que la tasa de crecimiento de la población sea negativa para tamaños de población menores a  $m$ . Por lo tanto, tenemos una población que muestra un *efecto Allee débil* donde tendrá una tasa de crecimiento per cápita reducida (directamente relacionada con la aptitud individual de la población) a una densidad o tamaño de población más bajos. Sin embargo, incluso con este

tamaño o densidad de población muy bajos, la población siempre exhibirá una tasa de crecimiento per cápita positiva, donde  $m < 0$ .

Teniendo en cuenta que el efecto Allee es un fenómeno que afecta el crecimiento de la población, provocando extinción a la población (convivencia social), donde se requiere de una solución, así que, una manera eficaz de forma natural es generar un flujo migratorio dependiente del nivel poblacional de la especie, de modo que la migración sea mayor que los niveles bajos de población y cesa por completo cuando la población alcanza la capacidad de carga del medio ambiente. En [25] proponen un modelo con difusión espacial unidimensional con efecto Allee y migración denso-dependiente, donde la función de migración es una función lineal. Esto considerado la migración, es el producto de factores ambientales y mecanismos biológicos. Lo primero que hay que observar, y quizás lo más importante, es que no es posible mantener una migración por encima de la capacidad de carga del medio ambiente, ya que el hábitat no admite una población mayor, lo que provocara el excedente para ser eliminado rápidamente. Desde este punto de vista es natural que un flujo migrante cesa cuando la población alcanza la capacidad de carga. [26].

Sea  $f(x)$  la tasa de inmigración. Consideraremos  $f$  como una función decreciente en la variable  $x$  tal que  $f(K) = 0$ , donde  $K$  es la capacidad de carga del medio ambiente.

Por lo tanto,

$$\max_{x \in [0, K]} f(x) = f(0)$$

En otras palabras, si  $K$  indica la capacidad de carga del ambiente habitado por la especie,  $x(t)$  se referirá a la población de la especie en el tiempo  $t > 0$ , considerando una función de migración positiva y tasa continua  $f(x)$ , estrictamente decreciente en el intervalo  $[0, K]$ , de modo que  $f_\alpha(0) = \alpha$  y  $f_\alpha(k) = 0$ .

Por lo tanto, la ecuación explícita de  $f_\alpha$  es:

$$f_\alpha(x) = \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right), \forall x \in [0, K] \quad (1.3)$$

La tasa de crecimiento de la especie en ausencia de migración será:

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m)x \text{ con } 0 < m < K \text{ y } r > 0 \quad (1.4)$$

$$X_{\mu} \begin{cases} \frac{dx}{dt} x(t) = g(x) + f_{\alpha}(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Donde la población inicial  $x_0 \in 0, K$ , y las funciones  $g(x)$  y  $f_{\alpha}(x)$  son las definidas en 1.3 y 1.4, respectivamente. La ecuación 1.5 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(x) + f_{\alpha}(x) \\ &= r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m)x + \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ &= r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (r(x - m)x + \alpha) \\ &= r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (rx^2 - mrx + \alpha) \end{aligned}$$

### 3. MODELO

El modelo tipo Gause considerando que la población de presas se ve afectada por la inmigración y el efecto Allee, y la respuesta funcional es lineal, se expresa mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas, no lineal, dado por:

$$X_n: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) (rx^2 - mrx + \alpha) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = pxy - cy \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$  indican el tamaño de la población de presas y depredadores, respectivamente, para todo tiempo  $t \geq 0$  (medido como biomasa, número de individuos o densidad por unidad de área o volumen).

Con  $\mu = \{(K, r, m, \alpha, q, p, c)\} \in \mathbb{R}_+^6 \times ]0,1]$ , es decir, todos los parámetros son positivos. Tienen diferentes significados biológicos y se definen de la siguiente manera:

- $r$ : La tasa de crecimiento intrínseca de la población de presas.
- $K$ : La capacidad de carga del medio ambiente.
- $m$ : Umbral de población viable o constante del efecto Allee.
- $\alpha$ : La tasa de migración de la población de presas.
- $q$ : La tasa máxima de consumo per cápita (número de presas consumidas por cada depredador en una unidad de tiempo).
- $p$ : La eficiencia con la que los depredadores convierten a las presas consumidas en nuevos depredadores.
- $c$ : La tasa de muerte natural de los depredadores.

El campo vectorial  $X_\mu$  se define en el primer cuadrante, es decir:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

Si  $m = 0$ , tenemos un efecto Allee particularmente débil en la presa [13]. El modelo esta expresado por el sistema:

$$X_\gamma: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(1 - \frac{x}{K}\right) (rx^2 + \alpha) - qxy \\ \frac{dy}{dt} = pxy - cy \end{cases} \quad (2.2)$$

Con  $\gamma = \{(K, r, \alpha, q, p, c)\} \in \mathbb{R}_+^6$ :

Para simplificar los cálculos del sistema 2.2, hacemos los cambios de variable  $x = Ku$ ,  $y = \left(\frac{rK}{q}\right)v$  y el cambio en la escala de tiempo  $\tau = rKt$ . La función se construye:

$$\varphi: \Omega_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$$

$$\text{Tal que: } \varphi(u, v, \tau) = \left( Ku, \left( \frac{rK}{q} \right) v, \frac{\tau}{rK} \right) = (x, y, t),$$

$$\text{Con } \Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\}.$$

El determinante es:

$$\det D\varphi(u, v, \tau) = \frac{K}{q} > 0.$$

Por lo tanto,  $\varphi$  es un difeomorfismo que mantiene la orientación del tiempo. Por tanto, se obtiene un sistema topográficamente equivalente al campo vectorial  $Z_\eta = \varphi \sigma X_\mu$ , donde

$$Z_\eta(u, v) = P(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + Q(u, v) \frac{\partial}{\partial v}.$$

**LEMA 1:** El sistema 2.2 es topológicamente equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales polinomial:

$$Z_\eta: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = [(1-u)(u^2 - Mu + E) - uv] \\ \frac{dy}{dt} = Bv(u - C), \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde  $\eta = (M, B, C, E) \in \mathbb{R}_4^+$ .

**Demostración:** Si  $x = Ku$ , y  $y = \left( \frac{rK}{q} \right) v$ , entonces:

$\frac{dx}{dt} = K \frac{du}{dt}$ , y  $\frac{dy}{dt} = \left( \frac{rK}{q} \right) \frac{dv}{dt}$ . Reemplazando en 2.3 se tiene que:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} K = \left[ \left( 1 - \frac{Ku}{K} \right) (r(Ku)^2 - Mr(Ku) + \alpha) - q(Ku) \left( \frac{rK}{q} \right) v \right] \\ \frac{dv}{dt} \left( \frac{rK}{q} \right) = \frac{pKurKv}{q} - c \frac{rKv}{q}, \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} K = (1-u)(rK^2u^2 - mrKu + \alpha) - K^2ruv, \\ \frac{dv}{dt} \left( \frac{rK}{q} \right) = \frac{pK^2urv}{q} - c \frac{rKv}{q}, \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = rK \left[ (1-u) \left( u^2 - \frac{m}{K}u + \frac{\alpha}{rK^2} \right) - uv \right], \\ \frac{dv}{dt} = pKv \left( u - \frac{c}{pK} \right), \end{cases}$$

Haciendo el cambio en la escala de tiempo  $\tau = rKt$ , se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \left[ (1-u) \left( u^2 - \frac{m}{K}u + \frac{\alpha}{rK^2} \right) - uv \right], \\ \frac{dv}{d\tau} = \frac{p}{r}v \left( u - \frac{c}{pK} \right), \end{cases}$$

Haciendo sustituciones  $M = \frac{m}{K} < 1$ , con  $0 < M < 1, B = \frac{p}{r}, C = \frac{c}{pK}, E = \frac{\alpha}{rK^2}$ , se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales polinómicas de cuatro parámetros.

El sistema 2.3 se define:

$$\Omega_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$$

### 3.1 Resultados principales.

Para el sistema 2.3 tenemos las siguientes propiedades:

**LEMA 2:** El conjunto  $\hat{\Omega} = \{(u, v) \in \Omega_1 / 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ , es una región de invarianza.

**Demostración:** En el sistema 2.3, tenemos que:

- Si  $v = 0$ , entonces  $\frac{dv}{d\tau} = 0$ , y  $\frac{du}{d\tau} = (1-u)(u^2 - Mu + E) > 0$ , sus trayectorias permanecen en el eje  $u$ .
- Si  $u = 1$ ,  $\frac{du}{d\tau} = -v < 0$ , y  $\frac{dv}{d\tau} = Bv(1 - C)$ , sus trayectorias apuntan hacia el interior de  $\hat{\Omega}$ .

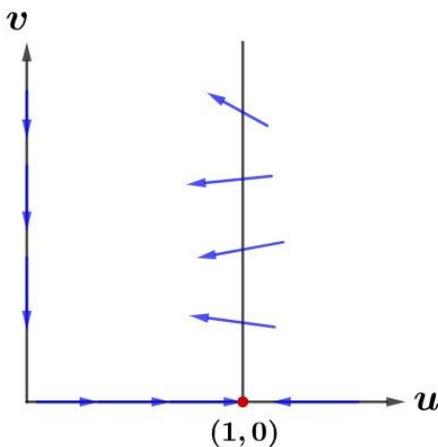


Ilustración 1. Región de invarianza

**LEMA 3:** *Las soluciones son uniformemente acotadas.*

**Demostración:** La primera ecuación del sistema topológico 2.3 es:

$$\frac{du}{d\tau} = [(1 - u)(u^2 - Mu + E) - uv] \quad (2.4)$$

En ausencia de depredadores, se convierte en:

$$\frac{du}{d\tau} = (1 - u)(u^2 - Mu + E) \quad (2.5)$$

Por lo tanto,

$$\frac{du}{d\tau} \leq (1 - u)(u^2 - Mu + E), \forall x \in \mathbb{R}_+^2, (b) \quad (2.6)$$

Teniendo esto,

$$u(\tau) \rightarrow 1 \text{ cuando } \tau \rightarrow \infty, \quad u > M \quad (2.7)$$

$$u(\tau) \rightarrow 0 \text{ cuando } \tau \rightarrow \infty, \quad u < M \quad (2.8)$$

Además,

$$u(\tau) \rightarrow 1 \text{ cuando } \tau \rightarrow \infty, \quad u > 1 \quad (2.9)$$

Considerando  $L = \max\{u(0), 1\}$  de la desigualdad 2.6 tenemos:

$$u(\tau) \leq L, \forall r \geq 0 \quad (2.10)$$

Sea  $W(\tau) = u + (1/B)v$ . Claramente  $0 < W(\tau), \forall r \geq 0$ . Derivando  $W(\tau)$  respecto a  $\tau$  obtenemos:

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} = [(1 - u)(u^2 - Mu + E) - uv] + v(u - C) \quad (2.11)$$

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} = [(1 - u)(u^2 - Mu + E) - uv] + vu - vC \quad (2.12)$$

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} = (1 - u)(u^2 - Mu + E) - vC \quad (2.13)$$

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} = -u^3 + (1 + M)u^2 - (M + E)u + E - vC \quad (2.14)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} + W(\tau) = -u^3 + (1 + M)u^2 - (M + E)u + E - vC + \left(u + \left(\frac{1}{B}\right)v\right) \quad (2.15)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas, se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dW(\tau)}{d(\tau)} + W(\tau) &= -u \left(u - \frac{(1 + M)}{2}\right)^2 + u \frac{(1 + M)^2}{4} + (1 - M - E)u - \left(C - \frac{1}{B}\right)v \\ &+ E \leq u \frac{(1 + M)^2}{4} + (1 - M - E)u + E \end{aligned} \quad (2.16)$$

Suponiendo que:

$$C > \frac{1}{B}$$

Recordando que si  $M < u$ , entonces  $u \rightarrow 1$ , cuando  $\tau \rightarrow \infty$  se convierte en:

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} + W(\tau) \leq \frac{(1 + M)^2}{4} + (1 - M) \quad (2.17)$$

Sea  $Q = \frac{(1+M)^2}{4} + (1 - M) > 0$ , para cualquier valor de  $M$ , tal que  $-1 < M \ll 1$ ; entonces

$$\frac{dW(\tau)}{d(\tau)} + W(\tau) \leq Q \quad (2.18)$$

Siendo una desigualdad lineal de primer orden. Aplicando el Teorema de comparación para la desigualdad diferencias [27], obtenemos:

$$0 < W(u(\tau), v(\tau)) \leq Q + Ce^{-r}. \quad (2.19)$$

En conclusión,

$$0 < W(u(\tau), v(\tau)) \leq Q + W(u(0), v(0)) - Q)e^{-r}. \quad (2.20)$$

Claramente, cuando  $\tau \rightarrow \infty$ , entonces  $0 < W(u, v) \leq Q$ , para cualquier signo de  $(W(u(0), v(0)) - Q)$ . Entonces, las soluciones del sistema 2.3 están acotadas. Además, existe el conjunto:

$$S = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq u + \frac{1}{B}v \leq Q \right\} \quad (2.21)$$

La cual es una región invariante, donde todas las soluciones del sistema 2.3 que comienzan en  $\hat{\Omega}$  están confinadas.

### Observación 1.

- a. El resultado establecido en el lema anterior implica que el modelo está bien planteado, es decir, cuando el tamaño de la población de presas tiende a cero, la población de depredadores también tiende a cero, ya que la presa es la única fuente de alimento para los depredadores.
- b. Por otro lado,  
 Si  $u - C - Ev > 0$ , i.e.,  $dv/d\tau > 0$ ; por lo tanto,  $v < (u - C)/E$ .  
 Si  $u - C - Ev < 0$ , i.e.,  $dv/d\tau < 0$ ; por lo tanto,  $v > (u - C)/E$ .

Entonces, la subregión

$$T = (u, v) \in \frac{\hat{\Omega}}{0} \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{u - C}{E} \quad (2.22)$$

Es una región acotada y cerrada; es decir, es una región compacta y se aplica el Teorema de Poincaré-Bendixson.

## 3.2. Resultados preliminares.

### 3.2.1. Equilibrios.

El sistema 2.3 tiene los siguientes puntos de equilibrios positivos:

- i. Punto de equilibrio axial:  $E_1(1, 0)$ .
- ii. Punto de equilibrio interior:  $(C, L)$ , donde  $L = \frac{1}{c}(1 - C)[C(C - M) + E]$ .

Claramente,  $(C, L)$  se encuentra en el interior del primer cuadrante si y sólo si  $0 < M < C < 1$ .

Si  $C > 1$  y  $C > M$ , el punto de equilibrio se encuentra en el cuarto cuadrante.

Las propiedades principales y el comportamiento cualitativo del sistema 2.3 se analizan por separado, en la primera parte el efecto Allee fuerte y luego el efecto Allee débil. La estabilidad local de los puntos de equilibrio está determinada por la matriz Jacobiana o comunitaria:

$$JZ_{\eta}(u, v) = \begin{pmatrix} Z_{\eta}^{11} & -u \\ Bv & B(u - C) \end{pmatrix},$$

Con,

$$Z_{\eta}^{11} = -3u^2 + 2(1 + M)u - (M + E) - v.$$

### 3.2.2 Naturaleza del punto de equilibrio sobre el eje.

**LEMA 4:** *Naturaleza del punto (1, 0).*

*El punto (1, 0) es:*

- *Un atractor hiperbólico, si y sólo si  $C > 1$ ,*
- *Un punto de silla hiperbólico, si y sólo si  $0 < M < C < 1$ ,*
- *Un atractor no hiperbólico, si y sólo si  $C = 1$ .*

**Demostración** Evaluando la matriz Jacobiana tenemos que:

En (1, 0)

$$JZ_{\eta}(1, 0) = \begin{pmatrix} (M - 1) - E & -1 \\ 0 & B(1 - C) \end{pmatrix},$$

Donde  $\det JZ_{\eta}(1, 0) = B(1 - C)((M - 1) - E)$ , y  $\text{Tra} JZ_{\eta}(1, 0) = B(1 - C) + ((M - 1) - E)$ . Por lo tanto:

- *Un atractor hiperbólico, si y sólo si  $C > 1$ ,*
- *Un punto de silla hiperbólico, si y sólo si  $0 < M < C < 1$ ,*
- *Un atractor no hiperbólico, si y sólo si  $C = 1$ .*

$$JZ_{\eta}(C, L) = \begin{pmatrix} -3C^2 + 2(1 + M)C - (M + E) - L & -C \\ BL & 0 \end{pmatrix},$$

Donde  $\det JZ_{\eta}(C, L) = B[(1 - C)(C(C - M) + E)]$ , y

$$\text{Tra} JZ_{\eta}(C, L) = \frac{-2C^3 + (1 + M)C^2 - E}{C}.$$

Ahora, establezcamos:

$$P = [\text{Tra}(C, L)]^2 - 4 \det(C, L)$$

$$P = [-2C^3 + (1 + M)C^2 - E]^2 - 4BC^3L$$

Si  $P = 0$ , tenemos:

$$B = \frac{[-2C^3 + (1 + M)C^2 - E]^2}{4C^3L}$$

Además, denotemos:

$$G = -2C^3 + (1 + M)C^2 - E$$

**TEOREMA 1:** (Naturaleza del punto de equilibrio positivo) Suponiendo que  $M < C < 1$ , el punto de equilibrio  $(C, L)$  está en el interior del primer cuadrante.

1. Asumiendo que  $v^s > v^u$ , la singularidad  $(C, L)$  es:

a. Un atractor local hiperbólico, si y sólo si  $G < 0$ ; además,

- Un nodo atractor, si y solo si  $B < \frac{[-2C^3+(1+M)C^2-E]^2}{4C^3L}$
- Un foco atractor, si y solo si  $B > \frac{[-2C^3+(1+M)C^2-E]^2}{4C^3L}$

b. Una repulsor hiperbólica, si y sólo si  $G > 0$ ; además,

- Un foco repulsor rodeado por un ciclo límite, si y solo si  $B > \frac{[-2C^3+(1+M)C^2-E]^2}{4C^3L}$
- Un nodo repulsor, si y sólo si  $B < \frac{[-2C^3+(1+M)C^2-E]^2}{4C^3L}$

c. Asumiendo que  $v^s > v^u$ ,  $(C, L)$  es un nodo repulsor.

**Demostración.** Es la demostración inmediata de la matriz Jacobiana.

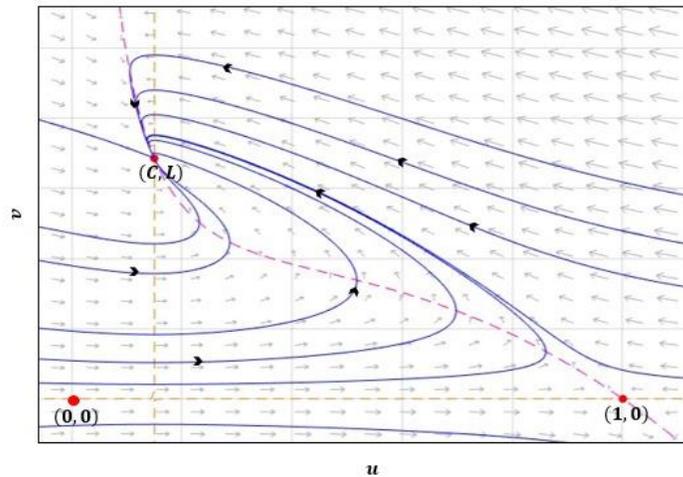


Ilustración 2. Para  $B = 0.42, C = 0.15, M = 0.01$  y  $E = 0.1$ , el punto  $(C, L)$  es atractor y el punto  $(1, 0)$  es un punto silla.

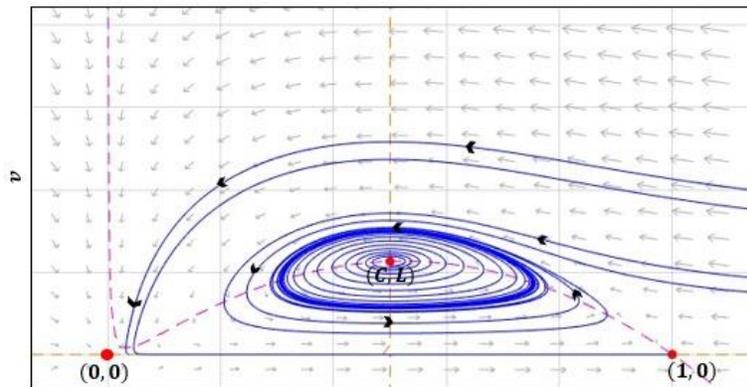


Ilustración 3. Para  $B = 0.42$ ,  $C = 0.5$ ,  $M = 0.05$  y  $E = 0.001$ , el punto  $(C, L)$  está rodeado por un ciclo límite estable y  $(1,0)$  es un punto silla.

## 4. EFECTO ALLEE DÉBIL ( $m=0$ )

De acuerdo con la reparametrización anterior, cuando  $M = 0$ , el sistema 2.3 es topológicamente equivalente al campo vectorial polinomial  $Z_\eta$  dado por:

$$Z_\eta: \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = [(1-u)(u^2 + E) - uv] \\ \frac{dv}{d\tau} = Bv(u - C) \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde  $\eta = \{(B, C, E) \in \mathbb{R}_3^+\}$

### 4.1. Equilibrios

El sistema 3.1 tiene los siguientes puntos de equilibrios positivos:

- i. Punto de equilibrio axial:  $E_1(0,1)$ .
- ii. Punto de equilibrio interior positivo:  $(C, L)$ , donde  $L = \frac{1}{C}(1 - C)(C^2 + E)$ .  
 $(C, L)$  Se encuentra en el interior del primer cuadrante si y solo si  $0 < C < 1$ .

Las propiedades principales y el comportamiento cualitativo del sistema 3.1 se dan por separado para dos formas diferentes del efecto Allee débil aquí consideradas. La estabilidad local de los puntos de equilibrio está determinada por la matriz Jacobiana o comunitaria:

$$JZ_\eta(u, v) = \begin{pmatrix} 2u - 3u^2 - E - v & -u \\ Bv & B(u - C) \end{pmatrix}$$

### 4.2. Naturaleza del punto de equilibrio sobre el eje:

**LEMA 5:** Naturaleza del punto  $(1, 0)$ .

El punto  $(1, 0)$  es un equilibrio semi-hiperbólico o nilpotente para todos los valores de los parámetros.

**Demostración:** Evaluando la matriz Jacobiana tenemos que:

En  $(1, 0)$  se tiene:

$$JZ_\eta(1,0) = \begin{pmatrix} -(1 + E) & -1 \\ 0 & B(1 - C) \end{pmatrix}$$

Donde  $\det JZ_\eta(1,0) = -B(1 + E)(1 - C)$ . Así el punto  $(1, 0)$  es un punto silla.

**LEMA 6:** Naturaleza del punto  $(C, L)$ .

El punto  $(C, L)$  es:

- i. Si  $E < -2C^3 + C^2$  es un punto repulsor.
- ii. Si  $E > -2C^3 + C^2$  es un punto atractor.

**Demostración:** Evaluando la matriz Jacobiana tenemos que:

En  $(C, L)$  tiene:

$$JZ_\eta(C, L) = \begin{pmatrix} 2C - 3C^2 - E - L & -C \\ BL & 0 \end{pmatrix}$$

Donde  $DetJZ_\eta(C, L) = B[(1 - C)(C^2 + E)] > 0$  y  $TraJZ_\eta(C, L) = \frac{-2C^3 + C^2 - E}{C}$

Como  $C > 0$ , entonces:

- i. Si  $E < -2C^3 + C^2$  es un punto repulsor.
- ii. Si  $E > -2C^3 + C^2$  es un punto atractor.

## ALGUNAS SIMULACIONES NUMÉRICAS

Para reforzar nuestros resultados analíticos, aquí presentamos algunas simulaciones.

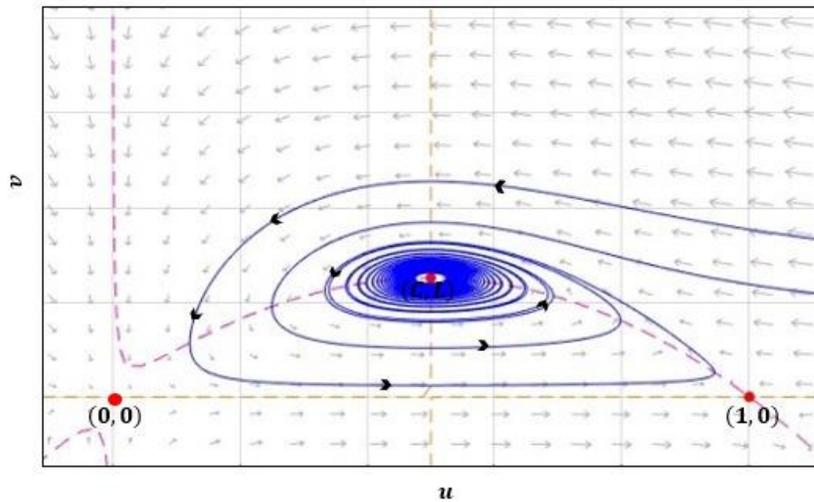


Ilustración 4. Para  $B = 0.42$ ,  $C = 0.5$  y  $E = 0.001$ , el punto  $(C, L)$  es espiral, rodeado por un ciclo límite estable y  $(1,0)$  es un punto silla.

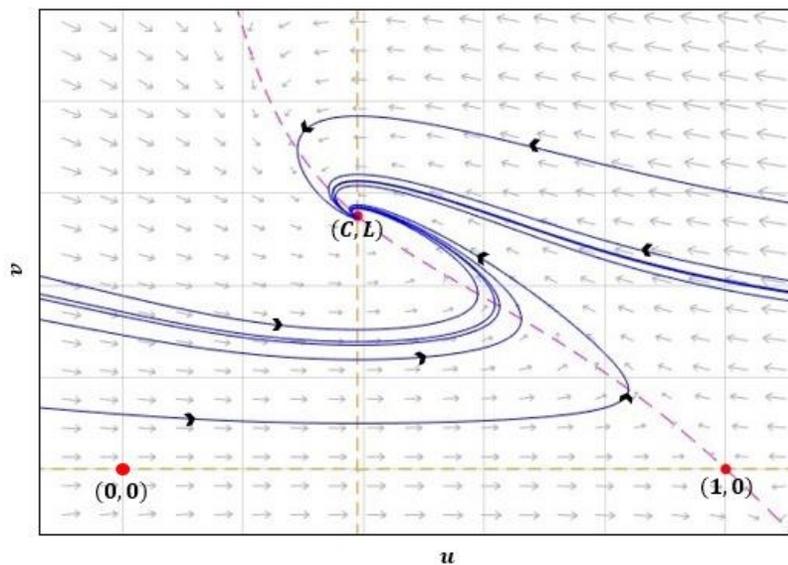


Ilustración 5. Para  $B = 0.42$ ,  $C = 0.39$  y  $E = 0.2$ , el punto  $(C, L)$  es atractor y el punto  $(1,0)$  es un punto silla.

## CONCLUSIONES

- En este trabajo hemos analizado un modelo depredador-presa tipo Gause, donde la población de presas se ve afectada por el efecto Allee. Según la intensidad del efecto Allee se estudiaron dos casos.
- Este equilibrio lo mantiene exclusivamente el flujo migratorio y puede interpretarse como un precario equilibrio de subsistencia, ya que, al estar la población migrante muy por debajo del nivel natural del efecto Allee, no logra sobrevivir y es reemplazada continuamente por nuevos migrantes, que nunca podrán recuperar la población para la capacidad de carga del medio ambiente.
- Analizamos el sistema topológicamente equivalente 2.3 al original 2.1, dependiendo solo de cuatro parámetros; en algunos casos se establecieron las condiciones para la existencia de puntos de equilibrio positivos y su naturaleza.
- La población se ve afectada por el efecto Allee ( $M > 0$ ), se puede demostrar que el punto de equilibrio  $(1,0)$  es siempre el punto de silla para todos los valores de los parámetros; mientras tanto, la naturaleza del equilibrio  $(C, L)$  depende de la relación entre  $0 < M < C < 1$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] H.I. Freedman, *Deterministic Mathematical Model in Population Ecology*, Marcel Dekker, New York NY, 1980. (1980) Doi: 10.2307/3556198
- [2] F. Courchamp, T. Clutton-Brock, B. Grenfell, Inverse density dependence and the Allee effect, *Trends in Ecology and Evolution*. 14(6) (1999) pp. 405-410.
- [3] B. Dennis, Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction, *Resource Modeling*. 3(4) (1989) pp. 481-538.
- [4] P. A Stephens, & W.J. Sutherland, Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation, *Trends in ecology evolution*. 14(10) (1989) pp. 401-405.
- [5] Y. Kuang & H. I.Freedman, Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems, *Mathematical Biosciences*. 88(1) (1988) pp. 67-84.
- [6] W. Wang & J. Sun, On the predator-prey system with Holling-(n + 1) functional response, *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 23(1) (2007) pp. 1-6.
- [7] D. Xiao & Z. Zhang, On the uniqueness and nonexistence of limit cycles for predator-prey systems, *Nonlinearity*. 16(3) (2003) pp. 1185.
- [8] X.Huang & L. Zhu, Limit cycles in a general Kolmogorov model, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Application*. 60(8) (2005) pp. 1393-1414.
- [9] S. M. Moghadas & B. D. Corbett, Limit cycles in a generalized Gause-type predator-prey model, *Chaos, Solitons & Fractals*. 37(5) (2008) pp. 1343-1355.
- [10] M. Hesaaraki & S.M. Moghadas, Nonexistence of limit cycles in a predator-prey system with a sigmoid functional response, *Canad. Appl. Math. Quart* 7(4) (1999) pp. 401-408.
- [11] J. Sugie, K. Miyamoto & K. Morino, Absence of limit cycle of a predator-prey system with a sigmoid functional response, *Applied Mathematics Letters* 9(4) (1996) pp. 85-90.
- [12] W. M. Getz, A hypothesis regarding the abruptness of density dependence and the growth rate populations, *Ecology* 77(7) (1996) pp. 2014-2026. 26
- [13] P. A. Stephens, W. J. Sutherland, & R. P. Freckleton, What is the Allee effect?, *Oikos* (1999) pp. 185-190.
- [14] F. Courchamp, L. Berec, J. Gascoigne, *Allee effects in ecology and conservation*, Oxford University Press, Oxford (2008) Doi: 10.1093/acprof:oso/9780198570301.001.0001.
- [15] Liermann & Hilborn, Depensation: evidence, models and implications, *Fish and Fisheries* 2(1) (2001) pp. 33-58.
- [16] C.W. Clark, *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA 2(1) (1990).
- [17] L. Berec, E. Angulo & F. Courchamp, "Multiple Allee effects and population management", *Trends in Ecology & Evolution* 22(4) (2007) pp. 185-191.
- [18] G. A. van Voorn, L. Hemerik, M. P. Boer, & B. W. Kooi, "Heteroclinic orbits indicate overexploitation in predator-prey systems with a strong Allee effect" *Mathematical biosciences* 209(2) (2007) pp. 451-469.

- [19] E. Gonzalez-Olivares, B. González-Yañez, J. Mena-Lorca, and R. Ramos Jiliberto, "Modelling the Allee effect: are the different mathematical forms proposed equivalents?" In Proceedings of International Symposium on Mathematical and Computational biology BIOMAT 2007 (2006) pp. 53-71.
- [20] E. Gonzalez-Olivares, A. Rojas-Palma, Multiple limit cycles in a Gause type predator-prey model with Holling type III functional response and Allee effect on prey, *Bulletin of Mathematical Biology* 73(6) (2011) pp. 1378-1397. Doi: 10.1007/s11538-010-9577-5
- [21] E. Gonzalez-Olivares, C. Arancibia-Ibarra, A. Rojas, & B. González-Yañez, Dynamics of a modified Leslie-Gower predation model considering a generalist predator and the hyperbolic functional response, *Mathematical Biosciences and Engineering* 16(6) (2019) pp. 7995–8024. Doi: 10.3934/mbe.2019403
- [22] A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1998)
- [23] D. S. Boukal, & L. Berec, Single-species models of the Allee effect: extinction boundaries, sex ratios and mate encounters, *Journal of Theoretical Biology* 218(3) (2002) pp. 375-394.
- [24] M. Kot, *Elements of Mathematical Biology*, Cambridge University Press, Cambridge, UK. (2001).
- [25] S. Petrovskii and B. Li, An exactly solvable model of population dynamics with density-dependent migrations and the Allee effect, *Mathematical Biosciences* 186(1) (2003) pp. 79-91.
- [26] G.A. Ossandon & R. Castro Santis, Population Dynamics with Density-Dependent Immigrations and Allee effect, *Revista colombiana de Matematicas* 52(2) (2018) pp. 212-218.
- [27] G. Birkhof & G. Rota, *Ordinary Diferential Equations*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA, 4th edition (1989).