Neiva, 15 de marzo de 2024

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

El (Los) suscrito(s):

Sebastián Nuñez Tovar, con C.C. No.1007419862,

Kevyn Anderson Cuenca Escalante, con C.C. No.1004252023,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado

Titulado: Implementación de grupos y simetrías de lie para resolver una ecuación diferencial ordinaria

Presentado y aprobado en el año 2024 como requisito para optar al título de

Matemático;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Sebastian Nuñez Tovar

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Kevyn A. Cuenca E.

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: IMPLEMENTACIÓN DE LOS GRUPOS Y SIMETRÍAS DE LIE PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Cuenca Escalante	Kevyn Anderson
Nuñez Tovar	Sebastian

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Escobar Fiesco	German Fabián

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Escobar Fiesco	German Fabián

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: MATEMÁTICO

FACULTAD: CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

PROGRAMA O POSGRADO: MATEMÁTICA APLICADA

CIUDAD: NEIVA **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2024 **NÚMERO DE PÁGINAS: 55**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas _X_ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros _X_

SOFTWARE

Matlab

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Ecuación de Emden - Fowler	Emden-fowler equation	6.	
2. Simetrías de Lie	Lie symmetries	7.	
3. Soluciones invariantes	Invariant solutions	8.	
4. Diferencias finitas	Finite Differences	9.	
5. Espacio de estados	State Space	10.	

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En el presente trabajo de investigación se encuentran las transformaciones infinitesimales y algunos grupos de simetrías de Lie asociados a una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tipo Emden-Fowler generalizadas, además para algunos casos específicos de los parámetros de las ecuaciones, se presentan las soluciones invariantes obtenidas para el caso dado. El método de grupos de simetrías de Lie es un enfoque robusto y sofisticado para el estudio de ecuaciones diferenciales, especialmente cuando estas son no lineales, en este caso, demostró efectividad al ser aplicado a las ecuaciones de tipo Emden-Fowler, ya que fue posible obtener transformaciones que preservan la estructura de una ecuación diferencial para ciertos casos de los parámetros involucrados, donde dichas transformaciones permitieron llevar a soluciones invariantes que no pueden ser obtenidas por métodos clásicos. Haciendo uso del método numérico de diferencias finitas aplicado en el software matemático Matlab para una de las ecuaciones diferenciales obtenidas, se realiza una comparación de la respectiva solución invariante con las soluciones generadas con dicho método, adicionalmente se compara el espacio de estado de la solución invariante con el plano de la ecuación diferencial fase para ciertos valores de los parámetros.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In the present research work, infinitesimal transformations and some groups of Lie symmetries associated with a family of generalized Emden-Fowler type ordinary differential equations are found. In addition, for some specific cases of the parameters of the equations, invariant solutions are presented. obtained for the given case. The Lie symmetry group method is a robust and sophisticated approach to the study of equations. differentials, especially when they are non-linear, in this case, demonstrated effectiveness by be applied to the Emden-Fowler type equations, since it was possible to obtain transformations that preserve the structure of a differential equation for certain cases of the parameters involved, where these transformations allowed us to lead to invariant solutions that do not can be obtained by classical methods. Using the finite difference numerical method applied in the mathematical software Matlab for one of the differential equations obtained, a comparison of the respective invariant solution is made with the solutions generated with said method, additionally the state space of the invariant solution is compared. with the plane of the phase differential equation for certain values of the parameters.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Mauro Montealegre Cárdenas

Firma: Mauro Montealegre

Nombre Jurado: Oscar Mario Londoño Duque

Firma: Oscar M. Londoño D.

Nombre Jurado: Mauro Montealegre Cárdenas

Firma: Mauro Montealegre

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MATEMÁTICA APLICADA

IMPLEMENTACIÓN DE LOS GRUPOS Y SIMETRÍAS DE LIE PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Proyecto de Grado Presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático

Presentado por:
Kevyn Anderson Cuenca Escalante
Sebastian Nuñez Tovar
Tutor:
German Fabian Escobar Fiesco

HUILA - COLOMBIA
2024

Agradecimientos

Agradezco la paciencia infinita de mi familia, sin la cual nada de esto habría sido posible. A mi padre, cuya firme determinación y sabiduría práctica han sido mis estrellas guía; y a mi madre, cuyo corazón lleno de cariño y bondad inconmensurable han sido mi refugio en tiempos de estrés y duda. Sus sacrificios han sido los pilares silenciosos sobre los cuales mis ambiciones recibieron la gracia de prosperar.

Kevyn.

Agradezco profundamente el esfuerzo y la paciencia de mi familia, quienes me sostienen y me motivan a seguir adelante, sin importar las adversidades. En especial, agradezco a mi madre, quien siempre me impulsa con su amor y cariño incondicional; y a mi padre, cuyo esfuerzo y determinación siempre están presentes para brindarme apoyo. Sus sacrificios han sido la motivación diaria sobre la cual construí mis metas.
A mis amigos, también les agradezco su apoyo y compañerismo, siendo un pilar fundamental en este viaje, brindándome ánimo y alegría en cada paso que doy. Además, quiero expresar mi gratitud hacia mis orientadores, Germán Fabian Escobar y Óscar Mario Londoño, quienes me guiaron en este proceso y cuya contribución fue fundamental para alcanzar mis objetivos. Sin ellos, este camino no habría sido posible.

Sebastián Nuñez

Índice general

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

En el presente trabajo de investigación se encuentran las transformaciones infinitesimales y algunos grupos de simetrías de Lie asociados a una familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de tipo *Emden-Fowler* generalizadas, además para algunos casos específicos de los parámetros de las ecuaciones, se presentan las soluciones invariantes obtenidas para el caso dado. El método de grupos de simetrías de Lie es un enfoque robusto y sofisticado para el estudio de ecuaciones diferenciales, especialmente cuando estas son no lineales, en este caso, demostró efectividad al ser aplicado a las ecuaciones de tipo *Emden-Fowler*, ya que fue posible obtener transformaciones que preservan la estructura de una ecuación diferencial para ciertos casos de los parámetros involucrados, donde dichas transformaciones permitieron llevar a soluciones invariantes que no pueden ser obtenidas por métodos clásicos.

Haciendo uso del método numérico de diferencias finitas aplicado en el software matemático Matlab para una de las ecuaciones diferenciales obtenidas, se realiza una comparación de la respectiva solución invariante con las soluciones generadas con dicho método, adicionalmente se compara el espacio de estado de la solución invariante con el plano de la ecuación diferencial fase para ciertos valores de los parámetros.

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales ordinarias poseen diversos métodos para su resolución dependiendo de su orden y de la clasificación general donde estas se ubiquen, lineales o no lineales. En este trabajo de tesis se pretende dar tratamiento a una ecuación diferencial ordinaria (EDO) no lineal de segundo orden, la cual es de tipo Emden- Fowler.

Una ecuación de tipo emden-fowler tiene la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\rho}\frac{du}{dt}\right) = t^{\sigma}u^{\rho}$$

La cual fue estudiada en (Metha y Aris, 1971), donde se relata un problema de reacción y difusión en una losa cuando $\rho + \sigma = 0$. Esta ecuación resulta ser significativamente importante en el campo de la física, específicamente en astronomía, durante el estudio de modelos estelares, en la teoría de la estructura interna de estrella. Además, debido a su no linealidad, resulta significativa en el campo de las matemáticas, donde las soluciones pueden llegar a exhibir propiedades algebraicas importantes. En (Gnutzmann y Ritschel, 1994) se plantea un caso especial de la ecuación diferencial de Emden – Fowler generalizada.

$$\frac{d^2m}{dr^2} + \beta(r)\frac{dm}{dr} + \alpha(r)m^k = 0$$

Cuando $\beta(r) = \frac{d-1}{r}$, $\alpha(r) = -1$ y $k = 3$, resultando en la ecuación.

$$\frac{d^2m}{dr^2} + \left(\frac{d-1}{r}\right)\frac{dm}{dr} - m^3 = 0$$

La cual es aplicada a un problema de adsorción crítica en geometría esférica, donde se indica que el perfil de parámetros de orden en una geometría esféricamente simétrica en el punto crítico en masa responde a un problema de Emden – Fowler. Los autores obtienen soluciones analíticas en forma paramétrica para una clase de universalidad superficial de transiciones extraordinarias cuando $d = 4$ para una capa esférica. En (Berkovich, 1997) se hace uso del método de automatización para dar tratamiento a una EDO no lineal no autónoma, donde dicha ecuación presenta la característica de poseer parte lineal, la cual es reducible. Este tipo de ecuación también está dentro de la clasificación Emden-Fowler. En particular, se considera la ecuación diferencial de la forma.

$$y'' + \frac{a}{y}y' + bx^{m-1}y^n = 0$$

Donde $n \neq 1$, $n \neq 0$, m, a y b son parámetros. Esta ecuación es usada en física matemática, física teórica y física química. Se hace énfasis en el método de automatización, el cual busca reducir dicha ecuación a una forma autónoma para posteriormente derivar el grupo de lie asociado a dicha ecuación, a partir del cual se presenta una solución invariante. Por otra parte, se considera la ecuación diferencial de la forma

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x)y^n = 0$$

La cual es de tipo Endem-Fowler generalizada. Dicha ecuación es reducida a una forma autónoma y además se estudian sus casos para diferentes formas de las funciones involucradas. En (Rosa, 2005) se tiene en cuenta la ecuación Emden-Fowler mencionada en (Berkovich, 1997) para tratar un problema de ingeniería química sobre núcleo muerto en una partícula catalizadora porosa para órdenes fraccionarios de reacción química. En el estudio se considera el caso cuando $n \neq 1$, $n \neq 0$, $a = \alpha - 1$, $b = -\phi^2 e^{\gamma - \frac{\gamma}{T_s}}$ y $m = 1$ donde posteriormente se analizan diferentes geometrías. En (Polyanin, 2017) se proponen soluciones para la ecuación diferencial ordinaria generalizada de tipo Emden – Fowler.

$$y''(x) = Ax^n y^m (y')^l$$

Dichas soluciones son propuestas en forma paramétrica para distintos valores de los parámetros n,m y l respectivamente. En (Loaiza, 2021) se hace énfasis en dos ecuaciones de tipo Emden-Fowler, donde

$$y''(x) = Ax^n y^m \qquad\qquad y''(x) = Ax^n y^m (y')^l$$

Son de tipo estándar y de tipo generalizada respectivamente. Se proponen soluciones invariantes obtenidas por medio de simetrías y grupos de Lie, diferentes a las soluciones en forma paramétrica propuestas en (Polyanin, 2017). En este trabajo se considera la ecuacion diferencial ordinaria generalizada

$$y''(x) = A_1 x^{n_1} y^{m_1} (y')^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} (y')^{l_2}$$

Sobre la cual se divide en dos casos especiales, donde $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ y $m_1 = m_2$, reduciendo la ecuacion a la forma

$$y''(x) = A_1 y^m (y')^{l_1} + A_2 y^m (y')^{l_2}$$

Además cuando $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ y $n_1 = n_2$ asi

$$y''(x) = A_1 x^n (y')^{l_1} + A_2 x^n (y')^{l_2}$$

Las cuales son consideradas ecuaciones de tipo Emden – Fowler generalizadas.

En el capítulo 2 se trata sobre los principales conceptos de simetrías de EDO's, tales como Grupo de Lie, transformación infinitesimal, operadores infinitesimales y soluciones invariantes, además del método numérico de diferencias finitas para EDO's no lineales.

En el capítulo 3 se trata la obtención de las transformaciones infinitesimales, grupos de simetrías de Lie y soluciones invariantes de los dos casos especiales de las EDO a tener en cuenta, además se presenta la comparación realizada de los resultados obtendios del método numérico de diferencias finitas con la solución invariante hallada para la ecuación:

$$y''(x) = Ay^m(y')^l$$

Dicho proceso comparativo es asistido por el software matemático Matlab. Además, se presenta un estudio cuailitativo del espacio de estados de la ecuación diferencial para ciertos valores de los parámetros bajo los cuales el método de diferencias finitas resultó insuficiente.

Finalmente se presentan las conclusiones y sugerencias que se han considerado convenientes sobre el presente trabajo. Del mismo modo se dan a conocer las referencias bibliográficas utilizadas para el desarrollo del mismo.

Capítulo 2

Marco Referencial

En la realización de este trabajo, específicamente en la sección dedicada a los grupos y simetrías de Lie, se adoptó y aplicó la metodología propuesta en (Haydon, 2000), (Bluman y Anco, 2002) y (Arrigo, 2015), como marco de referencia fundamental. Para llevar a cabo el análisis numérico, nos respaldamos en los conceptos y enfoques presentados en (Burden, Faires, y Burden, 2016)

2.1. Grupos y simetrías de Lie

2.1.1. Grupo de Lie

En general podemos considerar la transformación

$$f_i : x_i \to \bar{x}(x_i, \epsilon) \qquad i = 1, 2, 3..., n \tag{2.1}$$

A esto se le denomina como one-parameter Lie group, donde ϵ actúa como parámetro, se utiliza el término grupo porque las simetrías f_ϵ satisfacen los axiomas de un grupo, al menos para ϵ suficientemente cercano a cero, es decir, que satisfacen los axiomas siguientes, donde G es el grupo y $\phi(a, b)$ la ley de composición.

1. **Clausura:** Sea $a, b \in G$, donde $\phi(a, b) \in G$
2. **Asociativa:** Sea $a, b, c \in G$ donde $\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c)$
3. **Idéntica:** Sea $a \in G$, donde existe un $e \in G$ tal que $\phi(a, e) = \phi(e, a) = a$
4. **Inversa:** Sea $a \in G$, donde existe un único elemento $a^{-1} \in G$ tal que $\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e$

Posteriormente, para que se cumpla que es un grupo de Lie, la función debe cumplir las siguientes propiedades.

1. f_i es una función suave que depende de las variables x_j

2. f_i es una función analítica en el parámetro ϵ
3. $\epsilon = 0$ siempre se puede elegir para que se corresponda con la identidad del elemento e
4. La ley de composición se puede tomar $\phi(a, b) = a + b$

Entonces el conjunto de simetrías f_i, es un grupo de Lie local de un parámetro, que se refiere al hecho de que las condiciones solo necesitan aplicarse a una vecindad $\epsilon = 0$, donde el tamaño de la vecindad dependerá de los x_i. Las simetrías hacen parte a un grupo de Lie de un parámetro (one-parameter Lie group) las cuales dependen continuamente del mismo, lo que hacen es buscar una trasformación o sustitución para ecuación diferencial a partir de dicho parámetro preservando invarianza.

2.1.2. Transformación Infinitesimal

Considere

$$\bar{x} = f(x, y, \epsilon) \qquad \bar{y} = g(x, y, \epsilon) \tag{2.2}$$

con

$$f(x, y, 0) = x \quad y \quad g(x, y, 0) = y \tag{2.3}$$

Si suponemos un ϵ pequeño, podemos construir una serie de Taylor alrededor de $\epsilon = 0$

$$\bar{x} = f(x, y, 0) + \frac{\partial f}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.4}$$

$$\bar{y} = g(x, y, 0) + \frac{\partial g}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.5}$$

Si dejamos

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} = \mathcal{X}(x, y) \quad \frac{\partial g}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} = \mathcal{Y}(x, y) \tag{2.6}$$

Usando (2.3),(2.4) y (2.5), tenemos

$$\bar{x} = x + \mathcal{X}(x, y)\epsilon + O(\epsilon)^2 \qquad \bar{y} = y + \mathcal{Y}(x, y)\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.7}$$

Estas se les conoce como transformaciones infinitesimales donde $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ simplemente son los infinitesimales o campos. Si tenemos los infinitesimales, se puede encontrar el grupo de Lie del que proceden, resolviendo la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d\bar{x}}{d\epsilon} = \mathcal{X}(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{x}|_{\epsilon=0} = x \tag{2.8}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} = \mathcal{Y}(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{y}|_{\epsilon=0} = y \tag{2.9}$$

2.1.3. Condición de invarianza de Lie

A partir de nuestros infinitesimales $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ podemos construir nuestro cambio de variable para que nos conduzca a una ecuación diferencial más sencilla; los campos se pueden hallar de la siguiente forma.

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{2.10}$$

Bajo la transformación infinitesimal

$$\bar{x} = x + \mathcal{X}(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2 \qquad \bar{y} = y + \mathcal{Y}(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.11}$$

A partir de (2.11) podemos obtener.

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\frac{d}{dx}(y + \mathcal{Y}(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2)}{\frac{d}{dx}(x + \mathcal{X}(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2)} \tag{2.12}$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx} + (\mathcal{Y}_x + [\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x]y' - \mathcal{X}_y(y')^2)\epsilon + O(\epsilon)^2) \tag{2.13}$$

Ahora consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = F(\bar{x},\bar{y}) \tag{2.14}$$

Sustituyendo las transformaciones infinitesimales (2.11) de primer orden en las transformaciones (2.13) y (2.14) produce

$$\frac{dy}{dx} + (\mathcal{Y}_x + [\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x]y' - \mathcal{X}_y(y')^2)\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.15}$$

$$= F(x + X(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2, y + Y(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2) \tag{2.16}$$

Expandiendo el orden de $O(\epsilon)^2$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} + (\mathcal{Y}_x + [\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x]y' - \mathcal{X}_y(y')^2)\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.17}$$

$$= F(x,y) + (\mathcal{X}F_x + \mathcal{Y}F_y)\epsilon + O(\epsilon)^2 \tag{2.18}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \tag{2.19}$$

Lo anterior muestra que satisface $O(\epsilon)^2$ si

$$\mathcal{Y}_x + (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)F - \mathcal{X}_y F^2 = \mathcal{X}F_x + \mathcal{Y}F_y \tag{2.20}$$

Esto se conoce como condición de invariancia de Lie. Para un $F(x,y)$ dada cualquier función $\mathcal{X}(x,y)$ y $\mathcal{Y}(x,y)$ que resuelva la ecuación (2.20) es el infinitesimal que buscamos.

2.1.4. Operador Infinitesimal

Definimos el operador infinitesimal como

$$\Gamma = \mathcal{X}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.21}$$

Considere $F(\bar{x},\bar{y})$, por tanto, podemos escribir

$$F(\bar{x},\bar{y}) = F(x + X(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2, y + Y(x,y)\epsilon + O(\epsilon)^2) \tag{2.22}$$

$$= F(x,y) + \epsilon(\mathcal{X}F_x + \mathcal{Y}F_y) + O(\epsilon)^2 \tag{2.23}$$

$$= F(x,y) + \epsilon\Gamma F + O(\epsilon)^2 \tag{2.24}$$

Donde

$$\Gamma F = (\mathcal{X}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial}{\partial y})F \tag{2.25}$$

Extensión del operador

La invarianza de $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ nos conduce a

$$\mathcal{Y}_x + (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)y' - \mathcal{X}_y(y')^2 = \mathcal{X}F_x + F_y \tag{2.26}$$

A partir del operador infinitesimal (2.21), ahora podemos establecer el operador extendido

$$\Gamma^{(1)} = \mathcal{X}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{Y}_{[x]}\frac{\partial}{\partial y'} \tag{2.27}$$

Si definimos a Δ de la forma

$$\Delta = \frac{dy}{dx} - F(x,y) = 0$$

donde

$$\Gamma^{(1)}\Delta = \mathcal{Y}_{[x]} - \mathcal{X}F_x - \mathcal{Y}F_y = 0 \tag{2.28}$$

A partir de (2.26) y (2.27) podemos definir a $\mathcal{Y}_{[x]}$ de la forma

$$\mathcal{Y}_{[x]} = \mathcal{Y}_x + (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)y' - \mathcal{X}_y(y')^2 \tag{2.29}$$

Por lo tanto,

$$\Gamma^{(1)}\Delta = 0$$

Así obtenemos la condición de invarianza de Lie

$$\Gamma^{(1)}\Delta|_{\Delta=0} = 0 \tag{2.30}$$

Es una forma de establecer la condición de invarianza.

Operador para Ecuaciones diferenciales de orden n

En general, si definimos la extensión de orden n a Γ como

$$\Gamma^{(n)} = \mathcal{X}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{Y}_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y''} + ... + \mathcal{Y}_{[nx]}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} + ... \tag{2.31}$$

donde los infinitesimales están dados por

$$\mathcal{Y}_{(n)x} = D_x(\mathcal{Y}_{[(n-1)x]}) - y^{(n)}D_x(\mathcal{X}) \tag{2.32}$$

Donde

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + y'''\frac{\partial}{\partial y''} + ...$$

Entonces, la invariancia de la ecuación diferencial

$$\Delta(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.33}$$

Es dado por

$$\Gamma^{(n)}\Delta|_{\Delta=0} = 0 \tag{2.34}$$

Donde (2.34) es la condición de invarianza de Lie

2.1.5. Soluciones Invariantes

En ocasiones, al buscar una sustitución adecuada mediante el cambio de variable proporcionado por la solución de las ecuaciones diferenciales parciales asociadas a los infinitesimales, se encuentran cálculos sumamente complejos, durante el desarrollo de este procedimiento. Por este motivo, se opta por explorar soluciones que sean invariables bajo el grupo generado por un infinitesimal específico Γ.

A partir de la definición anterior de soluciones invariables, se establece que

$$Q(x, y, y') = \mathcal{Y} - y'\mathcal{X} = 0 \tag{2.35}$$

Para determinar las soluciones invariables, es necesario resolver la ecuación diferencial ordinaria (2.35) y posteriormente verificar si alguna de las posibles soluciones satisface la ecuación diferencial ordinaria dada.

2.2. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas se implementa principalmente para resolver problemas de frontera, a partir de ir reemplazando cada una de sus respectivas derivadas en la ecuación diferencial con una aproximación de cociente adecuada, este cociente de diferencia particular y longitud h, se selecciona para mantener un orden específico de error de truncamiento, sin embargo h, no se puede elegir demasiado pequeña debido a la inestabilidad general de las aproximaciones de las respectivas derivadas.

Para resolver ecuación diferencial ordinaria no problema lineal por el método de diferencias finitas se debe tener los valores de frontera.

$$y'' = f(x, y, y') \text{ para } a \leq x \leq b \text{ con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta$$

A partir de las condiciones de frontera y sus derivadas se genera un sistema de ecuaciones, el cual será no lineal, por lo que se requiere un método iterativo para resolverlo, para poder aplicar esta técnica numérica f debe satisfacer el siguiente condiciones

- Suponga que la función f y sus derivadas parciales f_y y $f_{y'}$ son continuas en el conjunto $D = (x, y, y')|$ para $a \leq x \leq b$ con $-\infty \leq y \leq \infty$ y $-\infty \leq y' \leq \infty$
- $f_y(x, y, y') > \delta \in D$ para algún $\delta > 0$
- Existe una constante k y L con

$$k = \max_{(x,y,y) \in D} |f_y(x, y, y')| \quad y \quad L = \max_{(x,y,y) \in D} |f_{y'}(x, y, y')|$$

Entonces el problema de valor de frontera tiene una única solución.
Se discretiza el intervalo $[a, b]$ en $(N+1)$ sub intervalos iguales cuyos extremos están en $x_i = a + ih$

para $i = 1, 2, ..., N+1$. Suponer que la solución exacta tiene una cuarta derivada acotada, esto nos permite reemplazar $y''(x_i)$ y $y'(x_i)$ en cada una de las ecuaciones.

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) \tag{2.36}$$

Dentro del método de diferencias finitas existen tipos de diferencias laterales y centrada, en este se casó se implementará una diferencia centrada. Por tanto, para toda $i = 1, 2, .., N$, se tiene

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

Para algunas ξ_i y η_i en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}).

Para esta técnica de aproximación numérica se procede a eliminar los términos de error y se emplean las condiciones de frontera $w_0 = \alpha$ y $w_{N+1} = \beta$, y nuestra ecuación diferencial ordinaria no lineal se expresa de la forma.

$$w(x_{i+1}) - 2w(x_i) + w(x_{i-1})h^2 = f(x_i, w(x_i), \frac{w(x_{i+1}) - w(x_{i-1})}{2h}) = 0 \tag{2.37}$$

Para cada $i = 1, 2, .., N$, el sistema no lineal NxN obtenido a partir del método es

$$\begin{aligned}
2w_1 - w_2 + h^2 f(x_1, w_1, \frac{w(2) - \alpha}{2h}) - \alpha &= 0 \\
-w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f(x_2, w_2, \frac{w(3) - w(1)}{2h} &= 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
-w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h} &= 0 \\
-w_{N-1} + 2w_N + h^2 f(x_N, w_N, \frac{\beta - wN - 1}{2h} - \beta &= 0
\end{aligned}$$

El sistema tiene una solución si se cumple que $h < 2/L$

Para resolver el anterior sistema lineal que se generó, se aplica el método de Newton para aproximar la solución del sistema, se genera una sucesión de iteraciones $(w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, ..., w_N^{(k)})$ que converge a la solución del sistema siempre que la aproximación inicial $(w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, ..., w_N^{(0)})$ sea lo suficientemente cercana a la solución $(w_1, w_2, ..., w_N)$ y de la matriz jacobiana del sistema para que no sea singular.

$$J(w_1, ..., w_N) = \begin{cases} -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}) \\ 2 + h^2 f_y(x_i, w_i \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}) \\ -1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}) \end{cases}$$

de donde se tiene que $w_0 = \alpha$ y $w_{N+1} = \beta$, dado que el método de Newton para ser aplicado requiere que los sistemas no lineales sean de NxN

$$
\begin{aligned}
J(w_q, ..., w_N)(v_1, ..., v_N)^t \\
&= -(2w_q - w_2 - \alpha + h^2 f(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}) \\
&- w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}) \\
&. \\
&. \\
&. \\
&- w_{N-2} + w_{N-1} - w_N + h^2 f(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}) \\
&- w_{N-1} + 2w_N + h^2 f(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h} - \beta)^t
\end{aligned}
$$

se despejan los $v_1, v_2, ..., v_N$ porque $w_i^{(K)} = w_i^{(K-1)} + v_i$ para cada $i = 1, 2, ..., N$ puesto que J es tridiagonal

Capítulo 3

Resultados

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$y'' = A_1 x^{n_1} y^{m_1} (y')^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_1} (y')^{l_2} \tag{3.1}$$

Donde A_1, A_2, n_1, n_2, m_1, m_2, l_1 y l_2 son constantes, la cual es considerada de tipo *Emden-Fowler* generalizada. Para llevar a cabo el presente estudio, se han considerado dos casos especiales de esta ecuación, los cuales son una reducción a una forma autónoma, la cual es representada como

$$y'' = A_1 y^m (y')^{l_1} + A_2 y^m (y')^{l_2} \tag{3.2}$$

Y además, la ecuación de la forma

$$y'' = A_1 x^n (y')^{l_1} + A_2 x^n (y')^{l_2} \tag{3.3}$$

Los cuales son subcasos de la ecuación (3.1), para los cuales se procede a realizar el respectivo estudio de simetrias.

3.1. Caso $y''(x) = A_1 y^m (y')^{l_1} + A_2 y^m (y')^{l_2}$

Considere la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden *Emden-Fowler*

$$y'' = A_1 y^m (y')^{l_1} + A_2 y^m (y')^{l_2}. \tag{3.4}$$

Tomando

$$\Delta = y'' - A_1 y^m (y')^{l_1} - A_2 y^m (y')^{l_2} = 0,$$

de la condición de invarianza de Lie (2.30)

$$\Gamma^{(2)} \Delta \mid_{\Delta=0} = 0; \quad \Gamma^{(2)} = \mathcal{X} \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{Y}_{[x]} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathcal{Y}_{[xx]} \frac{\partial}{\partial y''}$$

se obtiene

$$\mathcal{X}(0)+\mathcal{Y}my^{m-1}(-A_1(y')^{l_1}-A_2(y')^{l_2})+\mathcal{Y}_{[x]}y^m(-A_1l_1(y')^{l_1-1}-A_2l_2(y')^{l_2-1})+\mathcal{Y}_{[xx]}(1)=0,$$
$$\mathcal{Y}my^{m-1}(-A_1(y')^{l_1}-A_2(y')^{l_2})+\mathcal{Y}_{[x]}y^m(-A_1l_1(y')^{l_1-1}-A_2l_2(y')^{l_2-1})+\mathcal{Y}_{[xx]}=0.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{Y}_{[x]}=\mathcal{Y}_x+(\mathcal{Y}_y-\mathcal{X}_x)y'-\mathcal{X}_yy'^2,$$
$$\mathcal{Y}_{[xx]}=\mathcal{Y}_{xx}+(2\mathcal{Y}_{xy}-\mathcal{X}_{xx})y'+(\mathcal{Y}_{yy}-2\mathcal{X}_{xy})y'^2-\mathcal{X}_{yy}y'^3+(\mathcal{Y}_y-2\mathcal{X}_x)y''-3\mathcal{X}_yy'y'',$$

se sigue

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}_{xx}+(2\mathcal{Y}_{xy}-\mathcal{X}_{xx})y'+(\mathcal{Y}_{yy}-2\mathcal{X}_{xy})y'^2-\mathcal{X}_{yy}y'^3+(\mathcal{Y}_y-2\mathcal{X}_x)y''-3\mathcal{X}_yy'y''+(\mathcal{Y}_x+(\mathcal{Y}_y\\&-\mathcal{X}_x)y'-\mathcal{X}_yy'^2)(y^m(-A_1l_1(y')^{l_1-1}-A_2l_2(y')^{l_2-1})+\mathcal{Y}my^{m-1}(-A_1(y')^{l_1}-A_2(y')^{l_2})=0.\end{aligned}$$

Luego, remplazando la ecuación (3.4) y agrupando

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}_{xx}+(2\mathcal{Y}_{xy}-\mathcal{X}_{xx})y'+(\mathcal{Y}_{yy}-2\mathcal{X}_{xy})y'^2-\mathcal{X}_{yy}y'^3+(\mathcal{Y}_y-2\mathcal{X}_x)(A_1y^m(y')^{l_1}+A_2y^m(y')^{l_2})\\&\quad-3\mathcal{X}_yy'(A_1y^m(y')^{l_1}+A_2y^m(y')^{l_2})+(\mathcal{Y}_x+(\mathcal{Y}_y-\mathcal{X}_x)y'-\mathcal{X}_yy'^2)(y^m(-A_1l_1(y')^{l_1-1}\\&\quad-A_2l_2(y')^{l_2-1})+\mathcal{Y}my^{m-1}(-A_1(y')^{l_1}-A_2(y')^{l_2})=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}_{xx}+(2\mathcal{Y}_{xy}-\mathcal{X}_{xx})y'+(\mathcal{Y}_{yy}-2\mathcal{X}_{xy})y'^2-\mathcal{X}_{yy}y'^3+\mathcal{Y}_yA_1y^m(y')^{l_1}+\mathcal{Y}_yA_2y^m(y')^{l_2}\\&\quad-2\mathcal{X}_xA_1y^m(y')^{l_1}-2\mathcal{X}_xA_2y^m(y')^{l_2}-3\mathcal{X}_yA_1y^m(y')^{l_1+1}-3\mathcal{X}_yA_2y^m(y')^{l_2+1}\\&\quad-\mathcal{Y}_xy^mA_1l_1(y')^{l_1-1}-\mathcal{Y}_xy^mA_2l_2(y')^{l_2-1}-\mathcal{Y}_yy^mA_1l_1(y')^{l_1-1+1}-\mathcal{Y}_yy^mA_2l_2(y')^{l_2-1+1}\\&\quad+\mathcal{X}_xy^mA_1l_1(y')^{l_1-1+1}+\mathcal{X}_xy^mA_2l_2(y')^{l_2-1+1}+\mathcal{X}_yy^mA_1l_1(y')^{l_1-1+2}+\mathcal{X}_yy^mA_2l_2(y')^{l_2-1+2}\\&\quad-\mathcal{Y}my^{m-1}A_1(y')^{l_1}-\mathcal{Y}my^{m-1}A_2(y')^{l_2}=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{Y}_{xx}+(2\mathcal{Y}_{xy}-\mathcal{X}_{xx})y'+(\mathcal{Y}_{yy}-2\mathcal{X}_{xy})y'^2-\mathcal{X}_{yy}y'^3+(\mathcal{Y}_yA_1y^m-\mathcal{X}_xA_1y^m-\mathcal{Y}_yy^mA_1l_1\\&\quad+\mathcal{X}_xy^mA_1l_1-my^{m-1}\mathcal{Y}A_1)(y')^{l_1}+(\mathcal{X}_yy^mA_1l_1-3\mathcal{X}_yy^mA_1)(y')^{l_1+1}+(-\mathcal{Y}_xy^mA_1l_1)(y')^{l_1-1}\\&\quad+(\mathcal{Y}_yA_2y^m-2\mathcal{X}_xA_2y^m-\mathcal{Y}_yy^mA_2l_2+\mathcal{X}_xy^mA_2l_2-my^{m-1}\mathcal{Y}A_2)(y')^{l_2}\\&\quad+(-\mathcal{Y}_xy^mA_2l_2)(y')^{l_2-1}+(\mathcal{X}_yy^mA_2l_2-3\mathcal{X}_yy^mA_2)(y')^{l_2+1}=0.\end{aligned}$$

Luego, $\{1,y',(y')^2,(y')^3,(y')^{l_1},(y')^{l_1-1},(y')^{l_1+1},(y')^{l_2},(y')^{l_2-1},(y')^{l_2+1}\}$ forman una base linealmente independiente, entonces las ecuaciones determinísticas resultantes son:

$$\mathcal{Y}_{xx}=0 \tag{3.5a}$$
$$2\mathcal{Y}_{xy}-\mathcal{X}_{xx}=0 \tag{3.5b}$$
$$\mathcal{Y}_{yy}-2\mathcal{X}_{xy}=0 \tag{3.5c}$$
$$\mathcal{X}_{yy}=0 \tag{3.5d}$$
$$\mathcal{Y}_yy^m[A_1(1-l_1)]+\mathcal{X}_xy^m[A_1(l_1-2)]-my^{m-1}\mathcal{Y}A_1=0 \tag{3.5e}$$
$$\mathcal{X}_yy^m[A_1(l_1-3)]=0 \tag{3.5f}$$
$$-\mathcal{Y}_xy^mA_1l_1=0 \tag{3.5g}$$
$$\mathcal{Y}_yy^m[A_2(1-l_2)]+\mathcal{X}_xy^m[A_2[l_2-2]]-my^{m-1}\mathcal{Y}A_2=0 \tag{3.5h}$$
$$-\mathcal{Y}_xy^mA_2l_2=0 \tag{3.5i}$$
$$\mathcal{X}_yy^m[A_2(l_2-3)]=0 \tag{3.5j}$$

Al resolver (3.5a) se obtiene

$$\mathcal{Y} = a(y)x + b(y) \tag{3.6}$$

y de (3.5d) se obtiene

$$\mathcal{X} = p(x)y + q(x). \tag{3.7}$$

Ahora, reemplazando (3.6) y (3.7) en (3.5b) se obtiene

$$2[a'(y)] - [p''(x)y + q''(x)] = 0. \tag{3.8}$$

Luego, reemplazando en (3.5c)

$$[a''(y)x + b''(y)] - 2[p'(x)] = 0. \tag{3.9}$$

De (3.5f) se obtiene

$$[p(x)]y^m\,[A_1(l_1 - 3)] = 0,$$

dado que $y^m \neq 0$ entonces

$$p(x)\,[A_1(l_1 - 3)] = 0. \tag{3.10}$$

De (3.5g) se obtiene

$$a(y)A_1l_1 = 0. \tag{3.11}$$

De (3.5i) se obtiene

$$a(y)A_2l_2 = 0. \tag{3.12}$$

De (3.5j)

$$p(x)[A_2(l_2 - 3)] = 0. \tag{3.13}$$

Al reemplazar en las ecuación (3.5e) se obtiene

$$[a'(y)x + b'(y)]y^m[A_1(1 - l_1)] + [p'(x)y + q'(x)]y^m[A_1(l_1 - 2)] - mA_1y^{m-1}[a(y)x + b(y)] = 0,$$

como $y^m \neq 0$ entonces

$$[a'(y)x + b'(y)][A_1(1 - l_1)] + [p'(x)y + q'(x)][A_1(l_1 - 2)] - mA_1y^{-1}[a(y)x + b(y)] = 0. \tag{3.14}$$

Del mismo modo, de (3.5h) se tendrá

$$[a'(y)x + b'(y)][A_2(1 - l_2)] + [p'(x)y + q'(x)][A_2(l_2 - 2)] - mA_2y^{m-1}[a(y)x + b(y)] = 0. \tag{3.15}$$

Ahora, de las ecuaciones (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13) se obtienen los siguientes casos para la existencia de las funciones $a(y)$ y $p(x)$

Caso I.

Para $a(y) = 0$ y $p(x) = 0$ entonces se tendrá que se cumplen las ecuaciones (3.10), (3.11), (3.12) y (3.13). De la ecuación (3.9) se obtiene

$$b''(y) = 0.$$

Al resolver la ecuación se obtiene la función

$$b(y) = k_3y + k_4$$

Casos	Ecuaciones
I	$a(y) = 0,\ p(x) = 0$
II	$a(y) \neq 0\ ,\ A_1 l_1 = 0,\ p(x) \neq 0\ ,\ A_1(l_1 - 3) = 0,\ A_2(l_2 - 3) = 0$
III	$a(y) = 0,\ p(x) \neq 0\ ,\ A_1(l_1 - 3) = 0,\ A_2(l_2 - 3) = 0$
IV	$a(y) \neq 0\ ,\ A_1 l_1 = 0,\ A_2 l_2 = 0\ p(x) = 0$

Tabla 3.1: Casos para las funciones $a(y)$ y $p(x)$

Donde k_3 y k_4 son constantes. Ahora, de la ecuación (3.8) se obtiene

$$q''(x) = 0$$

Al resolver se obtiene la función

$$q(x) = k_5 x + k_6$$

Con k_5 y k_6 constantes. Reemplazando las funciones obtenidas en (3.6) y (3.7) se tendrá

$$\mathcal{X} = k_5 x + k_6, \quad \mathcal{Y} = k_3 y + k_4$$

Reemplazando los resultados obtenidos en la ecuación (3.14) se tendrá que

$$\begin{aligned} k_3[A_1(1 - l_1)] + k_5[A_1(l_1 - 2)] - m y^{-1} A_1[k_3 y + k_4] = 0; \\ k_3[A_1(1 - l_1)] + k_5[A_1(l_1 - 2)] - m A_1 k_3 - m y^{-1} A_1 k_4 = 0; \\ k_3[A_1(1 - l_1 - m)] + k_5[A_1(l_1 - 2)] - m y^{-1} A_1 k_4 = 0. \end{aligned}$$

Dado que $\{1, y^{-1}\}$ forman una base linealmente independiente, entonces se obtienen

$$m A_1 k_4 = 0 \tag{3.16a}$$
$$k_3[A_1(1 - l_1 - m)] + k_5[A_1(l_1 - 2)] = 0 \tag{3.16b}$$

Ahora, reemplazando en (3.15) se tendrá

$$\begin{aligned} k_3[A_2(1 - l_2)] + k_5[A_2(l_2 - 2)] - m y^{-1} A_2[k_3 y + k_4] = 0; \\ k_3[A_2(1 - l_2)] + k_5[A_2(l_2 - 2)] - m A_2 k_3 - m y^{-1} A_2 k_4 = 0; \\ k_3[A_2(1 - l_2 - m)] + k_5[A_2(l_2 - 2)] - m y^{-1} A_2 k_4 = 0. \end{aligned}$$

Dado que $\{1, y^{-1}\}$ forman una base linealmente independiente, se obtienen

$$m A_2 k_4 = 0 \tag{3.17a}$$
$$k_3[A_2(1 - l_2 - m)] + k_5[A_2(l_2 - 2)] = 0 \tag{3.17b}$$

Ahora, se debe verificar el cumplimiento de las funciones obtenidas de (3.14) y (3.15), esto es, verificar los casos para posibles valores de las constantes, los cuales cumplan con las igualdades obtenidas.

De la ecuación (3.16a) se pueden obtener los siguientes subcasos:

Subcaso	**Ecuaciones**
I.1	$k_4 = 0$
I.2	$k_4 \neq 0,\ m A_1 = 0$

Tabla 3.2: Casos para las constantes k_4, m y A_1

Subcaso	**Ecuaciones**
I.1.1	$k_3 = 0,\ k_5[A_1(l_1-2)] = 0,\ k_5[A_2(l_2-2)] = 0$
I.1.2	$k_3 \neq 0,\ A_1(1-l_1-m) = 0,\ A_2(1-l_2-m) = 0,\ k_5[A_1(l_1-2)] = 0,$ $k_5[A_2(l_2-2)] = 0$
I.1.3	$k_3 \neq 0,\ A_1(1-l_1-m) \neq 0,\ k_3 = -\frac{k_5[A_1(l_1-2)]}{A_1(1-l_1-m)}$

Tabla 3.3: Casos para las constantes k_3, k_5, A_1, A_2, l_1, l_2 y m

Subcaso I.1
Dado que $k_4 = 0$ entonces se da cumplimiento a las ecuaciones (3.16a) y (3.17a). ahora de la ecuación (3.16b) se obtienen los siguientes casos seguidos del caso **I.1**
Subcaso I.1.1

Dado que $k_3 = 0$, de las ecuaciones (3.16b) y (3.17b) se obtienen los casos:

Subcaso	**Ecuaciones**
I.1.1.1	$k_5 = 0$
I.1.1.2	$k_5 \neq 0,\ A_1(l_1-2) = 0,\ A_2(l_2-2) = 0$

Tabla 3.4: Casos para las constantes k_5, A_1, l_1,A_2 Y l_2

Subcaso I.1.1.1

Dado que $k_5 = 0$ y además se tiene que $k_4 = 0$ y $k_3 = 0$, con lo cual se da cumplimiento a las ecuaciones planteadas anteriormente. Por tanto se obtiene que:

$$\mathcal{X} = k_6 \quad , \quad \mathcal{Y} = 0$$

Los cuales corresponden a los infinitesimales asociados a la ecuación (3.4). Siguiendo un razonamiento similar para los subcasos y casos anteriores de las tablas 3.1 - 3.4, se pueden obtener los infinitesimales asociados a las ecuaciones diferenciales resultantes, los cuales se muestran en la sigueinte tabla

Infinitesimales		**Ecuación Diferencial**
$\mathcal{X} = k_6$	$\mathcal{Y} = 0$	$y'' = A_1 y^m (y')^{l_1} + A_2 y^m (y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = 0$	$y'' = y^m (y')^2 (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_6$	$\mathcal{Y} = k_3 y$	$y'' = y^{1-l} (y')^l (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_3 y$	$y'' = y^{-1} (y')^2 (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = (\frac{2-l}{1-l-m}) k_5 y$	$y'' = y^m (y')^l (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_5 y$	$y'' = y^{-1} (A_1 (y')^{l_1} + A_2 (y')^{l_2})$
$\mathcal{X} = k_6$	$\mathcal{Y} = k_4$	$y'' = A_1 (y')^{l_1} + A_2 (y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_4$	$y'' = (y')^2 (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_6$	$\mathcal{Y} = k_3 y + k_4$	$y'' = y' (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_3 y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_5 x + k_6$	$\mathcal{Y} = (\frac{2-l}{1-l}) k_5 y + k_4$	$y'' = (y)^l (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = 0$	$y'' = y^m (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = k_3 y$	$y'' = y (A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_7 x + k_8$	$\mathcal{Y} = 0$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7 x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_3 y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7 x + k_8$	$\mathcal{Y} = (\frac{2}{1-m}) k_7 y$	$y'' = y^m (A_1 + A_2)$

Infinitesimales		**Ecuación Diferencial**
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_7y$	$y'' = y^{-1}(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y$	$y'' = y^{-3}(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + (\frac{2}{1-m})k_7y$	$y'' = y^{-3}(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_7y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_3y$	$y'' = y(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_3y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = k_4$	$y'' = A_1 + A_2$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = 0$	$y'' = y^m(y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = 0$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_3y$	$y'' = y^{-2}(y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_3y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = (\frac{1}{1+m})k_7y$	$y'' = y^m(y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2$	$y'' = y^{-3}(y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2 + k_3y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2 - k_7y$	$y'' = y^{-3}(y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_4$	$y'' = (y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_7\frac{y}{2} + k_4$	$y'' = (y')^3(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2 + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2 + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2 + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_5xy + k_6y + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_5y^2 + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = 2k_7y + k_4$	$y'' = A_1 + A_2$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + 2k_7y + k_4$	$y'' = A_1 + A_2$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_2x + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_2x + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_2x + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_2x + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_2x + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_2x + k_7y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_4$	$y'' = y^{-3}(A_1 + A_2)$

Infinitesimales		Ecuación Diferencial
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_3y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + k_7y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1\frac{x^2}{2} + k_7x + k_8$	$\mathcal{Y} = k_1\frac{x}{2}y + (\frac{2}{1-m})k_7y + k_4$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1xy + k_2y + k_5x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_1(y^2-1)$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1xy + k_2y + k_5x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_1(y^2-1) + k_7y$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1xy + k_2y + k_3\frac{x^2}{2} + k_5x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_1y^2 + k_3\frac{x}{2}y + k_4x + k_8$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_1xy + k_2y + k_3\frac{x^2}{2} + k_5x + k_6$	$\mathcal{Y} = k_1y^2 + k_3\frac{x}{2}y + k_4x + k_7y + k_8$	$y'' = 0$

Tabla 3.5: Ecuaciones Diferenciales resultantes e infinitesimales asociados

3.2. Caso $y''(x) = A_1x^n(y')^{l_1} + A_2x^n(y')^{l_2}$

Ecuación diferencial de Emden-Fouler

$$y'' = A_1x^n(y')^{l_1} + A_2x^n(y')^{l_2} \tag{3.18}$$

Luego;

$$y'' - A_1x^n(y')^{l_1} - A_2x^n(y')^{l_2} = 0$$
$$\Delta = y'' - A_1x^n(y')^{l_1} - A_2x^n(y')^{l_2} = 0$$

Ahora, la condición de invarianza de Lie (2.30) es de la forma:

$$\Gamma^{(2)}\Delta \mid_{\Delta=0} = 0; \quad \Gamma^{(2)} = \mathcal{X}\frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{Y}\frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{Y}_{[x]}\frac{\partial}{\partial y'} + \mathcal{Y}_{[xx]}\frac{\partial}{\partial y''}$$

Ahora, se obtiene:

$$\mathcal{X}(-A_1nx^{n-1}(y')^{l_1} - A_2nx^{n-1}(y')^{l_2}) + \mathcal{Y}(0) + \mathcal{Y}_{[x]}(-A_1x^nl_1(y')^{l_1-1} - A_2x^nl_2(y')^{l_2-1}) + \mathcal{Y}_{[xx]}(1) = 0$$

Ahora, como:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{[x]} &= \mathcal{Y}_x + (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)y' - \mathcal{X}_y y'^2 \\ \mathcal{Y}_{[xx]} &= \mathcal{Y}_{xx} + (2\mathcal{Y}_{xy} - \mathcal{X}_{xx})y' + (\mathcal{Y}_{yy} - 2\mathcal{X}_{xy})y'^2 - \mathcal{X}_{yy}y'^3 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)y'' - 3\mathcal{X}_y y'y''\end{aligned}$$

Reemplazando en la condición de invarianza queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{xx} &+ (2\mathcal{Y}_{xy} - \mathcal{X}_{xx})y' + (\mathcal{Y}_{yy} - 2\mathcal{X}_{xy})(y')^2 - \mathcal{X}_{yy}(y')^3 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)y'' - 3\mathcal{X}_y y'y'' \\ &+ (\mathcal{Y}_x + (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)y' - \mathcal{X}_y(y')^2)(-A_1x^nl_1(y)^{l_1-1} - A_2x^nl_2(y)^{l_2-1}) \\ &+ \mathcal{X}(-A_1nx^n(y')^{l_1} - A_2nx^n(y')^{l_2}) = 0\end{aligned}$$

Luego, remplazando la ecuación y agrupando

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_{xx} - \mathcal{X}A_1nx^{n-1}(y')^{l_1} - \mathcal{X}A_2nx^{n-1}(y')^{l_2} + \mathcal{Y}_x(-A_1x^nl_1(y')^{l_1-1}) + (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)(-A_1x^nl_1(y')^{l_1}) \\
&\quad - \mathcal{X}_y(-A_1x^n(y')^{l_1+1}) + \mathcal{Y}_x(-A_2x^nl_2(y')^{l_1-1}) + (\mathcal{Y}y - \mathcal{X}_x)(-A_2x^nl_2(y')^{l_2}) - \mathcal{X}_y(-A_2x^n(y')^{l_2+1}) \\
&\quad + (2\mathcal{X}_{xy} - \mathcal{X}_{xx})(y') + (\mathcal{Y}_{yy} - 2\mathcal{X}_{xy})(y')^2 - \mathcal{X}_{yy}(y')^3 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)A_1x^n(y')^{l_1} \\
&\quad + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)A_2x^n(y')^{l_2} - 3\mathcal{X}_yA_1x^n(y')^{l_1+1} - 3\mathcal{X}_yA_2x^n(y')^{l_2+1} = 0
\end{aligned}$$

Luego, $\{1, x^{-1}, (y'), (y')^2, (y')^3, (y')^{l_1}, (y')^{l_1-1}, (y')^{l_1+1}, (y')^{l_2}, (y')^{l_2-1}, (y')^{l_2+1}\}$ forman una base linealmente independiente, entonces las ecuaciones resultantes son:

$$A_1[-\mathcal{X}nx^{-1} - (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)l_1 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)] = 0 \tag{3.19a}$$
$$A_2[-\mathcal{X}nx^{-1} - (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)l_1 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)] = 0 \tag{3.19b}$$
$$\mathcal{Y}_xA_1l_1 = 0 \tag{3.19c}$$
$$\mathcal{Y}_xA_2l_2 = 0 \tag{3.19d}$$
$$\mathcal{X}_yA_1 = 0 \tag{3.19e}$$
$$\mathcal{X}_yA_2 = 0 \tag{3.19f}$$
$$\mathcal{Y}_{xx} = 0 \tag{3.19g}$$
$$2\mathcal{Y}_{xy} - \mathcal{X}_{xx} = 0 \tag{3.19h}$$
$$\mathcal{Y}_{yy} - 2\mathcal{X}_{xy} = 0 \tag{3.19i}$$
$$\mathcal{X}_{yy} = 0 \tag{3.19j}$$

Resolviendo la ecuación (3.19j) obtenemos

$$\mathcal{X} = p(x)y + q(x) \tag{3.20}$$

Ahora resolvemos (3.19g)

$$\mathcal{Y} = a(y)x + b(y) \tag{3.21}$$

Reemplazando (3.20) y (3.21) en la ecuación (3.19h)

$$2p'(x) - p''(x)y - q''(x) = 0 \tag{3.22}$$

Dado de que las variables son linealmente independientes, podemos concluir de (3.22)

$$p''(x)y = 0 \tag{3.23a}$$
$$2p'(x) - q''(x) = 0 \tag{3.23b}$$

Resolviendo (3.23a)

$$p''(x)y = 0 \tag{3.24a}$$
$$p'(x) = k_1 \tag{3.24b}$$
$$p(x) = k_1x + k_2 \tag{3.24c}$$

Ahora reemplazando (3.24b) en (3.23b)

$$2k_1 - q''(x) = 0 \tag{3.25a}$$
$$q''(x) = 2k_1 \tag{3.25b}$$
$$q'(x) = 2k_1x + k_3 \tag{3.25c}$$
$$q(x) = k_1x^2 + k_3x + k_4 \tag{3.25d}$$

Al reemplazar (3.20) y (3.21) en (3.19i) se tendrá.

$$a''(y)x + b''(y) - 2p'(x) = 0 \tag{3.26}$$

Dado de que las variables son linealmente independientes podemos concluir de (3.26).

$$a''(y)x = 0 \tag{3.27a}$$
$$b''(y) - 2p'(x) = 0 \tag{3.27b}$$

Trabajando con la ecuación (3.27a) obtendremos

$$a''(y)x = 0 \tag{3.28a}$$
$$a'(y) = a_1 \tag{3.28b}$$
$$a(y) = a_1 y + a_2 \tag{3.28c}$$

Reemplazando la ecuación (3.24b) en la ecuación (3.27b), obtenemos.

$$b''(y) - 2k_1 = 0 \tag{3.29a}$$
$$b'(y) = 2k_1 y + a_3 \tag{3.29b}$$
$$b(y) = k_1 y^2 + a_3 y + a_4 \tag{3.29c}$$

Por tanto, reemplazado (3.24c) y (3.25d), en la ecuación (3.20), también sustituimos las ecuaciones (3.28c) y (3.29c) en (3.21), los infinitesimales, nos quedan de la forma

$$\mathcal{X} = [k_1 x + k_2]y + k_1 x^2 + k_3 x + k_4 \tag{3.30a}$$
$$\mathcal{Y} = [a_1 y + a_2]y + k_1 y^2 + a_3 y + a_4 \tag{3.30b}$$

Ahora comenzamos a implementar las otras ecuaciones por casos donde planteamos las siguientes hipótesis.

Casos	Ecuaciones
I	$A_1 \neq 0,\ l_1 \neq 0,\ A_2(x) \neq 0,\ l_2 \neq 0$
II	$A_1 \neq 0,\ l_1 \neq 0,\ A_2(x) = 0$
III	$A_1 = 0,\ A_2(x) \neq 0,\ l_2 \neq 0$
IV	$A_1 = 0,\ A_2(x) = 0$

Tabla 3.6: Casos para las constantes A_1, A_2, l_1 y l_2

Caso I Trabajando con (3.19e), tendremos que:

$$\mathcal{X}_y = 0 \tag{3.31}$$

Entonces, reemplazando (3.30a) en (3.31) tenemos.

$$k_1 x + k_2 = 0 \tag{3.32}$$

Dado que las ecuaciones cumplen con que son linealmente independientes, entonces de (3.32) podemos concluir que

$$k_1 x = 0 \tag{3.33a}$$
$$k_2 = 0 \tag{3.33b}$$

Podemos concluir que:

$$k_1 = k_2 = 0 \tag{3.34}$$

Ahora trabajamos con la ecuación (3.19c).

$$\mathcal{Y}_y = 0 \tag{3.35}$$

Tendremos que derivando parcialmente (3.30b) respecto a y obtendremos.

$$a_1 y + a_2 = 0 \tag{3.36}$$

Por ser linealmente independiente, del mismo modo que hicimos en la ecuación (3.32) obtenemos o siguiente.

$$a_1 = a_2 = 0 \tag{3.37}$$

Por ende los infinitesimales nos quedan de la forma.

$$\mathcal{X} = k_3 x + k_4 \tag{3.38a}$$

$$\mathcal{Y} = a_3 y + a_4 \tag{3.38b}$$

Trabajando con (3.38a)y (3.38b) y reemplazándolas en la ecuación (3.19a), tendremos.

$$[-\mathcal{X} n x^{-1} - (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x) l_1 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x)] = 0 \tag{3.39a}$$

$$-(k_3 x + k_4) n x^{-1} - (a_3 - k_3) l_1 + (a_3 - 2k_3) = 0 \tag{3.39b}$$

$$-k_3 n + k_4 n x^{-1} - (a_3 - k_3) l_1 + (a_3 - 2k_3) = 0 \tag{3.39c}$$

Dado que se cumple que la ecuación es linealmente independiente se tendrá.

$$k_4 n x = 0 \quad -k3 - (a_3 - k_3) l_1 + (a_3 - 2k_3) = 0 \tag{3.40}$$

Entonces tendremos lo siguiente.

$$k_4 n = 0 \tag{3.41a}$$

$$-a_3(l_1 - 1) + k_3(l_1 - 2 - n) = 0 \tag{3.41b}$$

Ahora se derivan dos subcasos de la ecuación (3.41a)

Subcasos	Ecuaciones
I.1	$n \neq 0,\ k_4 = 0$
I.2	$n = 0,\ k_4 \neq 0$

Tabla 3.7: Casos para las constantes k_4 y n

Subcaso I.1: En este subcaso tendremos que nuestra $n \neq 0$, a partir de esto obtenemos los siguientes subcasos de la (3.41b)

Subcasos	Ecuaciones	
I.1.1	$k_3 = \frac{a_3(l_1-1)}{l_1-n-2}$	$l_1 - n - 2 \neq 0$
I.1.2	$a_3 = \frac{k_3(l_1-2-n}{l_1-1}$	$l_1 - 1 \neq 0$
I.1.3	$l_1 = 1, k_3 = 0$	

Tabla 3.8: Casos para las constantes k_3, n, a_3, l_1

Subcaso I.1.1 Ahora procedemos a trabajar con la ecuación (3.19f), pero dado que $A_2 \neq$, es igual que desarrollar la ecuación (3.19e), que ya la desarrollamos con anterioridad, de igual modo con la ecuación (3.19d), como se tiene que $l_2 \neq 0$, es igual que cuando utilizamos la (3.19c), por lo tanto, procedemos a sustituir nuestros infinitesimales en la ecuación (3.19b)

$$-\mathcal{X}nx^{-1} - (\mathcal{Y}_y - \mathcal{X}_x)l_1 + (\mathcal{Y}_y - 2\mathcal{X}_x) = 0 \tag{3.42a}$$

$$(-k_3x)x^{-1}n - (a_3 - k_3)l_2 + (a_3 - 2k_3) = 0 \tag{3.42b}$$

$$-a_3(l_2 - 1) + k_3(l_2 - n - 2) = 0 \tag{3.42c}$$

Ahora reemplazando el valor de k_3 en (3.42c), tenemos.

$$-a_3(l_2 - 1) + a_3\frac{l_1 - 1}{l_1 - n - 2}(l_2 - n - 2) = 0$$

Para que se cumpla nuestra igualdad existen dos posibilidades, primero que $a_3 = 0$, pero esta opción la rechazamos, ya que anula nuestros infinitesimales y no nos brinda información, la siguiente es que $l_1 = l_2$, que es la mejor opción posible, por tanto, obtenemos los siguientes infinitesimales.

$$\mathcal{X} = a_3\frac{l - 1}{l - n - 2} \quad \mathcal{Y} = a_3y + a_4 \quad con \quad l_1 = l_2 = l$$

Y nuestra ecuación diferencial de segundo orden para estos infinitesimales es.

$$y'' = (A_1 + A_2)x^n(y')^l$$

Ahora, siguiendo un razonamiento similar para los subcasos y casos anteriores, se pueden obtener los infinitesimales asociados a las ecuaciones diferenciales resultantes, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

Infinitesimales		Ecuación Diferencial
$\mathcal{X} = a_3\frac{l-1}{l-n-2}$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = (A_1 + A_2)x^n(y')^l$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1x^n(y')^{l_1} + A_2x^n$
$\mathcal{X} = a_3x$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = \frac{A_1(y)^{l_1} + A_2}{x}$
$\mathcal{X} = a_3\frac{l_1-1}{l_1-n-2}x$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = A_1x^n(y')^{l_1}$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = k_3\frac{l_2-n-2}{l_2-1}y + a_4$	$y'' = A_2x^n(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = a_3\frac{l_2-1}{l_2-n-2}x$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = A_2x^n(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_2x^n(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_2x + a_4$	$y'' = A_2x^n$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = a_2x + k_3(n+2)y + a_4$	$y'' = A_2x^n$ con $n \neq -2$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = A_1x^n(y')$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1x^n(y') + A_2x^n$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1x^n(y') + A_2x^n(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = x^n(y')(A_1 + A_2)$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = a_2x + a_3y + a_4$	$y'' = (A_1 + A_2)x^n$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = 5k_3y + a_4$	$y'' = x^3(A_1 + A_2(y')^{l_2})$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = a_2x + a_4$	$y'' = \frac{A_1}{x^2}$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = a_2x + a_4$	$y'' = \frac{A_1+A}{x^2}$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1x^n + A_2x^n(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = \frac{a_3}{n+2}$	$\mathcal{Y} = a_2x + a_3y + a_4$	$y'' = A_1x^n$
$\mathcal{X} = \frac{a_3}{n+2}$	$\mathcal{Y} = a_2x + a_3y + a_4$	$y'' = (A_1 + A_2)x^n$
$\mathcal{X} = a_3$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = \frac{A_1+A_2(y')^{l_2}}{x}$

Infinitesimales		Ecuación Diferencial
$\mathcal{X} = k_3x + k_4$	$\mathcal{Y} = k_3\frac{l_1-2}{l_1}$	$y'' = (A_1 + A_2)(y')^l$ con $l_1 = l_2 = l$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y')^{l_1} + A_2(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = a_3\frac{l_1-1}{l_1-2}x + k_4$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = A_1(y')^{l_1}$ con $l_1 \neq 2$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y')^{l_1} + A_2$ con $l_1 \neq 2$
$\mathcal{X} = a_3\frac{l_1-1}{l_1-2}x + k_4$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = (A_1 + A_2)(y')^l$ con $l \neq 2$ y $l_1 =_2= l$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y')^{l_1} + A_2(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = k_3x + k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y')^2$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y')^2 + A_2$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y')^2 + A_2(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = k_3x + k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = (A_1 + A_2)(y')^2$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = A_1(y')$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y') + A_2$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_3y + a_4$	$y'' = (A_1 + A_2)(y')$
$\mathcal{X} = k_4$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1(y') + A_2(y')^{l_2}$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = k_3\frac{l_1-2-n}{l_1-1}y + a_4$	$y'' = A_1x^n(y')^{l_1}$ con $l_1 \neq 1$
$\mathcal{X} = 0$	$\mathcal{Y} = a_4$	$y'' = A_1x^n(y')^{l_1} + A_2x^n$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = k_3\frac{l_1-2-n}{l_1-1}y + a_4$	$y'' = (A_1+A_2)x^n(y')^l$ con $l_1 = l_2 = l$ y $l \neq 1$
$\mathcal{X} = (k_1x + k_2)y + k_1x^2$	$\mathcal{Y} = (a_1y + a_2)y + k_1x^2$	$y'' = 0$
$\mathcal{X} = k_3x$	$\mathcal{Y} = k_3y + a_4$	$y'' = \frac{A_1(y')^{l_1}+A_2}{x}$
$\mathcal{X} = (k_1x+k_2)y+k_1x^2+ k_3x + k_4$	$\mathcal{Y} = (a_1y + a_2)y + k_1x^2 + a_3y + a_4$	$y'' = 0$

Tabla 3.9: Ecuaciones Diferenciales resultantes e infinitesimales asociados

3.3. Invarianza y grupo de Lie

Las ecuaciones diferenciales que se obtuvieron anteriormente, se encuentran asociadas a los infinitesimales resultantes. Para verificar que dichas ecuaciones son invariantes, basta con hacer uso de la **condición de invarianza de Lie para ecuaciones diferenciales de segundo orden** mencionada en el capítulo 2, o bien, obtener el grupo de Lie a partir de los infinitesimales y verificar que la ecuación diferencial permanece invariante.

Haciendo uso del grupo de Lie (2.8), (2.9), considere la ecuación

$$y'' = y^m(y')^l(A_1 + A_2) \tag{3.43}$$

resultante en la tabla 3.5, en primer lugar se calcula el grupo de Lie como sigue

$$\frac{d\overline{x}}{d\epsilon} = \mathcal{X} = k_5\overline{x} + k_6 \tag{3.44a}$$

$$\frac{d\overline{y}}{d\epsilon} = \mathcal{Y} = \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\overline{y} \tag{3.44b}$$

Tomando la ecuación (3.44a) y resolviendo se obtiene:

$$\frac{d\overline{x}}{d\epsilon} = k_5\overline{x} + k_6$$
$$\frac{d\overline{x}}{k_5\overline{x} + k_6} = d\epsilon$$
$$\frac{1}{k_5}ln(k_5\overline{x} + k_6) = \epsilon + c(x,y)$$
$$ln(k_5\overline{x} + k_6) = k_5\epsilon + k_5c(x,y)$$
$$k_5\overline{x} + k_6 = e^{k_5\epsilon + k_5c(x,y)}$$
$$\overline{x} = \frac{1}{k_5}e^{k_5\epsilon + k_5c(x,y)} - \frac{k_6}{k_5}$$

Donde $c(x,y)$ es una función arbitraria de x y y . Ahora, usando la **condición inicial** $\overline{x} = x$ cuando $\epsilon = 0$ se tendrá que

$$c(x,y) = \frac{1}{k_5}ln(k_5\overline{x} + k_6)$$

Luego, reemplazando se obtiene

$$\overline{x} = xe^{k_5\epsilon} + \frac{k_6}{k_5}\left(e^{k_5} - 1\right)$$

Tomando la ecuación (3.44b) y resolviendo se tendrá:

$$\frac{d\overline{y}}{d\epsilon} = \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\overline{y};$$
$$\frac{d\overline{y}}{\overline{y}} = \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5 d\epsilon;$$
$$ln(\overline{y}) = \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\epsilon + c(x,y);$$
$$\overline{y} = c(x,y)e^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\epsilon}.$$

Donde $c(x,y)$ es una función arbitraria de x y y. Usando la condición inicial $\overline{y} = y$ cuando $\epsilon = 0$, se tendrá que

$$\overline{y} = ye^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\epsilon}.$$

Por tanto, el grupo de Lie recuperado a partir de los infinitesimales asociados a la ecuación diferencial respectiva es

$$\overline{x} = xe^{k_5\epsilon} + \frac{k_6}{k_5}\left(e^{k_5} - 1\right), \quad \overline{y} = ye^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\epsilon}$$

Para la verificación de la invarianza, se requiere calcular las derivadas del grupo de Lie obtenido, de esta forma se tendrá

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\frac{d\overline{y}}{dx}}{\frac{d\overline{x}}{dx}}$$
$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\frac{dy}{dx}e^{k_5\epsilon\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)}}{e^{k_5\epsilon}}$$
$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{dy}{dx}e^{k_5\epsilon\left(\frac{2-l}{1-l-m}-1\right)}$$
$$\overline{y}' = \frac{dy}{dx}e^{k_5\epsilon\left(\frac{1+m}{1-l-m}\right)}$$

Para el cálculo de la segunda derivada, se tendrá que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2} &= \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\right)}{\frac{d\overline{x}}{dx}} \\
\frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2} &= \frac{d^2y}{dx^2}e^{k_5\epsilon\left(\frac{1+m}{1-l-m}-1\right)} \\
\overline{y}'' &= \frac{d^2y}{dx^2}e^{k_5\epsilon\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)}
\end{aligned}$$

Finalmente, se procede a comprobar la invarianza reemplazando en la ecuación diferencial (3.43), como sigue

$$\begin{aligned}
\overline{y}'' &= (A_1+A_2)\overline{y}^m(\overline{y}')^l \\
\frac{d^2y}{dx^2}e^{k_5\epsilon\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)} &= (A_1+A_2)y^m e^{\left(\frac{2m-lm}{1-l-m}\right)k_5\epsilon}\left(\frac{dy}{dx}\right)^l e^{k_5\epsilon\left(\frac{l+lm}{1-l-m}\right)} \\
\frac{d^2y}{dx^2}e^{k_5\epsilon\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)} &= (A_1+A_2)y^m e^{\left(\frac{2m+L}{1-l-m}\right)k_5\epsilon}\left(\frac{dy}{dx}\right)^l \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= (A_1+A_2)y^m\left(\frac{dy}{dx}\right)^l \\
y'' &= y^m(y')^l(A_1+A_2)
\end{aligned}$$

Por tanto, se ha probado que la ecuación diferencial es invariante bajo el respectivo grupo de Lie. De igual manera se comprueba la invarianza de las ecuaciones diferenciales mencionadas en las tablas 3.5 y 3.10, en la siguiente tabla resumimos los grupos de Lie invariantes asociados a sus respectivas ecuaciones.

Grupos de Lie		**Ecuación Diferencial**
$\overline{x} = xe^{k_5\epsilon} + \frac{k_6}{k_5}\left(e^{k_5}-1\right)$	$\overline{y} = ye^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)k_5\epsilon}$	$y'' = y^m(y')^l(A_1+A_2)$
$\overline{x} = e^{k_7\epsilon} + \frac{k_8}{k_7}(e^{k_7\epsilon}-1)$	$\overline{y} = ye^{k_7(\frac{2}{1-m})\epsilon}$	$y'' = y^m(A_1+A_2)$
$\overline{x} = xe^{a_3\epsilon}$	$\overline{y} = ye^{a_2\epsilon} + \frac{a_4}{a_3}(e^{a_3\epsilon}-1)$	$y'' = \frac{A_1+A_2(y')^{l_2}}{x}$
$\overline{x} = e^{\frac{a_3(l-1)\epsilon}{l-n-2}}$	$\overline{y} = ye^{a_2\epsilon} + \frac{a_4}{a_3}(e^{a_3\epsilon}-1)$	$y'' = x^n(y')^l(A_1+A_2)$

Tabla 3.10: Ecuaciones diferenciales y grupos de Lie asociados

3.4. Soluciones Invariantes

Aplicando la definición de soluciones invariantes presentada en el marco de referencia 2.1.5 sabemos que

$$Q(x,y,y') = \mathcal{Y} - y'\mathcal{X} = 0$$

Entonces, teniendo en cuenta los infinitesimales 3.5 de la ecuación diferencial

$$y'' = (A_1+A_2)y^m(y')^l \tag{3.45}$$

, se procede a buscar una solución invariante como sigue

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= k_5\mathcal{X}_5 + k_6\mathcal{X}_6\\ \mathcal{Y} &= k_5\mathcal{Y}_5\end{aligned}$$

Donde $\mathcal{X}_5$, $\mathcal{X}_6$ y $\mathcal{Y}_5$ son los factores asociados a las constantes k_5 y k_6 respectivamente. Luego tomando los factores asociados a k_5 se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_5 - \mathcal{X}_5 y' &= 0\\ \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)y - x\frac{dy}{dx} &= 0\\ x\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)y\\ \frac{dy}{y} &= \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)\frac{dx}{x}\\ ln(y) &= \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)ln(x)+c\\ y(x) &= cx^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)}\end{aligned}$$

Ahora, se hallan las derivadas respectivas para sustituir en la ecuación diferencial, como sigue

$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)cx^{\left(\frac{1+m}{1-l-m}\right)}\\ y'' &= \left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)\left(\frac{1+m}{1-l-m}\right)cx^{\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)}\end{aligned}$$

Finalmente, se procede a reemplazar en la ecuación diferencial para hallar una respectiva solución, entonces

$$\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)\left(\frac{1+m}{1-l-m}\right)cx^{\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)} = (A_1+A_2)c^m x^{\left(\frac{2m-lm}{1-l-m}\right)}\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)^l c^l x^{\left(\frac{l+lm}{1-l-m}\right)}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{(2-l)(1+m)}{(1-l-m)^2}\right]cx^{\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)} &= (A_1+A_2)c^{m+l}\frac{(2-l)^l}{(1-l-m)^l}x^{\left(\frac{2m+l}{1-l-m}\right)}\\ \left[\frac{(2-l)(1+m)}{(1-l-m)^2}\right]c^{1-l-m} &= (A_1+A_2)\frac{(2-l)^l}{(1-l-m)^l}\\ c^{1-l-m} &= \left[\frac{(2-l)^{l-1}(A_1+A_2)}{(1-l-m)^{l-2}(1+m)}\right]\\ c &= \left[\frac{(2-l)^{l-1}(A_1+A_2)}{(1-l-m)^{l-2}(1+m)}\right]^{\frac{1}{1-l-m}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución invariante hallada es

$$y(x) = \left[\frac{(2-l)^{l-1}(A_1+A_2)}{(1-l-m)^{l-2}(1+m)}\right]^{\frac{1}{1-l-m}} x^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)} \quad ; \quad m \neq -1, l \neq 2, m+l \neq 1 \tag{3.46}$$

En la tabla 3.11 se muestran las soluciones invariantes halladas junto con su respectiva ecuación diferencial

Ecuación Diferencial	Solución Invariante
$y'' = (A_1 + A_2)y^m(y')^l$	$y(x) = (\frac{(2-l)^{l-1}(A_1+A_2)}{(1-l-m)^{l-2}(1+m)})^{\frac{1}{1-l-m}} x^{(\frac{2-l}{1-l-m})}$
$y'' = y^m(A_1 + A_2)$	$y(x) = [\frac{(A_1+A_2)(1-m)^2}{2+2m}]^{(\frac{1}{1-m})} x^{(\frac{2}{1-m})}$
$y'' = (A_1 + A_2)x^n(y')^l$	$y(x) = (\frac{-n-1}{(A_1+A_2)(l-1)} x^{2l-n-2})^{\frac{1}{l-1}} (\frac{l-1}{l-n-2})$
$y'' = \frac{A_1+A_2(y')^{l_2}}{x}$	$y(x) = x(\frac{-A_1}{A_2})^{\frac{1}{l_2}}$

Tabla 3.11: Ecuaciones diferenciales y soluciones invariantes asociadas

3.5. Comparación entre soluciones numéricas e invariantes

Para llevar a cabo el respectivo análisis numérico mencionado en la sección 2.2, considere la ecuación diferencial

$$y''(x) = Ay^m(y')^l \tag{3.47}$$

Tratada anteriormente, donde dado que A_1 y A_2 son constantes, entonces se puede tomar $A_1 + A_2 = A$. Teniendo en cuenta las condiciones necesarias para aplicar el método de diferencias finitas, se procede a la implementación del mismo para la ecuación diferencial dada para ciertos valores de A, m y l en $\mathbb{Z} - \{0\}$.

Fijando el tamaño de paso $h = 0.1$ y tomando una diferencia entre las iteraciones sucesivas de 10^{-5}, considere $A = 2$, $l = 1$ y $m = -2$ resultando en el problema no lineal de valor de frontera

$$y''(x) = 2y^{-2}y', \quad -10 \leq x \leq -1, \quad y(-10) = -6.32, \quad y(-1) = -2$$

En la figura 3.1 se muestran la curva solución obtenida aplicando el método numérico y la curva obtenida de la solución invariante (3.46) anteriormente calculada.

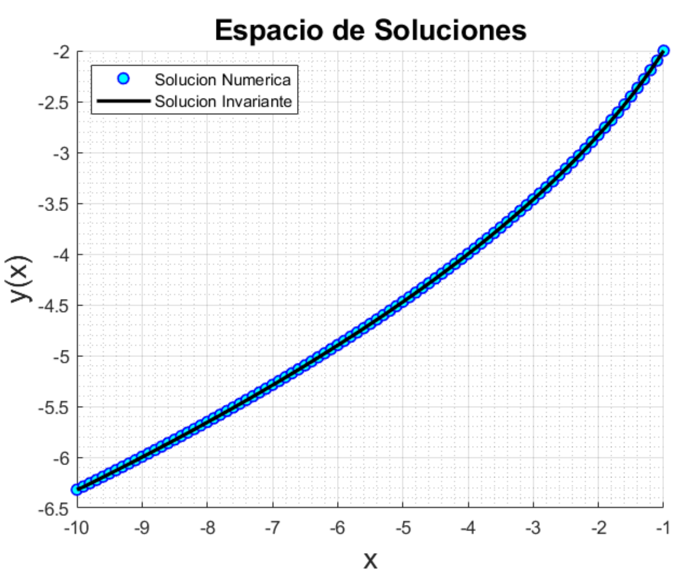

Figura 3.1: Solución numérica e invariante con $A = 2$, $l = 1$ y $m = -2$

Ahora, tomando $A = 2$, $l = 4$ y $m = -2$ se obtiene el siguiente problema no lineal

$$y''(x) = 2y^{-2}(y')^4, \quad 1 \leq x \leq 20, \quad y(1) = 0.0625, \quad y(20) = 25$$

Donde los resultados se observan en la figura 3.2. Notese que se ha fijado los parámetros A y m del problema anterior y se ha considerado $l = 4$.

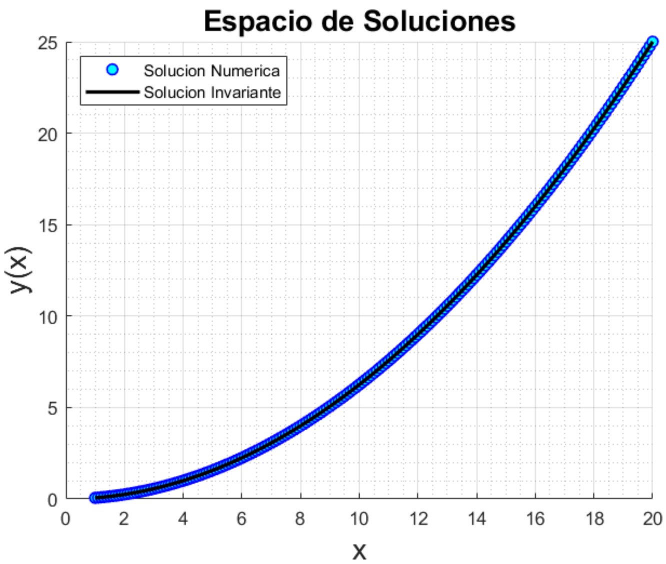

Figura 3.2: Solución numérica e invariante con $A = 2$, $l = 4$ y $m = -2$

Ahora para $l = 6$, fijando A y m del problema anterior, el problema no lineal de valor en la frontera

$$y''(x) = 2y^{-2}(y')^6, \quad 1 \leq x \leq 10, \quad y(1) = 0.34, \quad y(10) = 7.34$$

Donde los resultados se observan en la figura 3.3.

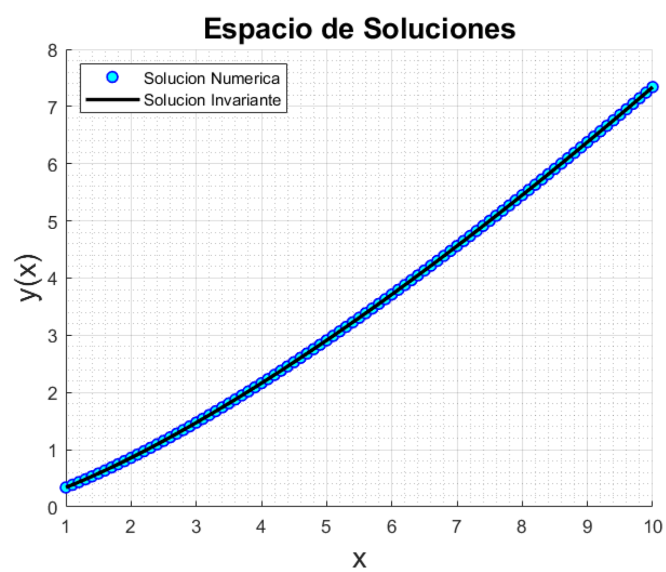

Figura 3.3: Solución numérica e invariante con $A = 2$, $l = 6$ y $m = -2$

Finalmente, considere $A = -1$, $l = -3$ y $m = 3$ resultando en el problema no lineal de valor en la frontera

$$y''(x) = -(y')^{-3}y^3, \quad -8 \leq x \leq 8, \quad y(-8) = 13.107, \quad y(8) = -13.107$$

Cuyos resultados se observan en la figura 3.4.

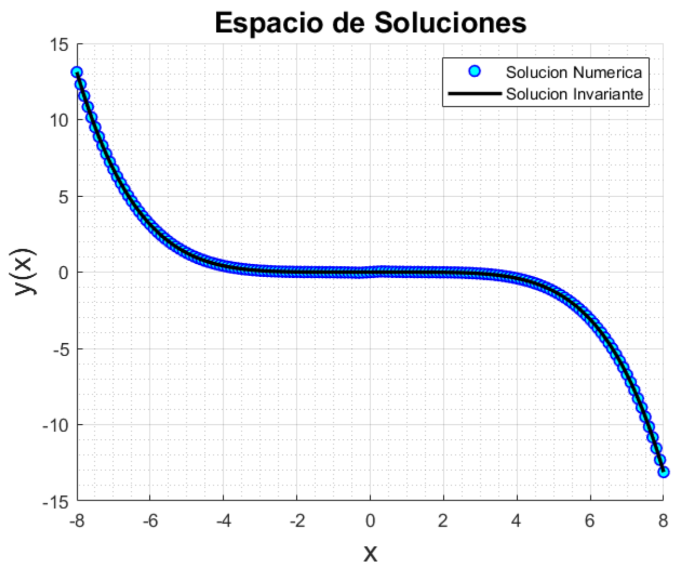

Figura 3.4: Solución numérica e invariante con $A = -1$, $l = -3$ y $m = 3$

Debido a la no linealidad de la ecuación diferencial, el método de diferencias finitas empleado enfrenta dificultades significativas en la resolución del sistema de ecuaciones que genera las respectivas aproximaciones. Esta no linealidad introduce complejidades adicionales en el proceso de aproximación, lo que conduce a soluciones aproximadas poco precisas. Por lo tanto, debido a estas características, el enfoque numérico utilizado no resulta ser óptimo para abordar la ecuación diferencial en cuestión. En consecuencia, se recurre al análisis en el espacio de estados como alternativa, especialmente en situaciones donde la no linealidad de la ecuación dificulta la efectividad del método numérico para ciertos valores de los parámetros A, l y m.

Para poder comprender el comportamiento de las soluciones, implementamos un análisis de estados, tanto para la ecuación diferencial (3.47) se realiza el estudio del plano fase y para nuestra solución invariante (3.46) se implementará el espacio de estado para así comparar los respectivos comportamientos para mirar si hay similitud en su dinámica.

Para el plano fase dela ecuación diferencial, lo que se realiza es llevar la ecuación diferencial $y''(x) = Ay^m(y')^l$ a un sistema de ecuaciones 2x2, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} y' &= z \\ y'' &= z' \end{aligned}$$

A parir de lo anterior, podemos realizar la siguiente sustitución

$$z' = Ay^m(z')^l$$

Por tanto, nuestro sistema queda de la forma

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= Ay^m z^l \end{aligned} \tag{3.48}$$

Para el espacio de estados de nuestra solución invariante, primero la podemos rescribir de la siguiente manera.

$$y(x) = \left(\frac{(2-l)^{l-1}A}{(1-l-m)^{l-2}(1+m)}\right)^{\frac{1}{1-l-m}} x^{\left(\frac{2-l}{1-l-m}\right)} \tag{3.49}$$

donde dado que A_1 y A_2 son constantes, entonces se puede tomar $A_1 + A_2 = A$. Para poder desarrollar el espacio de estados necesitamos calcular $y'(x)$ que es

$$y'(x) = \frac{(2-l)(A\,(2-l)^{l-1})^{\frac{1}{1-l-m}}}{(1-l-m)((1-l-m)^{l-2}(1+m))^{\frac{1}{1-l-m}}} x^{\frac{m+1}{1-l-m}} \tag{3.50}$$

Para parámetros de l, m y A donde el método numérico fallaba, vamos a visualizar los comportamientos del plano fase de nuestra ecuación diferencial, por medio del sistema 2x2 (3.48) y el espacio de estado de la solución invariante (3.46), se utiliza el software Wolfram Mathematica, para realizar dicho proceso.

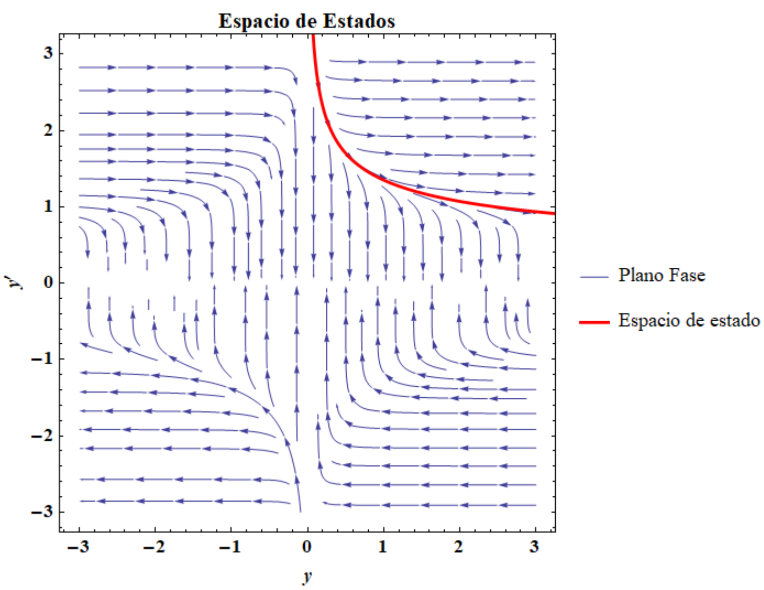

Figura 3.5: Espacio de estados con $A = -5$, $l = -7$ y $m = -4$

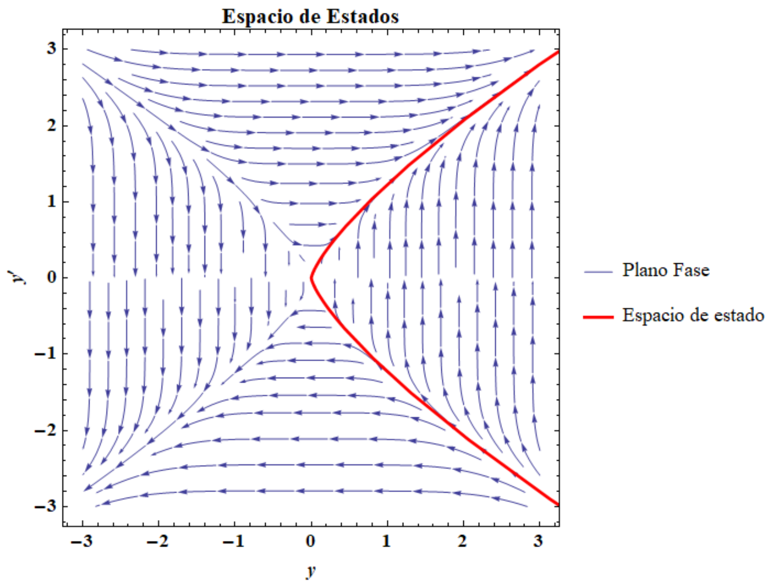

Figura 3.6: Espacio de estados con $A = 4$, $l = -6$ y $m = 5$

Para las figuras 3.5 y 3.6, se fija la condición para l con $(l < 0)$, donde sé varía A y m, entre valores positivos y negativos, donde se determina que el espacio de estados de la solución invariante se ajusta al comportamiento del plano fase de la ecuación diferencial, lo que muestra que bajo unas condiciones iniciales para la ecuación diferencial la solución será nuestra solución invariante.

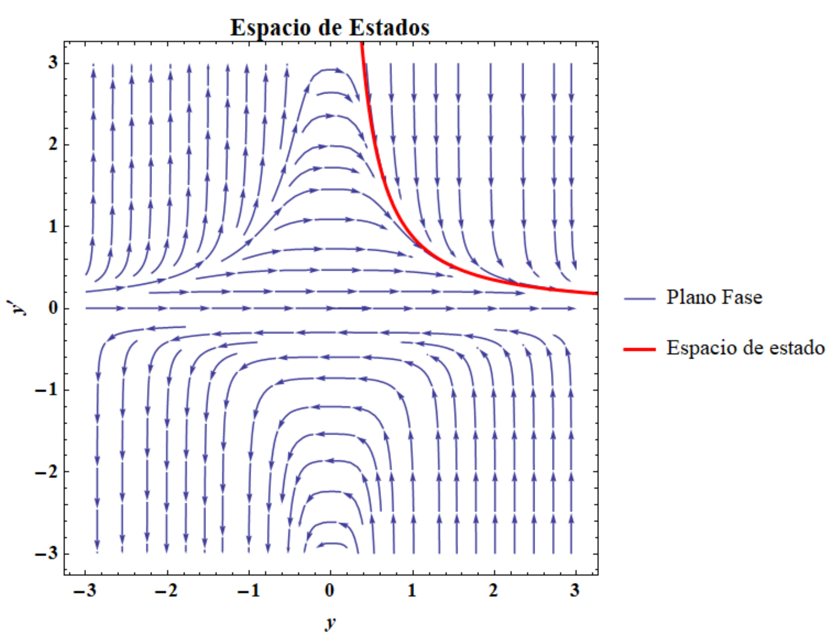

Figura 3.7: Espacio de estados con $A = -2$, $l = 5$ y $m = 3$

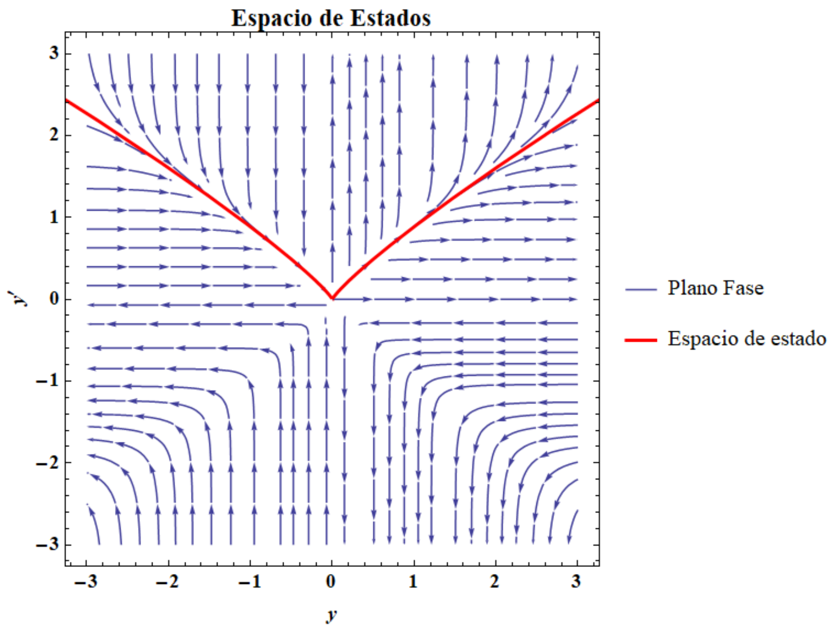

Figura 3.8: Espacio de estados con $A = 2$, $l = 9$ y $m = -7$

Para las figuras 3.7 y 3.8, se estableció $l > 0$, y se variaron A y m entre valores mayores y menores que cero, se observa que el plano de estado de la solución invariante presenta un comportamiento similar a una de las curvas del plano fase de la ecuación diferencial.

Al observar la dinámica del plano fase del sistema (3.48) junto con la curva generada a partir del espacio de estado de la solución invariante (3.49), se evidencia la semejanza entre algunas de sus trayectorias bajo condiciones iniciales específicas para diferentes valores de los parámetros A, m y l. Además, se tiene que al analizar el espacio de soluciones obtenido mediante el método de diferencias finitas y la solución invariante, se observa una similitud significativa, con esto se logra determinar que la solución invariante presenta un comportamiento similar tanto en el espacio de soluciones como en el espacio de estados.

Conclusiones

1. El presente trabajo de investigación permitió determinar diferentes simetrías de Lie mostradas en la tabla 3.5 y 3.10 para la familia de ecuaciones diferenciales de segundo orden de tipo Emden-Fowler generalizada (3.3) y (3.2).

2. Por medio del método de simetrías y grupos de Lie fue posible hallar soluciones invariantes presentadas en la tabla 3.11 para determinadas ecuaciones diferenciales resultantes de casos específicos de sus parámetros.

3. Se realizó una validación de los resultados obtenidos analíticamente con análisis numérico haciendo uso del método de diferencias finitas aplicado para ciertos valores de los parámetros de la ecuación diferencial (3.43), en donde se determinó que cuando los parámetros comienzan a crecer el método numérico falla.

Recomendaciones

Para futuros trabajos se sugiere profundizar en los métodos de simetrías de Lie, para poder encontrar soluciones implícitas o explicitas, además de implementar otra técnica numérica dado que método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales no lineales no resulto ser eficaz dado que para casos donde comienza a aumentar el valor de los parámetros el método comienza a colapsar, aparte se puede realizar un análisis cualitativo para poder entender el comportamiento global de los campos de estado de las ecuaciones diferenciales tipo Endem-Fowler

Anexo

3.6. Código

El siguiente código es desarrollado en MATLAB, su base es tomada del libro de (Burden et al., 2016), el cual se ha modificado adecuadamente para ser empleado en la ecuación diferencial ordinaria (3.47).

```
%%% codigo de diferencias finitas para edo no lineal
%%% ecuacion : y'' = A * y^m * (y')^l
clc
clear
close all
%%% constantes de la ecuacion
A = input('valor constante A: ');
L = input('valor constante L: ');
m = input('valor constante m: ');
%%% extremos y condiciones de frontera
p = -8; %extremo inferior
q = 8;  %extremo superior %% p <= x <= q
Alpha = 13.107; %y(p)
Beta = -13.107; %y(q)
%%% tolerancia
TOL = 0.00001;
N=159;  % particiones del intervalo
M=500;
h = (q-p)/(N+1);
x = p + (1:N-1)*h;
x = x';
%%%%% aproximacion de diferencias finitas
w = Alpha + (1:N)*((Beta-Alpha)/(q-p)) * h;
w = w';
t = zeros(N,1);
a = zeros(N,1);
b = zeros(N,1);
c = zeros(N,1);
d = zeros(N,1);
%%%%%
```

```
k = 1;
while k <= M
    t(1) =(w(2)-Alpha)/(2*h);
    a(1)= 2 + h.^2 * (A * m * w(1)^(m-1) * t(1)^L);  %df/dy(x(1),w(1),t(1))
    b(1)= -1 + (h/2) * (A * w(1)^m * L * t(1)^(L-1));  %df/dyp(x(1),w(1),t(1))
    d(1)=-(2 * w(1) - w(2) - Alpha + h.^2 * (A * w(1)^m * t(1)^L)); % %f(x(1),w(1),t(1))
    for i=2:N-1
        t(i) = (w(i+1) - w(i-1))/(2*h);
        a(i) = 2 + h.^2* (A * m * w(i)^(m-1) * t(i)^L); %df/dy(x(i),w(i),t(i))
        b(i) = -1 + (h/2)* (A * w(i)^m * L * t(i)^(L-1)); %df/dyp(x(i),w(i),t(i))
        c(i) = -1 - (h/2) * (A * w(i)^m * L * t(i)^(L-1));  %df/dyp(x(i),w(i),t(i))
        d(i) = -(2*w(i) - w(i+1) - w(i-1)+ h.^2 * (A * w(i)^m * t(i)^L)); %f(x(i),w(i),t(i))
    end
    x(N) = q - h;
    t(N) = (Beta - w(N-1))/(2*h);
    a(N) = 2 + h.^2* (A * m * w(N)^(m-1) * t(N)^L);  %df/dyp(x(N),w(N),t(N))
    c(N) = -1 - (h/2) * (A * w(N)^m * L * t(N)^(L-1)); %df/dyp(x(N),w(N),t(N))
    d(N)=-(2*w(N) - w(N-1) - Beta + h.^2 * (A * w(N)^m * t(N)^L));  %f(x(N),w(N),t(N))
    l(1) = a(1);
    u(1) = b(1)/a(1);
    z(1) = d(1)/l(1);
    for i=2:N-1
        l(i) = a(i) - c(i)*u(i-1);
        u(i) = b(i)/l(i);
        z(i) = (d(i) - c(i)*z(i-1))/l(i);
    end
    l(N) = a(N) - c(N)*u(N-1);
    z(N) = (d(N) - c(N)*z(N-1))/l(N);
    v(N) = z(N);
    w(N) = w(N) + v(N);
    for i=N-1:-1:1
        v(i) = z(i) - u(i)*v(i+1);
        w(i) = w(i) + v(i);
    end
    if norm(v) < TOL
        fprintf('Procedimiento termindo con exito en %d iteraciones',k)
```

```
        break;
    end
    k = k+1;
end
%%%%
if (k == M+1)
    fprintf('numero maximo de iteraciones excedidas')
end
%%%% graficas y solucion invariante
for i = 1:N-1
      Finv(i) = [((2-L)^(L-1) * A)/((1-L-m)^(L-2) * (1+m))]^(1/(1-L-m)) * x(i)^((2-L)/(1-L-m));
end
Finv(N) = [((2-L)^(L-1) * A)/((1-L-m)^(L-2) * (1+m))]^(1/(1-L-m)) * x(N)^((2-L)/(1-L-m));
SolInv = [Alpha ; Finv' ; Beta];
x = [p ; x ; q];
y = w;
y = [Alpha ; y ; Beta];
hold on
grid on
grid minor
plot(x, y,'o','LineWidth',1,'MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','c')
plot(x, SolInv,'k','LineWidth',2)
title('Espacio de Soluciones','FontSize',16)
legend('Solucion Numerica','Solucion Invariante','Location','northeast')
xlabel('x','FontSize',16)
ylabel('y(x)','FontSize',16)
```

Bibliografía

Arrigo, D. (2015). *Symmetry analysis of differential equations*. John Wiley and Sons. Inc.

Berkovich, L. (1997). *The generalized emden-folwer equation - symmetry in nonlinear mathematical physis* (Vols. 1, p. 155-163).

Bluman, G. W., y Anco, S. C. (2002). *Symmetry and integration methods for differential equations*. Springer.

Burden, R., Faires, D., y Burden, A. (2016). *Analisis numerico*. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Gnutzmann, S., y Ritschel, U. (1994). Analytic solution of emden-fowler equation and critical adsorption in sherical geometry.

Haydon, P. (2000). *Symmetry methods for differential equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics.

Loaiza, G. e. a. (2021). Simetrías de lie y soluciones invariantes para las ecuaciones de emden-fowler estándar y emden-fowler generalizada. *The International Journal of Engineering andScience (IJES), 10(02). pp. 56-64*.

Metha, B., y Aris, R. (1971). *A note on a form of tthe emden-fowler equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Polyanin, A. D. (2017). *Handbook of ordinary differential equations exact solutions, methods, and problems*. Taylor & Francis Group/CRC.

Rosa, A. (2005). *Modelagem matemática e simulacao do nucleo morto en catalisadores porosos para reacoes de ordens fraccionarias dissertacao de mestrado.*