	GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS						
	CARTA DE AUTORIZACIÓN						
CÓDIGO	AP-BIB-FO-06	VERSIÓN	1	VIGENCIA	2014	PÁGINA	1 de 1

Neiva, 13 de julio de 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Jeysson Stiven Cabrera Salazar, con C.C. No. 1.075.284.043,

autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado **ARTICULADORES EMERGENTES EN LA COMPRENSIÓN PROFUNDA DEL CONCEPTO DE DERIVADA: UNA CARACTERIZACIÓN A TRAVÉS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA.**

presentado y aprobado en el año 2022 como requisito para optar al título de

MAGISTER ENEDUCACIÓN; autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

□□Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: ARTICULADORES EMERGENTES EN LA COMPRENSIÓN PROFUNDA DEL CONCEPTO DE DERIVADA: UNA CARACTERIZACIÓN A TRAVÉS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cabrera Salazar	Jeysson Stiven

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Magister en Educación

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Maestría en Educación: área de profundización Docencia e Investigación Universitaria

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2022 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 176

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas__**X**_ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés
1. Derivada	Derivative
2. Articuladores	Articulators
3. Pensamiento	thought
4. elementos	elements

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El objetivo de la investigación es la caracterización de elementos articuladores que permiten la articulación entre los modos de pensamiento para la comprensión profunda del concepto de derivada en estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana. Se llevó a cabo a través de una metodología cualitativa descriptiva, donde se utilizó una revisión bibliográfica para la configuración del concepto de derivada a través de los modos de pensamiento. Con esto, se crearon actividades que contribuyen al tránsito entre los modos de pensamiento y se elabora una guía, que con ayuda de un proceso de validación se procedió a su aplicación con el fin de identificar los elementos matemáticos que permiten la transición de un modo de pensar a otro y que utilizan los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas para la comprensión profunda del concepto de derivada.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The objective of the research is the characterization of articulating elements that allow the articulation between the modes of thought for the deep understanding of the concept of derivative in students of the Mathematics Degree of the Surcolombiana University. It was carried out through a descriptive qualitative methodology, where a bibliographic review was used to configure the concept of derivative through modes of thought. With this, activities that contribute to the transition between modes of thought were created and a guide was developed, which, with the help of a validation process, was applied in order to identify the mathematical elements that allow the transition from one mode of think to another and that is used by the students of the Degree in Mathematics for the deep understanding of the concept of derivative.

APROBACION DE LA TESIS

GERARDO ANDRÉS PERAFÁN ECHEVERRY

ELIZABETH HURTADO MARTÍNEZ

ARTICULADORES EMERGENTES EN LA COMPRENSIÓN PROFUNDA DEL CONCEPTO DE DERIVADA: UNA CARACTERIZACIÓN A TRAVÉS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA.

JEYSSON STIVEN CABRERA SALAZAR

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

AREA DE PROFUNDIZACIÓN, DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA

NEIVA, COLOMBIA

2022

ARTICULADORES EMERGENTES EN LA COMPRENSIÓN PROFUNDA DEL CONCEPTO DE DERIVADA: UNA CARACTERIZACIÓN A TRAVÉS DE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA.

Jeysson Stiven Cabrera Salazar

Director

Dr. Johnny Fernando Alvis Puentes

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

MAESTRIA EN EDUCACIÓN

AREA DE PROFUNDIZACIÓN, DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA

NEIVA, COLOMBIA

2022

CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

Desde las raíces histórico-epistemológicas, los griegos en la época clásica de la antigua Grecia (siglo III A.C.) se plantearon los principales problemas que dieron bases fundamentales para el desarrollo de la derivada; como el de la velocidad, el de la recta tangente, el de área bajo una curva y el de máximos y mínimos. Hasta finales del siglo XVII se dieron métodos sistemáticos en el manejo de las series infinitas, en la concepción del problema de variación de velocidades y de variación llamado fluentes de Newton (1642-1727) en el método de fluxiones y Leibniz (1646-1716) que percibía la idea de que la tangente a una curva depende de la razón entre las ordenadas y las abscisas cuando, se hacen infinitamente pequeñas. Estas contribuciones generaron gran impacto puesto que fue el inicio de una rama de las matemáticas muy diferentes a la aritmética y el álgebra ya conocidas en ese tiempo a una perspectiva teórica-conceptual que se pueden apreciar en los libros de Tom Apóstol y Larson.

La gran importancia de la matemática griega y su influencia en el desarrollo del cálculo diferencial, marco una pauta en el continuo mejoramiento de pensar en lo inconmensurable, en lo continuo y en dar respuesta de una manera deductiva. Con ello, el cálculo tuvo su origen en las dificultades lógicas de procesos de síntesis y análisis y en la simbolización. Dentro de la cultura griega los trabajos más significativos, está el de la Escuela Eleática (Zenón de Elea 450 a.C.) quien manejaba la idea de lo infinitamente divisible considerando el tiempo y el espacio como un ejemplo de ello.

A lo largo de la historia, muestra que retomar el problema de las tangentes tuvo lugar durante la revolución científica (siglos XVI al XVII), puesto que el manejo de los infinitesimales fue una gran dificultad hasta que trabajos como el de Descartes (1596-1650) con la creación de la geometría analítica, Fermat (1601-1665) quien en el año 1629 hizo dos importantes descubrimientos relacionados con sus trabajos sobre geometría. En el más reconocido de ellos, titulado "Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum" (Métodos para hallar máximos y mínimos a una línea tangente en una curva). Fermat expone un método, eminentemente algebraico y desprovisto de fundamentos demostrativos para hallar los puntos en los cuales una función polinómica, toma un valor de máximo o mínimo (Rincón, 2009). Estos trabajos fueron algunos que dieron las bases fundamentales para la creación del cálculo de Newton y Leibniz. Al determinar el problema de la recta tangente a una curva cualquiera, nace una concepción geométrica del concepto de derivada que, junto a una perspectiva dinámica y la noción de límite, formulada por Cauchy en 1821, se fue conformando el objeto matemático que es eje principal del Calculo Diferencial, la derivada (Bourbaki , 1972). En la actualidad el rigor matemático seguido es el de Cauchy, quien define la derivada como un límite de incrementos.

Con respecto a las necesidades educativas, estableciendo un énfasis sobre la capacidad de entender el concepto de derivada en el curso de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, desde las investigaciones hechas en la Universidad del grupo TIM@TH, se han detectado algunas dificultades en la comprensión del Calculo Diferencial, en especial la del concepto de derivada y, por consecuencia, la deserción de estudiantes en formación de profesores de matemáticas en los primeros años de la carrera universitaria. De esa manera, la investigación parte en la estructuración de actividades que logren caracterizar los modos de pensamiento, con el de desarrollo de estas. En ese sentido, se pretende lograr crear una herramienta de ayuda al profesor que contribuya a una retroalimentación en los procesos dentro de los articuladores utilizados para pasar de un modo de pensar a otro y poder comprender el objeto derivada en una perspectiva geométrica, analítica y estructural.

El presente trabajo se estructura en cinco capítulos. Cada uno de estos se inicia con un breve análisis sobre aspectos básicos para el desarrollo de los contenidos. Los capítulos que componen la investigación son:

- Capítulo 1. Aspectos sobre el problema de investigación: Expone características de las cuales nace el campo de este estudio y se nombran los antecedentes en los cuales se basa la construcción del problema de investigación y la formulación de los objetivos.

- Capítulo 2. Acerca del marco teórico: Se reúnen los referentes teóricos que suministra los conceptos usados en la investigación. Se ubican dos subdivisiones donde se consideran los temas relevantes del estudio, tales como el Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas de la Universidad Surcolombiana y la teoría de los modos de pensamiento.

- Capítulo 3. Metodología de la investigación: Se plantea el paso a paso de la investigación, los instrumentos de recolección de datos y una caracterización precisa de las fases implementadas para el análisis en el estudio de la derivada.

- Capítulo 4. Resultado de las unidades de análisis: Adjunta la información lograda de aplicar cada uno de los objetivos específicos de la investigación, en el análisis de los modos de pensamiento en el curso de Calculo Diferencial de la Universidad Surcolombiana.

- Capítulo 5. Conclusiones: Se interpreta el resultado de cada una de las acciones que se llevaron a cabo para el desarrollo del trabajo y se construye un argumento de los resultados obtenidos al solucionar el problema de investigación planteado.

- Capítulo 6. Anexos: Dentro de los anexos se encuentran las herramientas de investigación que se utilizaron para la recolección de datos, como lo fueron: las rejillas, la encuesta y la guía propuesta.

CAPÍTULO 1

1 APROXIMACIÓN ACTUAL AL ESTADO DE LA INVESTIGACIÓN

En el siguiente capítulo se amplía los fundamentos de este trabajo y proporciona una idea más clara del tema, sus antecedentes, el fundamento de la pregunta de investigación y su finalidad.

1.1 Antecedentes

Los antecedentes de esta investigación se refieren a la revisión de trabajos previos sobre el campo de estudio de la derivada. Debido a esto tienen una relación directa sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del curso del Calculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas. Se analizan investigaciones en Educación Matemática, currículo y propuestas didácticas que han abordado de manera específica la teoría de los modos de pensamiento, la comprensión profunda, el currículo y la enseñanza del cálculo diferencial, considerando el uso de estos campos en la didáctica de la matemática y como estas contribuciones influyen en esta investigación.

Lo anterior, se espera que influya en el análisis de estructurar una estrategia didáctica con el fin de entender el objeto derivada haciendo uso de los modos de pensamiento y especificar conceptos que orientan el énfasis de este trabajo. Estos aspectos constituyen el énfasis en el cual se pretende generar una mirada hacia la propuesta, entendiéndola como innovadora y centrada en un campo de investigación en educación matemática poco estudiado.

1.1.1. Categoría Modos de Pensamiento

En Educación Matemática, existen varios trabajos relacionados con el estudio de la derivada. Uno de estos es el de Pinto & Parraguez (2015), quienes, en su artículo, describen los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar el concepto de derivada de una función real de variable real. Estos modos se han sustentado en el pensamiento práctico y teórico de Sierpinska, y se han validado con una análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico con base en la epistemología de Cauchy. Los modos que se proponen para entender este concepto son: Modo Geométrico-Grafico-Convergente (GGC), Analítico Operacional (AO), Analítico Estructural (AE), (Pinto & Parraguez, 2015). Para alcanzar este objetivo los autores diseñaron secuencias didácticas que fueron aplicadas a informantes de primeros años de nivel universitario. Gracias a estos modos de describir la manera cognitiva de comprender un objeto matemático, se puede interpretar y comunicar las dificultades que hay en sistemas educativos para su comprensión. De lo anterior, desde el marco teórico cognitivo de los modos de pensamiento, estos definen la comprensión profunda como la capacidad que tiene el estudiante para transitar de un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto matemático estudiado (Sierpinska, 2000). Este trabajo influye en gran medida a esta investigación, puesto que soporta las bases teóricas de las cuales se fundamenta y además revela características de elementos articuladores que ayuden a comprender el tránsito de un modo de pensar a otro.

La influencia de los modos de pensamiento relacionado en el estudio de la enseñanza de la derivada evidencia cierta sintonía, que surge en el momento en que se caracterizan a través de la noción de elementos matemáticos básicos del cálculo diferencial, como lo son la recta tangente, las funciones, las rectas secantes y el límite, revelando que son esenciales para la determinación de esta conexión. Así como se aprecia en Arce (2015), que, a partir del reconocimiento de fenómenos educativos como la mecanización de algoritmos algebraicos, la formalidad de manera rigurosa en la enseñanza de conceptos, axiomas, propiedades que el profesor reproduce dificultando la comprensión del objeto derivada en los estudiantes, se concluye que estas manifestaciones no aportan en la elaboración mental de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, y se vuelve una causa fundamental del bajo rendimiento que hay en el curo de cálculo 1 de estudiantes de matemáticas y física. Al aplicar el instrumento escogido por el autor que consta de un cuestionario, Arce llega a evidenciar que no existe una comprensión del concepto de derivada, tampoco el tránsito entre los modos de pensamiento en los estudiantes y sugiere la aplicabilidad de los modos de pensamiento dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Esta investigación aporta elementos generales que ayudan a entender la necesidad de aplicar otras alternativas de aprendizaje como lo son los modos de pensamiento para potenciar en los estudiantes la articulación entre el pensamiento intuitivo hacia el pensamiento teórico.

En el marco teórico de los modos de pensamiento, se puede demostrar su practicidad al enfocarlo no solo en tópicos de álgebra y de cálculo, sino en temas de la educación básica (básica primaria y básica secundaria) como lo es las fracciones, pues en Palacios & Puertas (2018), basadas en la teoría de los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska, sobre las fracciones en el contexto de los modos de pensamiento, donde se centra en la creación de una unidad didáctica en la enseñanza de las fracciones enmarcada dentro de esta teoría de la didáctica de la matemática. Este enfoque las llevo a identificar ciertas caracterizaciones de cada uno de los modos de pensamiento, que con la práctica se evidencia en la población estudio. Por tanto, concluyen que la mayoría de los estudiantes a los que se les aplicó la unidad didáctica, presentan dificultades en el entendimiento de los números fraccionarios como un sistema numérico, al igual los pocos estudiantes que lograron la transición entre estas maneras de pensar el objeto lograron una mejor comprensión del significado de fracción. Este trabajo, para fines prácticos de esta investigación se resalta la atribución del reconocimiento de caracterizaciones del objeto matemático según los modos de pensamiento. Con lo anterior, esta investigación lo que apunta es a el análisis de las características de los elementos necesarios para realizar ciertas relaciones entre los modos de pensar un objeto matemático, sin restarle importancia a la caracterización de cada modo de pensamiento pues se contempla que esto es un paso necesario para el surgimiento de los elementos articuladores.

Desde las estrategias didácticas, en la comprensión de objetos matemáticos dentro de la teoría de los modos de pensamiento, conlleva a relacionar aspectos necesarios para la creación de secuencias didácticas en el estudio de Areche (2017), el cual basado en los argumentos de Sierpinska (2000), y en las conclusiones de Bonilla, Parraguez & Solanilla (2013), donde se afirma que el tránsito de un modo de pensar a otro posibilita la compresión de campo geométrico, Areche construyó fue una propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza de la circunferencia a través del estudio de clases, donde proporciona elementos útiles en las distinciones de los estudiantes, que, sin conocer la teoría de los modos de pensamiento, conllevan a desarrollar un tránsito entre estos modos y dependiendo del tipo de actividad que se le proponga utilizan las tres maneras de pensar el objeto matemático. Este tipo de análisis soporta la utilidad de la teoría como base en una propuesta curricular. Para este trabajo, dicho análisis contribuye a que, de manera reflexiva, se tome la independencia de poder aplicar a una población de estudiantes una guía que contenga actividades, donde el propósito apunte a utilizar los modos de pensamiento para su desarrollo, sin que conozcan la teoría. La finalidad de esta reflexión es apuntar hacia los articuladores, que permiten transitar de un modo de pensar a otro, como bases para el constructo o modificación de una estructura curricular.

1.1.1.1 Comprensión profunda

Desde la teoría de los modos de pensamiento, se enmarca la importancia de la relación que existe entre estas maneras de entender un objeto matemático y como esta articulación contribuye en la comprensión profunda de estos conceptos. Sierpinska (1990) define que:

> "Comprender el concepto será concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados con elementos particulares de la 'estructura' del objeto (la estructura es la red de sentidos de las sentencias consideradas). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión." (p. 27)

De esto, subyace la necesidad de construir características necesarias en la estructuración de esta aprehensión, por tanto, desde Sanabria (2020), en su tesis doctoral menciona que para identificar el concepto de comprensión profunda se debe evidenciar las superación de obstáculos epistemológicos, entendidos en matemáticas, como situaciones problemas en las cuales al intentar ser solucionadas evidencian el surgimiento de concepciones que enlazan la practicidad con la teoría de dichos elementos matemáticos. A partir de esto, toma algunas consideraciones en la relación del límite y la derivada, para así, poder presentar una aproximación teórica de la noción de obstáculos y postular ejercicios de estos dos temas. Como resultado, concluye que el estudio de estos obstáculos aporta herramientas que apoyan tanto a docente como a estudiantes a facilitar la superación de dificultades para potenciar el desarrollo en el aprendizaje del caculo diferencial, y con esto se establece que para captar el significado de un objeto matemático es necesario la solución de problemas desde la epistemología propia del concepto matemático estudiado. La importancia de estas consideraciones para la investigación es el aporte de las características desde la epistemología del objeto derivada por las cuales se estructuran las actividades que componen a la guía.

Al indagar la estructura conceptual de la comprensión profunda, se evidencia la necesidad de obtener de situaciones de aplicabilidad en donde los modos de pensamiento permitan identificar el momento en donde los estudiantes capten el significado de un objeto matemático. Un modo de logar esto, es lo que se menciona en Irazoqui & Medina (2014), puesto que para lograr una comprensión profunda se deben postular ejemplos donde se utilicen definiciones que aportan una manera de llegar de forma natural al concepto formal de un objeto matemático. Al exponer esta idea, afirma que existe un tránsito entre la intuición práctica del elemento matemático y su definición. Para lograr este modo de entender el concepto de derivada, el autor propone dividir la malla curricular en módulos y a través de datos estadísticos se apoya para sostener que es una buena propuesta como recurso metodológico, puesto que esta alternativa de estructurar el aprendizaje profundo que propone aportó una posibilidad de mejorar los resultados de aprendizaje en los estudiantes. De lo anterior, se acoge para esta investigación la idea de organizar el contenido temático desde apartados, puesto que, en el diseño de la guía, se planifica a partir de secciones donde se analiza la derivada desde cada uno de los modos de pensamiento, generando una comprensión del tema a partir de la interactividad de elementos matemáticos relacionados con la derivada y que contribuyen en la formación de su definición.

En relación con el marco teórico de los modos de pensamiento determinan y la comprensión profunda se define como la capacidad de los estudiantes adquieren de poder transitar desde un modo de pensar práctico a un modo de pensar teórico del concepto matemático al solucionar problemas que lo involucren. la manera en que los estudiantes pueden pensar un objeto matemático desde lo práctico hacia lo teórico (Pinto & Parraguez, 2015). Lo cual, es demostrado desde Bonilla & Parraguez (2013), donde afirman que, al referirse a una comprensión profunda de un objeto matemático propio del álgebra, las autoras entienden que el estudiante comprende el objeto matemático, en este caso la elipse en los modos: Sintético Geométrico (sección cónica en el espacio que se representa en el plano), Analítico Aritmético (pares ordenados que satisfacen la ecuación de la elipse), Analítico Estructural (lugar geométrico). Dentro de las conclusiones, se destaca el hecho de la importancia entre el tránsito de los modos de pensamiento, pues permiten comprender propiedades del propio elemento matemático estudiado y a través de estos elementos estructurales los estudiantes alcanzan una comprensión profunda del concepto, al demostrar la capacidad de conectar lo geométrico con el análisis aritmético de la elipse. Esto se relaciona con el propósito del trabajo que es evidenciar a través de su desarrollo que existen elementos que relacionan a los modos de pensamiento y a la vez logran que los estudiantes obtengan un mayor entendimiento del concepto matemático en el momento que utilizan su aplicabilidad para construir su definición.

1.1.1.2 El currículo asociado los modos de pensamiento

A partir de las consideraciones hechas en la conceptualización al referirse a la comprensión profunda, se expone una mirada de como estas propuestas pueden contribuir de cierta manera en la estructura curricular de los temas que tradicionalmente se estudian y a la vez favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje. Desde el punto de vista sugerido por Rojas (2011), al referirse a un aprendizaje basado en problemas, se entiende que los conceptos matemáticos surgen a partir de la solución de situaciones problemas relacionadas con su epistemología (entendidas en este trabajo como obstáculos epistemológicos) y con ello provocar un aprendizaje significativo. Dentro del trabajo se utiliza la superación de obstáculos epistemológicos para entender la relación entre derivada e integral, y a partir de estas situaciones problemas planteadas se deduce la necesidad de planificar una unidad didáctica que permita organizar los contenidos de manera que el estudiante a través de preconceptos genere su propio conocimiento del tema, al igual que favorece el manejo didáctico por parte del profesor. Este tipo de organización contribuye en esta investigación, puesto que en el marco teórico utilizado es fundamental tener claro los elementos matemáticos que interactúan en la construcción de la derivada ya sea desde lo geométrico, lo analítico o desde sus propiedades.

En este mismo sentido, al referirse a la estructura temática de los contenidos, se aborda lo estudiado por Irazoqui & Medina (2014), en el hecho de afirmar que un problema grave dentro del currículo es presentar la derivada únicamente a partir del concepto de límite, para la cual proponen a través de una estructura modular, utilizar elementos matemáticos fundamentales que dieron origen a la derivada ya que estos aportan ideas intuitivas de como surgen estas definiciones. Desde la metodología planteada por las autoras, se consideraron dos grupos donde uno de ellos se les aplicó la estructuración del curso a través de módulos, por tanto, al culminar el curso con este recurso metodológico, generó un mayor rendimiento académico en comparación con el grupo que no se le impartió esta organización, demostrando esto con datos estadísticos. De esto, el trabajo proporciona aspectos en el diseño de la guía en cuanto a su organización temática, puesto que, aunque el límite es un elemento matemático fundamental en el concepto de la derivada, es necesario relacionarlo con objetos de la matemática como la recta tangente, recta secante, pendiente y otros que contribuyen a la formación de esta definición.

Teniendo en cuenta que dentro del marco de los modos de pensamiento en el cálculo diferencial se debe apreciar lo referente al modo Analítico Estructural, donde la construcción del concepto se basa en la aplicabilidad de las propiedades de otros elementos matemáticos alusivos a su epistemología, Pino-Fan, Castro, Godino & Font (2013), al analizar el sentido de la derivada después de las construcciones hechas por Newton y Leibniz, se denota un nuevo carácter a su definición formal a través del límite de incrementos, donde se componen según el autor, por elementos matemáticos primarios como la tangente, el cálculo de velocidades y las variaciones, las cuales contienen aspectos desde sus propiedades que permiten una estructuración del concepto formal de derivada. De estas peculiaridades estudiadas por los autores, concluye que el currículo se entiende como la combinación de dos características fundamentales en la enseñanza, por un lado, la estructuración temática del curso de cálculo diferencial y por otro la revisión detallada de los libros de textos esenciales para la planeación en el proceso de aprendizaje. Desde las particularidades mencionadas, este trabajo aporta en considerar otra característica esencial en la construcción de las actividades que componen a la guía, y es la de estructurarlas a partir del análisis de los textos que se mencionan en el diseño curricular para el desarrollo del curso de cálculo diferencial de la licenciatura en matemáticas que faciliten la comprensión del concepto de derivada enmarcado dentro de la teoría de los modos de pensamiento.

1.1.2 Enseñanza del concepto de derivada

La historia nos da a entender que llegar al concepto de derivada fue un camino complejo, intrincado y demorado. Su desarrollo no fue en un solo periodo de tiempo, ni mucho menos nació de la genialidad de algún matemático. En su proceso, se da una gran importancia a la intuición como uno de los mejores razonamientos en la comprensión del cálculo. Su rigor actual es importante puesto que, debe ser la meta por comprender de los alumnos, por ello, al tener cierta idea de cómo surgió el cálculo puede servir como un agente motivador para que los estudiantes comprendan su epistemología según Cauchy.

Con lo dicho anteriormente, un cambio en el énfasis de comprender objetos matemáticos se evidencia en Lozano (2011), pues en su propuesta didáctica expone una posible manera de enseñar la derivada a partir del cociente de incrementos, a estudiantes de educación media académica y a los que cursan los primeros semestres de la universidad, con el fin de lograr una mejor apropiación del concepto de derivada en problemas de la vida cotidiana. En esta propuesta se enuncian aspectos epistemológicos de la creación del cálculo y explora el autor los problemas que motivaron en la revolución científica (siglo XVII) a los matemáticos en este campo. Además, postula algunos ejemplos donde analiza la derivada como una razón de cambio que permiten al estudiante entender mejor este concepto. Un punto de partida se contempla desde la visualización de como los profesores enseñan este concepto dando a exponer algunos enfoques (algebraicos, numérico, formales, geométricos), concluye que está manera de enseñar tiene errores estructurales, arbitrarios y ejecutivos que los llaman obstáculos epistemológicos. Expone diseña y aplica una propuesta didáctica en donde se evidencia los preconceptos para la enseñanza de la derivada, partiendo desde problemas epistemológicos (velocidad, pendiente y cociente de incrementos) que iniciaron el surgimiento de este objeto matemático. El uso de modelos sencillos y prácticos da importancia a la enseñanza de la derivada desde su epistemología y ofrece cierta interpretación natural a conceptos básicos requeridos en cálculo diferencial.

Desde la idea de formular modelos pedagógicos a partir de obstáculos evidenciado en investigaciones, un buen énfasis es partir de conceptos previos y de diferentes interpretaciones del concepto de derivada como se estableció en Sánchez, García & Linares (2008) que estudiaban las debilidades que tienen los estudiantes de educación media académica y los que cursan los primeros semestres de universidad para entender el concepto de derivada más allá de resolverlas más o menos mecánicamente a través de ejercicios. En este trabajo se nombran algunas investigaciones de autores expertos sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial, además da a conocer el entorno por el cual el docente tiene que plantear para gestar en sus estudiantes una comprensión acertada de la derivada de una función. Parten de identificar una muestra donde la enseñanza de la derivada ha sido netamente mecánica, luego postulan actividades sobre la derivada en un contexto real y evidentemente los estudiantes no comprenden el concepto desde este ámbito. Ahora a partir de información suministrada por la investigación, postulan teóricamente algunas herramientas en la enseñanza de las derivadas, partiendo de la construcción de esquemas considerado por García, (1983) y la comprensión del concepto de derivada en diferentes formas de pensamiento. Relacionando los propósitos para este trabajo es fundamental detectar los ámbitos en donde se desarrolla el concepto de derivada (geométrico, analítico y estructural) y que puedan dotar un significado profundo en la resolución de problemas.

Dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, es notable no solo comprender la derivada como un objeto matemático, sino, un objeto de enseñanza y aprendizaje en los profesores de matemáticas pues en Badillo (2004), se plantea la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada, soportado en las investigaciones de Azcárate (1990), se atribuye la importancia de entender la derivada desde conceptos previos y necesarios para su comprensión y profundización en el pensamiento matemático avanzado. A manera de conclusión, el trabajo demuestra las singularidades y las diferencias que tienen los profesores de matemáticas de conocer la derivada como objeto matemático, de enseñanza y aprendizaje. Estas contribuciones, son importantes dentro de la investigación, puesto que orientan el enfoque en el cual se analizan los campos en la formación inicial del profesor de matemáticas en el marco de su conocimiento profesional.

Estas investigaciones se enfocan en aspectos cognitivos, epistemológicos y socioculturales. Las dificultades se han centrado en el concepto de límite, los procesos infinitos, la variación, el infinito, la derivada, la integral, las series, las funciones, la notación y los procesos de generalización, demostración y representación. Teniendo en cuenta el análisis de estos trabajos que se han basado en la enseñanza del cálculo diferencial, se resalta la poca profundización de observar a los objetos matemáticos que subyacen de aplicar investigaciones como posibles conectores en la transitividad del modo de pensar la derivada.

Con respecto a esta investigación, estos trabajos han de contribuir desde lo metodológico y teórico para lograr caracterizar los articuladores emergentes en los estudiantes del curso de cálculo diferencial. Esto permite, concebir la derivada desde un punto de vista desde sus orígenes, esto quiere decir, desde una perspectiva geométrica (puesto que no es muy usada por los profesores), entender con ayuda de la geométrica analítica (articuladores) el concepto de la derivada desde un punto de vista Geométrico – Gráfico – Convergente. También, desde la práctica descubrir temas que utilizan los estudiantes que les permiten transitar desde un modo de pensamiento a otro (articuladores), en la comprensión del concepto de derivada.

1.2 Formulación del Problema

La problemática de investigación se centra en la superación de un obstáculo epistemológico para la cual (Cid, 2000) plantea que:

> la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido (p. 3).

Dentro del contexto al cual esta investigación fue aplicada, se indagó tanto en el diseño curricular del curso de cálculo diferencial como de manera empírica, la dificultad en alcanzar un nivel superior de abstracción en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de derivada. En el análisis del aspecto curricular, la enseñanza de las matemáticas en un programa de formación de profesores debe garantizar que sus estudiantes adquieran conceptos disciplinares bases para la instrucción de las matemáticas escolares y en programa que ofrezcan formación matemática. Con lo dicho en la formación docente, también se debe contemplar la formación didáctica, donde el profesor en formación adquiere destrezas en la elección de métodos y técnicas a la hora de enseñar un determinado tema. Ahora también se resalta el conocimiento teórico del contenido a enseñar puesto que para pensar de esta manera es necesario el manejo y profesionalización de dicho tema, es por ello, por lo que nace la idea de implementar herramientas desde la teoría de la didáctica de las matemáticas que puedan apoyar a los profesores de matemáticas en formación para la comprensión teórica de objetos matemáticos.

Lo mencionado anteriormente, hace alusión a la visión y misión de la universidad Surcolombiana, puesto que, en su visión, menciona la formación de personas íntegras y con pensamiento crítico, fundamentado en sus conocimientos disciplinares. Por consiguiente, al enfatizar esta misión en la facultad de educación y en específico en el programa de Licenciatura en Matemáticas, estos saberes se amplían en conocimientos pedagógicos y didácticos aludidos a la caracterización y profundización de resultados que subyacen de la socialización del significado y percepción del saber, relacionado con las principales corrientes y modelos pedagógicos, que les ayuda a innovar planes curriculares o modificarlos, en técnicas pedagógicas y un buen manejo de las TIC en el aula de clase. En lo disciplinar, aspectos como su historia, su filosofía, sus principios, sus métodos, sus alcances, sus principales resultados y el estado reciente de su desarrollo.

Por lo anterior, se establece una primera génesis del problema, asociada a la organización y tratamiento de la temática del curso en mención (microdiseño), pues se contempla el estudio del cálculo diferencial, en especial el concepto de derivada (que es su tema principal), donde se aprecia que se plantea de una manera tradicional (repartido en unidades y temas), es decir, de una manera conductista asociándose a lo expresado por Flórez (1999), donde el currículo se evidencia desde una estructuración horizontal y vertical que reflejan una concepción mecanicista del aprendizaje, la enseñanza por repetición e individualizada, que permite la fragmentación y desvinculación del conocimiento.

Entonces, en el microdiseño curricular del año 2020 (ver tabla 1), el estudio de los números reales a través de sus axiomas de cuerpo, de orden y de completez, el estudio de las funciones de variable y valor reales a partir de los conceptos de límite, continuidad y derivada fundamenta en el estudio de la pendiente de la recta tangente a un punto, incluyendo algunas de sus aplicaciones, demuestran una desarticulación con los elementos históricos que condicionaron que estos se originaran y en particular con distintas maneras de dotar de significado a estos objetos matemáticos (Gómez, 2002).

Tabla 1 Microdiseño curricular curso Cálculo Diferencial

MICRODISEÑO CURRICULAR CURSO CÁLCULO DIFERENCIAL		
UNIDAD TEMÁTICA	No. de semanas	CONTENIDOS TEMÁTICOS
1	1	Axiomas de cuerpo de los reales y axiomas de orden
	2	Acotamiento de conjuntos. Axiomas de completez
	3	Funciones: Clases, transformaciones, funciones trigonométricas
2	4	Límites de funciones y sus propiedades
	5	Cálculo de límites
	6	Límites al infinito. Límites finitos
	7	Continuidad de funciones
	8	Rectas tangentes y velocidad
	9	Cálculo de derivadas usando la definición. Regla de la potencia
3	10	Reglas para derivar una suma, un producto y un cociente
	11	Derivada de las funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica
	12	Regla de la cadena
	13	Derivación implícita. Teorema de Rolle y del valor medio
4	14	Aproximaciones lineales y método de Newton. Valores máximos y mínimos
	15	Trazado de curvas, primera y segunda derivada
	16	Razones de cambio. Movimiento rectilíneo

Fuente: Licenciatura en Matemática

Esto da como reflexión, que el discurso matemático a provocar en el aula de clase, se ha de centrar en conceptos, algoritmos y formulas tratando de ofrecer a los estudiantes la exactitud y formalismo, omitiendo las situaciones que permitieron originar el conocimiento, en vez de evidenciarlo en un ambiente fuera de formalismos, pues el saber proviene el ser humano a través de su práctica y experiencia (Parra & Cordero, 2008).

Del mismo modo, en cuanto a las propiedades atribuidas a los conceptos y objetos matemáticos, solo considera las que hacen parte de la aplicabilidad de la derivada y no tiene en cuenta las propiedades que surgen de la interacción entre elementos matemáticos que contribuyen en la formación del concepto de derivada. Por todo lo anterior, la problemática se posiciona de manera inicial desde la propuesta curricular expresada en el microdiseño, la cual no contribuye a una comprensión profunda del concepto de derivada como un conocimiento disciplinar por parte de los profesores en formación y condiciona en muchos casos la enseñanza del mismo.

En la siguiente tabla se evidencia una consecuencia, expresada en la cantidad de estudiantes que aprobaron o reprobaron el curso de cálculo diferencial de la Universidad Surcolombiana.

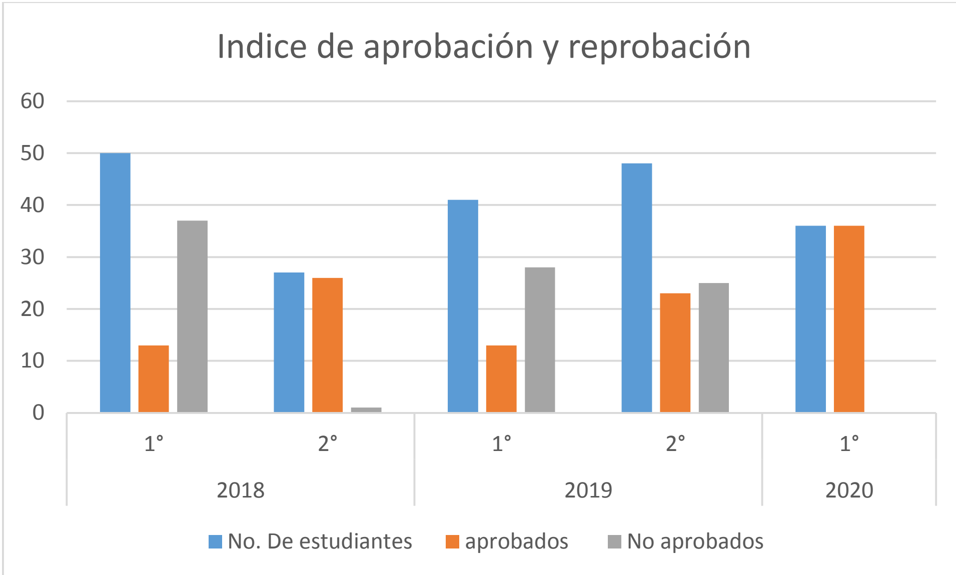
Tabla 2 Índice de reprobación

AÑO	2018		2019		2020
SEMESTRE	1°	2°	1°	2°	1°
N° DE ESTUDIANTES	50	27	41	48	36
APROBADO	13	26	13	23	36
NO APROBADO	37	1	28	25	0

Fuente: secretaria licenciatura en matemáticas

Se puede tener una mejor descripción de los datos en el diagrama de barra, en la ilustración 1.

Ilustración 1. Diagrama de barras índice de aprobación y reprobación



Fuente: Elaboración propia

Se observa que, en 2018 y 2019 el porcentaje de alumnos que reprobó el curso fue 36%, 53% respectivamente. De la situación planteada, se identifica la desvinculación entre las posibles maneras de estudiar la interacción de conceptos que contribuyen a la determinación de lo que significa el cálculo diferencial y en específico la derivada, ocasionando una desarticulación curricular entre el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada.

En ese sentido, derivado de lo anterior, acuñamos la segunda génesis del problema al proceso de enseñanza llevado a cabo por el profesor titular de la asignatura de cálculo diferencial. Al enfocarse en la instrucción de conocimientos disciplinares por parte del profesor titular del curso, desde la planificación entendida como el transcurso de una previsión, desarrollo y evaluación conocimientos hacia la consecución de objetivos de aprendizaje postulados (Castro, 2013), se derivan algunas cuestiones problemáticas.

En primer lugar, en la organización del contenido asociado al concepto de derivada (previsión), es claro que el profesor no contempla un estudio geométrico y analítico del concepto de derivada para su enseñanza, sino que se limita a organizarlo desde su perspectiva procedimental, no evidenciando que los objetos matemáticos para su comprensión deben estudiarse desde diferentes representaciones que permitan evocar su significado (Gómez, 2002). Así mismo, se ha podido constatar que no hay consideraciones históricas para la construcción del concepto de derivada desde los conceptos de razón de cambio, variación, entre otros. Finalmente, el profesor no considera dentro de su organización, un tránsito entre las distintas formas de conceptualizar la derivada, pues tradicionalmente la enseñanza carece de reflexiones teóricas asociadas al conocimiento matemático.

En segundo lugar, al profundizar en la gestión del conocimiento en el aula de clase (desarrollo), se evidencia que las estrategias metodológicas usadas para la construcción del concepto de derivada, atañe a un recital de ideas asociadas a la derivada sin que exista la construcción del concepto, pues la misma organización pre establecida, conlleva al tratamiento fragmentado de las diversas formas de entender el concepto de derivada, enfatizando siempre una postura procedimental. En ese mismo sentido se puede apreciar que el profesor titular del curso no es del todo consciente en el aula que existen conocimientos (articuladores emergentes) asociados a diferentes temas que permiten articular los distintos modos de entender la derivada. Finalmente, cómo es necesario que los profesores en formación adquieran y construyan el concepto de derivada es importante considerarlos como individuos participes activos de la clase e incentivar su proceso cognitivo (Viale, 2011).

Así, en tercer lugar, al referirnos al proceso de evaluación al interior de la planificación se establece que el profesor, al no posicionar el concepto de derivada desde diferentes formas, no puede establecer si su significado ha sido asumido por parte de los profesores en formación, lo que ocasiona que los conceptos y procedimientos matemáticos que se desarrollan posteriormente carezcan de sentido al interior del cálculo diferencial.

A partir de las descripciones anteriores, se infiere que éstas condicionan la comprensión profunda de la derivada y los conocimientos matemáticos que pueden articular los diferentes modos de entender la derivada en los profesores en formación de la licenciatura, lo cual se traduce en la tercera génesis del problema asociado con el aprendizaje. Dentro de las dificultades que encapsulan una mala comprensión del concepto de derivada, se establece la no relación por parte de los profesores en formación de la razón de cambio media como pendiente de una recta, la poca asimilación de la noción de cambio, y la no relación del límite del cociente incremental o pendiente de la recta tangente. Por este motivo, los profesores en formación asumen el concepto de derivada de manera fraccionada, es decir, un entendimiento del tema desde un razonamiento operacional, resultado de la simplicidad que los procesos algorítmicos garantizan (Maturana & Parraguez, 2012) alejándose del sentido amplio que implica el concepto de este objeto matemático en el estudio de las matemáticas, y en particular no destacando una serie de conocimientos que permiten el tránsito de las distintas formas de comprender el concepto de derivada.

Desde las indagaciones presentadas, se demuestra que dentro del proceso de aprendizaje es necesario descomponer el concepto de derivada desde otras maneras de estudiarla, que incentiven la síntesis de conceptos relacionados con elementos matemáticos que hacen parte de su configuración. Asumir una mirada distinta desde los procesos de enseñanza y aprendizaje puede ser posible sí en su estructuración, gestión, asimilación y construcción se da desde los modos de pensamiento puesto que genera una mirada más amplia de cómo pueden los estudiantes en formación para profesores de matemáticas comprenden este objeto matemático, asumiendo una mirada geométrica, analítica y operacional, pues permitirá el tránsito e interacción de estos tres pensamientos que no se genera en el aula de clase.

Esto conlleva, a identificar la importancia en la relación a los tipos de conocimiento que caracterizan el saber matemático, puesto que, desde el componente curricular, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia – MEN, 2006) enuncia que:

> En el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente. El conocimiento procedimental ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual y permite el uso eficaz,

> flexible y en contexto de los conceptos, proposiciones, teorías y modelos matemáticos; por tanto, está asociado con el saber cómo (p. 50).

Estos argumentos indican la identificación de la desarticulación en el conocimiento matemático dentro del curso de cálculo diferencial de la licenciatura en matemáticas, concluyendo así, que esta dificultad encontrada es la problemática fundamental y el obstáculo epistemológico, en el cual se enfocan las acciones hechas en esta investigación para lograr su superación.

Para lograr el avance esperado, se inicia el estudio del fenómeno didáctico de la manera en cómo alcanzar un nivel superior de abstracción del concepto de derivada en los estudiantes de la licenciatura en matemáticas. Es por ello, que encontrar estas formas de llegar a ese nivel superior representa un problema didáctico, donde lo que se busca es articular los tipos de conocimiento matemático y lograr establecer el tránsito entre los modos de pensamiento, logrando una comprensión profunda del concepto de derivada y llegando a su vez, a ese nivel superior de abstracción de dicha concepción.

Desde un punto de vista teórico, la derivada es un objeto matemático relevante en la formación de profesores de matemáticas, es por ello, que se hace necesario implementar contribuciones teóricas desde la didáctica de la matemática. Es así como la teoría de los modos de pensamiento que permite la implementación de los modos GGC, AO y AE para potenciar a docentes y estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo y poder alcanzar una compresión profunda de este concepto a través de las articulaciones en el enlace de estos tres modos de pensamientos. Aunque no está comprobado que un conocimiento profundo del concepto de derivada garantice un aprendizaje profundo en los profesores en formación, sí permite que estas reflexiones permeen el aula de clase, cuando el profesor titular del curso reconoce que existen diferentes modos de pensar el concepto. Es decir, cuando él mismo es consciente de generar en los profesores en formación “la capacidad para transitar desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto al resolver problemas del cálculo diferencial” (Pinto & Parraguez, 2015, p.2).

Las unidades temáticas y sus respectivos contenidos junto con las actividades y estrategias son los aspectos sobre los cuales se planteó la pregunta que guío esta investigación asociada a un problema didáctico: **¿Cómo lograr un nivel superior de abstracción de la derivada en estudiantes de la licenciatura en matemáticas?**, ya que se considera que este tipo reflexiones debe ser parte fundamental en un programa de formación de profesores de matemáticas.

1.3 Justificación

La enseñanza del cálculo diferencial ha sido un tema fundamental en el campo de la didáctica de las matemáticas en los últimos años como se puede apreciar en los antecedentes de esta investigación. Esto ha conllevado a formular la adaptación de teorías en didáctica de las matemáticas al campo de la enseñanza del cálculo diferencial. Con esto, podemos apreciar la adaptación de la teoría de los modos de pensamiento al proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto derivada. En el contexto de la educación superior, la enseñanza de este campo desde los modos de pensamiento aplicados a estudiantes de un programa de formación de profesores de matemáticas es de gran interés puesto que puede cambiar el énfasis de cómo enseñar este objeto matemático para futuros docentes e influir en cambios curriculares en el curso de cálculo diferencial, usando como base la forma en como los mismos estudiantes interpretan y comprenden un objeto matemático. Con la idea anterior, la pertinencia de este trabajo en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, se centra en la necesidad de formar profesionales con una sólida formación en matemáticas, y la de implementar elementos de enseñanza-aprendizaje, que subyacen de los mismos estudiantes (los que están aprendiendo calculo diferencial) para ampliar las maneras de construir relaciones entre los modos de pensar el objeto derivada en los estudiantes y llegar a una comprensión profunda según esta teoría.

Los modos propuestos por Pinto & Parraguez, (2015), son la directriz de esta investigación. Sin embargo, en el ámbito de la formación de profesores de matemáticas y la enseñanza-aprendizaje del concepto de Derivada, se hace notable (sin perder el norte de este trabajo), considerar la relación entre la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática; al respecto, se presentan cinco categorías entre las cuales se encuentran "las que aluden a la racionalidad (*los por qué*) y los que aluden a las intenciones (*los para qué*)" (Guacaneme, 2011, p1). Cuando se señalan las razones que mencionan a la racionalidad, una consideración del trabajo es que el propósito de la investigación se alinease a los objetivos propuestos para garantizar resultados, y así lograr construir herramientas desde la teoría de la didáctica de las matemáticas que permitan a los estudiantes en formación de profesores poder alcanzar un comprensión profunda a partir de su importancia y aplicabilidad del objeto matemático la derivada, puesto que, se enmarca en el campo de la formación de profesores de matemáticas.

Cuando se aluden a las intencionalidades se relaciona con el valor de la investigación dentro del contexto seleccionado, es por ello por lo que este trabajo proporciona bases teóricas para la enseñanza del concepto de derivada, apoyadas en el marco teórico de los modos de pensamiento y a su vez se transforman en herramientas necesarias para el proceso de investigación en el ámbito de fortalecer fuentes de recursos para la enseñanza y la epistemología de la formación docente.

El interés de estos cuestionamientos respecto a las maneras de pensar el concepto de derivada, está encaminado a reflejar el papel que juegan los articuladores para comprender el concepto de Derivada en el proceso de enseñanza aprendizaje, así como también precisar cuándo un estudiante ha comprendido la Derivada desde un Modo de Pensamiento y una vez hecho lo anterior cómo facilitar el tránsito de un modo de pensamiento a otro y desde luego plantear metodologías y estrategias pedagógicas entorno al microdiseño del curso de Cálculo Diferencial y su afinidad con la Comprensión Profunda de la Derivada. El motivo por el cual se optó por un tema de investigación relacionado con el aprendizaje del cálculo diferencial en la educación superior, y más específicos con la enseñanza del concepto de derivada de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana; es el poco entendimiento de la importancia y la aplicación del cálculo diferencial en la humanidad. Para el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana y desde el semillero de investigación E.MAT.H resulta esencial realizar el presente estudio ya que fortalece el aprendizaje significativo de las matemáticas en los educandos, en el cual incluye la necesidad de plantear configuraciones didácticas.

Inicialmente esta investigación parte de entender y relacionar el objeto derivada desde el marco referencial expuesto en el microdiseño del curso de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana y entenderlo desde algunos puntos de vista usando descripciones desde la teoría de los modos de pensamiento. Luego se consideran necesarias algunas acciones que dan pertinencia y cierta viabilidad a la investigación desde el contexto estudiado, para luego si, teniendo los resultados de aplicar dichas acciones, se requiere una reflexión desde el punto de vista inicial, confrontado con el conocimiento generado, para así, poder diligenciar las herramientas necesarias para obtener los resultados que se esperan de aplicar la investigación.

En este sentido, el punto de partida es el de estudiar resultados de investigación para encontrar caminos que propongan permear el aula de clase. Comúnmente, los investigadores dicen que "los marcos teóricos son lentes que nos permiten ver/estudiar, las problemáticas," en ese orden de ideas, se estudian investigaciones, con el ánimo de diseñar estrategias que contribuyan a comprender los resultados encontrados por los teóricos en el marco del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y lograr que estos lleguen al aula de clases. Dentro de este contexto, se plantea que una buena metodología de esta investigación es perseguir de manera adecuada el camino hacia los objetivos propuestos, para garantizar resultados, es por ello por lo que se plantea como primera medida categorizar desde los aspectos epistemológicos y didácticos de los contenidos aprendidos por los estudiantes de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas, siguiendo la bibliografía expuesta en el microdiseño curricular. Esto permite, establecer conexiones necesarias entre la manera epistemológica y didáctica en la que se enfocan los distintos libros, estableciendo cada aspecto que se tiene en cuenta dentro de la enseñanza del objeto derivada, contemplando descripciones enmarcadas dentro de los modos de pensamiento.

El enfoque de la investigación apunta a un estudio profundo sobre los objetos matemáticos que utilizan los estudiantes para transitar un objeto matemático desde algún modo de pensarlo a otro según la teoría de los modos de pensamiento. Para ello es necesario, tener en cuenta una caracterización que enmarque los elementos articuladores emergentes, para fundar un análisis concreto de lo encontrado, teniendo en cuenta las relaciones establecidas por los estudiantes al resolver actividades relacionados con la derivada enmarcada dentro de los modos de pensamiento.

Es necesario considerar en este análisis la organización de los pasos a seguir para generar cierto conocimiento en el desarrollo de estos, y con ello también, construir un criterio que sustente la viabilidad del trabajo. Se considera que es de un gran valor agregado, las creaciones de propia autoría, puesto que las reflexiones que subyacen de examinar una teoría y contextualizarlas generan una mejor comprensión del enfoque en el cual se quiere encaminar el objeto a estudiar y permite configurar ciertas acciones dentro del proceso de investigación que las hacen obtener una pertinencia precisa y lograr resultados que permitan responder a la pregunta de investigación.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

- Caracterizar los articuladores emergentes que permiten el tránsito de los modos de pensamiento en la comprensión profunda de la derivada en estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Estructurar el concepto de derivada desde los modos de pensamiento, que permitan su comprensión profunda.
- Configurar actividades desde los modos de pensamiento que permitan el tránsito para la comprensión profunda de la derivada, para el diseño de una guía en el curso de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas.
- Validar una guía que permita evidenciar la compresión profunda de la derivada, desde los articuladores.

CAPÍTULO 2

2 MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se describen dos categorías teóricas fundamentales para esta investigación. La primera es la formación de profesores de matemáticas y la segunda es un conocimiento a la epistemología de los modos de pensamiento y la manera en que se modificaron para la enseñanza del Cálculo Diferencial y en específico la comprensión del concepto de derivada

2.1 Formación de Profesores de Matemáticas

La formación docente está relacionada con la necesidad de crear nuevas maneras de comprender el saber en el hecho de que parte de esta formación en matemáticas y en la profundización de la disciplina, los conocimientos didácticos y la reflexión sobre sus prácticas pedagógicas. Puesto que estos aspectos le dan herramientas para afrontar retos dentro de un aula de clase y siguiendo un determinado currículo. A lo que se refiere, Quero (2006) se intenta estudiar –la formación docente– en sus categorías de análisis más importantes: (a) el conocimiento profesional y (b) el saber pedagógico. Se trata de reflexionar desde una perspectiva ontológica, epistemológica y teórica sobre la relación de ese proceso entre el saber y el aplicar. En esencia, desde el conocimiento pedagógico son los métodos establecidos para la enseñanza, donde le objetivo es direccionar la búsqueda de una relación entre el saber y el hacer desde perspectivas epistemológicas y teóricas de este complejo proceso.

"El conocimiento matemático es un tipo de saber de naturaleza dual, que conjuga aspectos internos, relacionados con su propia estructura formal abstracta, y aspectos externos, relacionados con su aplicación a la resolución de problemas reales" (Onrubia, Rochera & Barberá, 2001, citado en Torres, 2015, p. 14). Para lograr dicha facultad en la solución de problemas es necesario tener en cuenta aspectos importantes en la formación matemática, como lo son su simbolización, representaciones y propiedades puesto que son elementos necesarios en la construcción y entendimiento abstracto de objetos matemáticos, como lo indica (Onrubia, Rochera & Barberá, 2001, citado en Torres, 2015, p. 15) “Las Matemáticas se caracterizan por ser un conocimiento de alto nivel de abstracción y generalidad, de naturaleza deductiva, que utiliza un lenguaje formal específico propio para ser comunicado y que está exento de intencionalidad o temporalidad”. Es por ello, que en la formación docente es sustancial formalizar comprensiones teóricas desde aspectos epistemológicos de los temas enlazados con objetos matemáticos, puesto que genera en el profesor en formación una manera más clara y precisa de relacionar estos aspectos formales a las aplicaciones en las cuales puede estar inmerso los contenidos en matemáticas, es decir, la importancia de tener la capacidad de transitar desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto.

Dentro de la formación profesional de un profesor de matemáticas el contenido debe atenderse desde dicha dualidad, y con ella, ofrecer algunos recursos de profundización y que se relacionen en situaciones de la vida cotidiana. Se entiende, que el docente de matemáticas debe tener conocimientos sólidos en matemáticas para que ofrezca a sus estudiantes una buena enseñanza del tema, soportándose en la forma didáctica que este implementando, es decir, si un profesor no adquiere el conocimiento de la asignatura la cual debe enseñar no podrá hallar la manera adecuada para que los estudiantes comprendan los conceptos que la componen (Ball, Thames & Phelps, 2008). No obstante, unas sólidas bases en matemáticas no garantizan que el profesor en formación tenga todas las herramientas para enseñar puesto, que estas bases no otorgan al profesor en formación poder encontrar el modo de asignarle un sentido que permita explicar los conceptos de tal manera que los estudiantes lo entiendan (Ball, Thames & Phelps, 2008).

También, cabe resaltar que es imprescindible para un profesor en formación comprender de diferentes maneras un objeto matemático, puesto que da las herramientas para profundizar y contextualizar dicho concepto, al igual que guiar en las respuestas que sus estudiantes puedan acertar o no sobre el tema y eludir las malas interpretaciones. Con lo anterior, se establece que el conocimiento del contenido es una parte fundamental dentro de la formación de un docente de matemáticas puesto que ofrece un aprendizaje profesional en dicha área.

La práctica pedagógica establece la relación entre los ejercicios que se desarrollan en el salón de clases y el currículo establecido por una institución. De lo anterior, al momento de establecer las actividades a desarrollar en clase, es primordial tener en cuenta que estas logren permear en el aula, para ello se debe obtener una visión clara y concisa de que saben y como entiende un determinado tema. Por ello, se define que “las prácticas pedagógicas son acciones diarias que se aplican en las aulas, laboratorios u otros espacios, orientada por un currículo y que tiene como propósito la formación de nuestros alumnos” (Quero, 2006, p. 3).

De esto, la importancia radica en el hecho de construir estas relaciones en las prácticas pedagógicas para que permitan reflexionar sobre algunos aspectos que afectan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, la formación inicial del docente y proponer alternativas de mejoramiento continuo a los procesos curriculares, enfatizando en el saber que un profesor necesita para enseñar una temática específica, (lo que se conoce como Conocimiento del Contenido (CC)), al igual que la forma de cómo se debe postular y representar estos contenidos para que sean entendibles (Conocimiento Didáctico del Contenido(CDC)) (Botia, 1993). Para lograr dicho entendimiento, se requiere comprender la relación entre los conocimientos teóricos y la búsqueda de la manera más útil de representar ideas.

En el caso puntual del curso de cálculo diferencial, en la componente del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) se referencia al modo en el cual los profesores adquieren un saber y es el ¿cómo enseñar su campo en específico? Es por esto, por lo que se indica que, aunque es indispensable tener cierta profesionalización en el manejo de un campo de la ciencia (Conocimiento del Contenido), de este no surgen ideas de la manera en cómo debe ser presentado dicho contenido a una población de estudiantes en particular. De lo anterior, en la formación de profesores en matemáticas es fundamental adquirir habilidades de modelación de contenidos, a partir de la comprensión teórica de contenidos en matemáticas (CC), puesto que es la base para la construcción de un conocimiento Didáctica del contenido (CDC).

Considerando los saberes de referencia (CDC, CC), la naturaleza del conocimiento profesional y las características del uso del saber en el desarrollo de una determinada práctica, (Llinares, 2007), se resalta que una de los desafíos de los programas en formación de profesores es potenciar el aprendizaje a lo largo de la vida y la discrepancia del tipo de conocimiento que se adquiere (conocimiento en matemáticas y conocimiento de contenido pedagógico en matemáticas) y definir la diferenciación entre de la práctica de enseñar matemáticas del profesor y la construcción de una forma de aproximación de instruir matemáticas por parte de los estudiantes.

Al considerar la enseñanza de las matemáticas como una práctica que debe ser comprendida y aprendida, se encuentra algunos articuladores que permiten realizarla como lo son el observar, diagnosticar, planificar, evaluar y socializar. Por tanto, el aprendizaje del profesor (en contexto de formación como en formación permanente) de matemáticas desde una determinada manera comprende la enseñanza de las matemáticas de un determinado método y justifica los articuladores utilizados. Estas destrezas necesarias sobre enseñar matemáticas suponen tener la capacidad de construir nuevos conocimientos desde la experiencia. Este proceso posee una característica valiosa y es la relación teórico-práctica.

Estas situaciones permiten generar reflexiones centradas en definir como los ámbitos de estudio pueden impulsar el aprendizaje en los estudiantes en formación para profesores. Estos contextos comprometen periodos de experimentos para mejorar la estructura de la enseñanza y el objetivo fundamental encaminado a la investigación, es integrar la reflexión teórica con diseños de entornos de aprendizajes prácticos que se aproximen a los principios teóricos propuestos en el diseño de una clase de matemáticas.

En el ámbito de la formación de profesores, aludiendo a la categoría de CDC, como se mencionó en páginas anteriores, de matemáticas y en específico a la enseñanza-aprendizaje del concepto de Derivada, se hace vital considerar la relación entre la Historia de las Matemáticas y la educación Matemática; para lo cual no referimos a Guacaneme (2011), quien plantea, entre otras, dos categorías respecto al papel de la historia de las Matemáticas en la educación del profesor:

- Los que aluden a la racionalidad (los *por qué*)
- A las intenciones (los *para qué*)

Teniendo en cuenta los dos primeros planteamientos se identifica el por qué es importante que el profesor de matemáticas conozca e interactué con los tres modos propuestos por Pinto y Parraguez para una comprensión profunda del concepto de derivada de una función real de variable real.

Tabla 3 Razones e intenciones

Razones	**Intenciones**
Papel que juegan los articuladores en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de derivada.	¿Para que el profesor de matemáticas debe conocer el planteamiento de la derivada desde los modos de pensamiento GGC, AO y AE?
¿Cómo lograr determinar que un estudiante está en alguno de los modos de pensamiento?	El uso de los modos de pensamiento en el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de derivada.

Fuente: Elaboración propia

2.2 Modos de Pensamiento

Anna Sierpinska es una investigadora en la didáctica del álgebra lineal, que después de mucho tiempo de entender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra lineal, concluyó que la razón principal de estas dificultades es que los estudiantes comprenden el álgebra lineal en diferentes aspectos y con un enfoque más práctico que teórico. En un inicio se pensó que era obvio, puesto que las definiciones axiomáticas del álgebra lineal son un conocimiento muy teórico. Para el desarrollo de la teoría de los modos de pensamiento se formularon preguntas acerca de lo que es exactamente el pensamiento teórico, cuáles son sus características y de qué manera estas características son relevantes para el aprendizaje del algebra lineal (Hillel, 2000).

Estos modos de pensar objetos matemáticos se basan en la relación entre la aritmetización y la geometría con el ánimo de poder establecer la manera en cómo los estudiantes de álgebra pueden transitar desde un pensamiento teórico a un pensamiento práctico de los objetos matemáticos. Para establecer este tránsito la investigadora Anna Sierpinska define tres modos de pensar un objeto matemático propio del álgebra lineal de la siguiente manera: En el **modo sintético-geométrico (SG)** los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. En el modo **analítico-aritmético** (AA) los objetos matemáticos son presentado a través de relaciones numéricas, los puntos en el plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En el modo **analítico-estructural (AE)** se recurre más bien a las propiedades de los objetos o su caracterización a través de axiomas.

Con ello, Sierpinska reconoce tres modos de pensar el álgebra lineal: Sintético Geométrico, Analítico Aritmético y Analítico Estructural. Pues dados estos modos de pensamiento contribuyen a interpretar el resultado de superar dos ideas inversas: La que rechaza los números en la geometría y la otra, que desestima que la "intuición geométrica" puede ser comprendida desde un punto de vista netamente aritmético (Maturana & Parraguez, 2012). Se considera que los modos de pensamiento son igualmente útiles, cada uno en un contexto en específico y como propósito principal cuando interactúan entre sí.

En relación con lo anterior, los modos de pensamiento para Sierpinska son el resultado de una superación de dos obstáculos: uno, que rechaza los números dentro de la geometría y el otro, que rechaza que la intuición geométrica puede ser llevada a un dominio puramente aritmético. Este marco teórico de la didáctica de las matemáticas construido por Anna Sierpinska, toma como referencia que el álgebra lineal nació como un proceso de pensar analíticamente en espacios geométricos y considerando la distinción de dos grandes procesos: La aritmetización del espacio y la desaritmetización del espacio a su estructuración. Con esta superación epistemológica se puede entablar la relación entre estos obstáculos, el pensamiento práctico como base para que el pensamiento teórico adquiere importancia su y con el cual sigue teniendo su significación epistemológica (Vera & Parraguez, 2012). La teoría de los modos de pensamiento propone:

1. Explicitar modos de pensar un objeto matemático.
2. Constituir formas de pensar y entender los objetos matemáticos.
3. Actuar como herramientas heurísticas al resolver problemas.

Como señala Sierpinska (2000) cada uno de estos modos de pensamiento conduce a diferentes significados del objeto, porque cada uno de ellos permite una mirada diferente del objeto algebraico. Una mirada más amplia, es que cada uno de estos pensamientos establece una ruta de transigir a los objetos matemáticos y cuando estos se coordinan y se puede transitar entre ellos, permiten:

1. Desarrollar un pensamiento más versátil
2. Ver diferentes facetas del objeto matemático
3. Ofrece diferentes aspectos según la rama a estudiar.

Es importante, tener en cuenta ciertas distinciones entre los modos establecidos por la autora

Tabla 4 Diferenciación entre lo sintético y analítico

Sintético	**Analítico**
Los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, la cual trata de describirlos de manera natural.	Los objetos son dados indirectamente, son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos.

Fuente: Elaboración propia

Y distinguir entre lo Analítico Aritmético y Analítico Estructural

Tabla 5 Diferenciación entre aritmético y estructural

Analítico Aritmético	**Analítico Estructural**

• Un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo.	Un objeto es mejor definido por un grupo de determinadas propiedades.
• Tiene la tendencia de mostrar que dos procesos conducen al mismo resultado.	

Fuente: Elaboración propia.

2.3 Modos de Pensamiento para el Cálculo Diferencial

Sierpinska (2000) plantea la construcción de los tres modos de pensamiento matemático. Esto lo establece debido a la investigación de la manera en que los estudiantes de algebra lineal aplican su razonamiento en la comprensión de este campo. Para Sierpinska (2000), estos modos de pensar están basados en primer lugar, por las relaciones y conexiones que existen entre los conceptos (pensamiento teórico). En segundo lugar, también enfatiza el pensamiento analítico desde la manipulación de objetos matemáticos a través de sus respectivas simbolizaciones (pensamiento práctico). En la teoría los modos de pensamiento, se expone como estos modos (sintético-geométrico, analítico aritmético, analítico estructural) son apropiados para interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos del álgebra lineal. Cuando se habla de modos de pensamiento se hace referencia a que los objetos matemáticos adquieren diferentes significados al trabajar en diferentes modos.

Como Sierpinska planteó los modos de pensamiento dentro del marco del álgebra lineal, esta teoría fue variada por Pinto y Parraguez puesto que se hace necesario realizar ciertas variaciones en aspectos del pensamiento práctico (modo SG) y la pérdida de algunas características aritméticas en el pensamiento teórico (modo AA) para la comprensión del concepto de derivada. En relación con lo anterior, Pinto & Parraguez (2015), al aplicar la teoría de los modos de pensamiento se construye la forma de plantear “la coexistencia de tres modos de pensar la derivada, el modo Geométrico-Grafico-Convergente (GGC), el modo Analítico-Operacional (AO) y el modo Analítico Estructura (AE)” (p.2).

2.3.1 Modo geométrico-gráfico-convergente del concepto de derivada (GGC).

Desde un estudio epistemológico el concepto de derivada, (Grabiner, 1983), define como una recta tangente en un punto del gráfico de una función real de variable real, pero la definición de tangencia (que es el objeto matemático principal para hallar de forma observable el concepto de derivada) no está dentro en el pensamiento práctico de Anna Sierpinska. Por ello, se hace una extensión al modo SG a un modo GGC. Pinto & Parraguez, (2015): permite "determinar una recta secante desde P a cualquier otro punto de ésta, a medida que el punto se desplaza a lo largo de su gráfica, se llega a una posición límite que será representada por la recta tangente, el tránsito de la recta secante llegando a esta posición límite, que es cuando está próximo a P será representada por la pendiente de la recta tangente, denominada la derivada de la función en P*"*. (p.2).

2.3.2 Modo analítico operacional del concepto de derivada (AO).

Las condiciones que se manejan, según Pinto & Parraguez (2015), para definir el concepto de derivada en su forma (AO) "…fue considerar la definición formal de límite para para funciones reales de variable real, por tal razón el modo AA definido por Sierpinska pierde su carácter aritmético, emergiendo lo operacional del concepto, por lo que se reformula como el modo AO.

2.3.3 Modo analítico estructural del concepto de derivada (AE)

Para el caso de la derivada en el modo AE, parecido al planteamiento de Sierpinska, se alude a las propiedades del objeto matemático estudiado. Para Pinto & Parraguez (2015) "Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. La estructura que se debe estudiar en este contexto será: El espacio vectorial de las funciones diferenciables y el operador derivada como transformación lineal". (p.2) Sobre estos modos de pensamiento, se desarrolla este trabajo. Para Maturana & Parraguez (2012) los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos. El estudio se ubica dentro de las alternativas que se podría utilizar dentro de la didáctica del cálculo diferencial, específicamente el concepto de la derivada. De igual manera Maturana & Parraguez (2012), nota que hay aspectos que no han sido observados dentro de las características de las derivadas, como por ejemplo la conexión que existe entre el pensamiento práctico y el teórico. El interés es el de estudiar los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar el concepto de derivada de una función real de variable real y de valor real.

2.4 Articuladores

Desde Maturana & Parraguez (2012), se entiende como articulador a aquellos conceptos matemáticos que permiten el tránsito entre los tres modos de pensar. En la aplicabilidad de la teoría de los modos de pensamiento dependen de que emerjan los articuladores, que se alude al momento de estudiar un objeto matemático, o al intentar desarrollar cierta situación problema. También hay que tener en cuenta la orientación que asiduamente se desarrollan en los niveles educativos, así mismo, los estudiantes manejan mejor un modo de pensar que otro. A partir de los resultados que se produzcan de dicha aplicabilidad, al indagar con respecto a los objetos matemáticos que causan el tránsito entre los modos de pensamiento, dichos elementos matemáticos son a los que se les denominan articuladores en este trabajo.

CAPÍTULO 3

3 DISEÑO METODOLÓGICO

En este capítulo, se procura estructurar cada uno de los desarrollos metodológicos con el fin de organizar de manera clara los procedimientos usados en cada uno de ellos, que guiaron el desarrollo de este estudio. Por esto, se presenta la posición metodológica que hace relación al enfoque que se adoptó y la justificación del por qué se asume dentro del proceso investigativo. En concordancia, se manifiesta el diseño de la investigación, en donde se explican las fases asociadas a los objetivos específicos postulados que integran cada uno de los métodos utilizados.

3.1 Tipo de investigación

Teniendo en cuenta los objetivos como la ruta a seguir para obtener una respuesta a la pregunta problema, se opta por el tipo de investigación cualitativa. Según Arias (2006), la investigación cualitativa es aquel "proceso que consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Los resultados de esta clase de investigación se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere". (p.24)

Esto indica que el trabajo está orientado hacia la sustracción de los articuladores que los estudiantes usaron en la implementación del instrumento (guía), y tomando su caracterización como el área de interés en este campo. En este caso, el objeto de estudio ha sido un eje central dentro de la educación matemática internacional, y sumergido en el grupo social en el cual se va a aplicar este tipo de investigación, se enfoca en la formación de profesores, y contribuir en la relación de pensamientos prácticos y teóricos en la enseñanza de la derivada a través de conceptos previos que han manejado en cursos anteriores.

3.2 Método de investigación

En relación con el énfasis en que se planteó el estudio, esta se enmarcó en el método de investigación descriptiva, que "tiene como finalidad definir, clasificar y categorizar rasgos importantes" (Sampieri, Fernández & Baptista, 2014, p.7). En concordancia con los objetivos del trabajo de investigación lo que se busca es precisar el concepto de derivada desde algunas categorías, ordenar las actividades que propondrán en la guía y caracterizar los articuladores emergentes.

De lo anterior, la investigación descriptiva identifica aspectos, peculiaridades y rasgos. Para Sampieri, (2011) buscan especificar las propiedades, características y los perfiles de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis. Es decir, únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre las variables a las que se refieren. En concordancia, esta investigación descriptiva está focalizada hacia la especificación de articuladores emergentes, tomando como fenómeno el objeto matemático, la derivada, para ser sujeto al análisis dentro de un grupo de individuos y enmarcada en la teoría de los modos de pensamiento.

Este trabajo se enfoca en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del tercer semestre de los cursos de Cálculo Diferencial de la Universidad Surcolombiana, esta muestra seleccionada está conformada por jóvenes de entre los 18 y 25 años, la mayoría de ellos son de género masculino, algunos de ellos trabajan, otros se dedican solamente a estudiar y se caracterizan por el interés de aprender de los temas que estudian dentro de los diferentes cursos que conforman a la carrera. La pregunta formulada cumple con una realidad de hecho, y en este sentido para el desarrollo de esta investigación se dispusieron las siguientes fases en relación con los objetivos específicos y enmarcan aspectos importantes.

- **Fase de estructuración**

Según Hurtado (2006, p. 153), "la selección de técnicas e instrumentos de recolección de datos implica determinar por cuales medios o procedimientos el investigador obtendrá la información necesaria para alcanzar los objetivos de la investigación". Para la recolección de la información en la presente investigación, se eligieron aquellas técnicas que ayudaron a alcanzar los objetivos y lograr adquirir la información de la manera más clara y precisa. En este sentido, en relación con el primer objetivo específico relacionado con la estructuración del concepto de derivada, se optó por una revisión documental entendida como "una técnica en la cual se recurre a información escrita ya sea bajo la toma de datos que pueden haber sido producto de mediciones hechas por otros o como contexto que en sí mismo constituyen los eventos de estudio" (Hurtado, 2008, p.427).

De lo anterior, la revisión documental se configuró desde las categorías: epistemológica y didáctica. Se realizó una investigación partiendo de los resultados del impacto que obtuvo el proceso de enseñanza-aprendizaje de trabajos que aplicaron los modos de pensamiento y se organizó de manera precisa el concepto de derivada enmarcada en los modos de pensamiento desde sus inicios.

Categoría Epistemológica

Al dar a conocer esta categoría se tiene en cuenta, que la teoría de los modos de pensamiento hace alusión a cómo surgieron los modos de pensamiento a partir de la superación de obstáculos epistemológicos planteados por Brousseau (1994)

- **Modo Sintético Geométrico:** El objeto matemático es presentado por representaciones geométricas y es un rol fundamental la visualización matemática en la resolución de problemas en este modo.
- **Modo Analítico Aritmético:** El objeto matemático es representado de manera teórica y se debe interpretar a partir de ecuaciones o relaciones numéricas o simbólicas.
- **Modo Analítico Estructural:** El objeto matemático se entabla a sus propiedades o a su caracterización a través de axiomas.

Categoría Didáctica

Es indispensable analizar esta categoría dentro del campo de la formación de las Matemáticas puesto que para Brousseau (2000) la acepción de didáctica es específica de la disciplina, y por tanto, no se sostiene la idea de una didáctica general, sometida a la pedagogía, sino al conjunto de didácticas (de la matemática, de la física, de la biología, de la historia, etcétera), que tienen su particularidad en los problemas que emergen de sus propios objetos de conocimiento, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de éstos. Esta clasificación hace alusión a las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del objeto en estudio, la derivada. También, se analiza desde una mirada que mencionan las competencias propuestas al finalizar el curso de Cálculo Diferencial, en donde estos determinan que la interpretación, análisis (numérico y geométrico) de propiedades y situaciones problemas, apuntan que el alumno comprende el concepto de derivada desde una perspectiva de razón de cambio.

Con esto, se tiene que la planeación hace referencia a la enseñanza y el contenido al aprendizaje, por ello se aprecian categorías generales que construyen esta categoría y son: Planeación y Contenido. Esto alude a que los modos de pensamiento ayudan a concebir la manera cognitiva de comprender la derivada, además interpreta y comunica las dificultades que hay en sistemas educativos para su comprensión. Seguido a esto, la organización formalmente está asociada al profesor y es hasta cierto punto un resultado de la interacción que se da en el proceso de enseñanza. Por tanto, desde los modos de pensamiento para dar a conocer la derivada se debe tener en cuenta la planificación de superación de obstáculos epistemológicos desde sus tres modos: aritmético, geométrico y desde sus propiedades. Por último, el contenido se entiende como el conjunto de temas que incluye lo instructivo y lo educativo para lograr un aprendizaje, teniendo en cuenta la orientación que asiduamente se desarrollan en los niveles educativos, así mismo, los estudiantes manejan mejor un modo de pensar que otro y a la vez es indispensable que tanto profesores como alumnos construyan situaciones que incluyan los tres modos de pensamiento, pero de manera articulada.

Para el desarrollo de esta fase, se utilizaron fuentes de información de libros, artículos, archivos de internet como instrumentos y para el registro de la información, esta se organizó en instrumentos denominados rejillas, las cuales se construyeron atendiendo al marco teórico y a las categorías asumidas en la revisión documental.

- **Fase de diseño**

En relación con el nivel educativo en el cual se desarrolló la investigación, como se mencionó, se asume a los profesores de matemáticas en formación de la Licenciatura en Matemáticas del curso de cálculo diferencial del periodo A de 2020. Así en esta fase se respondió de manera procedimental a la construcción de actividades que permitieran el tránsito de un modo de pensar a otro en el aprendizaje de la derivada. Las razones por las cuales se escoge la población son principalmente tres:

1. La formación de profesores puesto que se menciona dentro del marco conceptual.
2. Por pertenecer al programa de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana.
3. Atiende al interés de la investigación.

Se conformaron actividades que permitieran el tránsito de un modo de pensar a otro enmarcada en la teoría de los modos de pensamiento. De esta manera, se estableció el diseño de una guía teniendo presente las categorías en las cuales se definió la derivada y que cada actividad fue construida de manera reflexiva y sin tomar actividades diseñadas previamente, puesto que se considera un valor agregado a la investigación. Es importante recalcar que las actividades están orientadas desde cualquiera de los tres modos de pensamiento que permitan al estudiante poder transitar entre estos modos y que el investigador pueda identificar articuladores emergentes. Para el diseño de las actividades se recurrió a un documento de caracterización que se obtuvo del análisis realizado en el primer objetivo. Por ello, se debe tener en cuenta aspectos como:

1. Número de actividades: Se construyeron tres actividades por cada modo de pensamiento.
2. Organización de actividades: Se tuvo en cuenta para su elaboración aspectos conceptuales, algorítmicos y de aplicación.

3. Elaboración de actividades: Las actividades se abordaron desde los modos de pensamiento y sometidas a las condiciones de la cantidad y organización.

Para la recolección de las actividades ya planteadas que cumplan con todos los aspectos mencionados se organizan en un formato de actividades.

- **Fase de implementación**

En seguimiento a los objetivos específicos de la investigación en el tercer objetivo que es el de validar una guía que permita evidenciar la compresión profunda de la derivada, desde los articuladores emergentes, se hizo la estructura de la guía según los aspectos nombrados en la fase de diseño, anexando las nueve actividades. Una vez establecida la guía, se realizó una validación a través de juicio de experto, entendida esta como “una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones" (Escobar & Cuervo, 2008, p.29). La validación fue hecha por una docente universitaria de conocimientos solidos en la formación de profesores de matemáticas y con un recorrido investigativo profundizado en el marco de los modos de pensamiento.

En relación, esto se hace para contar con instrumentos confiables y válidos en el campo de la teoría de los modos de pensamientos, con el fin de lograr los elementos importantes de esta investigación. Consecuentemente, se procedió a entablar la relación entre el investigador y el docente titular del curso de Cálculo Diferencial estableciendo la metodología con la cual se expuso el trabajo. De esta manera, se llevó a cabo el desarrollo de la guía en dos etapas: la etapa de sensibilización y la etapa de solución de la guía. Para la explicación de las dos etapas no es necesario que los estudiantes tengan conocimientos de los modos de pensamiento. En la primera etapa, el profesor guía les explicó el desarrollo de un trabajo distinto, se presentó a los estudiantes que conforman el curso y se establecieron compromisos para un buen desarrollo de las sesiones como lo es la puntualidad, la responsabilidad en la entrega de las actividades y la disposición y el trabajo dentro de las sesiones. En la segunda etapa se desarrollaron las actividades para posteriormente regresarlas al profesor investigador. Las etapas se llevaron a cabo en seis sesiones, cada una de dos horas.

De este modo, la técnica que se utilizó fue la observación participante activa que según (Taylor & Bodgan, 1984) es la técnica que involucra la interacción social entre el investigador y los informantes en el escenario social, y durante la cual se recoge información de modo sistemático. Por consiguiente, la herramienta de recolección de datos fue la guía y la herramienta de registro de datos fue una matriz de observación junto con las producciones de los estudiantes (respuesta de la guía).

3.3 Unidad de análisis

Para establecer el análisis a los datos obtenidos en cada momento de la investigación, se postulan las diferentes unidades de observación que permiten realizar de manera objetiva y clara los análisis. Para Gaitán & Piñuel, (1998) "Las unidades de análisis son aquellas unidades de observación que, seleccionadas de antemano, y reconocida por los observadores en el campo y durante el tiempo de observación, se constituyen en objeto de la categorización en los registros construidos a tal efecto". (p.60) En este sentido, para la presente investigación la unidad de análisis se caracteriza en torno a los modos de pensamiento, enmarcado dentro de la estructuración del concepto de derivada postulado en el objetivo 1.

Dentro del análisis documental y tomando como unidad de estudio los modos de pensamiento es necesario en el nodo epistemológico describir como categoría cada modo de pensamiento, tomando cada referente bibliográfico del curso de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas. Para la categoría Geométrico Gráfico Convergente se dividen en aspectos que enfatizan el concepto dado desde el marco teórico donde la derivada es representada a través de una gráfica y se analiza desde un punto de vista netamente matemático y geométrico. En la categoría Analítico Operacional se utilizan dos secciones que argumentan de manera precisa el concepto formal de derivada y su interpretación utilizando simbologías algebraicas. En la categoría Analítico Estructural las especificaciones soportan la idea de la elaboración del concepto del objeto matemático a través de características propias de conceptos que se relacionan con sus propiedades y construcción de la derivada en la atribución a otros objetos matemáticos.

Teniendo en cuenta las condiciones didácticas que encaja la unidad de análisis, subyacen las categorías de planeación y contenido. Se estructura este estudio con cada libro expuesto en la bibliografía del microdiseño curricular del curso de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas, el cual se divide en tres partes: La estructura temática, el objetivo de planeación y el objetivo de aprendizaje. De la estructura temática y la planeación son los aspectos necesarios para la descripción de la categoría de planeación, puesto que, según los elementos seleccionados dentro de los referentes bibliográficos, la planeación es vista desde una sola idea y es el planteamiento que el autor expone de la derivada en aspectos como la importancia, utilidad, interés y profundidad. En cuanto a la categoría contenido teniendo en cuenta los elementos comunes en el análisis documental, figuran características que estructuran la secuencia temática de cómo se debe abordar el aprendizaje de la derivada y el objetivo de aprendizaje**.**

Tabla 6. Descriptores del objetivo específico número 1

Fuente: Elaboración propia

Unidad de análisis	Categorías	Descriptor	Código
MODOS DE PENSAMIENTO	Modo Geométrico Gráfico Convergente	1. Enfatizan el concepto dado desde el marco teórico donde la derivada es representada geométricamente.	RG
		2. Analiza la representación geométrica de la derivada desde un punto de vista netamente matemático.	AM
	Modo Analítico Operacional	1. Argumentan de manera precisa el concepto formal de derivada.	DMT
		2. Escritura de la derivada utilizando simbologías algebraicas.	IDE

Modo Analítico Estructural	1. Propiedades de la derivada en la atribución a otros objetos matemáticos.	TA
	2. Características propias de conceptos que se relacionan con su aplicabilidad.	TP
Planeación	1. Argumentos en aspectos como la importancia, utilidad, interés y profundidad del concepto de derivada.	PL
Contenido	1. Estructura de los temas relacionados con el concepto de derivada.	IN
	2. Objetivo de aprendizaje.	ED

En la siguiente tabla se exponen las descripciones consideradas en la estructuración de las actividades que componen la guía. Para la formación de estas características se planteó como unidad de análisis los modos de pensamiento, puesto que se consideran las categorías fundamentales en la construcción epistemológica de la derivada y por consiguiente es un aspecto fundamental en la elaboración de las actividades.

Por consiguiente, las categorías elegidas fueron los tres modos considerados para la comprensión de la derivada (GGC, AO, AE). En la categoría Geométrico Grafico Convergente, las actividades están considerada desde la representación geométrica y el entendimiento algebraico de estas simbolizaciones. Desde los aspectos epistemológicos analizados en la categoría Analítico Operacional, se consideran dos características fundamentales en la construcción de la derivada, como lo es las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos usados y la concepción de derivada desde el límite de incrementos. De lo anterior, es necesario tener en cuenta que al comprender dicha concepción se debe considerar desde la categoría analítico estructural, aplicaciones del límite de incrementos en el análisis de la derivada de una función en un punto.

Tabla 7. Descriptores del objetivo específico número 2

Unidad de análisis	**Categorías**	**Descriptores**	**Código**

MODOS DE PENSAMIENTO	Geométrico Grafico Convergente	Representación geométrica de los objetos matemáticos necesarios en la construcción de la derivada.	OM
		Comprensión algebraica de las interacciones de los objetos matemáticos involucrados en la construcción de la noción de tangente.	CT
	Analítico Operacional	1. Uso de la simbolización en la representación de objetos matemáticos que interactúan en la noción del concepto derivada	SR
		Construcción de la recta tangente a una curva, desde el límite de incrementos	CF
	Analítico Estructural	Aplicación del límite de incrementos para la construcción de la derivada en un punto.	PO

Fuente: Elaboración propia

En concordancia con las acciones planteadas en el objetivo 3, se considera la validación por juicios de expertos, una comprobación conveniente dentro del modelamiento de las actividades que constituyen a la guía. Por este motivo, dado que estas deben ofrecer las articulaciones entre los modos de pensamiento y se consideraron como la unidad principal de análisis.

Dentro de las observaciones hechas en la validación de la guía, se tuvieron en cuenta la estructura temática y la relación de las actividades con los modos de pensamiento. En la estructura temática dentro de la guía se reconstruyó en aspectos como la identificación de los diferentes modos de pensamiento, el análisis con los resultados de los textos analizados y producciones curriculares del curso. Para las actividades se tuvo en cuenta la reconstrucción desde la construcción, puesto que esta replanteada secuencia didáctica garantiza que el estudiante se ubique desde cualquiera de los modos de pensamiento para el correcto desarrollo de las actividades y dentro de esta aplicación emerjan los articuladores que usó para comprender el concepto de derivada.

Tabla 8. Descriptores del objetivo específico número 3

Unidad de análisis	Categorías	Descriptor	Código
MODOS DE PENSAMIENTO	Planeación	Reconstrucción en la estructura temática de la guía en la forma de construir el concepto de derivada	RT
	Contenido	Comprobación crítica de las actividades con relación al tránsito que estas permiten desde un modo de pensamiento a otro.	CC

Fuente: Elaboración propia

Dentro de los resultados esperados en la implementación de la guía se establecen algunas descripciones, que son necesarias para la identificación de articuladores que pueden emerger de la relación que existe de la traslación de un modo de pensar a otro, y teniendo en cuenta la teoría de los modos de pensamiento. Por tanto, se establecieron las siguientes características

Tabla 9. Descriptores del objetivo general

Unidad de análisis	Categorías	Descriptor	Código

MODOS DE PENSAMIENTO	Del Modo Analítico Operacional al modo Geométrico Gráfico Convergente.	Determinación de la idea de recta tangente a través del estudio de rectas secantes, el concepto de pendiente y el uso de aproximación.	DC
	Del modo Analítico Operacional al modo Analítico Estructural	Descripción de la derivada de una función a través del uso del límite entre dos incrementos y sus propiedades algebraicas	DL
	Del modo Analítico Estructural al modo Geométrico Gráfico Convergente	Representación gráfica de la derivada de una función en un punto que pertenece a la curva.	PD

Fuente: Elaboración propia

CAPÍTULO 4

4 ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo se analizan los 3 objetivos específicos propuestos en el trabajo, donde está registrada la información que se utilizó en el proceso de elaboración y aplicación de la guía. Con esto, se tuvo en cuenta la estructuración del concepto de derivada desde los modos de pensamiento, el análisis documental de los libros expuestos en el microdiseño curricular del curso de Cálculo Diferencial, las inferencias generalizadas que emergen del estudio, la construcción de actividades, la validación de estas por parte de un experto en el campo y la aplicabilidad de la guía para el surgimiento de los elementos articuladores.

4.1 La derivada: Una mirada desde algunas fuentes

En esta sección se aborda lo relacionado en el objetivo 1, al estructurar la derivada según autores referentes en el microdiseño curricular del Calculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas y desde las especificaciones hechas en las rejillas donde se analiza su fundamento epistemológico y didáctico. Se realizan descripciones de cada autor, teniendo en cuenta aspectos epistemológicos y didácticos, estructurados a partir de los modos de pensamiento y el proceso de enseñanza-aprendizaje.

4.1.1 La derivada desde lo epistemológico

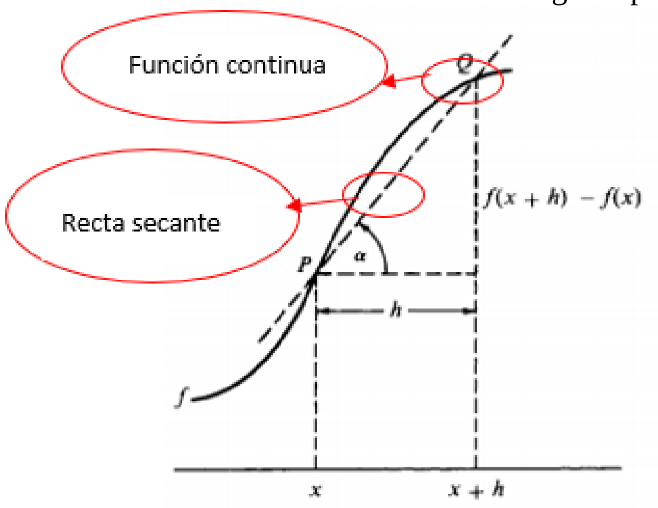
Desde el punto de vista epistemológico, en esta investigación, la derivada es caracterizada por los tres modos de pensamiento (Geométrico Gráfico Convergente, Analítico operacional, Analítico Estructural) usando descriptores propios de cada categoría, definidos y clasificados en las rejillas, para así, lograr construir el concepto de derivada desde esta teoría.

“CÁLCULO” T. Apóstol (1998)

Para el inicio de este análisis desde la mirada epistemológica de la derivada se parte del autor Tom. M. Apóstol en su libro “Cálculo” en el volumen 1, año 1998. Desde la categoría

Geométrico Gráfico Convergente la derivada se representa como una recta tangente de una función continua donde se enmarcan dos puntos P y Q que pertenecen a la vez a una recta secante a esta función. Con ello se indican los valores de los puntos en el eje x, y la medida de los dos catetos del triángulo rectángulo formado por la distancia entre x y $(x + h)$ y la proyección de las imágenes tanto para el punto P como para el punto Q, como se muestra en la ilustración 2.

Ilustración 2. Gráfico de la derivada según Apóstol



Fuente: Apóstol, T. (1998)

A partir de la gráfica de la recta tangente, desde un análisis matemático (VM), se toma como punto de intersección el punto P, con ello, Apóstol usa propiedades trigonométricas relacionada a los triángulos rectángulos donde la pendiente de la recta que pasa por P y Q (donde Q es visto como la imagen del incremento infinitésimo $(x + h)$) es la tangente al ángulo alfa, haciendo que el punto Q se mueva una distancia h (haciendo que h tienda a 0) hacia el punto P, esto produce una variación en la pendiente, haciendo que la recta sea una tangente a la función. Como se indica en la ilustración 3.

Ilustración 3. Interpretación geométrica

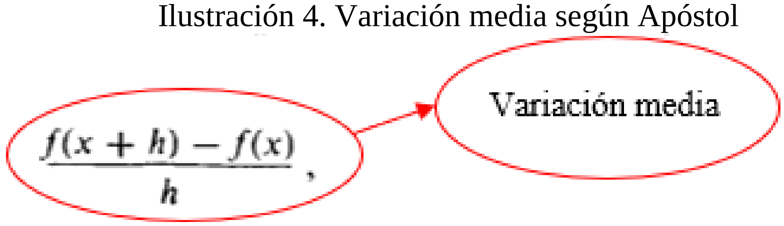
Sea f una función que tiene derivada en x, por lo que el cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando h tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender h a cero, el punto P permanece fijo pero Q se mueve hacia P a lo largo de la curva y la recta PQ se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo α tiende al límite $f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como *pendiente de una curva* en el punto P el número $f'(x)$. La recta por P que tiene esta pendiente se denomina la *tangente* a la curva en P.

Fuente: Apóstol, T. (1998)

En la descripción hecha, la representación geométrica (RG) y el análisis matemático (AM) se relacionan de manera que permite la articulación entre la visualización y el razonamiento, eje fundamental para el desarrollo del objeto derivada (Gómez, 2012). De este modo, de este estudio surge al definir los elementos geométricos desde las matemáticas, puesto que estas categorías (AM y RG) se basan en la visualización y la habilidad de abstracción en el desarrollo de la intuición en la relación entre lo aritmético y lo geométrico.

Desde la relación entre el análisis matemático y la representación geométrica, en la **categoría Analítico Operacional** se formaliza el concepto de derivada desde un punto de vista formal de la variación media. Apóstol parte de considerar una función que es continua desde en un intervalo (a, b), dentro del eje x toma un punto que pertenece a la función y esté en el intervalo (a, b) para así formar el cociente de diferencias entre el punto y su variación al aproximarse al punto h.

Ilustración 4. Variación media según Apóstol



Fuente: Apóstol, T. (1998)

De la ilustración 4, se considera que el valor h es la distancia de la variación en el eje x, a la vez es un número cualquiera definido en el conjunto de los números reales, teniendo en cuenta dos condiciones: primero que como h es el denominador su valor no puede ser cero, y segundo que al tener la adición $x + h$, esta pertenezca al intervalo (a, b). Ya teniendo lo definido, se considera el numerador como la medida de variación de la función cuando el valor del punto x varia hacia $x + h$. El cociente de dicha fracción representa para el autor la variación media de la función en el intervalo comprendido al hacer variar el punto x varia hacia $x + h$ y con esto define la derivada como se muestra en la ilustración 5.

Ilustración 5. Variación media en un intervalo

donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x + h$ pertenezca también a (a, b). El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x + h$. El cociente representa la *variación media* de f en el intervalo que une x a $x + h$.

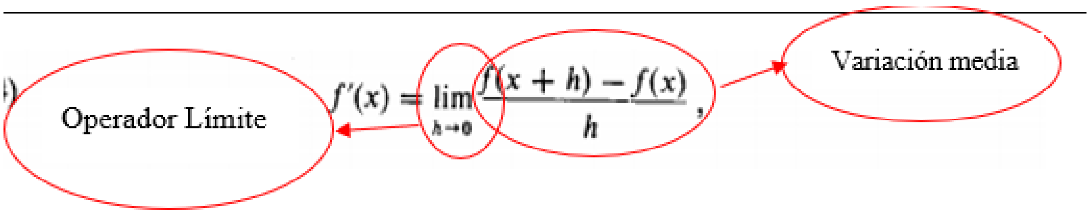
Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$ (se lee «f prima de x»). Con lo que la definición formal de $f'(x)$ puede establecerse del siguiente modo:

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Para llegar a la definición de la derivada, el autor considera estudiar hacia donde se acerca el cociente cuando la variación en el eje x (Ilustración 5), que se denominó h tiende a cero. Si en el resultado de dicho comportamiento tiende a un solo valor límite, teniendo en cuenta que es el mismo, si, h es un número positivo o negativo, entonces este valor límite se considera la derivada de la función en el punto x. De esta manera, Apóstol utiliza la variación media en principio para luego aplicar el límite y así definir la derivada, es decir utilizando conceptos básicos. Esto indica que, para obtener la definición formal precisa de un objeto matemático (DMT), el autor considera que debe ser construido únicamente desde los preconceptos (Van Dormolen & Zaslavsky, 2003).

El autor utiliza la notación $f´(x)$ y se lee “f prima de x”. Con esto se deduce que la simbología formal desde las representaciones simbólicas las cuales interpretan operaciones o comportamientos (Sastre, 2016), pueden definirse desde varias perspectivas utilizando elementos específicos que hacen parte de la derivada. En relación con lo expuesto en la representación formal de la derivada, se hace evidente la utilización de la percepción de límite, haciendo necesaria su simbolización al relacionar f prima de x como el límite cuando la variación en x se hace 0 para la variación media (IDE) como se muestra en la ilustración 6.

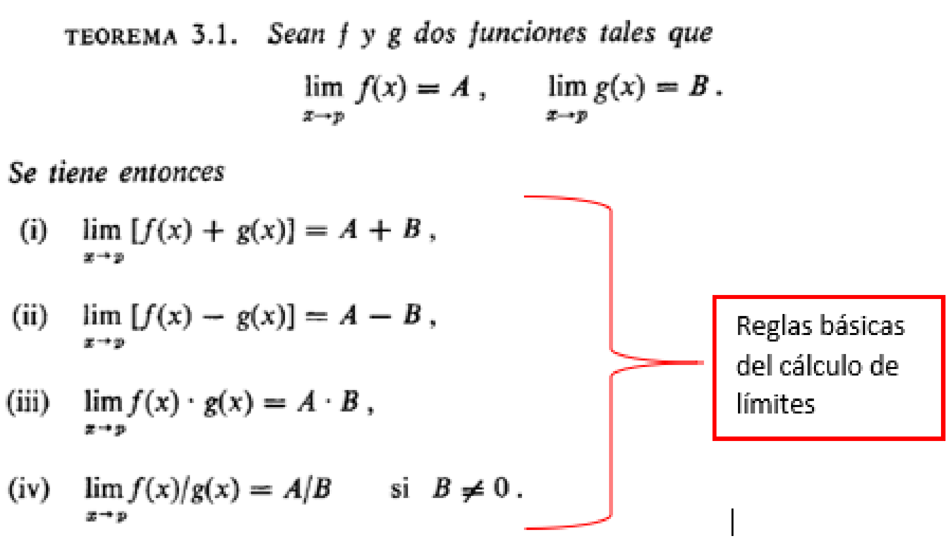
Ilustración 6. Operador límite



Fuente: Apóstol, T. (1998)

Ahora para la **categoría Analítico Estructural** donde es necesario definir reglas básicas o propiedades con relación a otros objetos matemáticos que facilitan su operabilidad, el autor considera que uno de estos objetos matemáticos son las reglas básicas para el cálculo de límites. Desde la ilustración 7, cabe resaltar que las operaciones que subyacen de determinar el límite a un punto p para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son todas continuas dentro del conjunto de los números reales.

Ilustración 7. Cálculo de límites



TEOREMA 3.1. *Sean f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A\,, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = B\,.$$

Se tiene entonces

(i) $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = A + B\,,$

(ii) $\lim_{x \to p} [f(x) - g(x)] = A - B\,,$

(iii) $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B\,,$

(iv) $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = A/B \quad \text{si} \quad B \neq 0\,.$

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Ahora en Apóstol hay un tema que no se considera en la construcción de la derivada y es considerar que un concepto necesario es la integral, por ello, el autor en la ilustración 8 define el teorema del valor medio para funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ donde demuestra que el valor es igual al valor de la función en un punto dentro del intervalo considerado.

Ilustración 8. Teorema del valor medio para integrales

TEOREMA 3.15. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES. *Si f es continua en $[a, b]$, para un cierto c de $[a, b]$ tenemos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

La integral como concepto previo a la derivada

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Enunciando estos elementos a priori, dentro de la continuidad de funciones, Apostol define ciertos valores $M(f)$ y $m(f)$ como valores máximo y mínimo dentro del intervalo considerado. La diferencia entres estos dos valores se denomina oscilación de f en el intervalo $[a, b]$. Dentro de esta oscilación el autor en la ilustración 9 describe la idea de lo infinitesimo puesto que enuncia el teorema de la continuidad uniforme.

Ilustración 9. Continuidad de una función en un intervalo

TEOREMA 3.13. *Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición de $[a, b]$, en un número finito de subintervalos, tal que la oscilación de f en todo subintervalo es menor que ϵ.*

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Se conceptualiza la derivada en relación con otros objetos matemáticos (TA) que ayudan a su construcción (Alvarado & Garcia, 2005), partiendo de la descripción fundamentalmente de los temas de continuidad y límites de una función vistos en la ilustración 7 y 9.

Tambien hay que considerar propiedades aposteriori (TP) que resultan de la aplicabilidad de la derivada en funciones, como lo enuncia Apostol en la ilustración 10 relacionando las operaciones ariméticas de las funciones con el concepto de derivada.

Ilustración 10. Propiedades de la derivada

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{(i)} & (f+g)' = f' + g', \\
\text{(ii)} & (f-g)' = f' - g', \\
\text{(iii)} & (f\cdot g)' = f\cdot g' + g\cdot f', \\
\text{(iv)} & \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g\cdot f' - f\cdot g'}{g^2} \quad \textit{en puntos } x \textit{ donde } g(x) \neq 0
\end{array}\right\} \boxed{\text{Derivada de operaciones entre funciones}}$$

Fuente: Apóstol, T. (1998)

En alusión a las características propias de la derivada, se resalta la composición de funciones como teorema aposteriori, donde se establece que si dos funciones son derivables al aplicar el operador derivada, establece el teorema llamado regla de la cadena en la ilustración 11.

Ilustración 11. Regla de la cadena

$$f'(x) = u'(y)\cdot v'(x)\,. \longrightarrow \boxed{\text{Regla de la cadena}}$$

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Ahora, partiendo de lo enunciado en el teorema de la continuidad uniforme, se nombran ciertos valores denominados como máximos y mínimos. En la aplicabilidad de la derivada estos valores surgen de encontrar las raíces de la expresión que representa a la derivada de la función, representado por el teorema de Rolle en la ilustración 12.

Ilustración 12. Teorema de Rolle

TEOREMA 4.4. TEOREMA DE ROLLE. *Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b). Supongamos también que*

$$f(a) = f(b)$$

Existe entonces por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Otra particularidad dentro de las propiedades es el valor medio usando la integración y la derivación como se muestra en la ilustración 13, donde su valor es representado por el producto de la diferencia entre el valor mínimo y valor máximo en un intervalo $[a, b]$ y la función o su derivada en un punto c que pertenece al intervalo.

Ilustración 13. Aplicabilidad de máximos y mínimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\,. \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\,.$$

Uso de máximos y mínimos en el cálculo del valor medio usando integrales y derivadas

Fuente: Apóstol, T. (1998)

El autor denota ciertas características en la ilustración 14, que relacionan una función con su derivada, en el hecho de relacionar la función con ciertos valores de la derivada de esa función, dentro de un intervalo continua de $[a, b]$.

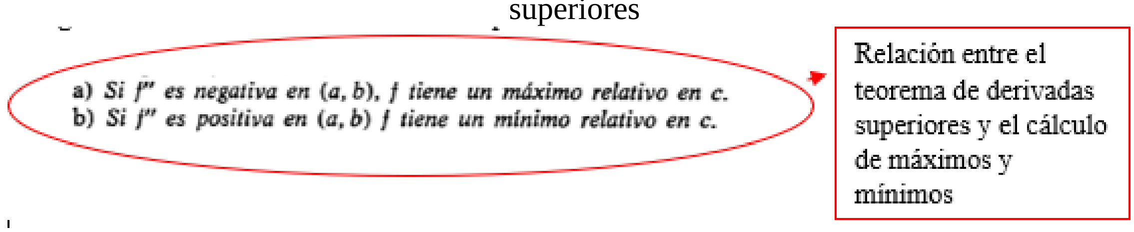
Ilustración 14. Comportamiento de una función continúa en un intervalo

a) *Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente creciente en $[a, b]$.*
b) *Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.*
c) *Si $f'(x) = 0$ para todo x de (a, b), f es constante en $[a, b]$.*

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Con esto, relacionando el cálculo de derivadas superiores para encontrar valores máximos y mínimos, Apóstol define criterios de la segunda derivada para extremos en un punto crítico como se muestra en la ilustración 15, esto es que, dado un punto crítico c que pertenece a un intervalo abierto (a, b), teniendo $f'(c) = 0$.

Ilustración 15. Relación entre máximos y mínimos y el teorema de derivadas superiores



Fuente: Apóstol, T. (1998)

En la conceputalización de la derivada existen elementos y reglas necesarias para su aplicabilidad (TP), surgiendo así, la importancia de cada propiedad y obtener lo escencial del concepto (Alvarado & Garcia, 2005), desde las características propias de la aplicabiliad de sus propiedades.

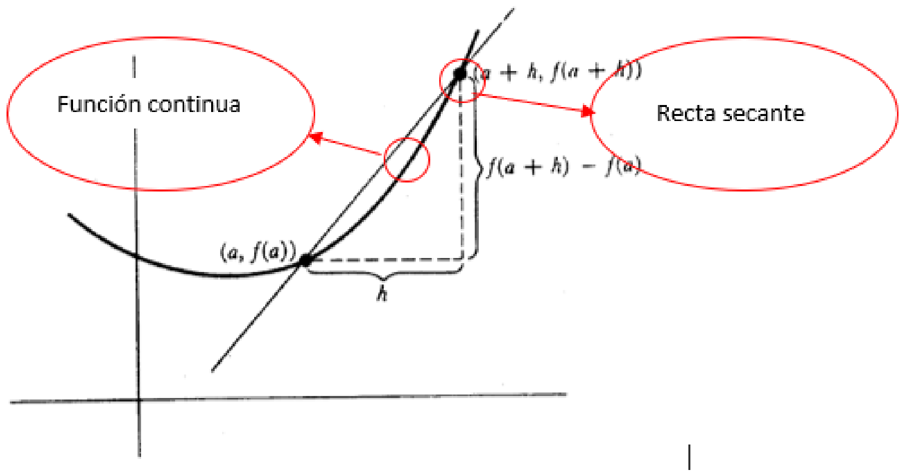
En conclusión, Apostol considera como reglas y propiedades los teoremas que surgen después de considerar el concepto de derivada. También establece que la idea de partir de una familia de rectas secantes que cortan una curva hasta llegar a un punto límite para formar la recta tangente es la mejor forma de construir el concepto de derivada.

“CÁLCULO INFINITESIMAL” M. Spivak (1996)

En alusión a la representación de una recta tangente a una curva (RG) y en los elementos geométricos que se utilizan en la representación gráfica del concepto de derivada (**Geométrico Gráfico Convergente)**, en Spivak se encuentra la relación a lo que se describe en Apóstol desde la representación de la secante que pasa por dos puntos dada una función continua. En este caso se representan las coordenadas de dichos puntos $(a, f(a))$ y $(a +$

$h), f(a+h))$, formando un triángulo rectángulo usando el punto de intersección al proyectar $f(a)$ hasta el punto $(a+h)$, teniendo como su altura la diferencia entre las imágenes de los puntos a y $a+h$, y como base la diferencia entre estos dos puntos, como se observa en la ilustración 16.

Ilustración 16. Gráfica de la derivada según Spivak



Fuente: Spivak, M. (1996)

La interpretación geométrica a partir de lo establecido en la ilustración, permite contemplar que la pendiente de la recta tangente se interpreta como el cociente de diferencias entre las coordenadas de los puntos que pertenecen a la función y a la recta tangente, demostrando que al hallar el valor de la pendiente de una recta tangente a una función desde el método del cociente de diferencias es igual a la relación de la tangente del ángulo formado en el triángulo rectángulo en el punto perteneciente a la recta tangente. Desde los aspectos mencionados, se señala que aunque se establezcan relaciones entre los elementos desde una intuición analítica, esta no es suficiente, puesto que para lograr una comprensión más general, se deben tener en cuenta cada uno de los elementos geométricos utilizados, desde los aspectos más intuitivos a los más relevantes, utilizando la intuición analítica (AM) para el desarrollo del pensamiento geométrico y obtener la capacidad de llevarla a un dominio puramente aritmético (Gómez, 2012).

Al definir de una manera argumentativa en la argumentación, la simbolización y las ecuaciones que componen la definición de la derivada (**Analítico Operacional**), hay que tener en cuenta dos aspectos: La primera es definir la tangente de una función en un punto establecido $(a, f(a))$, como una recta que pasa por dicho punto y su pendiente resulta de la derivada de la función en dicho punto $(a, f(a))$.

Ilustración 17. Definición y notación de tangencia

El primer comentario a nuestra definición es en realidad un añadido; definimos la **tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente $f'(a)$. Esto quiere decir que la tangente en $(a, f(a))$ sólo está definida si f es derivable en a.

El segundo comentario se refiere a la notación. El símbolo $f'(a)$ recuerda ciertamente la notación funcional. En efecto, para cualquier función f designamos por f' a la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números a tales que f es derivable en a, y cuyo valor para tal número a es

Fuente: Spivak, M. (1996)

Esto deja en claro que la recta tangente en el punto $(a, f(a))$, solo puede ser cierta si la función es derivable en el punto a como se referencia en la ilustración 17. Con esto, es importante referir en esta categoría el lenguaje matemático, considerando que permite, establecer relaciones desde el lenguaje formal y abstracto hacia lo aplicativo del concepto (DMT), usando elementos básicos que se identifican en la construcción teórica de su definición (Puga, Rodríguez & Toledo, 2016).

El segundo aspecto es la simbolización planteada en Apóstol (f'), pero con la diferencia de no establecer el punto x de la función $y = f(x)$ donde la función f es derivable, sino, que se toma un punto a para simbolizar $f'(a)$ como notación funcional (ver ilustración 17). Con esto, se debe entender a f' como la denotación de cualquier función f e indica una función cuyo dominio son todos los números que se representan en a tales que f es derivable en este punto a. Estas simbolizaciones hacen parte de la construcción de la definición de derivada a través de representaciones (IDE), puesto que la manera en cómo se puede analizar de manera precisa y comprensible un objeto matemático es el uso de la simbología que complementa el lenguaje natural (García & Cuarez, 2014).

Las consideraciones en cuanto a la relación entre las simbolizaciones, hechas por el autor Spivak, donde su propósito es de establecer que, dada una variación en el punto a llamada h emerge un punto en la función denotado como $a + h$. Con esto, se establece el cociente de diferencias mostrada en la ilustración 18. En el estudio del valor del cociente se establece un valor límite cuando el incremento h tiende a 0. Cabe resalta que el autor Spivak no relaciona este valor límite con la simbolización $f'(a)$ como lo hizo Apóstol, puesto que es sobre entendida esta igualdad.

Ilustración 18. Fórmula cocientes de diferencias

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Fuente: Spivak, M. (1996)

En la construcción del concepto de derivada el autor ha puesto de manifiesto el uso de algunos conceptos fundamentales (Analítico Estructural) en la identificación de elementos que construyen el concepto de derivada (TA) como la continuidad de una función definido desde la existencia la siguiente manera del valor $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para cualquier número x, y en el intervalo definido, como se muestra en la ilustración 19.

Ilustración 19. Definición de función continúa

si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Definición de una función continua

Fuente: Spivak, M. (1996) "Cálculo infinitesimal"

Ahora, hay que recalcar propiedades, relaciones y reglas que se construyen a partir del concepto de derivada (TP), Con ello, en Spivak se tienen los teoremas que definen la derivada de una función en un punto, para luego definir la derivada para cada tipo de función y con ello presentar teoremas relacionados con las propiedades de la derivada de una suma de funciones, derivada de la multiplicación de funciones y la derivada de un constante por una función (catalogadas en Apóstol como reglas básicas de derivación). Spivak también enuncia teoremas relacionados con el comportamiento de las derivadas al convertirse en un operador y ser aplicadas a los tipos de funciones como se observa en la ilustración 20. Específica también el teorema de la composición de funciones llamado regla de la cadena.

Ilustración 20. Tipos de funciones

$$\left.\begin{array}{l}
(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a). \\[1ex]
f'(a) = na^{n-1} \quad \text{para todo } a. \\[1ex]
\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{[g(a)]^2}. \\[2ex]
\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.
\end{array}\right\} \boxed{\text{Derivadas de algunos tipos de funciones}}$$

Fuente: Spivak, M. (1996)

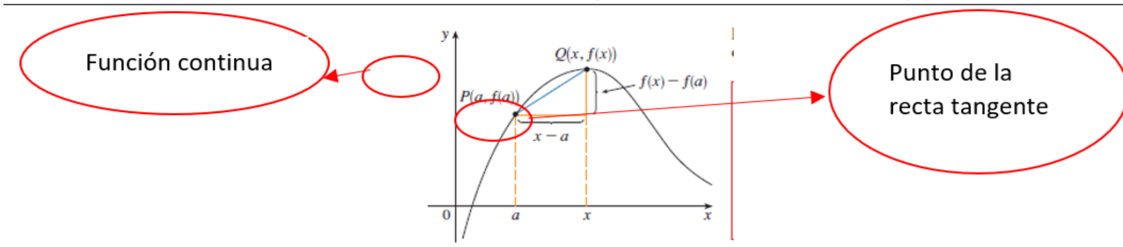
Otros teoremas aludidos a la aplicabilidad del concepto, los cuales son necesarios dentro de la construcción de la derivada son como los enuncia Spivak los puntos máximos y mínimos dentro de una función continua en un intervalo (a, b) donde los define como $f´(x) = 0$. Teniendo en cuenta que la función sea derivable en todo el intervalo considerado y donde x representa el punto máximo o mínimo. Estas consideraciones son interesantes en el sentido de la necesidad de estos teoremas que fundamentan elementos que permiten la construcción de este objeto matemático (Castañeda, 2016).

De lo enunciado anteriormente, en la caracterización se denota que el autor Spivak considera algunos elementos matemáticos en la construcción del concepto de derivada ya mencionados en Apóstol como lo es la idea de recta secante, el cociente de diferencias, y otros que complementan la aplicabilidad del concepto, en específico la derivada en funciones continuas (ver ilustración 20).

“CÁLCULO DE UNA VARIABLE. TRASCENDENTES TEMPRANAS” J. Stewart (2008)

En relación con los elementos necesarios en la construcción de la conceptualización de la derivada, visto desde Stewart, para la categoría **Geométrico Gráfico Convergente**, al analizar la representación de la derivada del autor Stewart a través de elementos de la geometría, surge que puede ser interpretada partiendo desde una función continua en todo el conjunto de los números reales (RG), graficando sobre la función dos puntos adyacentes uno del otro.

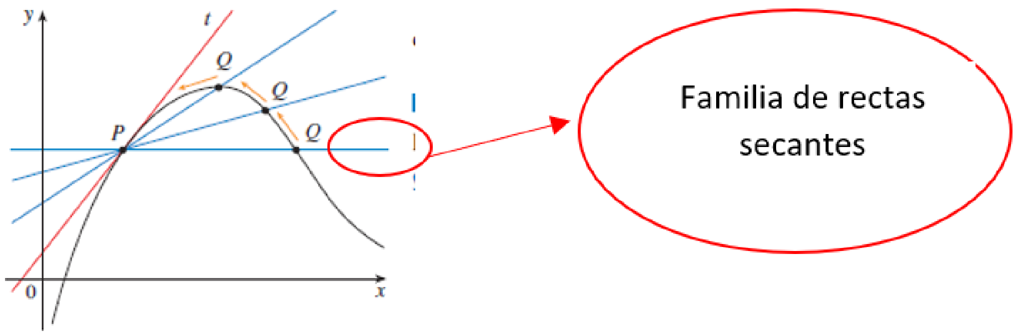
Ilustración 21. Representación gráfica de la derivada según Stewart



Fuente: Stewart, J. (2008)

En la ilustración 21 es interesante observar que el autor no relaciona los puntos: Uno de ellos, como un punto que pertenece a la recta tangente, y el otro punto como un incremento de sí mismo. El autor parte de representar a las coordenadas de los dos puntos como dos valores a y x con sus respectivas imágenes e indicar que las distancias formadas al graficar el triángulo rectángulo muestran que la pendiente de la recta tangente es el cociente de diferencias (AM), y a su vez se entiende que no necesariamente el incremento debe estar relacionado con el valor en el punto a. Es fundamental resaltar que esta interpretación no altera la esencia geométrica del objeto derivada que, según los autores, es vista como la familia de rectas secantes formadas en la aproximación de uno de sus puntos al otro para formar la recta tangente como se aprecia en la ilustración 22.

Ilustración 22. Familia de rectas secantes

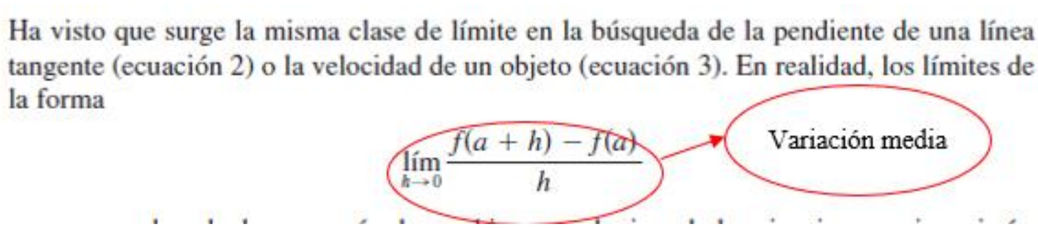


Fuente: Stewart, J. (2008)

Desde lo descrito sobre la interpretación aritmética desde la representación gráfica (AM), una de las condiciones que se necesita es la habilidad de transformar representaciones geométricas de conceptos matemáticos en otras más complejas (Hitt, 1998). Esto se observa en la representación geométrica de rectas secantes que pasan por una curva, acercándose a un punto para llegar a la recta tangente y a la vez formar el concepto de derivada. Estas condiciones juegan un rol indispensable en el aprendizaje de conceptos matemáticos y además radica la importancia de la articulación de estos conceptos a través de sus comprensiones geométricas. Otro aspecto importante, es que estas representaciones son un apoyo en el entendimiento de las posibles maneras de construir conceptos matemáticos.

En la categoría **Analítico operacional**, se interpreta la derivada como la búsqueda de la pendiente de la recta tangente como se expone en la categoría Geométrico Grafico Convergente, con respecto a este análisis, Stewart expone la variación media.

Ilustración 23. Variación media


Ha visto que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3). En realidad, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fuente: Stewart, J. (2008)

En la ilustración 23, se indica la construcción del concepto de derivada a partir de la aplicabilidad teórica para denotar su definición, con ejemplos como lo es el comportamiento de la velocidad de un objeto. Con ello, el autor toma lo que se ha visto del cociente de diferencias entre los puntos de variación, desde la representación simbólica usando expresiones algebraicas y el operador límite (DMT), teniendo en cuenta la necesidad de manejar la simbología en el entendimiento de los conceptos de manera analítica y que pertenecen al lenguaje matemático formal (García & Cuarez, 2014).

Estos tipos de límites que expone el autor en la ilustración 23, desde la aplicabilidad al evaluar la razón de cambio en el ámbito del estudio de las ciencias para la construcción de la derivada de una función en un punto. Stewart en la ilustración 24 considera a la recta tangente de la función $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por dicho punto.

Ilustración 24. Fórmula de la pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuando el límite existe.

Fuente: Stewart, J. (2008)

Un aspecto que denota el autor es la adaptación que le dan al concepto de derivada dependiendo del campo de estudio donde se interpreta desde distintos nombres y simbolización (IDE). Es de vital importancia considerar los objetos matemáticos desde el lenguaje de las matemáticas, hay que tener en cuenta su simbología y la manera en cómo se presentan los contenidos que conforman el concepto de deriva (Martín, Paralera, Romero & Segovia, 2009).

Cabe dar la importancia a como se está representado el concepto de derivada, puesto que se determina como la pendiente m como la derivada de la función en un punto $f'(a)$. Al observar en la ilustración anterior la simbolización es diferentes a las ya vistas, puesto que expone el cociente de diferencias desde la pendiente de la recta entre dos puntos de la siguiente manera.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (Ecuación\ de\ la\ pendiente\ de\ una\ recta)$$

$$Donde$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = x$$

$$y_1 = f(a)$$

$$y_2 = f(x)$$

En la formulación teórica de la derivada, Stewart establece la definición de la derivada utilizando el operador límite para especificar que al aproximarse el punto x al punto a hasta llegar a una posición limite donde $x = a$. De esta igualdad el autor se asegura que la variación en el eje x tienda a cero, por ende, este valor es el denominador de la variación media (DMT), teniendo en cuenta que el valor del límite de x tiende al punto a debe existir dentro del conjunto de los números reales. Los símbolos que determinan el concepto dependen del dominio en el que están, cada uno de ellos tiene su propio significado y a la vez son los fundamentos en la construcción del objeto matemático (Sastre, Boubée & Scempio, 2013).

Ahora al analizar las propiedades que surgen antes y después del concepto de derivada (Analítico Estructural) una de las propiedades a priori (TA), que se ve en Stewart, en la ilustración 25 hace referencia a la razón de cambio instantánea desde la pendiente de la recta tangente desde un punto a.

Ilustración 25. Razón de cambio

$$\text{razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La razón de cambio desde el concepto de la derivada

Fuente: Stewart, J. (2008)

Para el autor otra interpretación que atribuye las propiedades de la derivada a otros elementos metemáticos es la definición de una función derivable en un punto, puesto que si en un intervalo abierto (a, b) la función debe ser derivable si se toma cualquier punto que pertenezca a dicho intervalo como se muestra en la ilustración 26.

Ilustración 26. Teorema

TEOREMA Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

Fuente: Stewart, J. (2008)

Con ello si una función f cumple con esta definición quiere decir que f es continua en el intrevalo (a, b). Se relacionan objetos matemáticos en la construcción de la derivada y de su aplicabilidad (TP), usando la relación entre los preconceptos (Remy, 2004).

En relación con algunos aspectos propias de la derivada que denotan su aplicabilidad (TP), se tiene el teorema de derivadas superiores, donde el autor menciona la segunda derivada como la derivada de la derivada de una función f, la tercera derivada como la derivada de la segunda derivada de la función f. Para generalizar el autor considera que la n-esima derivada de f se obtiene derivándola n veces, denotando esto según la simbología propuesta por Leibniz mostradas en la figura 27.

Ilustración 27. Derivadas superiores

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

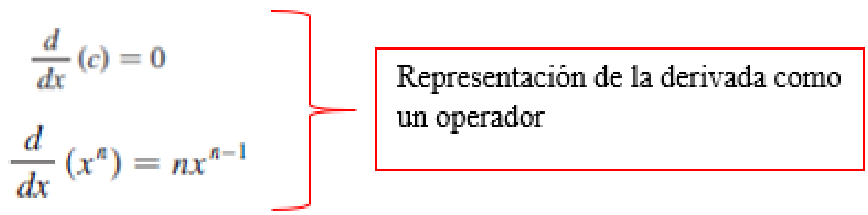
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Derivadas superiores utilizando la notación de Leibniz

Fuente: Stewart, J. (2008)

Ahora como es usual se denotan las derivadas desde los distintos tipos de funciones y sus operaciones aritméticas como se observa en la ilustración 28, donde se toma a la derivada como operador y se describe analíticamente los distintos resultados.

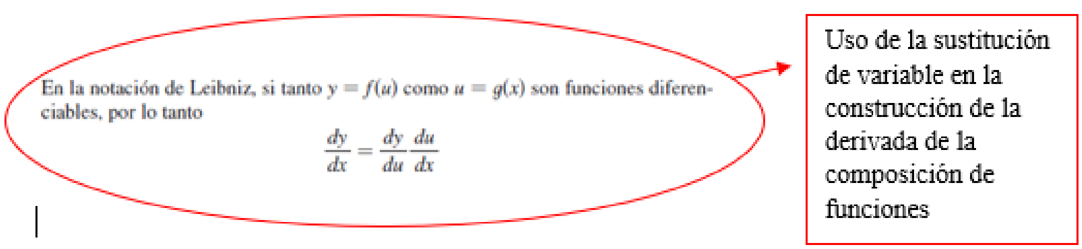
Ilustración 28. La derivada como operador



Fuente: Stewart, J. (2008)

En la composición de función, Stewart utiliza relaciones entre las variables que componen esta operación para denotar la definición analítica de esta propiedad (TP) como se observa en la ilustración 29, tomando la aplicabilidad de la sustitución en la estructura de esta fórmula.

Ilustración 29. Derivada de la composición de funciones



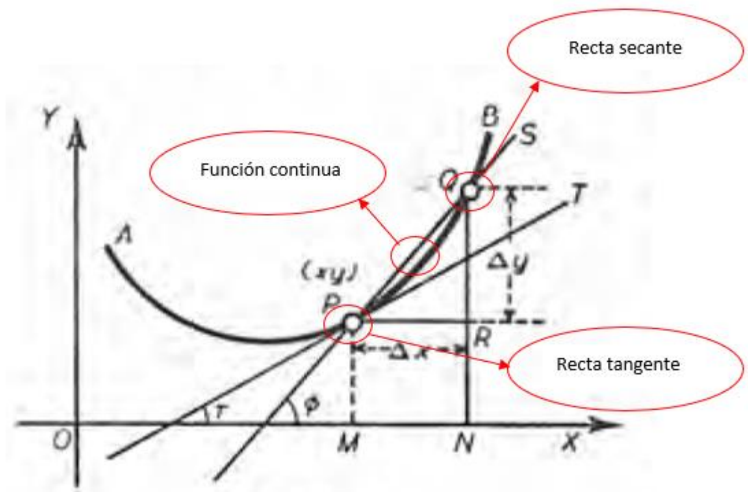
Fuente: Stewart, J. (2008)

En relación con el análisis de funciones, las representaciones gráficas de familias de rectas secantes, la categoría Geométrico Grafico Convergente proporciona ciertos elementos para la caracterización del comportamiento en la inclinación del ángulo formado en el punto que pertenece a la recta tangente P, como se había visto en el análisis geométrico de Apóstol, dicho ángulo tiende a cambiar su inclinación puesto que el punto Q se está acercando a P.

“CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL” P. Smith (2009)

Con estas consideraciones donde lo esencial es la identificación de la relación entre la aritmética y la geometría (**Geométrico Gráfico Convergente)**, el autor Smith considera la representación de las variaciones entre la secante de una función y su tangente con la particularidad de otorgar nombres a los elementos geométricos utilizados. Lo anterior es visto en la ilustración 30.

Ilustración 30. Representación geométrica de la derivada según Smith



Fuente: Smith, F (2009)

Aunque los elementos geométricos sean o no representados por nombres no cambian la manera en cómo se entiende la derivada, pero si facilita su interpretación puesto que dada una función continua desde el punto A hasta el punto B, se tienen dos puntos P y Q inscritos sobre ella, donde las coordenadas de P son (x, y) y el punto Q que tiene valor N en el eje x, es visto como la traslación hacia el punto P por la función donde viene delimitada por las variaciones en los ejes x, y. Esto genera que cuando la recta (S) que tiene dos puntos de intersección, el mismo punto P, perteneciente a la recta tangente y un punto Q que es el resultado de la elevación del ángulo T. Cuando el punto Q se acerca indefinidamente a P esto genera la función de la recta tangente a la función. Cabe resaltar que no se determinan las coordenadas del punto Q, puesto que el autor define la derivada partiendo como eje central las variaciones generadas en la traslación del punto Q, generando que se interprete la derivada como la relación entre el cociente de diferencias del valor de la imagen en el punto N que es Δy, el valor de la imagen en el punto $M(y)$, entre la diferencia de la distancia entre los puntos M y N dado por la representación Δ.

Desde estas características propias del análisis, la importancia de representar geométricamente un objeto matemático para su comprensión implica adquirir la habilidad de describirlo matemáticamente ya sea para entenderlo desde su definición o en su aplicabilidad (Callahan, Cox, Hoffman, O'Shea, Pollatsek & Senechal, 2008). Con esto, se resalta la relación entre los dos descriptores para esta categoría (RG y AM) puesto que, para describir la derivada desde el análisis matemático de manera correcta es necesario una representación geométrica de los elementos que la conforman.

Desde la categoría **Analítico Operacional**, es importante definir de manera formal la posición límite de las familias de las rectas secante a una recta que es tangente a la función, es decir la derivada de la función en un punto. Con ello, para Smith la definición fundamental del Cálculo Diferencial parte de tener la razón entre el incremento en la función de la variable dependiente y con la variable independiente x, al hacer que el incremento en la variable x tienda a un valor límite igual a cero y si dicho límite existe esto se define como la derivada de una función como se representa en la ilustración 31.

Ilustración 31. Definición de derivada

*La derivada * de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.*

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es *derivable* o que *tiene derivada*.

Fuente: Smith, F (2009)

El otro aspecto que determina esta categoría son las expresiones necesarias para la construcción del concepto formal de la derivada en simbolización, donde se utiliza generalmente las notaciones hechas por Leibniz y la epistemología de Cauchy. Dentro de este marco, para Smith se representa la derivada desde el cociente de diferenciales $\frac{dy}{dx}$ y se relaciona el cociente de diferencias entre un punto y su incremento como se presenta en la ilustración 32, utilizando el operador límite como la representación cuando el incremento tiende a cero para la variable independiente, formando la siguiente representación algebraica (IDE), usando símbolos y terminologías propias del lenguaje matemático (Sastre & Scempio, 2013).

Ilustración 32. Razón de cambio

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Fuente: Smith, F (2009)

En la categoría **Analítico Estructural**, se tiene el concepto de una constante l como el límite de una variable v, cuando el valor numérico de la diferencia entre la constante y la variable puede ser menores a cualquier número positivo tan pequeño como se quiera. En relación con esto, se da un indicio a la idea de las variaciones infinitésimas cuando un punto se acerca hacia otro. Con los límites Smith determina la definición de la continuidad y discontinuidad de funciones, basado en la siguiente ilustración 33.

Ilustración 33. Continuidad de una función

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

entonces $f(x)$ es continua para $x = a$.

Se dice que la función es *discontinua* para $x = a$ si no se satisface esta condición.

Fuente: Smith, F (2009)

Estas propiedades apuntan hacia la caracterización del conjunto teoremas referentes a objetos matemáticos (TA), que al relacionarlo entre si ayudan en la construcción y la aplicabilidad del objeto derivada (De Guzmán, 1993). Ahora, considerando la derivada como una transformación lineal, Smith desde la derivada del producto de una constante por una función demuestra usando la operabilidad entre variaciones una de las propiedades que hacen considerar a la derivada como dicha transformación mostrada en la figura 34.

Ilustración 34. Derivada del producto de una constante por una función

33. Derivada del producto de una constante por una función.

Sea $$y = cv.$$

Según la regla general:

PRIMER PASO $$y + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c\Delta v.$$

SEGUNDO PASO $$\Delta y = c\Delta v$$

TERCER PASO $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

De donde, según (4) del Artículo 16,

CUARTO PASO $$\frac{dy}{dx} = c\frac{dv}{dx}.$$

IV $$\therefore \frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

Fuente: Smith, F (2009)

Dentro de los infinitésimos enunciados por Smith hay ciertas operaciones que para el autor hace necesario tener en cuenta en la construcción del concepto de derivada, operaciones como: Suma algebraica, el producto de una constante por un infinitésimo, el producto de infinitésimos y la división de infinitésimos. Ahora teniendo en cuenta aspectos enunciados en el cálculo de Smith que aluden a la aplicabilidad de la derivada se relacionan las reglas generales para la derivación. En este caso es interesante observar estas reglas (ya descritas en autores anteriores) utilizando el cálculo de infinitésimos donde establece cuatro pasos como regla general para la derivación mostradas en la ilustración 35.

Ilustración 35. Regla general de derivación

REGLA GENERAL PARA LA DERIVACIÓN

PRIMER PASO. *Se sustituye en la función* x *por* $x + \Delta x$, *y se calcula el nuevo valor de la función* $y + \Delta y$.

SEGUNDO PASO. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy *(incremento de la función).*

TERCER PASO. *Se divide* Δy *(incremento de la función) por* Δx *(incremento de la variable independiente).*

CUARTO PASO. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *(incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.*

Fuente: Smith, F (2009)

Con estos pasos el autor por trivialidad enuncia las derivadas de las distintas clases de funciones, la derivada para funciones inversas y la regla de la cadena enunciando como fórmulas de derivación y usando la notación de Leibniz para el operador derivada. Con esto, las relaciones establecidas que surgen de las variaciones siempre tienden a formar la ecuación de la pendiente de una recta.

Inferencias generales de la categoría epistemológica

El desarrollo del análisis geométrico y matemático es un objetivo clave dentro de la construcción de la derivada en la categoría **Geométrico Gráfico Convergente**. Para su comprensión se trata de formar varias representaciones, notaciones, símbolos que lo identifiquen. Estas gráficas geométricas permiten situar de manera dinámica el comportamiento de función y también hacen un rol primordial dentro de la capacidad de articular la construcción matemática del concepto de derivada desde diferentes símbolos matemáticos. Las esquematizaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento y son primordiales para el desarrollo de las representaciones mentales ya que éste depende de una interiorización de las representaciones semióticas, del mismo modo que las imágenes mentales son una interiorización de las percepciones (Duval, 1993). Estas visualizaciones consisten en entender a la derivada desde aspectos físicos como el cálculo de la velocidad media, utilizando elementos básicos de la geometría para su construcción como lo es el gráfico de una recta secante a una función continua. Desde las descripciones hechas, la derivada desde lo geométrico considera una función continua en un intervalo determinado, donde se encuentra una recta secante que pasa por los puntos que determinan al intervalo. Ahora, se analiza el caso en donde uno de estos puntos se acerca al otro formando a su paso un grupo de familias de rectas secantes, hasta llegar a una posición límite formando así la recta tangente a el punto determinado.

El análisis de estas representaciones aporta las bases fundamentales para la construcción del concepto de derivada, usando la visualización y los símbolos que soportan una importante manera de darle sentido y significado al aprendizaje del cálculo diferencial, puesto que la particularidad de los objetos matemáticos exige para su estudio que las actividades cognitivas sustanciales como la esquematización, la conceptualización, el razonamiento, la visualización, la comprensión de textos, la resolución de problemas, requieran simultánea y articuladamente de variados sistemas de representación semiótica (Duval, 1993).

En relación con la simbología utilizada en la construcción formal del concepto de derivada y en base al análisis hecho, se concreta que las diferentes representaciones simbólicas utilizadas por cada autor conllevan a la representación de la razón de cambio, en donde lo que se pretende mostrar de manera algebraica es la vinculación de los elementos esenciales en el concepto de la derivada. Un acercamiento a la derivada es partir de la definición de límite incremental y la explicación de la secante que deviene tangente (Espinosa, 2005).

También con el uso de símbolos para la representación de algunos elementos geométricos en la construcción de la derivada, se hace necesario utilizar el operador límite para relacionar y conseguir una interpretación algebraica para la derivada. Ahora teniendo en cuenta las representaciones geométricas del desarrollo de la derivada y también los objetos matemáticos que interactúan en la formación del concepto, es importante aludir al hecho de que poder formalizar el objeto matemático a través de propiedades de dichos elementos, se tiene que considerar su representación geométrica puesto que es necesaria una dimensión cognitiva que suministre la solidez que tiene el marco teórico elegido y la dimensión didáctica del concepto de derivada (Pinto & Parraguez, 2015), es de considerar que el concepto de derivada es vista desde varias perspectivas, como cociente de la variación media, cociente de incrementos, cociente entre la diferencia de las coordenadas de dos puntos (ecuación de la pendiente de una recta), la relación entre el cociente de variaciones, asociado a la noción de límite como fue descrito en las rejillas.

Estos objetos matemáticos utilizados exponen la relación que puede establecerse entre la construcción del concepto de derivada y otros elementos de las matemáticas, que pueden considerarse como conceptos básicos para el entendimiento de la derivada. También hay que considerar los aspectos propios en la aplicabilidad de la derivada (como lo son las reglas de derivación para tipos de funciones, derivada de las operaciones entre funciones, derivación implícita y derivadas superiores) para la representación de la categoría epistemológica.

Tabla 7. Elementos fundamentales de la categoría epistemológica

Modos	Elementos fundamentales
Geométrico Gráfico Convergente	➢ Representación geométrica ➢ Comprensión matemática de la visualización geométrica
Analítico Operacional	➢ Notaciones de los elementos geométricos ➢ Desarrollo algebraico del concepto formal de derivada
Analítico Estructural	➢ Propiedades de objetos matemáticos que interactúan en la formación del concepto de derivada

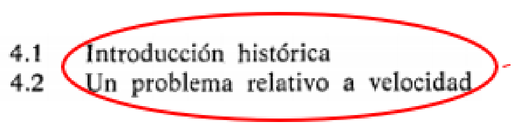
Fuente: Elaboración propia

4.1.1 La derivada desde lo didáctico

En esta investigación, la derivada desde lo didáctico se asume en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje evidencia en la planeación y contenido. Con esto, se describen en el documento de caracterización (las rejillas), aspectos desde la estructura planteada en cada autor en los temas relacionados con el concepto de derivada y el fin último por el cual optan por la secuencia didáctica planteada. Cabe resaltar que dentro de este análisis se tuvieron en cuenta los descriptores expuestos puesto que son necesarios en el proceso de caracterización de la derivada, con estas descripciones se diseña la configuración de las actividades que permitan el tránsito para la compresión profunda de la derivada, y con ello rediseñar la guía para evidenciar estos elementos articuladores.

En la categoría de la **planeación**, en el libro de cálculo del autor Apóstol, se describe inicialmente el objeto de estudio de donde subyace la aplicabilidad de la derivada, para luego dar un indicio de la transversalidad de la derivada con el análisis del comportamiento de las funciones. Con relación a esto, se resalta la intención del autor en exponer la importancia y utilidad que ha venido tomando este campo de las matemáticas en considerando la relación de elementos matemáticos que la conforman como se evidencia en la ilustración 48. Apóstol parte de considerar un problema particular de la aplicabilidad del concepto para resaltar las características a las cuales se va a enfocar, y dentro de esta categoría se puedan conformar aspectos en cuanto a la organización de estas particularidades (León, Bara & Azocar, 2013) en el concepto de derivada (PL).Para el método en cómo se va a desarrollar el tema (IN), Apóstol considera la epistemología e historia de la fundamentación del cálculo diferencial y más en específico en el nacimiento del objeto matemático derivada.

Ilustración 36. Historia de la derivada


4.1 Introducción histórica
4.2 Un problema relativo a velocidad

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Dentro de esta organización temática, el autor plantea la importancia de la representación gráfica del concepto de derivada, para así poder desarrollar de manera clara y precisa propiedades relacionadas con la derivada de la composición de funciones y aplicaciones de la derivada en el análisis de funciones y en la necesidad de postular aspectos específicos que sigan una secuencia, con el propósito de encontrar la manera adecuada de como instruir en relación con la profundización de los temas (Jaramillo & Esteban, 2006). A partir de esto, una profundización al concepto son los criterios en relación con las derivadas superiores, derivadas parciales y el análisis de funciones para valores extremos como también la relación entre el teorema del valor medio a propiedades geométricas de las funciones mostrada en la ilustración 37.

Ilustración 37. Estructura temática de la profundización de la derivada

Índice analítico

Fuente: Apóstol, T. (1998)

Al desarrollarse el contenido según el orden expuesto en las ilustraciones 35 y 36, Apóstol brinda al estudiante las herramientas para derivar operaciones básicas del algebra de funciones usando el concepto formal de derivada. De esto se considera que la solución de las actividades de aprendizaje de los contenidos serían el resultado del aprendizaje (Ros, 2016). Luego Apóstol postula temas que tienen que ver con la profundización de la derivada, como lo es el estudio de la regla de la cadena con el fin de que el estudiante pueda solucionar la derivada en la composición de funciones (ED). Una parte esencial dentro de la categoría de planeación es la capacidad que tiene el libro en específico que le permita identificar, elegir y dar prioridad a los conceptos (Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez, 2008) por ende, el autor Spivak en el proceso de enseñanza inicialmente nombra a la derivada y la integral como los dos temas fundamentales en el cálculo y la importancia de los elementos matemáticos necesarios para la construcción de la derivada como se expone, puesto que el autor lo considera una preparación adecuada que favorece la facilidad de entender las ideas luminosas y conceptos penetrantes que caracterizan al cálculo una rama importante en el campo de las matemáticas (PL).

Ilustración 38. Historia del concepto de derivada según Spivak

Quizá (algunos dirían «ciertamente») el interés de las ideas a introducir en esta sección procede de la conexión íntima entre los conceptos matemáticos y ciertas ideas físicas. Muchas definiciones, e incluso algunos teoremas, pueden describirse en términos de problemas físicos a menudo de manera reveladora. De hecho, las necesidades de los físicos constituyeron la inspiración original para estas ideas fundamentales del cálculo, y frecuentemente mencionaremos las interpretaciones físicas. Pero siempre definiremos primero las ideas en forma matemática precisa y discutiremos su significado en términos de problemas matemáticos.

Fuente: Spivak, M. (1996)

En la ilustración 38, el autor reflexiona sobre la aplicabilidad de la física en la construcción de las ideas fundamentales del cálculo basadas en las necesidades de solucionar problemas en el campo de la física, pero dichas ideas Spivak las interpreta de manera netamente matemáticos socializándola desde su uso en la cotidianidad. En la categoría de contenido el orden temático por el cual opta Spivak para el aprendizaje de la derivada, expone de manera general los elementos temáticos que considera necesarios para que el estudiante comprenda correctamente la derivada y su aplicabilidad, como se muestra en la figura 39.

Ilustración 39. Estructura general de planeación

Derivadas e integrales

Estructura general dentro del proceso de enseñanza de la derivada

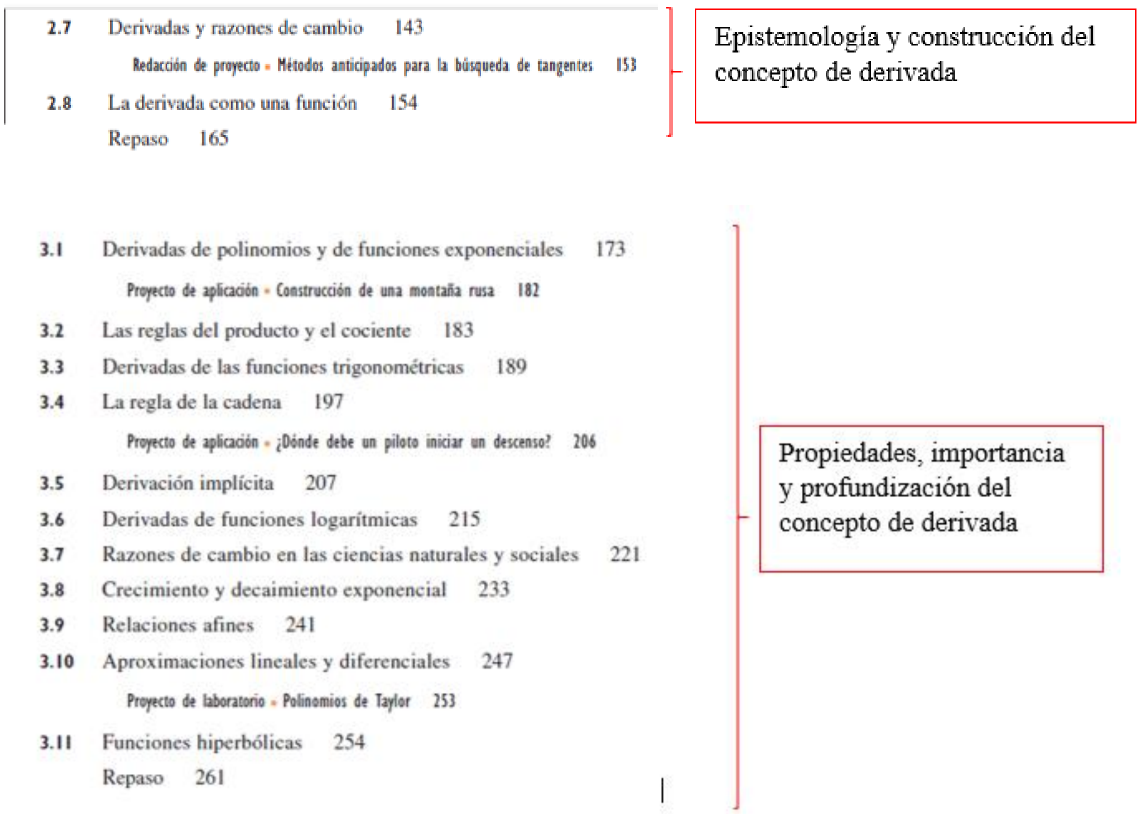
Fuente: Spivak, M. (1996)

En relación con este orden temático, el autor considera que al aplicarse de esta manera el estudiante identifica la importancia en el manejo del conepto de la derivada y el cálculo de límites para adquirir un buen manejo del tema. Para el desarrollo de la derivada de cada tipo de función, Spivak opta por enseñarla de manera mecánica (no usando el concepto de derivada) utilizando postulados que facilitan la derivada de múltiples funciones y también considerando la derivada de operaciones entre funciones simples. En relación con esto, se puede notar que el autor dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje siempre parte de la construcción de temas complejos a través de elementos matemáticos que los constituyen y que los considera temas básicos requeridos (ED).

Para la categoría de planeación es indispensable reconocer las ideas principales que el autor expone en la construcción del concepto de derivada (PL), con ello en Stewart parte del problema de las tangentes tal como se había visto en Apostol como la idea fundmaental de la cual surgió el cálculo diferencial. Ahora Stewart hace necesario el cálculo de límites para poder resolver problemas de velocidades y tangentes puesto que lo considera como aspectos básicos en la enseñanza de la derivada y la interpretación de esta como la razón de cambio.

De lo anterior, el orden temático en Stewart sigue una correspondencia en como denota la epistemología puesto que incialmente parte de estudiar la derivada desde métodos anticipados en el estudio de las tangentes, luego el concepto de derivada como una función y las propiedades que surgen según el tipo de función y las operaciones algebraicas entre ellas, a partir de la estructura temática expuesta pueden surgir otras estrucutras que potencian la comprensión del concepto matemático (Van Hiele, 1986). Ahora el autor conceptualiza la importancia dentro de algunos campos de las ciencias, para finaliza profundizando la definición para tipos de funciones hiperbólicas (IN) como se muestra en la ilustración 40.

Ilustración 40. Importancia del concepto de la derivada



2.7 Derivadas y razones de cambio 143
Redacción de proyecto ▪ Métodos anticipados para la búsqueda de tangentes 153
2.8 La derivada como una función 154
Repaso 165

Epistemología y construcción del concepto de derivada

3.1 Derivadas de polinomios y de funciones exponenciales 173
Proyecto de aplicación ▪ Construcción de una montaña rusa 182
3.2 Las reglas del producto y el cociente 183
3.3 Derivadas de las funciones trigonométricas 189
3.4 La regla de la cadena 197
Proyecto de aplicación ▪ ¿Dónde debe un piloto iniciar un descenso? 206
3.5 Derivación implícita 207
3.6 Derivadas de funciones logarítmicas 215
3.7 Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales 221
3.8 Crecimiento y decaimiento exponencial 233
3.9 Relaciones afines 241
3.10 Aproximaciones lineales y diferenciales 247
Proyecto de laboratorio ▪ Polinomios de Taylor 253
3.11 Funciones hiperbólicas 254
Repaso 261

Propiedades, importancia y profundización del concepto de derivada

Fuente: Spivak, M. (1996)

En relación con la finalidad del autor basándose en la estructura temática que opta no determina una en particular, sino que, postula ejercicios de aplicación de los conceptos vistos (ED), puesto que considera que al enseñar estos ejes temáticos el estudiante obtiene las capacidades para resolverlos (Jaramillo & Esteban, 2006). Desde algunos aspectos que construyen el concepto de derivada para la categoría de planeación, en el cálculo propuesto por Smith detalla el proceso de enseñanza como una investigación de la variación de una función al variar la variable x. Con relación a esto, el autor lo considera el problema fundamental del cálculo diferencial, y la solución a problemas relacionados con variaciones y magnitudes ya que fue la clave para que Newton descubriera el cálculo infinitesimal y en la modernidad convertirse en el instrumento científico más significativo de las matemáticas modernas (PL). Todos estos planteamientos los reúne mediante la organización de acuerdo con aspectos de los contenidos, método de enseñanza y evaluación de temas (Gómez, 2007).

Dada la importancia de este objeto matemático, el autor categoriza el aprendizaje de la derivada iniciando con la idea de variación e incrementos puesto que en la descripción del proceso de enseñanza el autor lo considera el aspecto fundamental en la epistemología del Cálculo Diferencial. Dada la construcción del objeto matemático, se define la derivada y se explica la simbolización usada para representar la derivada como un operador. Ahora, Smith desarrolla propiedades en relación con las operaciones entre funciones bajo el operador derivada como se muestra en la ilustración 41, evidenciando a la derivada como una transformación lineal y mostrando su interpretación geométrica.

Ilustración 41. La derivación

Derivación

Introducción, 25. Incrementos, 25. Comparación de incrementos 26. Derivada de una función de una variable, 27. Símbolos para representar las derivadas, 28. Funciones derivables, 30. Regla general para la derivación, 30. Interpretación geométrica de la derivada, 32.

Fuente: Smith, F (2009)

Para la profundización se tiene en cuenta lo planteado en la categoría de planeación, dando así problemas de aplicación donde se expone la importancia, y la aplicabilidad de la derivada en el análisis de los tipos de funciones como se muestra en la ilustración 42. Cabe resaltar que en este proceso de aprendizaje el autor opta por considerar la derivada de cada tipo y operación de funciones como reglas para derivar funciones algebraicas.

Ilustración 42. Reglas para derivar funciones algebraicas

Reglas para derivar funciones algebraicas

Importancia de la regla general, 36. Derivada de una constante, 37. Derivada de una variable con respecto a sí misma, 38. Derivada de una suma, 38. Derivada del producto de una constante por una función, 39. Derivada del

Fuente: Smith, F (2009)

Desde la denotación de algunos aspectos para tener en cuenta al iniciar el proceso de enseñanza, en el cálculo de Smith como objetivo principal de su libro es implementarlo como una herramienta donde la instrucción de la derivada parte de la resolución de problemas de una manera muy detallada. Por la manera en cómo se describe el interés de estudiar este concepto matemático, el escrito es un apoyo fundamental en la consulta o repaso de conceptos fundamentales, en la profundización del tema en la solución de algunos problemas y la demostración de teoremas emergentes. Con lo descrito, Ayres postula su cálculo como un texto guía para el desarrollo de un curso de cálculo (PL), enfocados en la implementación de la posibilidad del aprendizaje, enfocado en el dominio, dificultad y grado de complejidad de los conceptos (Llinares, 2008).

Una estructura acorde a la enseñanza del cálculo en la solución de problemas de aplicación como lo expone Smith, se considera tener en cuenta en tres partes el concepto de derivada para así caracterizar los preconceptos en la construcción de su definición, analizar la derivada desde el estudio de funciones algebraicas vista como un operador y profundizar en teoremas que van resultando en la necesidad de resolver problemas (IN), basado en una distribución y una jerarquía de los conocimientos (Chopin, 1993). En relación con las descripciones de la importancia, profundización y estructura temática, aunque no lo enuncia, desarrolla estos aspectos con la finalidad de que el estudiante tenga todas las herramientas en la necesidad de comprender el concepto de derivación, no solo en ejercicios, sino en el aprendizaje basado en problema que describe en el desarrollo de la temática (ED), y los que postula al final de esta para observar como el estudiante utiliza los recursos aprendidos (Gómez & Romero, 2008).

Inferencias generales de la categoría didáctica

En la construcción de la categoría didáctica es necesario indicar, que proporciona la estructura en como se va a desarrollar el concepto de derivada desde su epistemología e importancia, el orden de los temas que establecen su estructuración, aplicación y profundización, por último, se expone el objetivo de aprendizaje alcanzado al aplicar esta estructura didáctica.

Es indispensable dentro de la estructura de la enseñanza en la construcción del concepto de la derivada desde los modos de pensamiento, entender los planteamientos de problemas matemáticos que fueron ejes fundamentales en la epistemología del objeto matemático y a lo largo de la historia como ha venido contribuyendo en el desarrollo del campo de las matemáticas. Estos aspectos brindan al proceso de enseñanza incentivar el interés del estudiante por aprender el tema al igual que ofrece los elementos básicos para la construcción de la derivada desde los tres ámbitos (GGC, AO, AE). Este incio estructural facilita el proceso de estudio enmarcado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, puesto que expone concepciones epistemológicas del objeto matemático, sobre su enseñanza y aprendizaje, los cuales forman un eje decisivo con la capacidad de promover el interés del estudiante sobre el tema y sus métodos de análisis, y determina fortalezas u obstáculos para el desarrollo de la práctica educativa y profesional del profesor en formación (Carrillo, 2000).

En relación con los temas que se van desarrollando en las concepciones epistemológicas, es necesario dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje tener en cuenta la organización de temas que generen una enseñanza adecuada que ofrezca una comprensión en la construcción del objeto matemático, de esto se afirma que la acción educaiva requiere un planteamiento en la necesidad de formar un conjunto de prescripciones que oriente el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que, el aprendizaje y la instrucción se complementan de tal manera que la primera sirve como fundamento de la segunda, (Bruner, 2015).

Por último, en la descripción bibliográfica hecha se caracteriza el objetivo de aprendizaje en algunos libros al final del tema y en otros se detalla en la capacidad del estudiante en resolver problemas planteados. Con ello se establece su importancia desde la planificación planteada y el propósito que se quiere alcanzar, detallando claramente la metodología escogida en la parte instruccional (Friz, Panes, Salcedo & Sanhueza, 2011). Como también se nombró las capacidades que adquieren los estudiantes a la hora de resolver problemas de aplicación como un objetivo de aprendizaje, por consiguiente, el objetivo de aprendizaje también adquiere valor relacionado con las técnicas de evaluación apropiadas para determinar hasta donde se ha cumplido el objetivo de aprendizaje propuesto (Friz, Panes, Salcedo & Sanhueza, 2011).

4.2 Construcción de las actividades según los modos de pensamiento

Hay que señalar que se optó por usar el término guía puesto que este concepto es idóneo para el trabajo que se quiere diseñar. En esta propuesta se encuentran ejercicios resueltos y para resolver desde los tres modos de pensamiento GGC, AO y AE, cada ejercicio se ha ubicado dentro de cada modo de pensamiento haciendo énfasis en establecer las articulaciones entre los tres modos.

4.2.1 Modo Geométrico Gráfico Convergente

Para la elaboración de las actividades se tuvo en cuenta su procedencia epistemológica asumidas en el documento de caracterización, para este modo se asume aspectos necesarios en la estructuración de la derivada, usando gráficas para la representación de los elementos matemáticos involucrados en dicha construcción, como lo es la pendiente de la recta tangente a una curva y el cálculo de velocidad media. El fin de esta descripción es facilitar la comprensión desde un punto de vista algebraico los procesos geométricos que interactúan entre sí para formar el concepto de derivada.

Actividad 1

- ✓ Teniendo la gráfica de $f(x) = x^2 + 5$, ahora dado dos puntos $A = (1,6)$ y $b = (3,14)$, grafiquemos la recta secante a estos dos puntos

Esta actividad introductoria al pensamiento geométrico considera aspectos importantes que parten en la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$, al considerar la idea de la recta secante que pasa por los puntos $(1,6)$ y $(3,14)$ (OM), lo que se pretende es dado los objetos geométricos de recta secante, analizar que ocurre cuando se considera la traslación de las rectas secante emergentes al ubicar cada vez un punto más cerca del otro (CT). Estas concepciones ayudan a dar una idea más clara del génesis de la construcción de recta tangente considerándola la recta formada del choque entre los puntos A y B esta interacción se denomina la recta tangente a una función en un punto (García, Blanco & Ciscar, 2006).

Actividad 2

- ✓ La velocidad de un auto está ligada por la función $y = x^2 - 1$, usando la tasa de variación media en el intervalo $[2,5]$ encontrar la pendiente de la recta tangente al punto $x = 4,5$

La construcción de esta actividad alude a la relación que se establece entre entender la variación media desde la función $y = x^2 - 1$ como el cociente de las diferencias entre las variables, es decir la pendiente y con esto se pretende aplicar las propiedades algebraicas y geométricas del objeto matemáticos como lo es el límite en la comprensión de la noción derivada entendidas como la relación entre conceptos básicos de la razón de cambio y el cociente de incrementos o como la recta tangente al punto $x = 4,5$ (PO) (Sánchez, García & Llinares, 2008).

Actividad 3

- ✓ Dibujar la gráfica de la función cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,0)$.

Considerando la idea de secante como el concepto fundamental en la construcción de la derivada como se postuló en la actividad introductoria, en este caso la actividad es considerada a partir de representar gráficamente la función en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$, Ahora al trazar la recta que pasa por $x = 2$ y $x = -2$ se construye la recta secante con la finalidad de mostrar que este elemento geométrico es fundamental en la construcción del concepto de derivada (OM) (García, Blanco & Ciscar, 2006). Esta actividad concuerda con este modo puesto que se relaciona el comportamiento en la inclinación de las rectas secantes cada vez que se aproximan a la recta tangente, como el cociente entre las variaciones de los valores de los puntos (x, y) llamado pendiente, esto desde lo algebraico expresa la importancia de la recta tangente al punto$(-1,0)$ en el manejo de la noción del concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente (CT).

En conclusión, las actividades subyacen al considerar la noción geométrica de los conceptos de secante, pendiente, variación media y tangente como los pilares básicos en la comprensión del concepto de derivada. Esto visto geométricamente como la inclinación de la recta tangente en un punto y desde lo algebraico como el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto.

4.2.2 Modo Analítico Operacional

En la construcción de las actividades se tuvieron en cuenta las diferentes notaciones en la simbología de elementos matemáticos involucrados en la construcción del concepto de derivada, como los son: La variación Δ, el límite Lim, representación de funciones $f(x)$ o y, pendiente m, ecuación de la recta $y = mx + b$. Estos elementos matemáticos contribuyen a la construcción del concepto formal de derivada definido desde la bibliografía elegida como

$$\lim_{h \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{h}$$

Actividad Evaluativa 4

- ✓ Si se tiene un globo en forma de esfera y se sabe que el volumen de este cuerpo es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, tenemos que su volumen cambia en relación con el radio. Responder
  a. ¿Cuál es la variación del volumen cuando el radio pasa de 3cm a 3,5cm?
  b. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio es 3 cm?

En la construcción de esta actividad, se tuvo en cuenta la idea de variación media relacionada desde la pendiente de la recta secante. Con esto, lo que se pretende es analizar que ocurre cuando dichas pendientes se acercan a un cierto valor cada vez que los puntos que determinaron la primera recta secante se van acercando a un punto dado. Para ellos se utilizan simbologías como m, Δ, lim (SR) que ayudan a dar un significado variacional a la derivada al darle un significado a cada elemento que varía (CF) (Vrancken & Engler, 2014).

Actividad Evaluativa 5

- ✓ Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ en el punto (1,2)

En esta actividad se pretende ya utilizar el cociente de variaciones construido en las actividades anteriores, con la finalidad de utilizar la simbología de elementos que interactúan entre si m, Δ, lim (SR) para representar la variación media en el punto dado como la pendiente de la recta tangente en dicho punto y así poder identificar los elementos que constituyen a la recta (CF). Esta actividad se ubica en este modo puesto que la considerar esta idea de valor límite contribuye a identificar como y cuanto la varia la función entorno al punto dado (Testa, 2013).

Actividad 6

- ✓ Utilizando el cociente de incrementos encontrar la derivada de la función $y = x^3$ y el valor de la recta tangente en el punto $x = 2$

Esta actividad se soporta como la aplicación de este cociente de incrementos en donde a través de los elementos vistos en las actividades del modo Geométrico Gráfico Convergente se construye el límite $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ahora se evalúa para la función $y = x^3$, donde se tiene en cuenta que $f(x) = x^3$ puesto que $y = f(x)$, además teniendo en cuenta que $f(x + h) = (x + h)^3$. Solucionando este límite a través de propiedades algebraica y concluyendo con la representación del valor del límite como $f'(x)$ (SR), a través del límite (CF), utilizando aspectos descritos en la anterior actividad. En conclusión, este método alude a la idea de variación en la construcción formal del concepto de derivada, esto con el fin de seguir llevando una secuencia que ayude a la comprensión del concepto de derivada desde elementos matemáticos y geométricos que la construyen.

4.2.3 Modo Analítico Estructural

Para la construcción de las actividades se tuvieron en cuentas dentro del documento de caracterización, aspectos sobre la relación de la derivada como transformación lineal, propiedades del objeto al aplicarse como un operador y características propias de otros elementos matemáticos que interactúan para la formación del concepto de derivada. Esto con el fin de comprender la aplicabilidad del concepto de derivada desde un punto de vista formal.

Actividad 7

- ✓ Dada la función $y = x^2$ en los intervalos $x \in [1,3]$ graficar la familia de rectas secantes que se aproximen al punto $x = 2.5$ y determinar la recta tangente en ese punto

Esta actividad subyace, puesto que como se había mencionado, siempre se considera la gráfica de la función $y = x^2$, teniendo en cuenta los puntos de esta función que pertenecen al intervalo cerrado [1,3]. Desde el elemento matemático secante como principal fundamento en la construcción gráfica de la derivada, se forman las familias de rectas secantes que se aproximan al punto $x = 2.5$ determinando la recta que pasa por este punto y considerándolo como la recta tangente, además teniendo en cuenta que lo que se logra es a través de elementos estructurales asimilar la expresión matemática de la tangente como la gráfica de la derivada de una función (PD). Se evidencia la variedad de perspectivas que se puede generar al construir la noción de tangente (Pinto & Parraguez, 2015).

Actividad 8

- ✓ Aproxime el cociente de incrementos $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores de h próximos a 0 y después encuentre el valor exacto de $f'(1)$:

  a). $f(x) = x^3 - 3x + 1$

  b). $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Esta actividad se construye teniendo en cuenta la construcción de la noción de derivada desde el cociente de incrementos donde se analiza el operador límite para las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 1$ y $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en el análisis en la relación con argumentos de tipo variacional (Cantoral, Molina & Sánchez, 2005)., utilizando los símbolos de los elementos matemáticos Δ, lim (SR), para la construcción de la recta tangente en el concepto de límite simbolizándola como $f'(x)$ (CF).

Actividad 9

- ✓ Dada la función $y = \frac{1}{x}$ utilizar el cociente de incrementos para demostrar que $f'(2) = -\frac{1}{4}$

En la construcción de esta actividad se tuvieron en cuenta las construcciones hechas en la anterior actividad y usar estos elementos en la aplicabilidad de límite de cocientes incrementales para la función $y = \frac{1}{x}$ y demostrar que el punto de este incremento $f'(2) = -\frac{1}{4}$ pertenece a la recta tangente (PO) para la comprensión de la derivada desde lo estructural, entendiendo a los objetos matemáticos como objetos abstractos (Sfard, 1992).

En conclusión, este modo de pensamiento contribuye en entender la aplicabilidad de los objetos matemáticos, acudiendo a la relación entre sus propiedades, para así lograr una comprensión de la noción del concepto de derivada y poder aplicarla en el análisis matemático y geométrico de las funciones.

4.3 Validación a juicio de expertos

En esta sección se procede a analizar los argumentos expuestos por la experta en relación a la guía, y constituyen el sentido del objetivo especifico 3 planteado en esta investigación. Dentro del proceso de conformación del contenido de la guía, donde se plantea la elaboración de las actividades y la estrucutura temática que relaciona los temas necesarios en la comprensión del concepto de derivada, es necesario tener plena confiabilidad en que todo lo que se construyó sea acorde a los fundamentos del marco teórico elegido. Es por ello, que se opta por realizar un proceso de validación donde se tienen en cuenta el uso, objetivos, el contenido, el proceso de construcción y su valor de predicción (Messick, 1989). De esta manera, lo que se pretende es otorgar un respaldo por juicio de experto que ratifique la congruencia y la relevancia del trabajo de investigación.

Para el proceso de validación y concorde a la teoría didáctica que se basa esta investigación se eligieron los modos de pensamiento enmarcados dentro de las categorías de planeación y contenido. De la planeación como categoría se planteó desde la manera en la cual se modifica la guía, en el aspecto de como se fundamento para su estructura y la finalidad a la cual se quiere llegar. En la ilustración 43 se especifican los aspecto a los cuales se les modifico a esta categoría según el juicio del experto.

Ilustración 43. Observación de la validación

recuerda que este marco en primer lugar nos pide hacer una análisis histórico epistemológico del objeto matemático con el fin de identificar los diferentes modos de pensar, luego nos pide hacer un análisis a las producciones de los estudiantes, los libros de texto y las producciones curriculares, luego nos pide levantar los modos de pensar el objeto matemático y nominarlos y finalmente nos pide diseñar un cuestionario y aplicárselo a los participantes para evidenciar lo que nos hemos propuesto. Tanto la secuencia didáctica como la guía son interesantes pero ubican al lector en un solo modo de pensar, podrían pensar en menos problemas pero tratando de buscar por ejemplo que el estudiante represente de dos o tres maneras, y que el estudiante obtenga información de una gráfica por ejemplo Revísa lo que te escribí y si hay algo que deba ampliar... lo hago con gusto.

Fuente: Docente evaluador

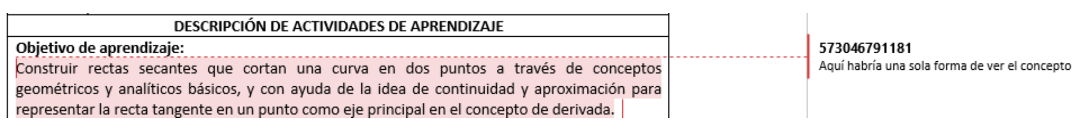
De la modelación en la cual se basa la guía se tiene en cuenta la postulación de dos ideas claras y son la de relacionar lo geométrico con lo algebraico y desarrollar la intuición geométrica (Maturana & Parraguez, 2012). Estas dos posturas se analizaron de manera más profunda en los análisis realizados en la revisión bibliográfica donde se identificaron aspectos que aluden a la relación entre lo gráfico y lo numérico, y a la capacidad de entendimiento de lo que ocurre en dicha interacción para la comprensión de cómo se construye un objeto matemático. Al igual, en la sección del análisis en la construcción de actividades pertenecientes al modo de pensamiento Geométrico Gráfico Convergente dichas posturas fueron fundamentos esenciales para la construcción de la derivada desde este modo.

En el marco de los modos de pensamiento es necesario identificar características de estos desde la epistemología del propio objeto matemático a comprender (Sierpinska, 2000). Es por ello, que la observación que se recalca en la validación sobre la identificación de los modos desde las producciones de libros de texto es sustentada en este trabajo de investigación desde el planteamiento del objetivo 1, donde una de las acciones fue identificar desde la bibliografía que compone la malla curricular del curso de cálculo diferencial de la licenciatura en matemáticas, elementos que desde sus características se identifican dentro la definición de cada modo de pensamiento. Ahora, desde el aspecto curricular y las producciones que este ha mostrado en los cursos anteriores se elaboraron cifras estadísticas que mostraban en algunos casos que el índice de reprobación es alto, siendo esta una de las razones por las cuales se optó por desarrollar este trabajo de investigación, con la idea de implementar opciones de aprendizaje basados en elementos teóricos de la didáctica de la matemática, para un mejoramiento en las tasas de índice de reprobación.

Por tal motivo, en la construcción de la guía se modificó su secuencia temática en el sentido (RT) de establecer una serie de actividades que tengan una relación entre sí, con la finalidad de que el contenido al cual va a acceder el estudiante tenga sentido e influya en un proceso de aprendizaje (Diaz, 2013). Esta descripción se planteó de esta manera puesto que en las observaciones de validación (Ilustración 43), se argumenta que el marco contempla el análisis de las producciones de los estudiantes, y este trabajo enfoca dicha observación en las acciones postuladas en el objetivo general, en donde el análisis se aplica a las diferentes soluciones que los estudiantes construyen a partir de los temas estudiados en la guía con la finalidad de caracterizar elementos matemáticos que facilitan una articulación entre las maneras de ver y entender el concepto de derivada.

Un carácter fundamental que se nombra dentro de la validación (Ilustración 43) es el surgimiento de los modos de pensamiento desde los análisis ya antes mencionados. Por ello, este emerger se sustenta desde la creación de las actividades que componen a la guía y su importancia en el aprendizaje en la manera de proporcionar herramientas al estudiante para que el mismo construya su conocimiento (Garrido, Castro & Pessoa de Carvalho, 1995). La construcción de estas actividades nace de la extracción de aspectos propios de los modos de pensamiento, identificados en la revisión bibliográfica. Es por estas características propias de las actividades que es posible la nominación de estas, dentro de los modos de pensamiento. Además, en concordancia con la metodología propuesta en el trabajo de investigación, para la solución de estas actividades, se planteó que en el momento de su desarrollo el estudiante pueda interpretarla a partir de cualquiera de los tres modos de pensamiento, con la finalidad de facilitar la transición desde un modo de pensar a otro. Por este motivo, desde las descripciones que pertenecen a la categoría de contenido, en la reestructuración de las actividades se consideró la manera en cómo estas direccionaban al estudiante y lo ubicaban en alguno de los modos de pensamiento. Dentro de las modificaciones dadas en la ilustración 44.

Ilustración 44. Configuración de la forma de ver el concepto de derivada



DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
Objetivo de aprendizaje: Construir rectas secantes que cortan una curva en dos puntos a través de conceptos geométricos y analíticos básicos, y con ayuda de la idea de continuidad y aproximación para representar la recta tangente en un punto como eje principal en el concepto de derivada.

573046791181
Aquí habría una sola forma de ver el concepto

Fuente: Docente evaluador

Se evidencia que desde un análisis crítico se configuran las actividades, desde las acciones hechas en la unidad de análisis del objetivo específico 2, donde se evidencia que las categorizaciones de las actividades van de acuerdo con las características de sus enunciados y no a los distintos métodos de solución que puede tener. Por tal razón, esta comprobación de que las actividades sitúan al estudiante en cualquiera de los tres modos de pensamiento contribuye a las articulaciones entre estos (CC), al igual hace que el estudiante a través de conceptos previos, interacciones con nueva información para darle un sentido profundo al concepto estudiado (Diaz, 2013).

Ilustración 45. Definición de cada modo según la validación

Modo AO	sesión	profesor en la sesión	estudiantes en la sesión
✓ Aproxime el cociente de incrementos $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores de h próximos a 0 y después encuentre el valor exacto de $f'(1)$: a). $f(x) = x^3 - 3x + 1$ b). $f(x) = \frac{1}{x^2}$	La sesión consiste en comprender el concepto de límite como una aproximación y relacionarlo con el cociente de incrementos con el fin de construir el concepto de la pendiente de una recta tangente. **Descripción de la actividad**	El docente debe explicar la temática según la guía y proponer a los estudiantes el desarrollo de los ejercicios propuestos y la actividad evaluativa que hay al final de la sesión y socializar dichas soluciones en clases.	Resolver de manera individual y en el tiempo determinado por el profesor cada uno de los ejercicios propuestos y la actividad evaluativa y mostrar en clases como los soluciono.

573046791181
Me parece que en la secuencia si debe quedar clara la definición de cada modo

Fuente: Docente evaluador

Finalmente, en la ilustración 45, se demuestra que las modificaciones con respecto al enfoque temático que se plantea en la validación y se sustentan a partir de las acciones ya establecidas y desarrolladas en esta investigación. Esto indica que el estudio se fundamenta en evidenciar la existencia de elementos matemáticos que permiten la transición de las maneras en cómo se puede construir, comprender y aplicar el concepto formal de derivada.

4.4 Articuladores

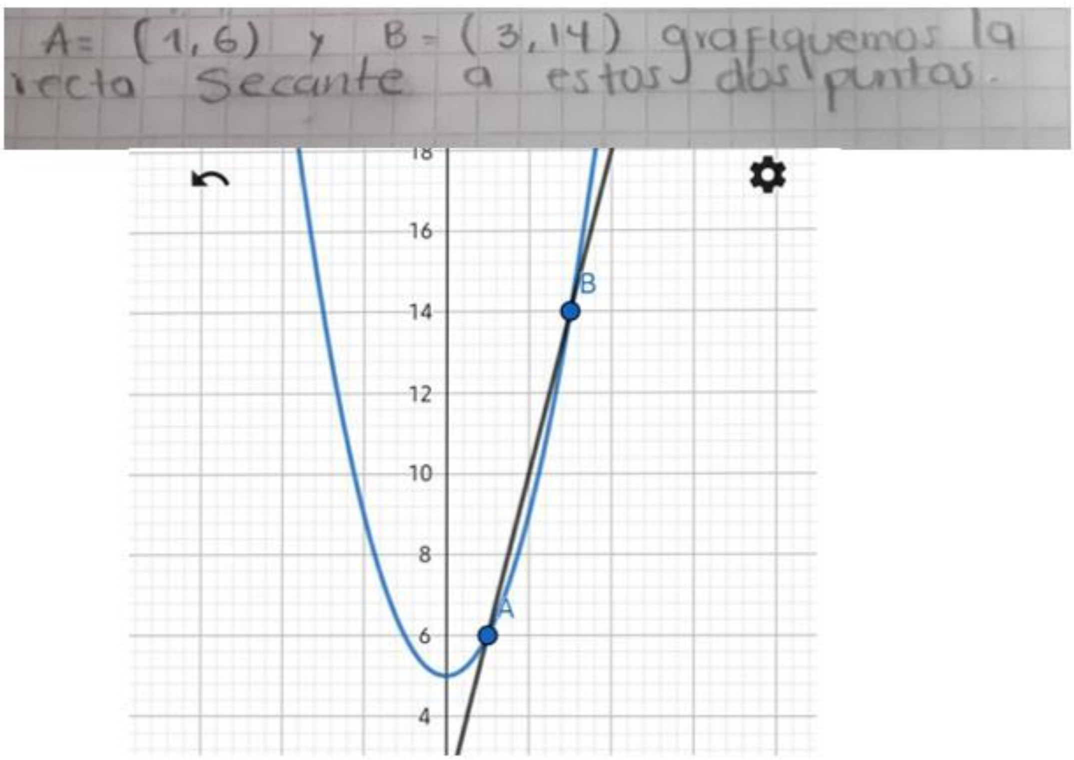
Desde la metodología planteada lo que se pretende es determinar objetos matemáticos que contribuyen a establecer relaciones entre las formas de comprender la derivada, todo esto basado en una mirada epistemológica y didáctica de la temática, unido con la aplicación de la guía validada, para finalizar con el desarrollo de una secuencia de enseñanza y aprendizaje acompañada de actividades que son importantes en la comprensión del concepto.

En este sentido, la fase de implementación consta de dos etapas, donde se hace un reconocimiento de los estudiantes que hacen parte del curso de Calculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas. Para la aplicabilidad de la guía la cual está contenida por 9 actividades, junto con otros argumentos para la construcción del concepto de derivada y desarrolladas en 6 sesiones. Con el interés de identificar y caracterizar los articuladores emergentes en la comprensión de la derivada, se muestran el análisis de algunas de las producciones de estudiantes a los que se les aplicó la guía.

- ✓ **Actividad 1:** Teniendo la gráfica de $f(x) = x^2 + 5$, ahora dado dos puntos $A = (1{,}6)$ y $b = (3{,}14)$, grafiquemos la recta secante a estos dos puntos.

Esta pregunta situada en el modo GGC, pretende que el estudiante construya rectas secantes, así como se muestra en la ilustración 46.

Ilustración 46. Articulador 1: Recta secante



Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

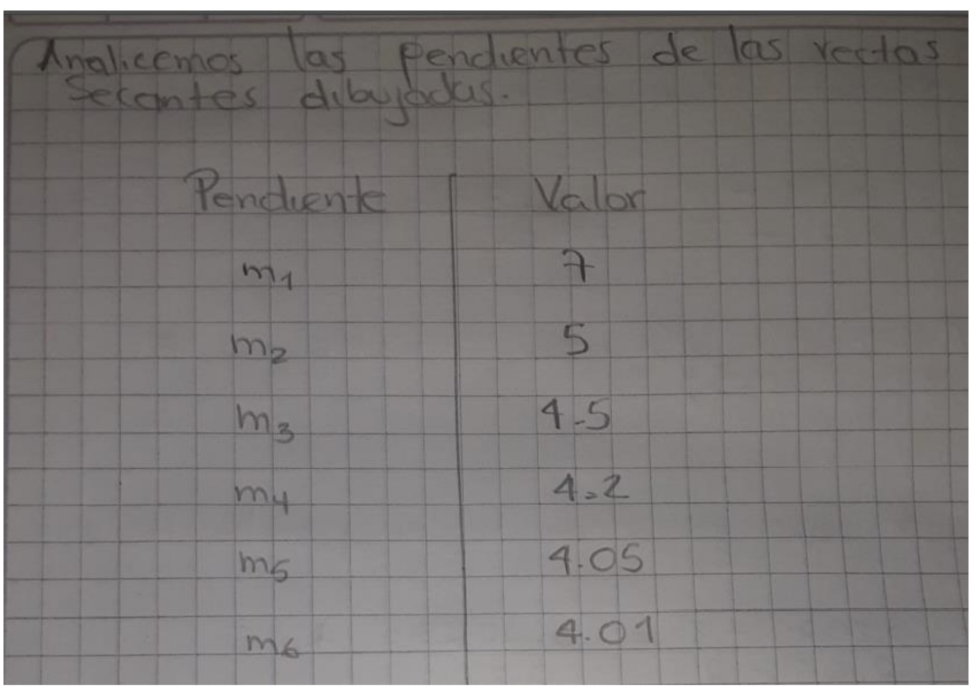
Recta secante: Este elemento matemático usado como articulador facilita la interpretación geométrica del concepto de tangencia y desarrolla habilidades imaginativas para la elaboración gráfica del concepto de secante (Vielma, 2020), puesto que en el desarrollo expuesto en la ilustración 46 de la actividad 1, el estudiante visualiza una gráfica geométrica dada como es el punto en una curva y para caracterizar la recta secante (DC) hace necesario utilizar un punto auxiliar cualquiera que esté dentro de la curva para que contribuya a su construcción. Al observar la ilustración 46, se observa que el estudiante construye la idea de secante a través de la interpretación geométrica de las coordenadas de los puntos y concluye que el concepto de secante entendido como la recta que corta a una curva en dos puntos. Así, expone la relación entre la formulación de puntos en el plano a través de números y conlleva a la necesidad de utilizar el elemento matemático pendiente.

Con el propósito de desarrollar la visualización matemática de la gráfica de elementos matemáticos se postula la situación:

Actividad 2: La velocidad de un auto está ligada por la función $y = x^2 - 1$, usando la tasa de variación media en el intervalo [2,5] encontrar la pendiente de la recta tangente al punto $x = 4{,}5$

Esta pregunta igualmente situada en el modo GGC, postula el estudio de las pendientes desde un enfoque geométrico y algebraico, con la finalidad de observar un tránsito al modo AO.

Ilustración 47. Articulador 2: Pendiente

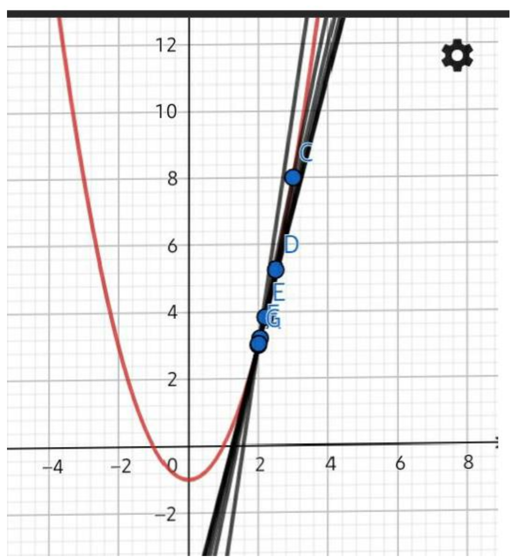


Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

De lo anterior se encontró el siguiente articulador:

Pendiente: Este concepto permite al estudiante contemplar la relación entre la gráfica de la recta y su traslación en el momento que alguno de los dos puntos planteados se acerque al otro. Dentro de las soluciones los estudiantes, en la ilustración 47, entienden la relación entre el valor de la pendiente (DC) y lo que ocurre cuando los puntos se van haciendo cada vez más cercanos, además predicen si la pendiente disminuye o aumenta en la medida que evalúan las rectas secantes que se forman con dos puntos. Dentro de este análisis el estudiante grafica este acercamiento y con ello construye familia de rectas secantes aproximándose a una recta tangente (ilustración 48).

Ilustración 48. Familia de rectas secantes aproximándose a una tangente



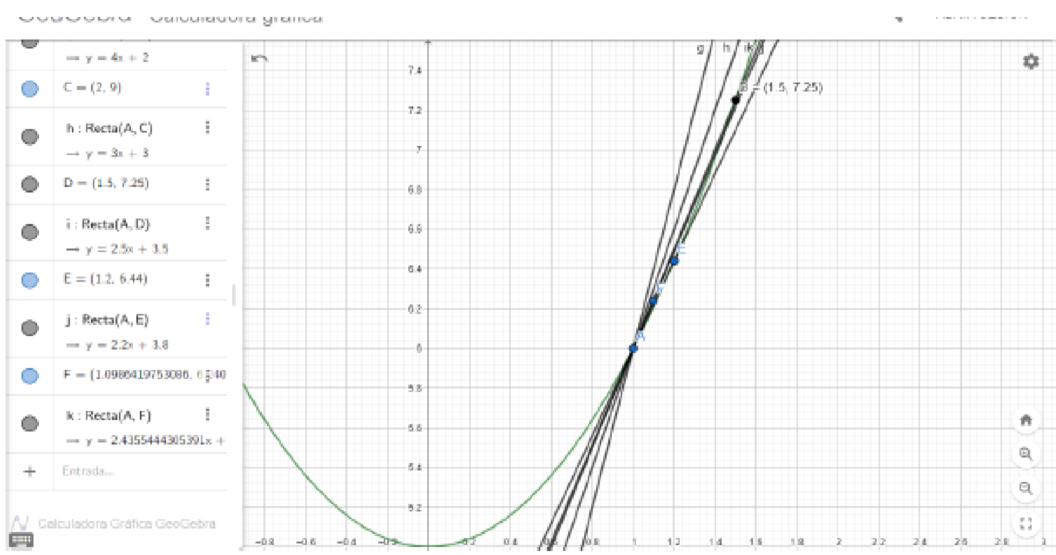
Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

Es por esto, que se considera que este articulador permite al estudiante desarrollar la visualización del movimiento de los puntos, interpretar procesos de acercamiento de secantes, de recta tangente y el concepto de pendiente (Vielma, 2020) al momento de presentar de manera dinámica una interpretación geométrica y algebraica de la derivada. De lo anterior, dentro de las soluciones se identifica cierta necesidad de entender la noción de aproximación, por tanto, se postuló la siguiente situación:

Actividad 3: Dibujar la gráfica de la función cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1{,}0)$.

Esta actividad situada en el modo GGC, pretende construir la idea de aproximación a través del estudio de rectas secantes y rectas tangentes. De esto, se obtuvo la siguiente información como se muestra en la ilustración 49.

Ilustración 49. Articulador 3: Límite



$$m_5 = \frac{6.21 - 6}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

PENDIENTE	VALOR
m_1	4
m_2	3
m_3	2.5
m_4	2.2
m_5	2.1

Miremos que cada vez que la recta secante que parte desde el punto B se acerca al punto A las pendientes convergen al valor 2, con esto quiere decir que el valor límite cuando las pendientes de las rectas secantes se aproximan a la pendiente de la recta tangente su valor es de 2. Esto indica que lo elementos que componen a la recta tangente sería:

$$m = 2$$

Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

Límite: Este objeto matemático propuesto como un articulador relaciona la interpretación geométrica de la traslación que forma familia de rectas secantes que surge del movimiento de los puntos establecidos en el sentido en que los valores numéricos de las pendientes de dichas rectas van acercándose a un determinado valor. Esto indica que el estudiante desde la ilustración 49, construye el concepto de recta tangente a un punto en el momento en que enlaza la visualización geométrica y analítica del concepto de tangencia a través del análisis de rectas secantes (DC). Esta visión desde el enfoque geométrico al analítico es fundamental, puesto que aplican la comprensión desde la epistemología que les permite descubrir estos conceptos (Vielman, 2020). Como se puede observar en la ilustración 49, los estudiantes dentro de la construcción del concepto de derivada a través de la comprensión y estudio de rectas secantes aproximándose a una tangente, interactúan desde una visión grafica de los elementos matemáticos a través de articuladores como la recta secante y la pendiente de una recta, lograron identificar la relación entre a la recta tangente y la construcción del concepto de derivada, y el límite como herramienta fundamental entre la transición desde una visualización geométrica hacia un análisis algebraico del objeto derivada.

Teniendo en cuenta lo comprendido en los estudiantes, se prosigue a emplear la idea que se fundamentó de límite para plantear lo siguiente:

Actividad evaluativa 6: Utilizando el cociente de incrementos encontrar la derivada de la función $y = x^3$ y el valor de la recta tangente en el punto $x = 2$

Esta actividad situada en el modo AO, procura que el estudiante desde un enfoque analítico utilice propiedades de los elementos matemáticos que interactúan en el límite de incrementos, con el objetivo de identificar el tránsito hacia el modo AE. Desde este punto de vista, se obtuvo el siguiente análisis que se observa en la ilustración 50.

Ilustración 50. Articulador 4: Infinitesimales

1.

$$f(x) = x^3$$

$$f(x + \triangle x) \; = (x + \triangle x)^3$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

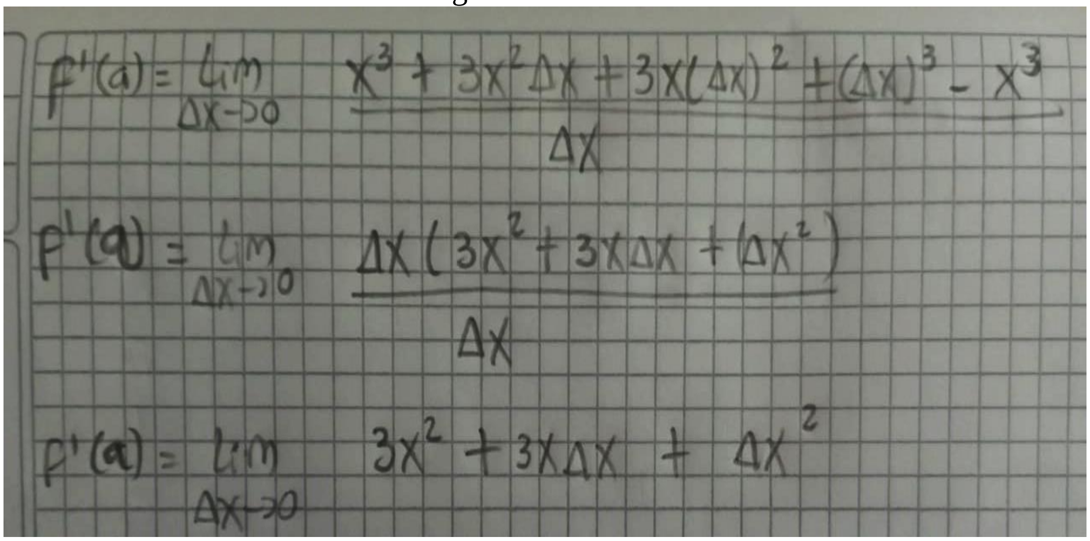
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \triangle x)^3 \; - \; x^3}{\Delta x}$$

Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

En la necesidad de poder aplicar propiedades algebraicas dentro de los procedimientos se observó el siguiente articulador:

Infinitesimales: Desde la ilustración 50, se identifica que el estudiante utiliza la noción de incremento desde la representación algebraica de la curva, para la construcción operacional del concepto de pendiente de una recta secante. Ahora, con el uso del concepto de límite como operador, el estudiante considera que el incremento que supuso se va haciendo cada vez más pequeño y establece la relación de este concepto con el análisis de los infinitesimales que son elementos esenciales en la comprensión de la derivada (Vielma, 2020). Al establecer la idea de los infinitesimales se observa que este elemento aporta a que el estudiante inicie la operabilidad en el uso del cálculo de incrementos como se muestra en la ilustración 51.

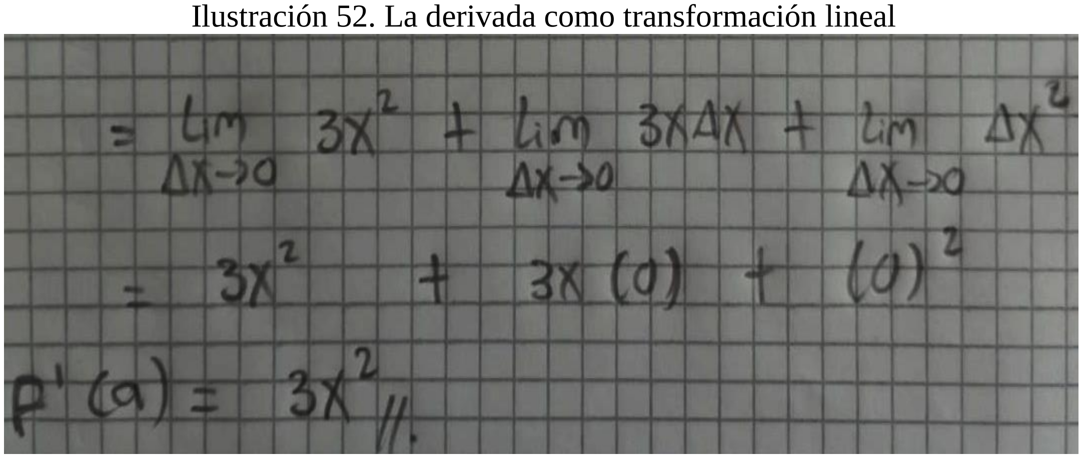
Ilustración 51. Uso algebraico del cálculo de incrementos



Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

Al utilizar la idea de lo infinitamente pequeño, el estudiante desarrolla la construcción de la derivada de una función a través de propiedades relacionadas a elementos matemáticos que la conforman (DL). Como se puede observar en la ilustración 52.

Ilustración 52. La derivada como transformación lineal



Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

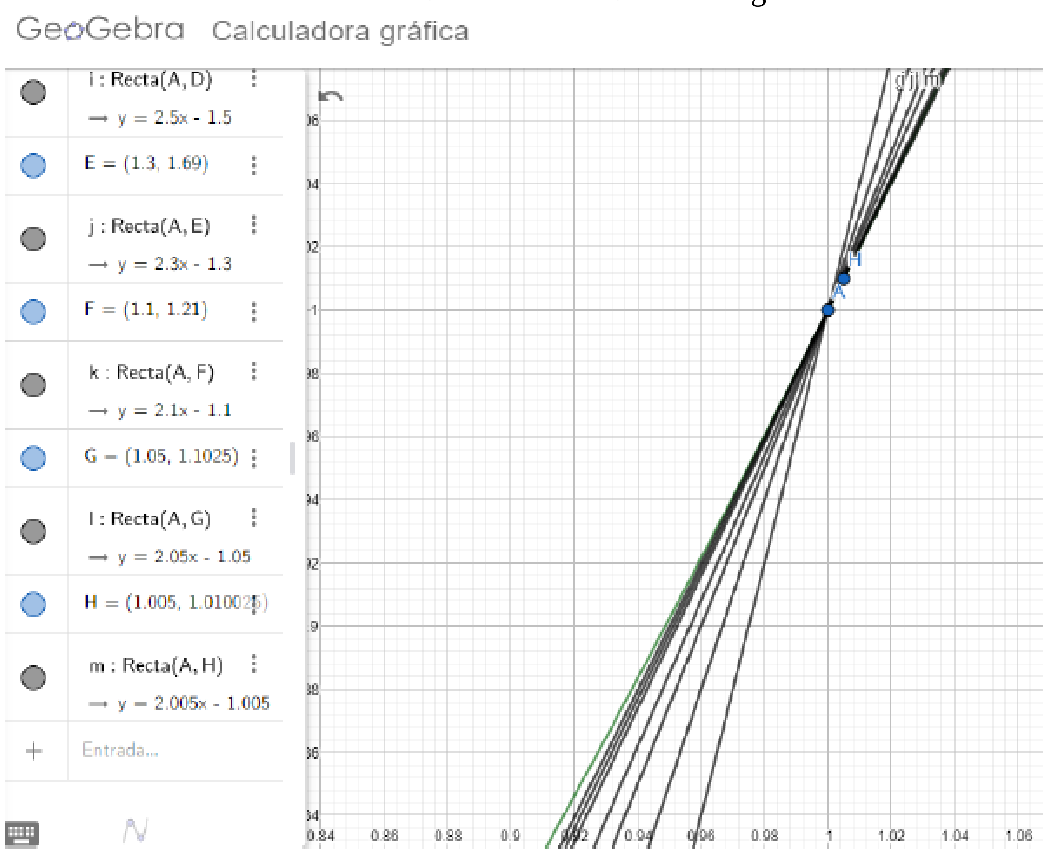
Donde el estudiante forma la derivada de una función a través de propiedades como la transformación lineal. En la descripción hecha se muestra como los estudiantes transiten desde el modo AO al modo AE, con la idea de infinitesimal como articulador. Al identificar esta propiedad desde el análisis de las soluciones en la siguiente actividad:

Actividad Evaluativa 7: Dada la función $y = x^2$ en los intervalos $x \in [1,3]$ graficar la familia de rectas secantes que se aproximen al punto $x = 1$ y encontrar la pendiente de dicha recta tangente en este punto.

Donde se sitúa en el modo AE, puesto que su planteamiento se basa en el estudio de la recta tangente para que el estudiante transite al modo GGC. El siguiente elemento se identificó como articulador.

Recta tangente: En las observaciones los estudiantes analizaron la familia de rectas secantes aproximándose a 1, como se muestra en la ilustración 53.

Ilustración 53. Articulador 5: Recta tangente



Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

Con ayuda de la graficadora GeoGebra lo que se pretende es encontrar la pendiente de la recta tangente que corta a la función en el punto $x = 1$, y desde la interpretación geométrica de la idea de tangencia evaluando el movimiento de la recta secante (Vielma, 2020) para transformarse en una recta que corta a la curva en un punto. Con esta visualización el estudiante construye la derivada de una función.

Ilustración 54. Ecuación de la recta tangente

$$\begin{gathered}\boldsymbol{y = 2x + b}\\ \boldsymbol{A = (1, 1)}\\ \boldsymbol{1 = 2(1) + b}\\ \boldsymbol{1 = 2 + b}\\ \boldsymbol{b = 2 - 1}\\ \boldsymbol{b = 1}\\ \boldsymbol{y = 2x + 1}\end{gathered}$$

Fuente: Estudiante del curso de Cálculo Diferencial

Desde la ilustración 54, el estudiante construye elementos algebraicos que pertenecen a la ecuación de la recta tangente, y al lograr esta construcción el estudiante a través de elementos estructurales formaliza de manera gráfica la derivada de una función (PD).

Con la implementación de la guía se logró identificar cinco elementos matemáticos que los estudiantes utilizaron como herramientas fundamentales para entender el concepto de derivada a través del tránsito que estos elementos articuladores permitían. En este análisis es interesante como las actividades construidas desde un punto de vista epistemológico de la derivada brindan maneras en cómo se puede construir y comprender un objeto matemático sustentando desde la teoría de la didáctica de las matemáticas.

CAPÍTULO 5

5 CONCLUSIONES

En este capítulo está comprendido la síntesis de los resultados significativos que se obtuvieron al poner en práctica las acciones postuladas en cada uno de los objetivos planteados en el trabajo de investigación. De igual forma, se enuncian algunos conocimientos encontrados al haber aplicado esta propuesta pedagógica y en como atribuye esto en la comprensión profunda del objeto derivada a través de los articuladores emergentes.

5.1 Con relación al objetivo específico 1

En el proceso de estructuración del concepto de derivada, es de valiosa importancia el análisis en los libros de texto, puesto que no solo brindan la estructura temática de cómo se debe enseñar un elemento matemático, sino que desde un enfoque epistemológico brinda herramientas que utilizaron los matemáticos para su comprensión, utilizando diferentes nociones geométricas y algebraicas que pueden ser utilizadas en la actualidad para que el estudiante construya el concepto y comprenda por qué y para qué aprender la importancia de un concepto matemático. Además, desde el punto de vista didáctico, se concluye que al analizar el concepto de derivada desde su epistemología, se establece una estructura temática que favorece el reconocimiento de conceptos que utilizan los estudiantes en la manera en cómo pueden visualizar las interacciones entre elementos de la geometría y el álgebra, que atribuyen a la comprensión del concepto de derivada desde su construcción y al catalogarse dentro de la teoría de los modos de pensamiento, se plantea el tema de la derivada desde una noción práctica hacia una noción teórica de como pensar este objeto matemático.

5.2 Con relación al objetivo específico 2

En el modelamiento de las actividades fue de gran valor a la investigación optar por construirlas a partir de elementos encontrados dentro de los análisis bibliográficos, clasificándolos dentro de la teoría de los modos de pensamiento y que estos mismos contribuyeron a que los estudiantes puedan comprender su solución desde cualquier modo de pensamiento y a la vez poder transitar entre ellos. Además, se comprobó que las actividades garantizan que los estudiantes lograran identificar elementos algebraicos en las representaciones gráficas en la construcción del concepto de derivada y a su vez utilizar propiedades de otros elementos matemáticos para establecer la estructura del concepto de derivada y comprender que esta propiedad se aplica a este objeto como por ejemplo lo es considerar a la derivada como una transformación lineal. En este sentido, el diseño de la guía se enfoca en emerger conceptos algebraicos y geométricos que articulan el modo de ver y entender objetos matemáticos, brindando herramientas didácticas que pueden ser consideradas dentro del currículo para la enseñanza del cálculo diferencial.

5.3 Con relación al objetivo específico 3

Dentro de las acciones hechas en la validación, en la configuración de la guía en su estructura temática, cambió en el sentido en que las actividades al catalogarse dentro de un modo de pensamiento, no necesariamente su solución se enfoca en ese modo, sino que, se plantea para que el estudiante la visualice desde varias formas de entender el concepto. De tal modo, todos los aspectos que se tuvieron en cuenta en la creación de la guía se basaron en argumento sustentados desde algunos autores, donde se inició en un análisis epistemológico del objeto derivada categorizando cada elemento encontrado en este análisis dentro de la teoría de los modos de pensamiento. Además, se evidenció que desde una mirada didáctica su estructura se fundamenta en el estudio del diseño curricular y de libros de textos en los que se utilizan como referentes bibliográficos para el curso de Cálculo Diferencial de la Licenciatura en Matemáticas. De lo mencionado, fueron los elementos que se usaron en la creación de la guía y al tener ya una validación por juicios de expertos, se obtiene una congruencia acerca de lo que se propuso en el trabajo, y es hacer que los estudiantes emerjan objetos matemáticos para relacionar los distintos modos de pensar un elemento matemático al aplicarles la guía ya ratificada.

5.4 Con relación al objetivo general

En esta investigación lo que se logró a través de los análisis epistemológicos y didácticos fue clasificar elementos matemáticos que surgieron a través de la aplicación de una guía didáctica validada a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del curso de Cálculo Diferencial. En el análisis de las soluciones propuestas por los estudiantes se evidenciaron las características de cinco de estos elementos matemáticos llamados articuladores. Por tanto, se concluye que en el ámbito de la didáctica de las matemáticas es de valiosa importancia conocer las distintas formas de entender un objeto matemático y más aún identificar estos articuladores, que como se evidencia en la investigación, permiten relacionar estos modos de pensar ya que son los responsables de que generar en el estudiante una comprensión profunda de la derivada, es decir desde los modos de pensamiento, mostrar el objeto derivada desde su practicidad y a partir de esto construir su definición teórica.

Para concluir, dentro de la caracterización de los articuladores emergentes de las soluciones hechas por los estudiantes, se logró que los alumnos transitaran entre los tres modos de pensamiento, es decir, alcanzaron un nivel superior de abstracción del concepto de derivada. Otros estudiantes, aunque no lograron dicha comprensión consiguieron entender la derivada mediante la relación entre dos modos AO y GGC, AO y AE.

A partir de esto, un impacto de la investigación es proponer una reformulación metodológica en la forma de presentar los conocimientos y gestionarlos, para lograr niveles de abstracción altos en donde el concepto de derivada Pueda ser construido a partir de los distintos modos haciendo uso de conceptos previos logrados a través de la historia. Esta consideración dará herramientas didácticas y metodológicas a los profesores que orienten el curso de cálculo diferencial para para que lleven a cabo procesos de formación que permita en los profesores adquirir los conocimientos disciplinares propios de la enseñanza de las matemáticas.

CAPÍTULO 6

6 ANEXOS

<table>
<tr><td colspan="2">CATEGORIA EPISTEMOLÓGICA</td></tr>
<tr><td>Fuentes</td><td>Modo Geométrico Gráfico Convergente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Libro:
“Cálculo”
Vol. 1
Año: 1998

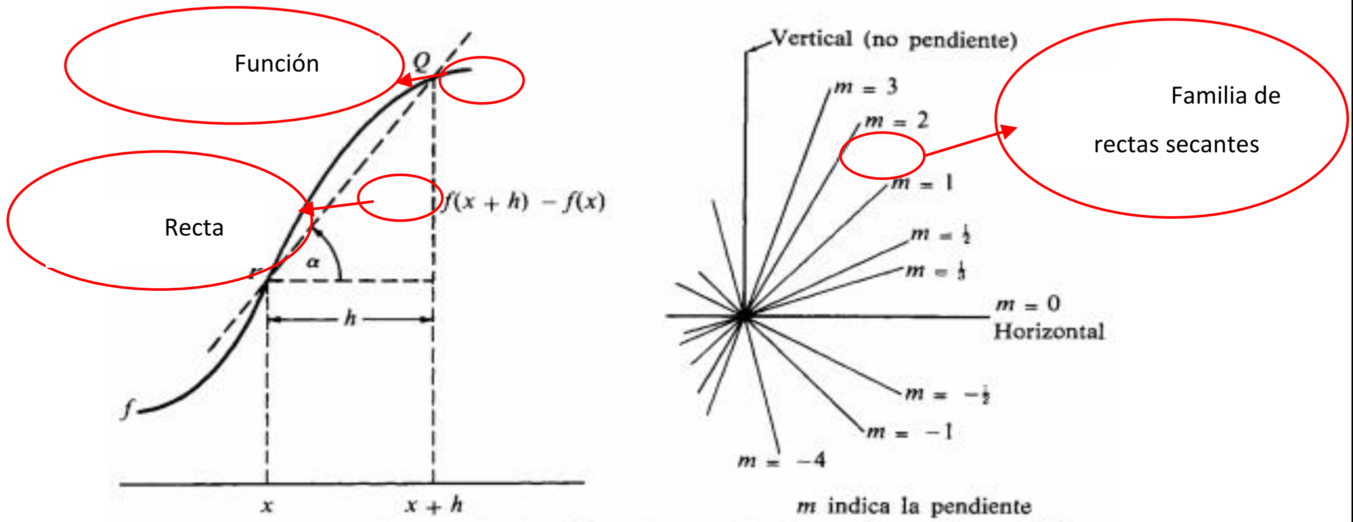
Autor:
Tom. M. Apóstol</td><td>Representación geométrica</td></tr>
<tr><td>

FIGURA 4.4 *Interpretación geométrica del cociente de diferencia como tangente de un ángulo.*
FIGURA 4.5 *Rectas de pendiente distinta.*</td></tr>
<tr><td>Visualización matemáticas</td></tr>
</table>

	Sea f una función que tiene derivada en x, por lo que el cociente de diferencias tiende a cierto límite $f'(x)$ cuando h tiende a 0. En la interpretación geométrica, al tender h a cero, el punto P permanece fijo pero Q se mueve hacia P a lo largo de la curva y la recta PQ se mueve cambiando su dirección de manera que la tangente del ángulo α tiende al límite $f'(x)$. Por esta razón parece natural tomar como *pendiente de una curva* en el punto P el número $f'(x)$. La recta por P que tiene esta pendiente se denomina la *tangente* a la curva en P.

	Modo Analítico Operacional
	Definición de manera teórica

4.3 Derivada de una función

El ejemplo expuesto en la Sección anterior señala el camino para introducir el concepto de derivada. Sea f una función definida por lo menos, en un intervalo abierto (a, b) del eje x. Se elige un punto x en este intervalo y se forma el cociente de diferencias

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

Variación media

donde el número h puede ser positivo o negativo (pero no cero), y tal que $x + h$ pertenezca también a (a, b). El numerador de este cociente mide la variación de la función cuando x varía de x a $x + h$. El cociente representa la *variación media* de f en el intervalo que une x a $x + h$.

Seguidamente se hace tender h a cero y se estudia lo que le ocurre a ese cociente. Si tiende hacia un cierto valor como límite (y será el mismo, tanto si h tiende a cero con valores positivos como negativos), entonces ese límite se denomina derivada de f en x y se indica por el símbolo $f'(x)$ (se lee «f prima de x»). Con lo que la definición formal de $f'(x)$ puede establecerse del siguiente modo:

Interpretación de la definición a traves de ecuaciones

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{4.4}$$

Operador

Variación

Modo Analítico Estructural

Teoremas a priori

3.4 Teoremas fundamentales sobre límites. Otros ejemplos de funciones continuas

El cálculo con límites puede simplificarse con frecuencia con el teorema siguiente que proporciona unas reglas básicas para operar con límites.

TEOREMA 3.1. *Sean f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = A , \qquad \lim_{x \to p} g(x) = B .$$

Se tiene entonces

(i) $\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = A + B ,$

(ii) $\lim_{x \to p} [f(x) - g(x)] = A - B ,$

(iii) $\lim_{x \to p} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B ,$

(iv) $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = A/B \quad$ si $\quad B \neq 0 .$

TEOREMA 3.2. *Sean f y g dos funciones continuas en un punto p. La suma $f + g$, la diferencia $f - g$, y el producto $f \cdot g$ son también continuas en p. Si $g(p) \neq 0$, también el cociente f/g es continua.*

3.19 Teoremas del valor medio para funciones continuas

En la Sección 2.16 se definió el valor promedio $A(f)$ de una función f so un intervalo $[a, b]$ como el cociente $\int_a^b f(x)\,dx/(b - a)$. Cuando f es contin podemos demostrar que este valor promedio es igual al valor de f en un cie punto de $[a, b]$.

TEOREMA 3.15. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES. *Si f continua en $[a, b]$, para un cierto c de $[a, b]$ tenemos*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)\,.$$

3.18 Teorema de integrabilidad para funciones continuas

El teorema de la continuidad uniforme puede utilizarse para demostrar q una función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

TEOREMA 3.14. INTEGRABILIDAD DE FUNCIONES CONTINUAS. *Si una funci f es continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$, es integrable $[a, b]$.*

3.17 Teorema de la continuidad uniforme

Sea f una función de valores reales y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sean $M(f)$ y $m(f)$ los valores máximo y mínimo respectivamente de f en $[a, b]$. A la diferencia

$$M(f) - m(f)$$

la llamaremos *oscilación* de f en el intervalo $[a, b]$. Se podría utilizar la palabra *extensión*, en lugar de *oscilación*, ya que esta palabra tiene el inconveniente de sugerir funciones ondulantes. En textos antiguos se emplea *saltus*, equivalente latino de brinco o salto; pero nosotros conservaremos el nombre de oscilación, por ser su uso muy generalizado. Observemos que la oscilación de f en cualquier subintervalo de $[a, b]$ no puede superar la de f en $[a, b]$.

Demostraremos seguidamente que el intervalo $[a, b]$ puede subdividirse de modo que la oscilación de f en cada subintervalo sea tan pequeña como se quiera. Esta propiedad, en forma precisa, es la que da el siguiente teorema, que equivale al que ordinariamente se denomina *teorema de la continuidad uniforme*.

TEOREMA 3.13. *Sea f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Para todo $\epsilon > 0$ existe una partición de $[a, b]$, en un número finito de subintervalos, tal que la oscilación de f en todo subintervalo es menor que ϵ.*

	TEOREMA 4.1. *Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo común. En cada punto en que f y g tienen derivadas, también las tienen la suma $f + g$, la diferencia $f - g$, el producto $f \cdot g$ y el cociente f/g. (Para f/g hay que añadir también que g ha de ser distinta de cero en el punto considerado). Las derivadas de estas funciones están dadas por las siguientes fórmulas:* (i) $(f+g)' = f' + g'$, (ii) $(f-g)' = f' - g'$, (iii) $(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$, (iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ *en puntos x donde* $g(x) \neq 0$. TEOREMA 4.2. REGLA DE LA CADENA. ***Sea f la función compuesta de dos funciones u y v, $f = u \circ v$. Si existen las derivadas $v'(x)$ y $u'(y)$ donde $y = v(x)$, la derivada $f'(x)$ también existe y está dada por la fórmula:*** (4.11) $$f'(x) = u'(y) \cdot v'(x).$$

TEOREMA 4.3. ANULACIÓN DE LA DERIVADA EN UN EXTREMO INTERIOR. *Sea f definida en un intervalo abierto I, y supongamos que f tiene un máximo relativo*

o un mínimo relativo en un punto c interior a I. Si la derivada $f'(c)$ existe, es $f'(c) = 0$.

Demostración. Definamos en I una función Q como sigue:

$$Q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si} \quad x \neq c, \qquad Q(c) = f'(c)\,.$$

TEOREMA 4.4. TEOREMA DE ROLLE. *Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en cada punto del intervalo abierto (a, b). Supongamos también que*

$$f(a) = f(b)$$

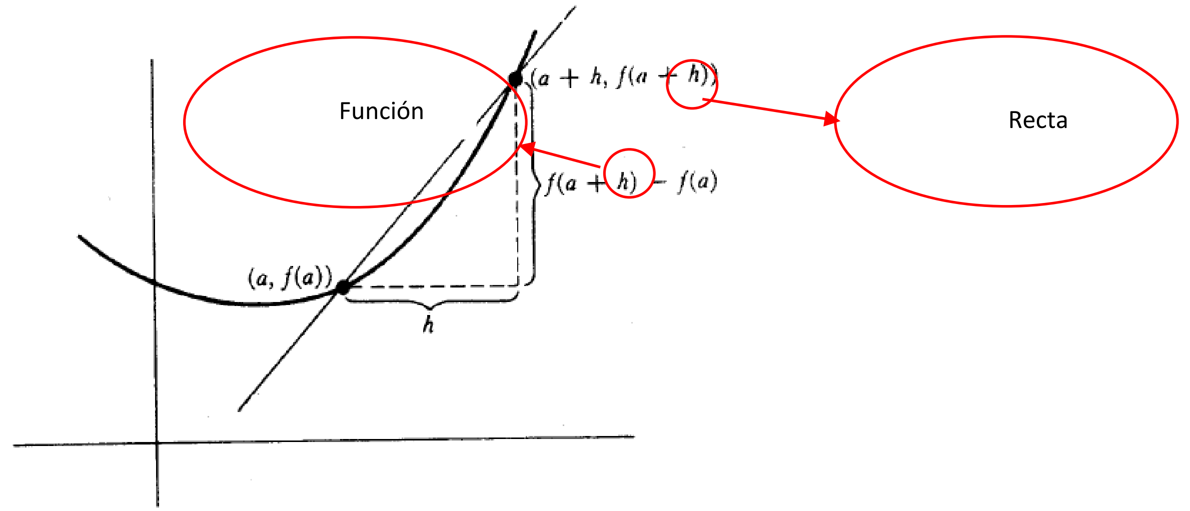
Existe entonces por lo menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

TEOREMA 4.5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS. *Si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a, b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b), existe por lo menos un punto c interior a (a, b) para el que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,. \tag{4.25}$$

	TEOREMA 4.6. FORMULA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY. *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que admitan derivadas en todo el intervalo abierto (a, b). Entonces, para un cierto c de (a, b), tenemos* $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$. TEOREMA 4.7. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces:* a) *Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente creciente en $[a, b]$.* b) *Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.* c) *Si $f'(x) = 0$ para todo x de (a, b), f es constante en $[a, b]$.* TEOREMA 4.9. CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS EN UN PUNTO CRÍTICO. *Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a, b); esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = 0$. Supongamos también que exista la derivada segunda f'' en (a, b). Tenemos entonces:* a) *Si f'' es negativa en (a, b), f tiene un máximo relativo en c.* b) *Si f'' es positiva en (a, b) f tiene un mínimo relativo en c.* TEOREMA 4.10. CRITERIO DE LA DERIVADA PARA LA CONVEXIDAD. *Supongamos f continua en $[a, b]$ y que tenga derivada en el intervalo abierto (a, b). Si f' es creciente en (a, b) entonces f es convexa en $[a, b]$. En particular, f es convexa si f'' existe y es no negativa en (a, b).*

<table>
<tr><td colspan="2">CATEGORIA EPISTEMOLÓGICA</td></tr>
<tr><td>Fuentes</td><td>Modo Geométrico Gráfico Convergente</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Libro:
“Cálculo infinitesimal”
Año: 1996

Autor:
Michael Spivak</td><td>Representación geométrica</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>Visualización matemáticas</td></tr>
<tr><td>Una manera más prometedora de abordar la definición de tangente podría ser empezando con «secantes» y utilizando la notación de límites. Si $h \neq 0$, entonces los dos puntos distintos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ determinan, como en la figura 6, una recta cuya pendiente es

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
Pendiente
de la recta tangente</td></tr>
</table>

	Modo Analítico Operacional
	Definición de manera teórica
	El primer comentario a nuestra definición es en realidad un añadido; definimos la **tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$ como la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene por pendiente $f'(a)$. Esto quiere decir que la tangente en $(a, f(a))$ sólo está definida si f es derivable en a. El segundo comentario se refiere a la notación. El símbolo $f'(a)$ recuerda ciertamente la notación funcional. En efecto, para cualquier función f designamos por f' a la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números a tales que f es derivable en a, y cuyo valor para tal número a es
	Interpretación de la definición a traves de ecuaciones
	$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
	Modo Analítico Estructural
	Teoremas a priori

	DEFINICIÓN La función f es uniformemente continua en un intervalo A si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para cualquier x e y de A se cumple si $\lvert x - y\rvert < \delta$, entonces $\lvert f(x) - f(y)\rvert < \varepsilon$. **TEOREMA 1** **Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.**
	Teorema a posteriori

	TEOREMA 1 Si f es derivable en a, entonces f es continua en a. **TEOREMA 1** Si f es una función constante, $f(x) = c$, entonces $f'(a) = 0$ para todos los números a. **TEOREMA 2** Si f es la función identidad, $f(x) = x$, entonces $f'(a) = 1$ para todos los números a. **TEOREMA 3** Si f y g son derivables en a, entonces $f + g$ es también derivable en a, y $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$ **TEOREMA 4** Si f y g son derivables en a, entonces $f \cdot g$ es también derivable en a, y $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$

TEOREMA 5

Si $g(x) = cf(x)$ y f es derivable en a, entonces g es derivable en a, y

$$g'(a) = c \cdot f'(a).$$

TEOREMA 6

Si $f(x) = x^n$ para algún número natural n, entonces

$$f'(a) = na^{n-1} \quad \text{para todo } a.$$

TEOREMA 7

Si g es derivable en a, y $g(a) \neq 0$, entonces $1/g$ es derivable en a, y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

TEOREMA 8

Si f y g son derivables en a y $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y

Derivación

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

TEOREMA 9
(REGLA DE LA CADENA)

Si g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a, y

242 *Derivadas e integrales*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

	TEOREMA 1 Sea f una función definida sobre (a, b). Si x es un máximo (o un mínimo) para f sobre (a, b), y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$. (Obsérvese que no suponemos la derivabilidad, ni siquiera la continuidad, de f en otros puntos.) **TEOREMA 2** Si f está definida sobre (a, b) y tiene un máximo (o mínimo) local en x, y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$.

<table>
<tr><td colspan="2">CATEGORIA EPISTEMOLÓGICA</td></tr>
<tr><td>Fuentes</td><td>Modo Geométrico Gráfico Convergente</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Libro:
“Cálculo de una variable.
Trascendentes tempranas”
Sexta edición
Año: 2008

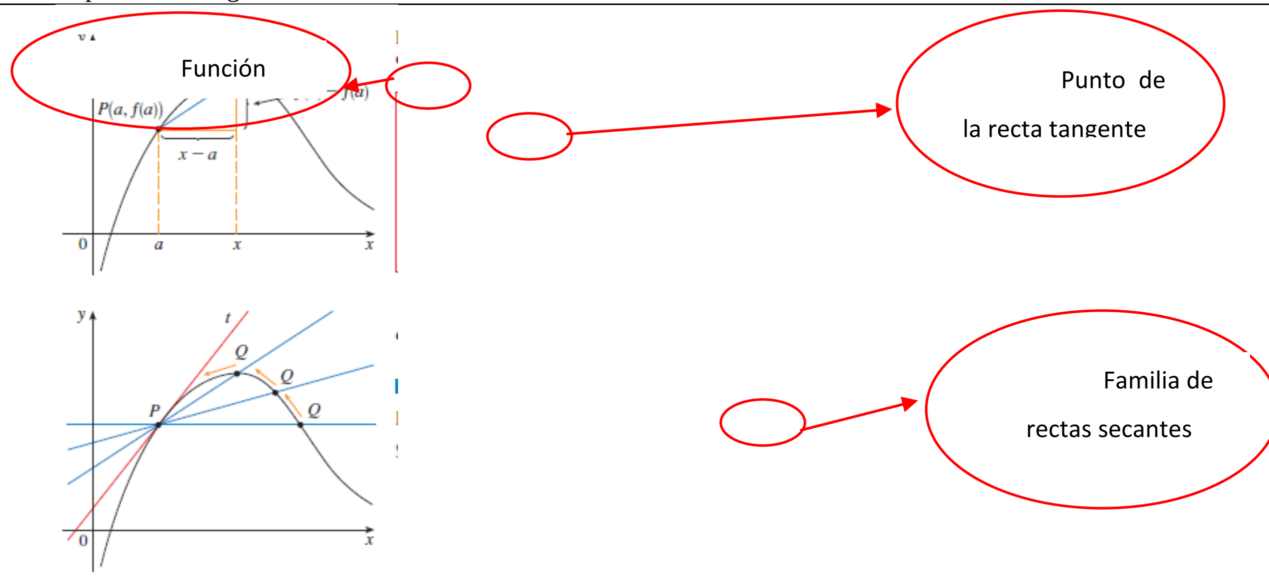
Autor:
James Stewart</td><td>Representación geométrica</td></tr>
<tr><td>

FIGURA 1</td></tr>
<tr><td>Visualización matemáticas</td></tr>
<tr><td>1 DEFINICIÓN La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
cuando el límite existe.</td></tr>
</table>

Modo Analítico Operacional

Definición de manera teórica

DERIVADAS

Ha visto que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3). En realidad, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Variació

surgen cuando calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite sucede, muy seguido, se proporciona un nombre y notación especial.

Interpretación de la definición a traves de ecuaciones

4 DEFINICIÓN La **derivada de una función f en un número a**, se indica mediante $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Modo Analítico Estructural

Teoremas a priori

	6 razón de cambio instantánea $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ Reconocer este límite como la derivada $f'(x_1)$. Sabe que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tiene una segunda interpretación: 3 **DEFINICIÓN** Una función f es **derivable en** a si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo. 4 **TEOREMA** Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.
	Teoremas a posteriori

DERIVADAS SUPERIORES

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así, f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, se escribe la segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este mo do, $f'''(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la relació de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera deri vada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se señala mediante $f^{(4)}$. E general, la n-esima derivada de f se señala mediante $f^{(n)}$ y se obtiene de f derivando veces. Si $y = f(x)$, escriba

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

REGLA DE LA POTENCIA Si n es un entero positivo, en consecuencia

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE Si c es una constante y f es una función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

REGLA DE LA SUMA Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

DEFINICIÓN DEL NÚMERO e

$$e \text{ es el número tal que } \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

REGLA DEL PRODUCTO Si tanto f como g son derivables, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

REGLA DEL COCIENTE Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

<table>
<tr><td></td><td>REGLA DE LA CADENA Si g es derivable en x y f en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F(x) = f(g(x))$, en derivable x y F' está dada por el producto
$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
En la notación de Leibniz, si tanto $y = f(u)$ como $u = g(x)$ son funciones diferenciables, por lo tanto
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7’gCATEGORIA EPISTEMOLÓGICA</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">CATEGORÍA DIDÁCTICA</td></tr>
<tr><td>Fuentes</td><td>PLANEACIÓN
(Enseñanza)</td></tr>
</table>

Libro:
“Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas”
Sexta edición
Año: 2008

Autor:
James Stewart

2.7 DERIVADAS Y RAZONES DE CAMBIO

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto, involucran encontrar el mismo tipo de límite, como se vio en la sección 2.1. Esta clase especial de límite se denomina derivada y puede ser interpretada como una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o ingeniería.

TANGENTES

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la línea secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En seguida, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces defina la *tangente* t como la recta que pasa por P con

pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

CONTENIDO
(Aprendizaje)

	INSTRUCTIVO	EDUCATIVO
		Solo se establecen ejercicios de la temática vista

CATEGORÍA DIDÁCTICA	
Fuentes	**PLANEACIÓN** (Enseñanza)

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Libro: “Cálculo”
Vol. 1
Año: 1998

Autor: Tom. M. Apóstol</td>
<td colspan="2">Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un instrumento para el cálculo de velocidades y, en general para el estudio de la variación de una función. En el apartado siguiente se considerará un problema particular que se refiere al cálculo de una velocidad. La solución de este problema contiene todas las características esenciales del concepto de derivada, y su análisis conduce a la definición general que se da en el apartado 4.3.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">CONTENIDO
(Aprendizaje)</td>
</tr>
<tr>
<td>INSTRUCTIVO</td>
<td>EDUCATIVO</td>
</tr>
</table>

Índice analítico

Con las fórmulas de derivación dadas hasta ahora, se pueden calcular d das de funciones f para las cuales $f(x)$ es una suma finita de productos o coc de constantes multiplicadas por sen x, cos x, y x^r (r racional). Sin embargo, ahora no se ha tratado de funciones tales como $f(x) = \text{sen}(x^2)$, cuyas deriva calculan a partir de la misma definición. En esta Sección presentaremos un ma, llamado *regla de la cadena,* que nos permitirá derivar funciones tales $f(x) = \text{sen}(x^2)$. De este modo aumentará considerablemente el número d ciones que podremos derivar.

CATEGORÍA DIDÁCTICA

Fuentes	**PLANEACIÓN** (Enseñanza)	
Libro: “Cálculo diferencial e integral” Año: 2009 Autor: Percey F. Smith	DERIVACION **21. Introducción.** En este capítulo vamos a investigar cómo varía el valor de una función al variar la variable independiente. El problema fundamental del Cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una manera continua, llevó a Newton * al descubrimiento de los principios fundamentales del *Cálculo infinitesimal*, el instrumento científico más poderoso del matemático moderno.	
	CONTENIDO (Aprendizaje)	
	INSTRUCTIVO	**EDUCATIVO**

Derivación

CAPITULO IV

Reglas para derivar funciones algebraicas

29. Importancia de la regla general. La regla general p derivación, dada en el Artículo 27, es fundamental, puesto que deduce directamente de la definición de derivada, y es muy imp tante que el lector se familiarice completamente con ella. Sin embar el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas largo o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla gener a fin de facilitar la tarea, reglas especiales para derivar ciertas forn normales que se presentan con frecuencia.

Es cómodo expresar estas reglas especiales por medio de fórmul de las cuales se da a continuación una lista. El lector no sólo d aprender de memoria cada fórmula cuando se ha deducido, sino ta bién poder enunciar en palabras la regla correspondiente.

En estas fórmulas u, v, w representan funciones derivables de

<table>
<tr><td colspan="3">CATEGORÍA DIDÁCTICA</td></tr>
<tr><td>Fuentes</td><td colspan="2">PLANEACIÓN
(Enseñanza)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Libro:
“Cálculo infinitesimal”
Año: 1996

Autor:
Michael Spivak</td><td colspan="2">La derivada de una función es el primero de los dos conceptos fundamentales de esta sección. Junto con la integral constituye la fuente de la cual deriva el cálculo su aroma particular. Si bien es verdad que el concepto de función es fundamental, que no se puede hacer nada sin límites o continuidad, y que las cotas superiores mínimas son esenciales, todo lo que hemos hecho hasta ahora ha sido una preparación —si ha sido adecuada, esta sección será más fácil que las anteriores— para las ideas verdaderamente luminosas que van a venir, los penetrantes conceptos que son verdaderamente característicos del cálculo infinitesimal.

Quizá (algunos dirían «ciertamente») el interés de las ideas a introducir en esta sección procede de la conexión íntima entre los conceptos matemáticos y ciertas ideas físicas. Muchas definiciones, e incluso algunos teoremas, pueden describirse en términos de problemas físicos a menudo de manera reveladora. De hecho, las necesidades de los físicos constituyeron la inspiración original para estas ideas fundamentales del cálculo, y frecuentemente mencionaremos las interpretaciones físicas. Pero siempre definiremos primero las ideas en forma matemática precisa y discutiremos su significado en términos de problemas matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONTENIDO
(Aprendizaje)</td></tr>
<tr><td>INSTRUCTIVO</td><td>EDUCATIVO</td></tr>
</table>

El proceso de hallar la derivada de una función recibe el nombre de *derivación*. El lector puede haber recibido la impresión, a través del capítulo anterior, de que este proceso es por lo general laborioso, que exige recurrir a la definición de la derivada, y que depende de saber hallar algún límite. Bien es verdad que muchas veces un tal procedimiento es el único posible; si se olvida la definición de derivada se está muy expuesto a perderse. Sin embargo, en este capítulo aprenderemos a derivar un gran número de funciones, sin necesidad de recordar siquiera la definición. Unos pocos teoremas nos ofrecerán un proceso mecánico para derivar una clase muy amplia de funciones, formadas a partir de unas pocas funciones simples mediante el proceso de suma, multiplicación, división y composición. Esta descripción debería sugerir cuáles son los teoremas que se habrán de demostrar. Hallaremos primero la derivada de unas cuantas funciones simples, y después demostraremos teoremas acerca de la suma, producto, cociente y composición de funciones derivables. El primer teorema constituye simplemente un reconocimiento formal de un cálculo llevado a cabo en el capítulo anterior.

Universidad Surcolombiana
Maestría en educación
Área de profundización: Docencia e investigación universitaria
Encuesta

La siguiente encuesta tiene como propósito indagar sobre la metodología usada al enseñar ciertos conceptos del cálculo diferencial y que tipo de representaciones utiliza (GGC, AE, AO), Teniendo en cuenta la siguiente información:

Código	Significado
GGC	El tema es enseñado desde la representación geométrica del mismo
AE	El tema es enseñado desde su desarrollo procedimental, usando los operadores (representaciones simbólicas de la derivada como lo son $\frac{d}{dx}$, ´) propios del tema.
AO	El tema es enseñado desde sus propiedades y su caracterización desde axiomas

El objetivo es marcar con una x las opciones que usted considere que usa en la metodología aplicada para la enseñanza de los temas enunciados a continuación y explicar brevemente su elección:

Tema	Método usado			
	GGC	AE	AO	Otra
Límite de funciones, algebra de límites y cálculo de límites.				
Explicación				
Límites al infinito. Límites infinitos				

Explicación				
Límites al infinito. Limites finitos				
Explicación				
Continuidad de funciones				
Explicación				
La derivada, interpretación geométrica y física. Cálculo de derivadas de funciones especiales usando la definición.				
Explicación				

Algebra de derivadas (reglas de derivación), y Regla de la cadena.				
Explicación				
Derivada de funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica. Derivación implícita.				
Explicación				
Derivadas de las funciones trigonométricas, exponencial y logarítmica				
Explicación				
Teoremas de Rolle y del valor medio.				
Explicación				

Aproximaciones lineales y método Newton. Valores máximos y mínimos.				
Explicación				
Trazado de curvas: primera y segunda derivada				
Explicación				
Aplicaciones de la derivada.				
Explicación				

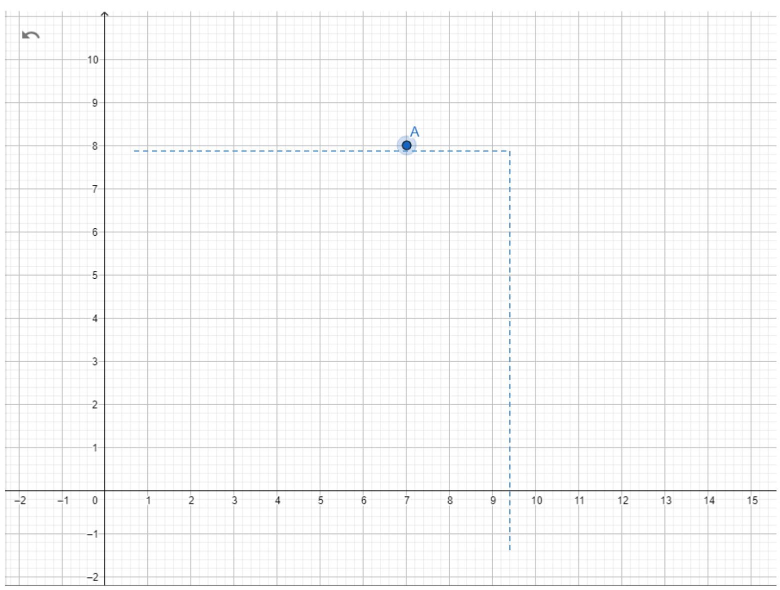
GUÍA PROPUESTA

Sección 1: Familia de rectas secantes aproximándose a una tangente

En estas dos secciones (1 y 2) se tendrán en cuenta aspectos esenciales en la construcción de funciones y rectas asociadas a su análisis. A través del concepto de pendiente se relacionan los conceptos de rectas secante y tangente. Se inicia la idea de transformación de rectas secantes hacia la tangente con el uso de la tasa de variación media.

Para iniciar es necesario recordar algunos elementos geométricos básicos que son componentes que ayudan a construir los objetos matemáticos que se van a estudiar, por ende, el profesor debe empezar con coordenadas cartesianas y como se localiza un punto en un espacio, como, por ejemplo:

Si dado el punto (7,8) al localizarlo en el plano cartesiano se hace de la siguiente manera



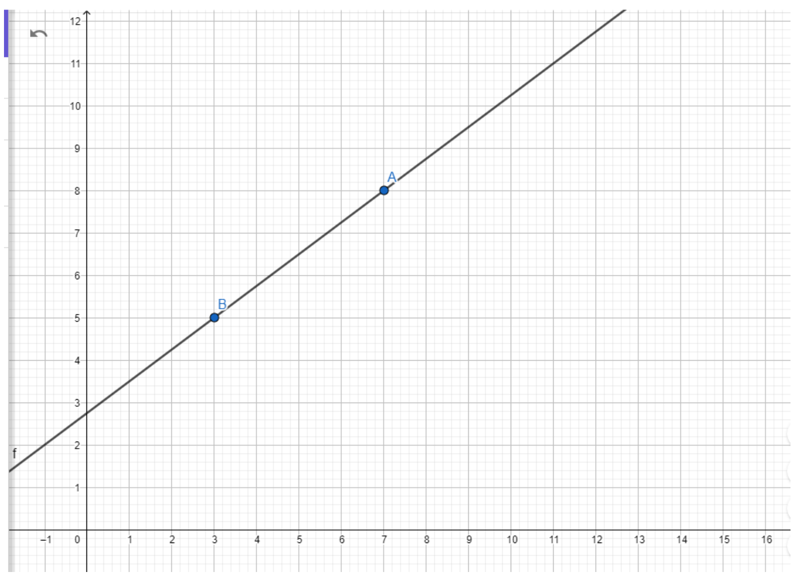
Podemos notar que el valor 7 se localiza con relación al eje horizontal (llamado eje de las x u ordenadas) y el 8 siempre se localiza con relación al eje vertical (llamado eje de las y o abscisas).

Para la práctica lo estudiantes deben resolver lo siguiente

- ✓ Con ayuda de un plano cartesiano ubicar los siguientes puntos:

  $(8,9); (6,10); (7,7); (10,3); (0,7)$

Ahora que los estudiantes recuerdan la ubicación de un punto en el plano, el profesor seguirá con la recta definida por dos puntos que se considera la línea no curva que pasa por dos puntos, por ejemplo, se tiene la siguiente recta



La recta está definida por los puntos:

$$A = (7,8)$$

$$B = (3,5)$$

Definido esto, ahora el docente procede a reconocer la recta desde lo analítico como una función polinómica de primer grado y tiene la siguiente forma

$$y = mx + b$$

Donde

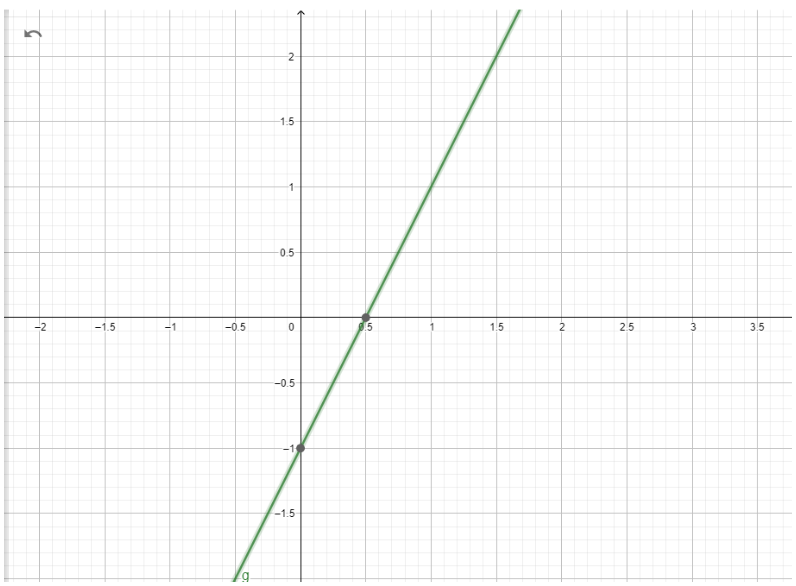
$$m = pendiente$$

$$b = intercepto\ con\ el\ eje\ y$$

Por ejemplo

Graficando la recta

$$y = 2x - 1$$



La pendiente de esta recta es $m = 2$ y el intercepto con el eje y es $b = -1$

Las siguientes actividades el docente debe postular para la práctica del concepto de recta:

Usando Cabri Express o GeoGebra las siguientes funciones, dibujar dos puntos que pertenezcan a la función e identificar la pendiente y el intercepto con el eje y

- ✓ $y = 3x + 4$
- ✓ $f(x) = 2x$

- ✓ $y = 5x - 4$

Ahora el docente ha de considerar la fórmula para hallar la pendiente de una recta y además considerarla como una medida de la inclinación de una recta cuando se hay dos pares de coordenadas. Dicha medida se puede hallar usando la siguiente fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$También\ se\ puede\ establecer\ como$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo:

Tomando los puntos $A = (7{,}8)$ y $B = (3{,}5)$ para encontrar la recta que pasa por estos dos puntos se tiene que

$$A = (x_1, y_1)\ y\ B = (x_2, y_2)$$

Por tanto, se tendría que

$$x_1 = 7$$

$$y_1 = 8$$

$$x_2 = 3$$

$$y_2 = 5$$

Con esto se halla la pendiente

$$m = \frac{5 - 8}{3 - 7} \quad (Reemplazando\ los\ valores\ en\ la\ ecuación)$$

$$m = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Se tiene que la ecuación de la recta es

$$y = \frac{3}{4}x + b$$

Para hallar el intercepto con el eje y solo se necesita cualquiera de los dos puntos definidos y reemplazar en la ecuación de la recta,

Si tomamos el punto $B = (3,5)$

Reemplazando $x = 3,\ y = 5$

$$5 = \frac{3}{4}(3) + b$$

$$5 - \frac{9}{4} = b$$

$$b = \frac{11}{4}$$

La ecuación de la recta es

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

Para la practicidad de este tema el docente postula lo siguiente: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos

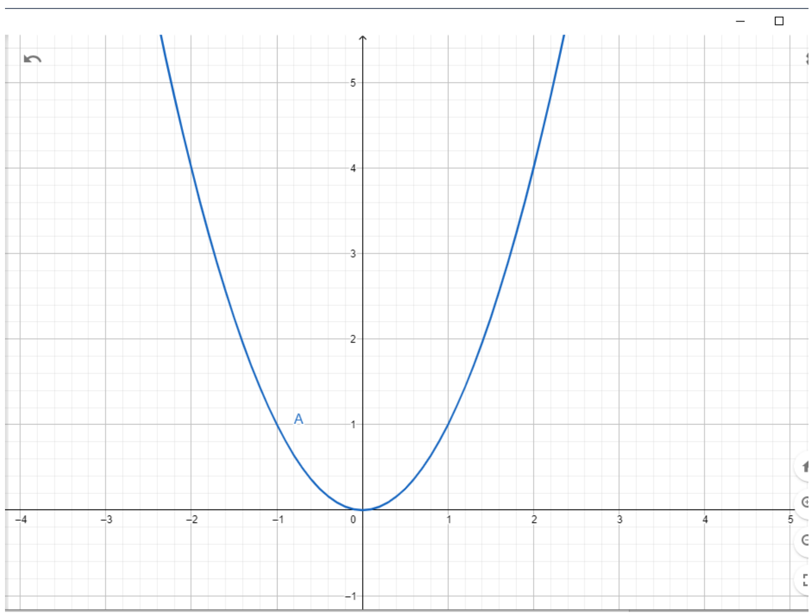
a. $A = (4,5)\ y\ \ B = (-8,9)$

b. $C = \left(\frac{3}{5}, 3\right)\ \ y\ D = (0,5)$

c. $E = (7,8)\ y\ F = (\frac{8}{9}, 7)$

Desde los elementos vistos el docente construye la idea de recta secante definiéndola como dicha recta que corte a una curva en 2 puntos. Ejemplificando esto, para la construcción de secantes se tiene en cuenta la función que defina la curva como lo es

$$y = x^2$$



Para graficar una recta secante a esta curva, se toman dos puntos que pertenecen a dicha curva

$$si\ x = 1$$

$$y = (1)^2 = 1$$

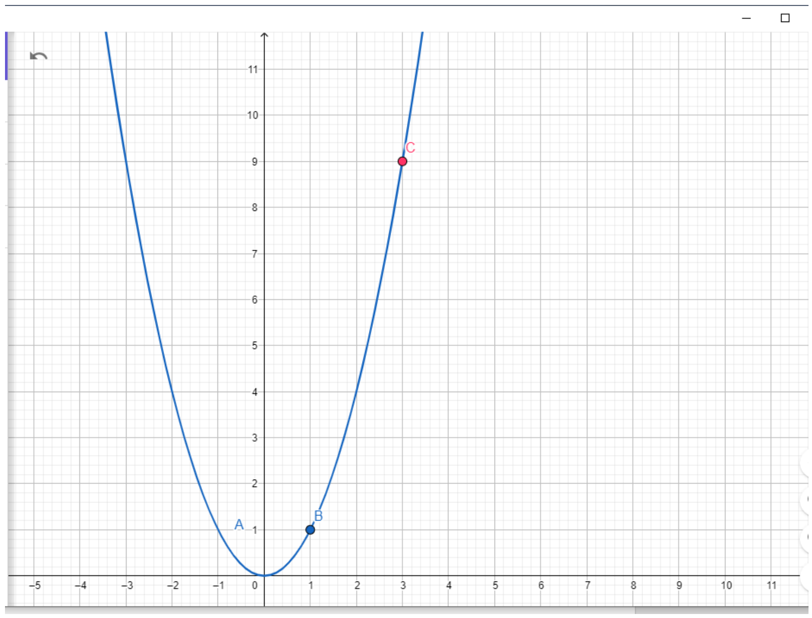
El punto $(1,1)$ pertenece a la curva.

Otro punto

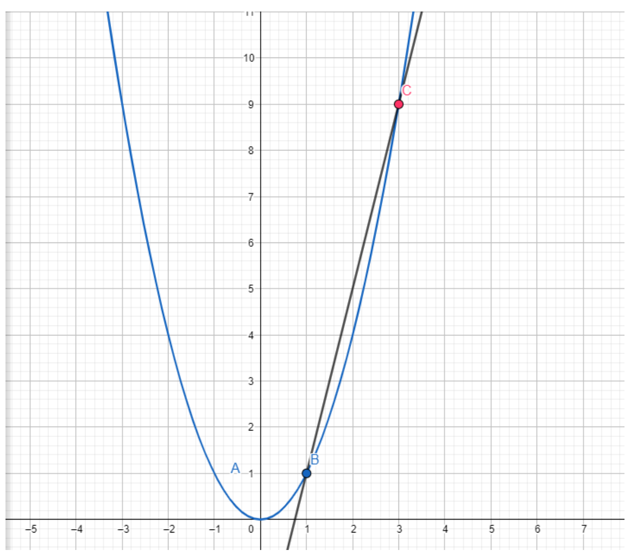
$$si\ x = 3$$

$$y = (3)^2 = 9$$

El punto (3,9) pertenece a la curva. Graficando los puntos



Ahora se traza la secante a esta curva que pase por dichos puntos



La recta de color negro se le conoce como recta secante.

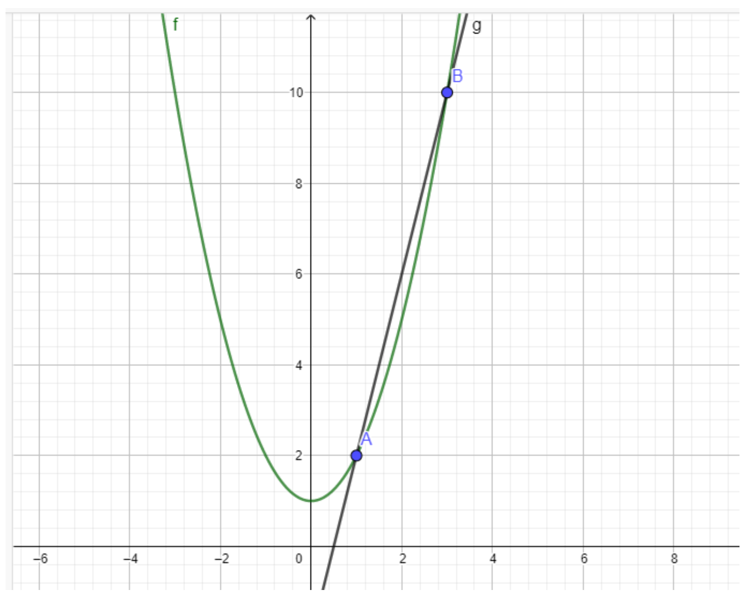
Se postulan las siguientes actividades para que los estudiantes grafiquen rectas secantes:

A partir de las siguientes funciones dibujar una recta secante eligiendo dos puntos cualquieras que pertenezcan a estas:

- ✓ $f(x) = 2x^2 + 1$
- ✓ $y = x^3 - 2$
- ✓ $y = 7x^2$

Ahora a partir de la construcción de las rectas secantes, el docente la toma como herramienta fundamental en la construcción de recta tangente teniendo en cuenta la siguiente actividad.

Tenemos la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$, ahora dado dos puntos $A = (1,2)$ y $b = (3,10)$, grafiquemos la recta secante a estos dos puntos

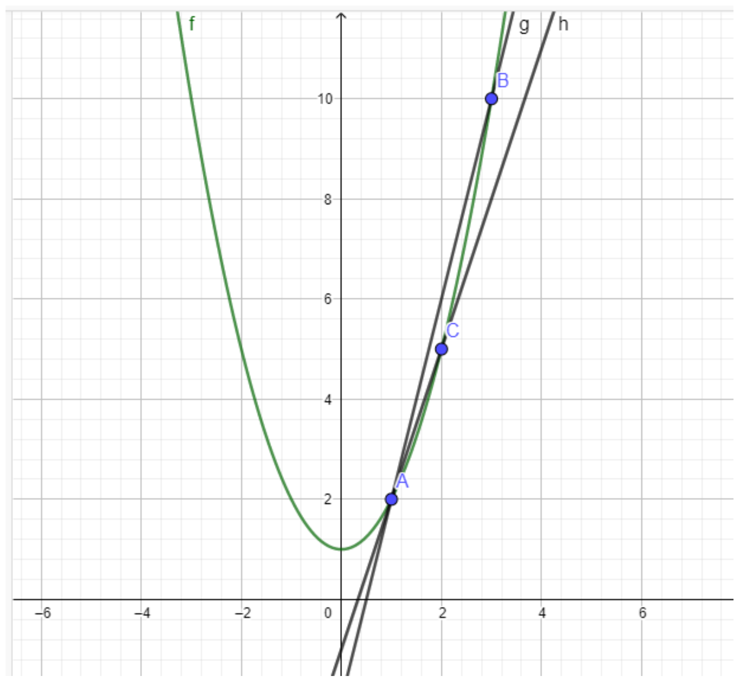


Ahora ya graficada la recta secante observemos la pendiente de la recta secante está definida por

$$m_1 = \frac{10 - 2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Ahora vamos a trazar una familia de rectas secantes para analizar que ocurre cuando el punto B se acerca al punto A.

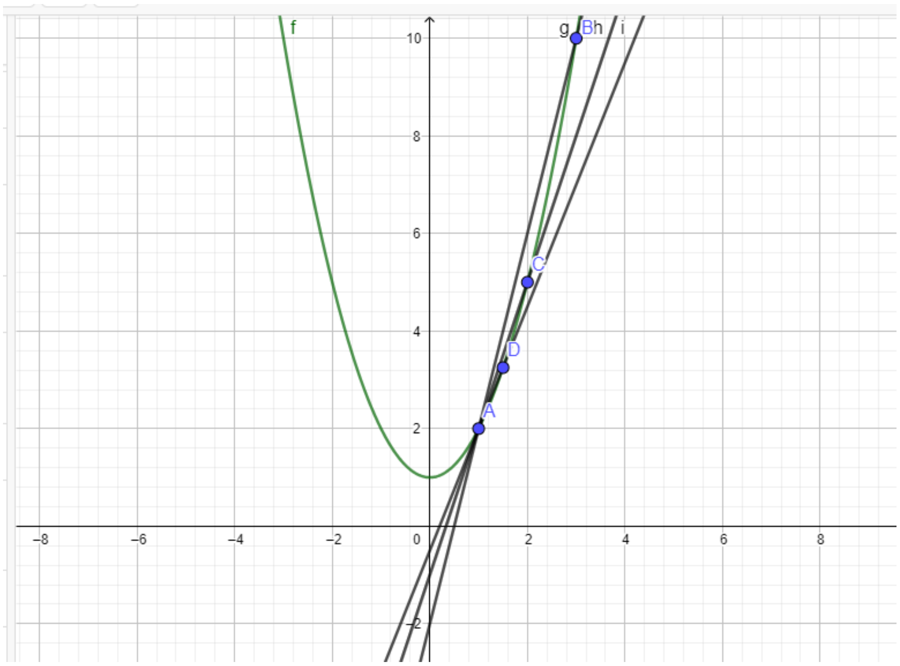
Trazando el punto $c = (2,5)$ y graficando la recta secante que pasa por los puntos A y C



Observemos que el valor de su pendiente es

$$m_2 = \frac{5-2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

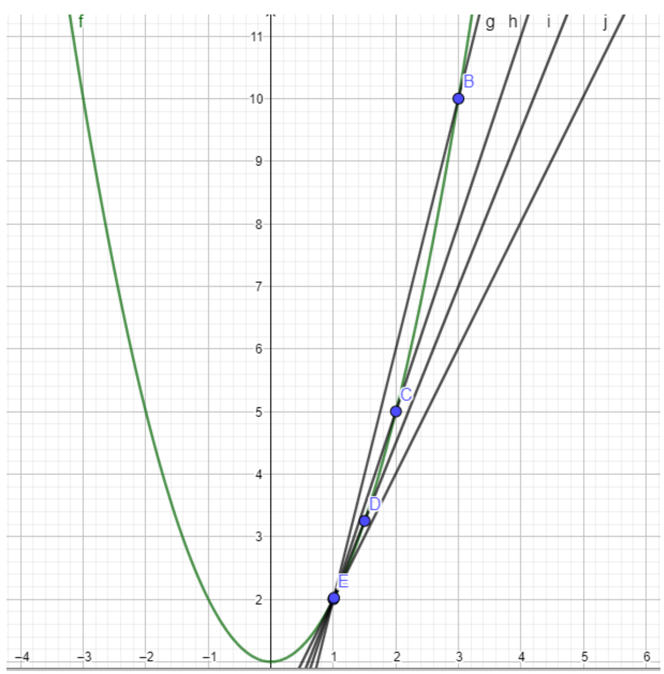
Grafiquemos el punto $D = (1.5,3.25)$



Tenemos que la pendiente es

$$m_3 = \frac{3{,}25 - 2}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5$$

Acercándonos más con el punto $E = (1.1, 2.21)$



Observemos que la pendiente que rige a la recta secante que pasa por A y E

$$m_4 = \frac{2{,}21 - 2}{1{,}1 - 1} = \frac{0{,}21}{0{,}1} = 2{,}1$$

Analicemos las pendientes de las rectas secantes dibujadas

Pendiente	Valor
m_1	4
m_2	3
m_3	2,5
m_4	2,1

Miremos que cada vez que la recta secante que parte desde el punto B se acerca al punto A las pendientes convergen al valor 2, con esto quiere decir que el valor límite cuando las pendientes de las rectas secantes se aproximan a la pendiente de la recta tangente su valor es de 2. Esto indica que lo elementos que componen a la recta tangente sería

$$m = 2$$

$$A = (1{,}2)$$

La recta tangente tendría la forma

$$y = 2x + b$$

$$2 = 2(1) + b$$

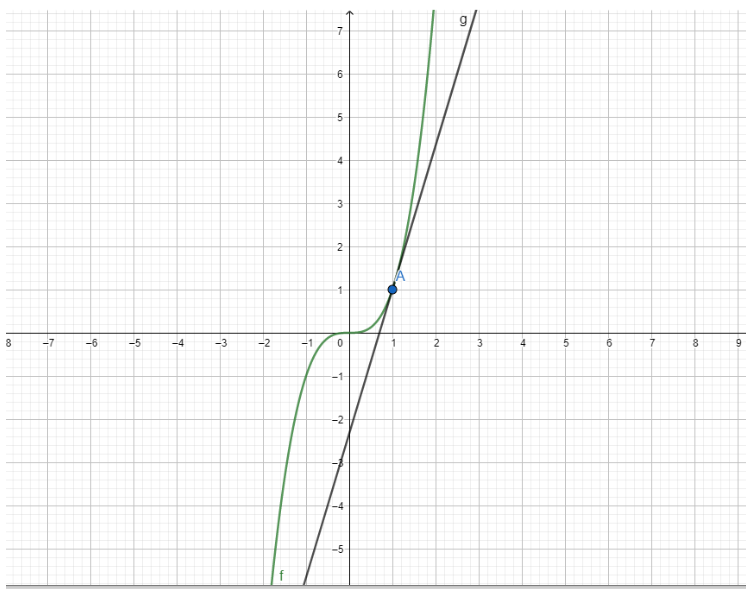
$$2 = 2 + b$$

$$b = 0$$

$$La\ función\ de\ la\ recta\ tangente\ en\ este\ punto\ es$$

$$y = 2x$$

Ahora con ayuda del docente al socializar esta actividad, los estudiantes pueden construir la definición de recta tangente como la recta se llama tangente a una función en un punto cuando toca a la función por ese punto.



Actividad Evaluativa 1

- ✓ Teniendo la gráfica de $f(x) = x^2 + 5$, ahora dado dos puntos $A = (1{,}6)$ y $b = (3{,}14)$, grafiquemos la recta secante a estos dos puntos

Sección 2: Tasa de variación media

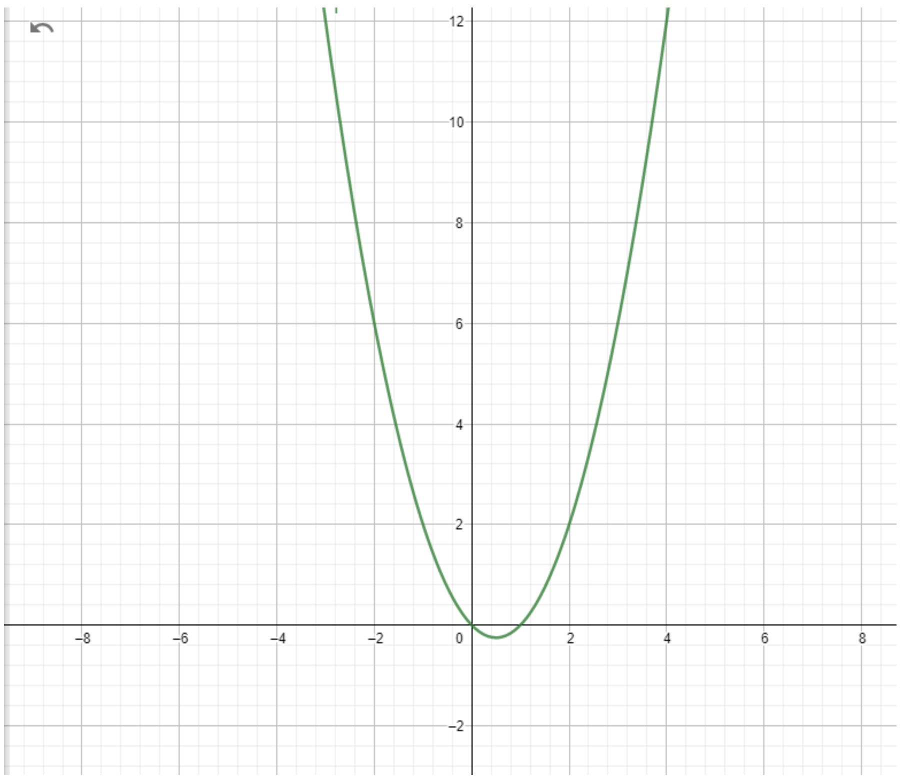
El docente considera lo visto en la primera sección como temas necesarios para estudiar esta sección, puesto que para iniciar el concepto de tasa de variación media se relaciona la fórmula para hallar la pendiente, con esto se entiende como tasa de variación media como aquella que indica la variación relativa de la función respecto a la variable independiente, definida analíticamente como

$$TVM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Si tenemos la función $y = x^2 - x$ en el intervalo [1,4]

Graficando la recta secante



Ahora se halla la imagen de los puntos $x = 1, x = 4$

$$Para\ x = 1$$

$$y = (1)^2 - 1$$

$$y = 1 - 1 = 0$$

$$Para\ x = 4$$

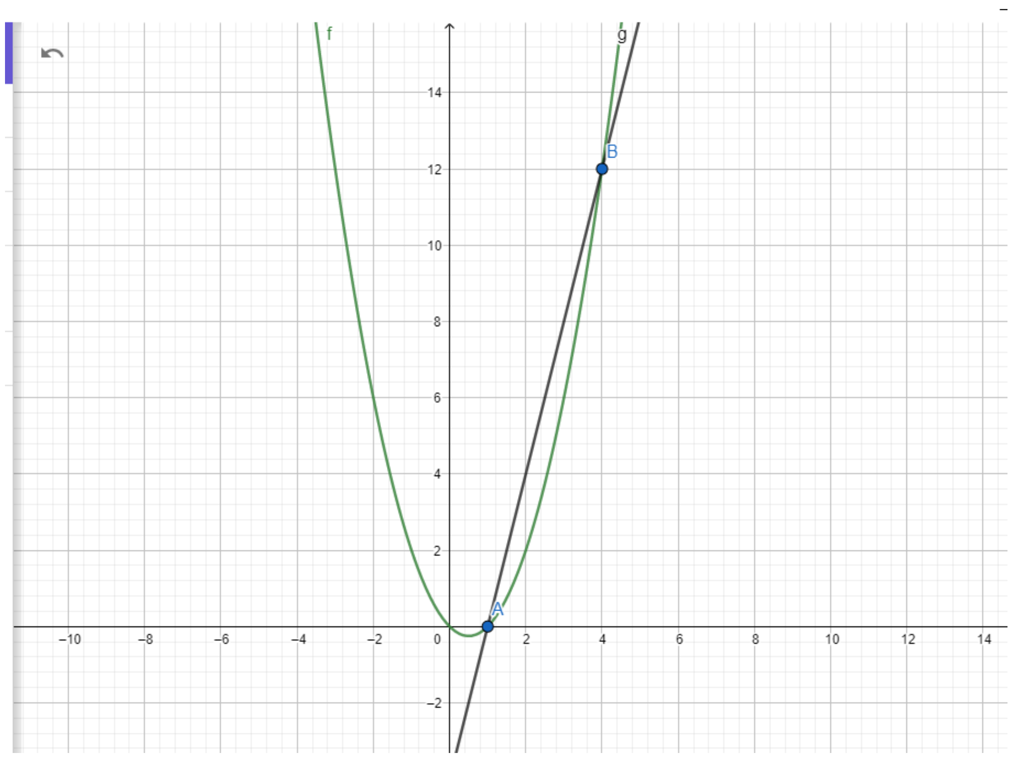
$$y = (4)^2 - 4$$

$$y = 16 - 4 = 12$$

$$Se\ obtuvo\ los\ puntos$$

$$(1,0)\ y\ (4,12)$$

Se observa que la expresión para hallar la tasa de variación media es igual a la pendiente de la recta secante



Por tanto, la tasa de variación media es

$$TVM = \frac{12 - 0}{4 - 1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$Se\ tiene\ m = 4$$

Para encontrar la ecuación de la recta se tendría lo visto ya

$$El\ punto\ (1,0)$$

$$y = 4x + b$$

$$0 = 4(1) + b$$

$$-4 = b$$

$$La\ recta\ secante\ es$$

$$y = 4x - 4$$

Visto la relación que hay entre los elementos de la recta y la tasa de variación media encontrar la recta que determina la tasa de variación media para las siguientes funciones:

- ✓ Dada la función $y = 3x^3$ en el intervalo $[0,5]$
- ✓ Dada la función $f(x) = x^2 - 5$ en el intervalo $[-3,1]$
- ✓ Dada la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo $[4,16]$

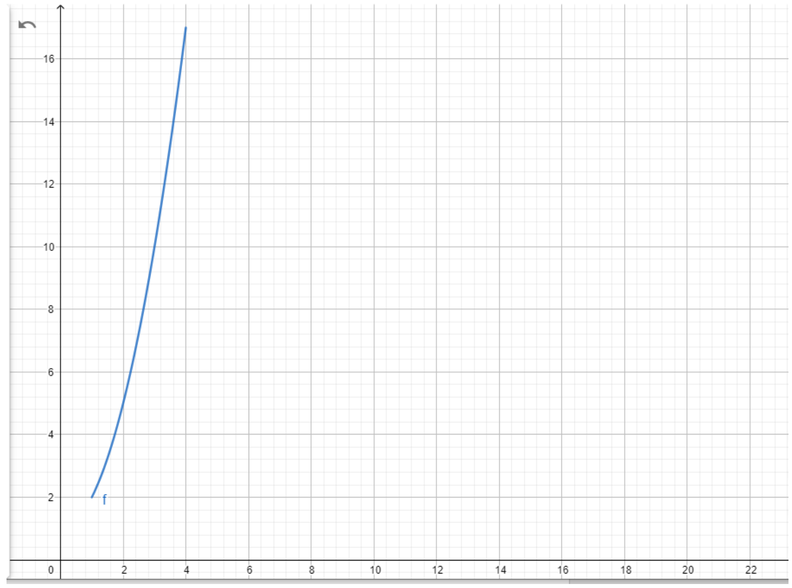
Actividad Evaluativa 2

- ✓ La velocidad de un auto está ligada por la función $y = x^2 - 1$, usando la tasa de variación media en el intervalo $[2,5]$ encontrar la pendiente de la recta tangente al punto $x = 4,5$

Sección 3: Continuidad

Para esta sección el docente inicia postulando la siguiente actividad: Se quiere analizar la trayectoria de un objeto desde que inicia su trayectoria hasta el punto $x = 10$. Si su movimiento está dado por la función $f(x) = 3x^2$ realizar la gráfica que ayude con dicho análisis.

La intención de esta actividad es exponer el tema de Intervalos Cerrados para entenderlo como un conjunto de número reales que se encuentra comprendido entre dos puntos dados a y b. Se denotan como $a \leq x \leq b$ o $[a, b]$. Al igual como se analiza desde la gráfica de funciones, también se propone el tema de Función continua en un intervalo y se entiende que si una función es continua en un intervalo si cada punto que pertenece a la función y al intervalo tiene su correspondiente imagen. Por ejemplo, al graficar la función $y = x^2 + 1$ en el intervalo $[1,4]$



Observemos que la curva que define a la función no se corta en ningún punto que pertenece al intervalo, con esto podemos asegurar que la función es continua en el intervalo $[1,4]$

Para la práctica de los estudiantes el docente ha de postular lo siguiente:

Graficar las siguientes funciones y definir si son continuas en el intervalo dado

a. $f(x) = x^4 \quad en\ 0 \leq x \leq 4$

b. $f(x) = 2x^3 \ \ en\ [0,4]$

Ahora para la siguiente actividad evaluativa tener en cuenta lo aprendido hasta esta sección

ACTIVIDAD EVALUATIVA 3

✓ Dibujar la gráfica de la función cúbica $f(x) = x - x^3$ en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 2$. Hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,0)$.

Sección 4: Aplicación de la variación media

En esta sección para iniciar el docente postula la siguiente actividad y se explica paso a paso su solución con ayuda de los estudiantes.

ACTIVIDAD EVALUATIVA 4

Si se tiene un globo en forma de esfera y se sabe que el volumen de este cuerpo es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, tenemos que su volumen cambia en relación con el radio. Responder

a. ¿Cuál es la variación media del volumen cuando el radio pasa de 3cm a 3,5cm?

Para la solución de este problema tenemos en cuenta que la función está definida por la expresión del volumen

$$f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ahora desde la variación media, la idea es encontrar la recta secante a un punto teniendo en cuenta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$Los\ puntos\ a\ y\ b$$

$$a = 3$$

$$b = 3{,}5$$

$$Donde$$

$$f(b) = f(3{,}5) = \frac{4}{3}\pi(3{,}5)^3$$

$$= 179{,}59$$

$$f(a) = f(3) = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$= 113{,}1$$

Por tanto, la variación media está determinada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{179{,}59 - 113{,}1}{3{,}5 - 3} = \frac{66{,}49}{0{,}5}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 132{,}98$$

Lo que se encuentra es la pendiente de la recta secante que corta a la función en los puntos a y b y dicha pendiente nos indica que la variación del volumen para estos dos radios es de $132{,}98cm^3$

b. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio es 3 cm?

Ahora debemos encontrar la pendiente de la recta que pasa por el punto $x = 3$, por tanto, tomemos un valor cercano como $x = 3{,}1$, ahora hallemos la variación media (pendiente) para dicha recta secante que pasa por esos dos puntos

Tenemos los puntos

$$a = 3$$

$$b = 3{,}1$$

$$f(a) = f(3) = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$= 113{,}1$$

$$f(b) = f(3{,}1) = \frac{4}{3}\pi(3{,}1)^3$$

$$= 124{,}7882$$

La variación media está dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{124{,}7882 - 113{,}1}{3{,}1 - 3} = \frac{11{,}6882}{0{,}1} = 116{,}82$$

$$Tomemos\ para\ x = 3{,}01$$

$$f(3{,}01) = \frac{4}{3}\pi(3{,}01)^3 = 114{,}2320$$

La variación entre este punto y el punto a es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{114{,}2320 - 113{,}0973}{3{,}01 - 3} = 113{,}2$$

$$acerquemonos\ más\ con\ x = 3{,}001$$

$$f(3{,}001) = \frac{4}{3}\pi(3{,}001)^3 = 113{,}21$$

$$La\ variación\ es$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{113{,}2104 - 113{,}0973}{3{,}001 - 3} = 113{,}1$$

$$Acerquemonos\ con\ x = 3{,}0001$$

$$f(3{,}0001) = \frac{4}{3}\pi(3{,}0001)^3 = 113{,}1086$$

$$La\ variación\ es$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{113{,}1086 - 113{,}0973}{3{,}0001 - 3} = 113$$

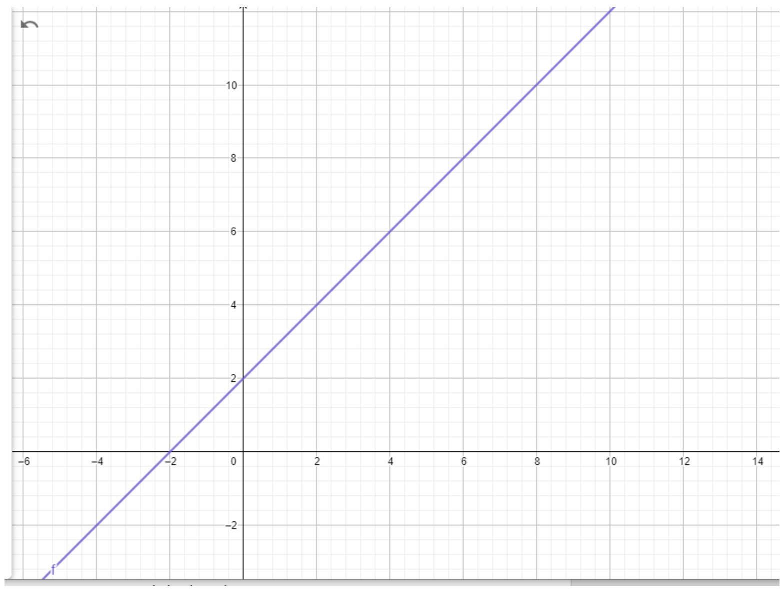
ACTIVIDAD EVALUATIVA 5

- ✓ Escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ en el punto (1,2)

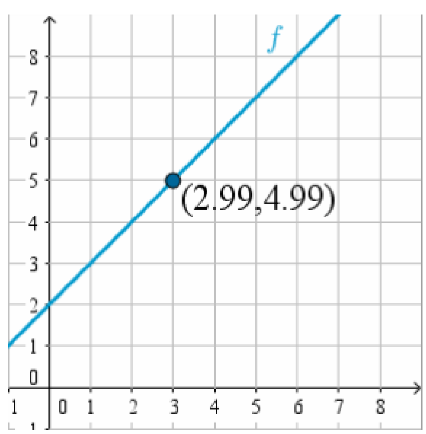
Sección 5: Cociente de incrementos

En esta sección el docente parte del concepto de límite interpretado como un concepto matemático que se utiliza para definir el comportamiento cerca de un punto. Para entender mejor se observa la siguiente actividad

Si se tiene la función $f(x) = x + 2$



Si se analiza el límite en $x = 3$ es el valor que toman las imágenes (y) cada vez que se aproxima mas a 3. Por ejemplo, si se inicia desde el punto $(1,3)$ y se mueve el punto cada vez más cerca de 3, se obtiene que la imagen se acerca cada vez mas a 5.



Por tanto, el límite es

$$\lim_{x \to 3} x + 2 = 3 + 2 = 5$$

Para la practicidad del tema se postula lo siguiente:

Hallar el límite de las siguientes funciones

a. $\lim_{x \to 3} 2x^2 + 3$

b. $\lim_{x \to 0} 3x^3 + 1$

Ahora con este elemento matemático fundamental se construye el límite del cociente de incremento, dada de la siguiente manera**:** Se tiene la función continua $f(x)$, se tiene definido que

$$\Delta x = incremento\ de\ x$$

$$\Delta y = incremento\ de\ y$$

Para este tema clave se considera la actividad del globo como la actividad introductoria para el entendimiento de este tema. Utilizando la situación del globo: Si se tiene un globo en forma de esfera y se sabe que el volumen de este cuerpo es $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, tenemos que su volumen cambia en relación con el radio. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio es 3 cm?

Observemos que las pendientes de las familias de las rectas secantes al aproximarse cada vez al punto limite $x = 3$, ellas convergen a un punto que se conoce como la pendiente de la recta tangente, por tanto, denotaremos que dicha pendiente se halla

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hallemos dicha pendiente, siguiendo con lo dicho supongamos que

$$a = x$$

Y tenemos una pequeña variación denotada

$$b = x + \Delta x$$

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi(x)^3$$

$$Por\ tanto\ el\ cociente\ de\ variaciones\ quedaría$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$Reemplazando$$

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi(x)^3$$

$$f(x + \Delta x) = \frac{4}{3}\pi(x + \Delta x)^3$$

$$La\ pendiente\ sería$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(x + \Delta x)^3 - \frac{4}{3}\pi(x)^3}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \Delta x^3) - \frac{4}{3}\pi(x)^3}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2\Delta x + 4\pi x\Delta x^2 + \frac{4}{3}\pi\Delta x^3 - \frac{4}{3}\pi(x)^3}{\Delta x}$$

$$Cancelando \frac{4}{3}\pi(x)^3$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\pi x^2\Delta x + 4\pi x\Delta x^2 + \frac{4}{3}\pi\Delta x^3}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(4\pi x^2 + 4\pi x\Delta x + \frac{4}{3}\pi\Delta x^2\right)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} 4\pi x^2 + 4\pi x\Delta x + \frac{4}{3}\pi\Delta x^2$$

$$Como\ \Delta x = 0$$

$$La\ pendiente\ es$$

$$m = 4\pi x^2$$

$$Ahora\ si\ evaluamos\ en\ el\ punto\ x = 3$$

$$m = 4\pi(3)^2$$

$$m = 113{,}0973$$

Por tanto, esta es la razón de cambio del volumen en el punto $x = 3$. Ahora para la construcción de la recta tangente se tendrían el punto y su pendiente

$$P = (3, 113.1)$$

$$m = 113{,}0973$$

$$La\ recta\ tendría\ la\ forma$$

$$y = 113{,}0973x + b$$

$$113{,}1 = 113{,}0973(3) + b$$

$$b = 124{,}7882 - 339{,}2919$$

$$b = -226{,}1919$$

$$y = 113{,}0973x - 226{,}1919$$

Actividad evaluativa 6: Utilizando el cociente de incrementos encontrar la derivada de la función $y = x^3$ y el valor de la recta tangente en el punto $x = 2$

Sección 6: La derivada

Ahora con el manejo del tema de límites de incrementos ya el docente a partir de la interacción de todos los elementos vistos construye la definición de la derivada desde el límite de incrementos para una función $f(x)$ en un punto x_1y continua en dicho punto

$$f´(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Las siguientes actividades evaluativas son de aplicabilidad del concepto formado que ayuda en la construcción y el entendimiento del objeto derivada. El docente las postula para evaluar el manejo que le den los estudiantes a este tema.

ACTIVIDADES EVALUATIVAS 7, 8 y 9

- ✓ Dada la función $y = x^2$ en los intervalos $x \in [1,3]$ graficar la familia de rectas secantes que se aproximen al punto $x = 1$ y encontrar la pendiente de dicha recta tangente en este punto.
- ✓ Aproxime el cociente de incrementos $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores de h próximos a 0 y después encuentre el valor exacto de $f'(1)$:

  a). $f(x) = x^3 - 3x + 1$

  b). $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- ✓ Dada la función $y = \frac{1}{x}$ utilizar el cociente de incrementos para demostrar que $f´(2) = -\frac{1}{4}$

REFERENTES BIBLIOGRÁFICOS

Alvarado, M., & García, C. (2005). Preconceptos en el aprendizaje del cálculo.

Anton, H. B. (2010). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (Segunda edición). México: Limusa Wiley.

APÓSTOL, T. M. (1988). calculo con funciones de una variable, con una introducción al algebra lineal, editorial reverte, Col.

Areche Calle, C. R. (2017). Las teorías cognitivas y sociales en la sesión de aprendizaje.

Arias, F. G. (2006). El Proyecto de Investigación-Introducción a la Metodología Científica (Vol. 5). *Caracas, Venezuela: Editorial Episteme*.

Azcárate, C. (1998). Las entrevistas en investigaciones de didáctica de las matemáticas: Análisis de algunas experiencias próximas.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento.

Bonilla, D., & Parraguez, M. (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento.

Botia, A. B. (1993). " Conocimiento didáctico del contenido" y formación del profesorado: el programa de L. Shulman. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado: RIFOP*, (16), 113-124.

Bourbaki, N. (1972). Elementos de Historia de las Matemáticas (J. Hernández, Trans.). *Madrid: Editorial Alianza*.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. *Parra C. e Saiz I.(comps.): Didáctica de matemáticas. Buenos. Aires, Paidós Educador*.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, *12*(01), 5-38.

Bruner, J. (2015). *La educación, puerta de la cultura* (Vol. 3). Antonio Machado Libros.

Callahan, J., Cox, D., Hoffman, K., O'Shea, D., Pollatsek, H., & Senechal, L. (2008). Calculus in context.

Cantoral, R., Molina, J. G., & Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción.

Carrillo Yáñez, J. (2000). La formación del profesorado para el aprendizaje de las matemáticas. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*.

Castañeda Barbosa, R. D. (2016). Formulación de una estrategia para la enseñanza del concepto de la derivada a partir de los conocimientos previos de estudiantes de primer semestre de ingeniería.

Castro Segura, F. E. (2013). *Importancia de la planificación docente y su incidencia en el proceso enseñanza-aprendizaje de los estudiantes del tercer año de educación básica de la escuela "belisario quevedo" de la ciudad de ambato* (Bachelor's thesis).

Choppin, A. (1993). L'histoire des manuels scolaires: un bilan bibliométrique de la recherche française. *Histoire de l'Education*, 165-185.

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM*, *10*.

Collado, C. H. (2014). Metodología de la investigación: Roberto Hernández Sampierí, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio. *México DF*.

Cordero, F., & Parra, T. G. (2009). La derivada como razón de acumulación o agotamiento.

Cornejo Morales, C. E. (2017). Caracterización de preguntas que contribuyen a la compresión del concepto de fracción parte-todo en estudiantes de educación básica.

De Guzmán, M. (1993). Enseñanza de las ciencias y la Matemática. [Documento en línea].

Díaz-Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *UNAM, México, consultada el*, *10*(04), 1-15.

Díaz, V. (2001). Construcción del saber pedagógico. Sinopsis educativa. Caracas: Universidad Pedagógica Experimental El Libertador. *Revista Venezolana de Investigación*, *2*.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36.

Espinosa, G. M. (2005). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual.

Friz Carrillo, M., Panes Chavarría, R., Salcedo Lagos, P., & Sanhueza Hernández, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista electrónica de investigación educativa*, *20*(1), 59-68.

Gaitán, J. A., & Piñuel, J. L. (1998). Técnicas de investigación en comunicación social. *Madrid: Síntesis*, 281-311.

García Durant, K. M., & Cuarez Reggio, M. J. (2014). *Lenguaje matemático simbólico escrito usado por los estudiantes de 1er año diversificado de educación media general de la UE Antonio Herrera Toro del municipio Valencia estado Carabobo en el año escolar 2013-2014, según la teoría de David Pimm* (Bachelor's thesis).

García, G. S. M., Blanco, M. G., & Ciscar, S. L. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 85-98.

García, J. P. Y. R. (1983). Psicogénesis e historia de la ciencia. *Critica*, *15*(43).

Garrido, E., Castro, R. S. D., & Pessoa de Carvalho, A. M. (1995). El papel de las actividades en la construcción del conocimiento en clase. *Revista Investigación en la Escuela*, *25, 61-70.*

Gómez Chacón, I. M. (2012). Visualización matemática: intuición y razonamiento.

Gómez, J. L. L., & Romero, L. R. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *pna*, *3*(1), 35-48.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

Grabiner, J. V. (1983). The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics magazine*, *56*(4), 195-206.

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. In *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática–CIAEM*.

Hernández Sampieri, R. (2011). Metodología de la Investigación: Tipos de investigación: Exploratoria, Descriptiva, Explicativa, Correlacional. Retrieved March 4, 2018.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Springer, Dordrecht.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática*, *10*(02), 23-45.

Hurtado, J. (2006). El proyecto de investigación: metodología de la investigación holística. *Bogotá: Quirón*.

Hurtado, J. (2008). Metodología de la investigación, una comprensión holística. *Quiron-Sypal. Caracas, Venezuela*.

Irazoqui Becerra, E., & Medina Rivilla, A. (2014). Aplicación de un diseño curricular modular para la enseñanza del cálculo diferencial. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, *22*(4), 576-586.

Jaramillo, C. M., & Esteban, P. V. (2006). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras matemáticas a partir del modelo de Van Hiele. *Revista Educación y pedagogía*, *18*, 109-118.

Jiménez, E. R. B. (2004). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia: la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física* (Doctoral dissertation, Universitat Autònoma de Barcelona).

Lehmann, C. (1989). Geometría Analítica. México: Limusa.

León Gómez, N., Bara, M., & Azocar, K. (2013). Planificación de la matemática escolar como elemento clave en la formación del docente. *Paradigma*, *34*(2), 177-200.

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: prácticas sociales y tecnología.

Lozano Robayo, Y. (2011). Desarrollo del concepto derivada sin la noción de límite. *Trabajo de grado*.

Martín, A., Paralera, C., Romero, E., & Segovia, M. (2009). Mejora de la comprensión del lenguaje matemático mediante una acción tutorial. *Sevilla: Universidad Pable de Olavide. Departamento de Economía. Recuperado el*, *20*(03), 2011.

Maturana, I., & Parraguez, M. (2012). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios.

Messick, S. (1989). Validity, in (ed) R. Linn Educational Measurement (3rd Edn) American Council on Education.

Moreno, C., & Ríos, P. (2006). Concepciones en la enseñanza del cálculo. *Sapiens*, *7*(2), 25-39.

Ocampo, J. (2017). La importancia de la evaluación para la mejora de la educación y así obtener calidad educativa. *Cuadernos de Educación y Desarrollo, 87*.

Ortega, M. V., Leal, O. L. R., & Tristancho, S. L. Z. (2018). Influencia de curso pre cálculo en ecuaciones diferenciales y desarrollo de pensamiento variacional. *Revista Boletín Redipe*, *7*(1), 124-135.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123-150.

Pinto-Rojas, I., & Parraguez, M. (2015). Articuladores para los modos de comprender el concepto de derivada.

Puga Peña, L. A., Rodríguez Orozco, J. M., & Toledo Delgado, A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo.

Quero, V. D. (2006). Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico. *Laurus*, *12*(Ext), 88-103.

Remy, H. D. Z. (2004). *Constructivismo en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el siglo XXI/Constructivism in Teaching Learning Processes in the XXI Century*. Plaza y Valdes.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, *58*, 7-23.

Rincón, E. R. (2009). Historia y epistemología de la función derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*.

Rochera, M. J., Gregori, E. B., & Goñi, J. O. (1990). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. In *Desarrollo psicológico y educación* (pp. 487-508). Alianza.

Rojas, P. (2011). Aprendizaje basado en problemas (ABP), propuestas innovadoras para la enseñanza del cálculo diferencial e integral.

Ros Romero, M. D. L. S. (2016). Pensamiento y leguaje matemático en el contexto de educación infantil. Un acercamiento interpretativo.

Sanabria, G. I. N. Dificultades en las prácticas del Cálculo Diferencial: una mirada desde la teoría de los obstáculos y los conflictos semióticos.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 267-296.

Sastre, P., Boubée, C., & Scempio, V. (2013). Signos y matemática: un poco de historia.

Sastre, P. (2016). La relevancia de conocer el lenguaje matemático.

Schmidt, Q. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden [1.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, 59-84.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Springer, Dordrecht.

Taylor, S. J., & Bodgan, R. (1984). La observación participante en el campo. *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Barcelona: Paidós Ibérica*.

Testa, Z. (2013). Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo (Doctoral dissertation).

Torres, E. (2015). El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad (tesis doctoral). *Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona*.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 91-106.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic press.

Vera, M., & Parraguez, M. (2016). Pensamiento teórico-práctico para la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial.

Vergara Díaz, C., & Cofré Mardones, H. (2014). Conocimiento Pedagógico del Contenido: ¿el paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *40*(ESPECIAL), 323-338.

Viale Tudela, H. (2011). Organización de la clase: ¿preparo mi clase para enseñar o para que el alumno aprenda?

Vielma, R. (2020). Elementos históricos, conceptuales y didácticos en los libros de texto de cálculo: un estudio sobre el concepto de la derivada. *Paradigma*, *40*(1), 419-443.

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*, 449-468.