Neiva, 16 de junio de 2023

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Margarita Ladino Sánchez, con C.C. No. 1075291482, autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado Comprensión Matemática de las Funciones a través de un Ambiente Virtual de Aprendizaje

presentado y aprobado en el año 2023 como requisito para optar al título de MAGISTER EN EDUCACIÓN; autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

□□Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE: Margarita Ladino Sánchez

Firma:

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Comprensión Matemática de las Funciones a través de un Ambiente Virtual de Aprendizaje

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ladino Sánchez	Margarita

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Magister en Educación

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Maestría en Educación

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:**2023 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 141

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas _X__ Fotografías _X__ Grabaciones en discos _X_ Ilustraciones en general _X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas _X__ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros _X_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés
1. Funciones	1. Functions
2. Comprensión Matemática	2. Mathematical Understanding
3. Representaciones Semióticas	3. Semiotic Representations
4. Ambiente Virtual de Aprendizaje	4. Virtual Learning Environment

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se presentan los hallazgos relevantes sobre el avance en la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes de matemáticas que participaron en la implementación de una propuesta didáctica basada en un Ambiente Virtual de Aprendizaje. Esta herramienta se diseñó para integrar diferentes representaciones semióticas del concepto, además de involucrar los elementos teóricos, prácticos y evaluativos que se relacionaban con el aprendizaje del concepto. Para determinar el nivel de comprensión de los estudiantes, se concibió éste de acuerdo con la teoría de representaciones semióticas, lo cual implica que el estudiante comprende el concepto trabajado, en función de sus capacidades y habilidades para realizar tratamientos y conversiones en y entre registros semióticos de representación. El enfoque utilizado para la investigación fue cualitativo, se analizó el discurso de los estudiantes, las interacciones con el ambiente virtual, con sus pares y con el docente, y las respuestas que dieron a las actividades de tratamiento y conversión de representaciones semióticas. Como resultados relevantes en el estudio, se encontró que, a pesar de que la herramienta desarrollada favoreció el desarrollo de la comprensión matemática del estudiante sobre el concepto, no fue consistente en todos los participantes. Además, las preferencias de los estudiantes por el uso de ciertos registros por encima de otros, limita sus capacidades para convertir representaciones, lo que limita su comprensión. Varios de los resultados llevan a considerar la necesidad de vincular prácticas tradicionales de manipulación de representaciones en conjunto con las que se median con la tecnología.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This paper presents the relevant findings on the progress in the mathematical understanding of the concept of function of future mathematics teachers who participated in the implementation of a didactic proposal based on a Virtual Learning Environment. This tool was designed to integrate different semiotic representations of the concept, in addition to involving the theoretical, practical, and evaluative elements that were related to learning the concept. To determine the level of understanding of the students, it was conceived in accordance with the theory of semiotic representations, which implies that the student understands the concept worked on, based on their abilities and skills to carry out treatments and conversions in and between semiotic registers of representation. The approach used for the research was qualitative, the students' discourse was analyzed, as well as their interactions with the virtual environment, with their peers and with the teacher, and the responses they gave to the activities of treatment and conversion of semiotic representations. As relevant results in the study, it was found that, despite the fact that the developed tool favored the development of the student's mathematical understanding of the concept, it was not consistent in all the participants. In addition, students' preferences for the use of certain registers over others limit their abilities to convert representations, which limits their understanding. Several of the results lead us to consider the need to link traditional practices of manipulation of representations together with those that are mediated with technology

APROBACIÓN DE LA TESIS

Firma:

Nombre Jurado: Elizabeth Hurtado Martínez

Magister en Docencia de las Matematicas

Firma: Luis Alfonso Caro B 19414671

Nombre Jurado: Luis Alfonso Caro Bautista

Magister en Educación

Comprensión Matemática de las Funciones a través de un Ambiente Virtual de Aprendizaje

MARGARITA LADINO SÁNCHEZ

CÓDIGO: 20182174909

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
Docencia e Investigación Universitaria
Neiva
2023

Comprensión Matemática de las Funciones a través de un Ambiente Virtual de Aprendizaje

MARGARITA LADINO SÁNCHEZ

Trabajo de Anteproyecto para optar el título de Magister en Educación

Asesor:

Dr. MAURICIO PENAGOS

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
Docencia e Investigación Universitaria

Neiva
2023

DEDICATORIA

A mi madre Margarita Sánchez Sánchez, símbolo de amor, nobleza, incondicionalidad y lucha.

A mis hijos Antonella y Antoine, mi motor de vida y la inspiración de mis sueños.

A mi esposo Daniel A. Herrera Martínez por su amor y apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por las bendiciones recibidas.

Al Dr. Mauricio Penagos por el excelente apoyo recibido con su asesoría. Al docente Mag. Julio C. Duarte Vidal por brindarme el espacio en sus clases para la aplicación de la propuesta de investigación y a los docentes de la maestría por el maravilloso compartir de saberes dentro y fuera de los seminarios.

A mis familiares y amigos por su motivación y contribuir al logro de este proyecto.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se aborda la problemática principal de estudio la cual se fundamenta en los resultados obtenidos en las pruebas saber, particularmente en el área de las matemáticas, de los estudiantes colombianos que finalizan sus estudios de bachillerato e ingresan a la universidad. En particular, se realiza un acercamiento a la problemática local en el departamento del Huila, fundamentada en la revisión de las prácticas pedagógicas sugeridas por los Lineamentos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional. En tal sentido, se analizan y describen las falencias de los estudiantes en cuanto a la comprensión de los conceptos matemáticos. Por último, se definen los objetivos a alcanzar, las metas que se marcan para el proceso y las preguntas que guiarán la investigación.

1.1. Introducción

Dentro de las matemáticas en general existen conceptos que son transversales en cada una de las ramas de este conocimiento. Número, variable, polinomio y funciones, por nombrar algunos, son elementos que se utilizan desde la aritmética hasta el análisis, del álgebra a la topología, de la teoría de números a la teoría de grafos por lo que es de suma importancia alcanzar un dominio suficiente de estos fundamentos a lo largo de la formación de los estudiantes. En particular, las funciones matemáticas son herramientas de gran flexibilidad que permiten conectar de manera natural fenómenos de la vida real (Hernández, et al, 2021); contextos que no parecen estar relacionados con las matemáticas pueden verse modelados a través de funciones, cada cual más compleja según el conjunto de variables que intervengan.

Es posible encontrar el uso de funciones matemáticas en cada ciencia que se revise: resulta obvia su presencia en la física, química o demás ciencias naturales, pero también es posible ver la implementación de las funciones en la sociología, como el trabajo de Burt (2012a, 2012b), quien por medio de funciones establece una distribución de posicionamiento en sistemas de redes múltiples dentro de una topología social, definiendo así la estratificación y el prestigio como conceptos derivados de modelos matemáticos. Sin ir más lejos, las técnicas estadísticas y las mediciones psicométricas se basan en el uso de funciones, las relaciones funcionales y los sistemas de funciones (Borja, 2015).

Estas cuestiones dejan ver que, sea cual sea la profesión que un sujeto elija, el dominio sobre las funciones matemáticas tendrá un papel y resulta preferible que las domine. Esto tiene un aliciente cuando la decisión del sujeto es ser docente de matemáticas, pues el dominio del concepto pasa de ser preferible a crucial. Las funciones fundamentan el trabajo que los estudiantes realizarán desde el comienzo de su carrera, pues en su formación tendrán que pasar por diferentes Cálculos, Análisis y Geometrías, en donde los procesos básicos son a su vez fundamentados por las funciones (Eves, 1997).

Es por esto que el objeto matemático elegido para este trabajo es el concepto de función, principalmente en el nivel de profundidad que se enseña en la universidad, en un programa de formación de docentes: la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Surcolombiana. La intención será aprovechar las bondades de la tecnología y abordar el concepto dentro de un ambiente virtual de aprendizaje; se pretende que, a través de la aplicación de teorías sobre el proceso de comprensión matemática, lograr el dominio del concepto en quienes empiezan su formación como docentes.

Sin embargo, primero es menester analizar la situación en la que se encuentran los estudiantes que salen de su formación de bachillerato e ingresan a la universidad, pues con ello se puede tener una fotografía del estado actual del desarrollo del conocimiento matemático y, de esta manera, determinar la existencia de una problemática y concretar la pertinencia del trabajo desarrollado.

1.2. Conocimiento Matemático Evidenciado por los Estudiantes Colombianos

No resulta inapropiado anticipar la existencia de una problemática en cuanto al dominio del concepto de función de parte de los estudiantes que terminan su bachillerato y empiezan la universidad si se considera que esta temática se aborda en profundidad hasta el grado décimo y el grado once, los dos últimos años de educación de bachillerato en Colombia, como se verá en la sección destinada para ello (Sección 1.3).

Sin embargo, para dar una idea del estado actual del conocimiento de los estudiantes, resulta conveniente hablar de algunos elementos de referencia internacional como las pruebas PISA y de orden nacional como las pruebas Saber 11.

1.2.1. Panorama Internacional, Nacional y Local

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), con el fin de determinar el nivel de adquisición de conocimientos y competencias (que ellos consideran fundamentales para la participación de manera completa en la sociedad) de los estudiantes de 15 años de los países miembros, entre ellos Colombia, realiza una evaluación cada tres años denominada *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos* (PISA por sus siglas en inglés *Programme for International Student Assessment*). El último del cual se tienen resultados a la fecha de la escritura de este trabajo fue el de 2018.

La prueba evalúa conocimientos en tres áreas fundamentales: la lectura, las matemáticas y las ciencias. En ella participan alrededor de 9000 estudiantes de instituciones tanto oficiales como privadas y de sectores urbanos y rurales. Entre los ítems que se utilizan para evaluar en esta prueba se encuentran algunos de respuesta abierta, en donde el estudiante debe construir un escrito para responder; otros más en donde la respuesta, aunque también es abierta, en este caso debe ser corta, como solicitar un dato en específico; también se incluyen preguntas de selección múltiple con única y múltiple respuesta (CA, 2022).

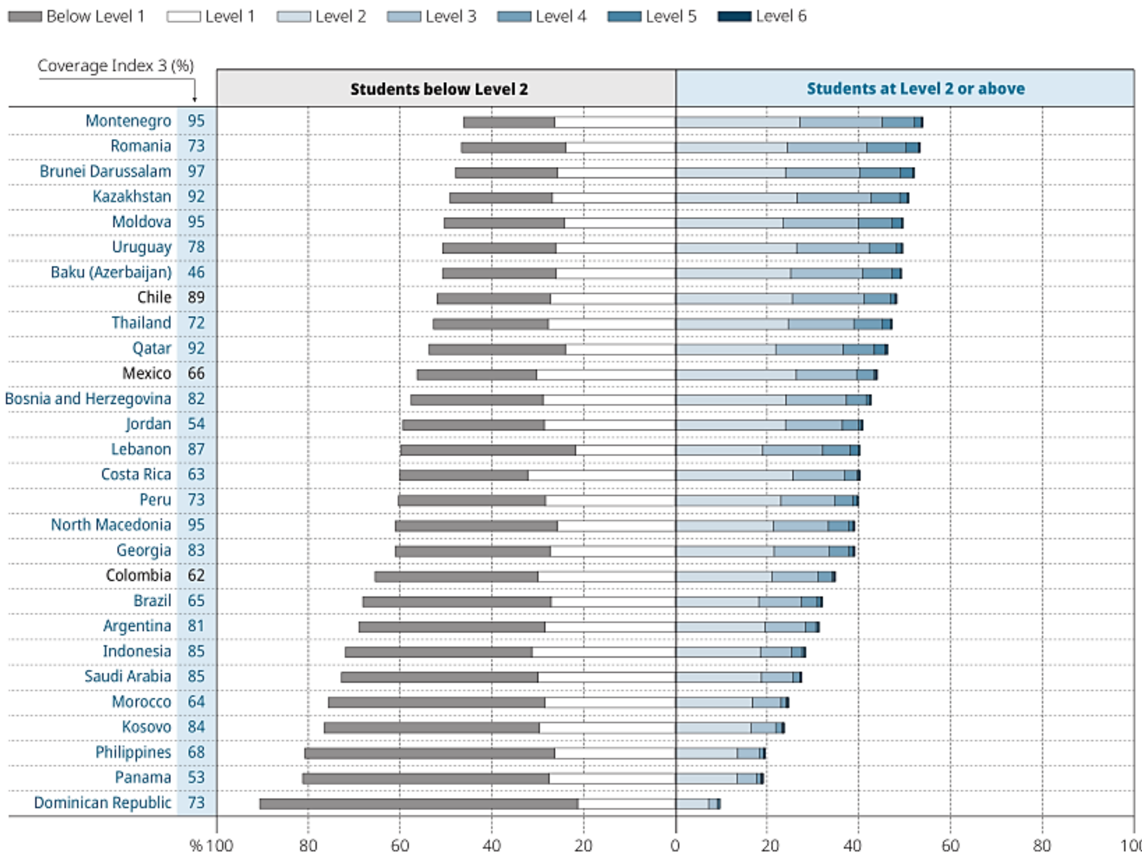
Colombia lleva participando en la prueba PISA desde el 2006 y su última participación es en el 2022, sin embargo, para esta última los resultados saldrán hasta 2023, por esta razón aquí se consideran los de 2018. En este año, la prueba PISA se enfocó en "evaluar la capacidad para formular, usar e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. […]" (OCDE, 2019, p. 104).

En la prueba de matemáticas, los estudiantes Colombianos obtuvieron 62 puntos de desempeño, lo cual, teniendo como referencia los 88 que son el promedio de la OCDE, evidencia una gran falencia. En la Figura 1 se observa cómo Colombia se ubica en los últimos puestos de la tabla, teniendo a más del 60% de los estudiantes participantes de la prueba en el nivel 1 o de menor desempeño. Estos resultados son desalentadores y, considerando todas las participaciones que ha tenido a lo largo de los años, lo es aún más, pues estos se han mantenido en el mismo rango, sin apenas avanzar (Borrero, 2020; Castro, 2021).

Si bien es cierto los resultados de la prueba PISA no caracterizan a los estudiantes Colombianos en su totalidad, es un indicador que permite ver, hasta una cierta medida, que existen rezagos educativos en las matemáticas, en comparación con el resto de los países miembros de esta organización. De igual manera, el puntaje obtenido por Colombia en matemáticas a nivel general fue 391, lo cual, si se considera que el promedio de la OCDE es de 489, sigue siendo considerablemente bajo (Figura 2).

Figura 1

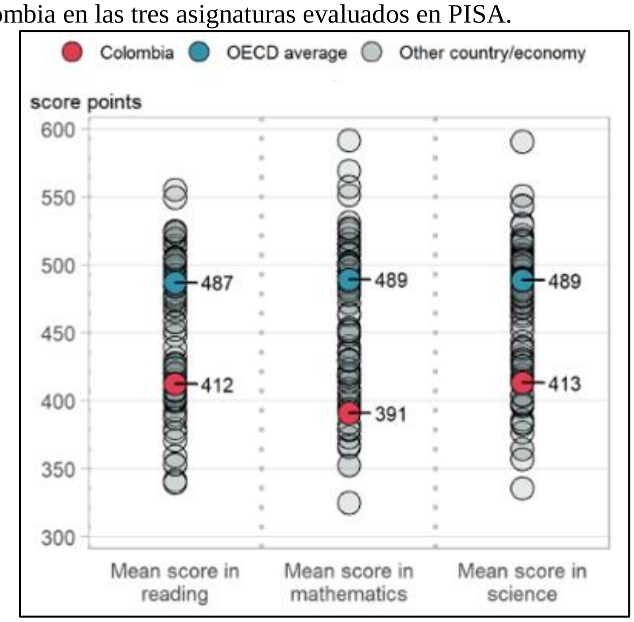
Sección de resultados de desempeño donde se ubica Colombia en Prueba PISA.



Nota. Tomado de OCDE (2019a, p. 108).

Figura 2.

Promedio global de Colombia en las tres asignaturas evaluados en PISA.



Nota. Tomado de OCDE (2019b, p. 2)

Lo mencionado antes en relación con el concepto de función, el hecho de que es transversal y que es indispensable para procesos de modelación de fenómenos de la vida real y situaciones cotidianas nos permite considerar que la mejora en su fundamentación cuando se forman los futuros profesores puede influir positivamente en la formación de futuras generaciones cuando ejerzan su profesión. Consideramos que los datos presentados anteriormente sirven como un punto de referencia para señalar la necesidad de formar en profundidad a los futuros docentes.

Ahora bien, a nivel nacional, en Colombia, como parte del plan de inspección y vigilancia de la educación, se implementan diversos exámenes en diferentes niveles, que obedecen ciclos propedéuticos de la educación obligatoria (primaria, secundaria, bachillerato). En este caso, como resulta de interés analizar los resultados de los estudiantes que finalizan su bachillerato, se tomará como referencia la prueba denominada Saber 11, aplicada por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes).

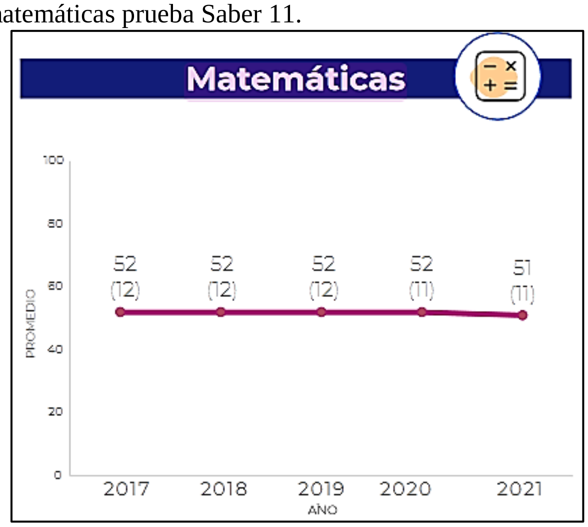
El Icfes realiza la prueba Saber 11 dos veces por año: en marzo y en septiembre, la presentan los estudiantes en cada institución del país que quiera participar y es obligatoria para todas las instituciones de carácter oficial. En el año siguiente a cada par de pruebas, el Icfes presenta su Informe Nacional de Resultados; para las fechas en las que se escribe el presente documento, se cuenta con el informe del año 2021 y se tomarán estos datos como referencia.

La prueba en cuestión evalúa competencias de los estudiantes en Lectura Crítica, Matemáticas, Ciencias Sociales y Ciudadanía, Ciencias Naturales e Inglés. En el caso de matemáticas, la prueba aborda los temas establecidos en los estándares básicos de desempeño que posee el MEN y se estructura en un conjunto de 25 preguntas de selección múltiple con única respuesta en los cuales se aborda la aritmética, álgebra, trigonometría, estadística y geometría.

En el 2021, los resultados de los estudiantes colombianos se mantuvieron en el mismo promedio aproximadamente que han obtenido en los cuatro años anteriores, 51 puntos (Figura 3), sin embargo, si se observa con detalle este resultado, en la gráfica que ofrece el Icfes en su informe, se puede observar que el 50% de los estudiantes apenas si alcanza el nivel 1 y 2 de rendimiento (**Figura 4**), lo cual es un gran porcentaje que indica una falencia significativa en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes Colombianos.

Como se mencionó anteriormente, si bien es cierto que la prueba PISA no representa a la totalidad de estudiantes Colombianos, la prueba Saber 11 del Icfes, por su carácter censal abarca un número mucho más amplio, y ratifica este resultado desalentador de bajo desempeño.

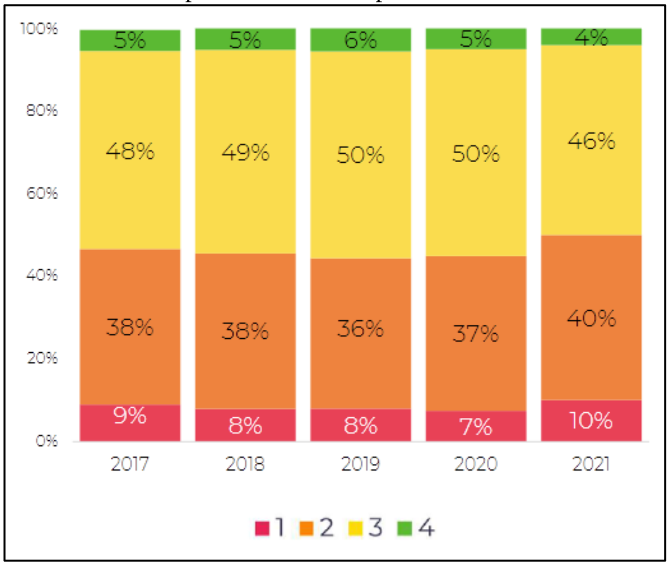
Figura 3.
Resultados promedios de matemáticas prueba Saber 11.



Nota. Tomado de Icfes (2022, p. 25).

Este indicador, aunque diferente en metodología y objetivo, muestra una situación similar en los resultados, lo cual ratifica el hecho de que existe un problema en el desarrollo de los conocimientos de los estudiantes.

Figura 4.
Distribución de puntajes de matemáticas pruebas Saber 11 por niveles.



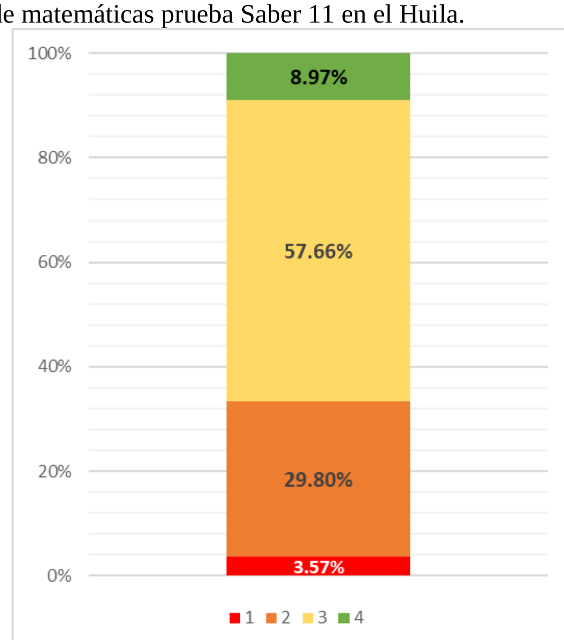
Nota. Tomado de Icfes (2022, p. 25)

En este sentido, como el aprendizaje está estrechamente relacionado con la enseñanza, queda claro que existe una problemática en la formación de los estudiantes en el área de matemáticas de la que no se escapa la educación superior, por lo que deben buscarse formas de influir positivamente en el proceso. Por lo anteriormente expuesto se destaca la pertinencia del presente trabajo, si bien es cierto que no se busca la mejora de las prácticas de los docentes en ejercicio, si se pretende trabajar con las generaciones futuras de docentes, es decir, empezar a influir desde la formación inicial de los docentes, en este caso particular, debido a las condiciones y limitaciones propias de esta investigación, se hará en principalmente en el concepto de funciones, pues la comprensión matemática de este objeto puede abonar al desarrollo de los demás debido a su transversalidad.

Por otro lado, en el contexto regional del Huila, también es posible encontrar datos al respecto del desempeño de los estudiantes en la prueba estandarizada Saber 11, y así observar cómo se ha llevado a cabo y hasta dónde se ha logrado en la adquisición de conocimientos matemáticos. Para ello, se utilizan los datos de la página del Gobierno Nacional *Datos*

Abiertos, en la sección de *Resultados Icfes por Desempeño*, filtrando por el departamento del Huila. Con esto se puede construir una distribución del rendimiento igual a la que se presenta a nivel Nacional tal como se ve en la Figura 5. Si bien es cierto que en los datos a nivel local se observa una mejora en cuanto al porcentaje del desempeño en los niveles 3 y 4, aún hay más del 33% de los estudiantes que sólo alcanzan el nivel 1 y 2 en el área de matemáticas.

Figura 5.
Distribución de resultados de matemáticas prueba Saber 11 en el Huila.



Nota. Elaboración propia con datos de Datos Abiertos (2022).

Con esto se refuerza la necesidad de incidir en el proceso educativo de los estudiantes en el área de matemáticas. Particularmente, en este trabajo, se busca influir positivamente en la mejora del proceso educativo en matemáticas al abordar la comprensión matemática de los futuros docentes en el concepto transversal de función. Logrando un dominio del objeto en cuestión y teniendo éste como característica tener presencia en múltiples ramas de las matemáticas, se pretende abonar a su futuro desempeño como docentes y que a su vez estos impulsen el desarrollo y adquisición de conocimientos de sus futuros estudiantes.

1.3. Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional

Estos documentos emanados del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), fungen como marco de referencia para la educación y a partir de ellos se construyen los Estándares Básicos de Competencia (EBC), editados por última vez en el 2006, y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), publicados en el 2016. Debido a que se pretende establecer la relevancia de que el docente de matemáticas domine el concepto de función, se tomará referencia de los dos documentos oficiales para observar con claridad la presencia de éste en el currículum.

Empezando por los EBC (MEN, 2006), es posible ver referencias a las funciones en los estándares de octavo a noveno, apareciendo por primera vez en el bloque de Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, de igual manera en los estándares de décimo a undécimo, dentro del bloque de Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos y el mismo bloque que los años anteriores. En la Tabla 1 se organizan los estándares que incluyen el concepto de función dentro de su definición.

Tabla 1.
Funciones dentro de los Estándares Básicos de Competencia.

Año	Bloque	Estándar
Octavo a Noveno	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos	• Modelo Situaciones de variación con **funciones** polinómicas. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de **funciones** y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de **funciones** específicas pertenecientes a familias de **funciones** polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
Décimo a Undécimo	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	• Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y **funciones** trigonométricas.
	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos	• Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas **funciones** básicas en contextos matemáticos y no matemáticos

	• Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de **funciones** polinómicas y racionales y de sus derivadas. • Modelo situaciones de variación periódica con **funciones** trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Nota. Adaptado de MEN (2006).

Se observa que la presencia de las funciones en el marco curricular nacional es escasa, ya que sólo aparecen en 7 estándares a lo largo de los años de octavo, noveno, décimo y undécimo. La narrativa en estos estándares se centra en el manejo de representaciones algebraicas y gráficas, dejando de lado representaciones verbales, figurales, tabulares y por supuesto, las dinámicas no se mencionan. Las funciones aparecen solamente en contextos de modelación de fenómenos y derivación, pero no se describen características específicas como que puedan ser inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Estas falencias se acentúan aún más en los DBA como se ve a continuación.

En los DBA (MEN, 2016), si bien también empieza su presencia desde el mismo grado octavo y están presentes hasta grado undécimo, lo que se espera del estudiante se plantea de una forma más básica, aunque se encuentran más elementos descritos por año que relacionan el concepto de función con diferentes procesos. En la **Tabla *2*** puede verse los DBA que se describen y están relacionados con el concepto de función.

Tabla 2.
Funciones en los Derechos Básicos de Aprendizaje

Año	**Derecho Básico de Aprendizaje**
Octavo	• Propone relaciones o modelos **funcionales** entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).
Noveno	• Determina y describe relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o **funciones**.
Décimo	• Reconoce la relación **funcional** entre variables asociadas a problemas. • Comprende y utiliza **funciones** para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones. • Reconoce algunas aplicaciones de las **funciones** trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos. • Relaciona características algebraicas de las **funciones**, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

	• Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las **funciones** y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.
Undécimo	• Utiliza e interpreta la derivada para resolver problemas relacionados con la variación y la razón de cambio de **funciones** que involucran magnitudes. • Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas **funciones** básicas en contextos matemáticos. • Usa propiedades y modelos **funcionales** para analizar situaciones y para establecer relaciones **funcionales** entre variables. • Encuentra derivadas de **funciones**, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas. • Calcula derivadas de **funciones**.

Nota. Adaptado de MEN (2016).

Se puede notar que ya tienen mayor presencia las diferentes representaciones del concepto, aparecen las tabulares que en los estándares no estaban y también se plantean más escenarios en los cuales las funciones son requeridas. Si bien este curriculum nacional es propuesto por el MEN como un marco de referencia, las instituciones educativas, con su autonomía consignada en el artículo 87 de la ley 115 de 1994 y el artículo 17 del decreto 1860 del mismo año, pueden definir, crear y expedir cualquier aspecto de sus manuales de convivencia, reglamentos escolares o curriculum, pueden incluir más elementos o disminuir los de referencia, haciendo imposible una revisión general de la presencia del concepto de función. Por lo tanto, si bien se puede considerar como una referencia, debe tenerse en cuenta que los elementos aquí citados son de carácter flexible.

En cualquier caso, lo que se ha presentado da muestra una vez más de la necesidad existente del dominio de los futuros docentes sobre el concepto de función. En sus hipotéticas futuras clases, los docentes en formación tendrán que ser capaces de enseñar a sus estudiantes cómo se definen las funciones, cómo se implementan, qué características poseen, cómo están involucradas en los procesos de modelación, qué representaciones utilizan, qué tipo de operaciones pueden realizar, etc., es decir, deben abarcar la totalidad de la comprensión del concepto matemático de función, lo que implica que ellos mismos deben alcanzar la comprensión de este concepto.

1.4. Dificultades en las Enseñanza de las Matemáticas

Como se ha descrito, las matemáticas pueden considerarse como una materia que suele plantear retos significativos tanto para los estudiantes como para los educadores (Weiss et al., 2019). Para muchos estudiantes, las matemáticas son difíciles de entender y de aprender debido a su naturaleza abstracta y a su lenguaje simbólico que a menudo puede parecer ajeno y confuso (Gusdorf y Megías, 2019). Los profesores, por su parte, enfrentan el desafío de hacer las matemáticas accesibles y comprensibles, lo cual puede ser especialmente difícil cuando se trata de conceptos complejos como el de función.

De manera general, en el proceso de enseñanza de las matemáticas, pueden aparecer diversas dificultades ligadas a varias características:

Naturaleza abstracta

Las matemáticas, por su naturaleza, se enfocan en ideas abstractas y conceptos que a menudo no tienen una representación física directa en el mundo real (Lorenzato, 2015). Esta abstracción permite a las matemáticas ser una herramienta universal, aplicable en una amplia variedad de contextos. Sin embargo, también puede hacer que sea difícil para los estudiantes comprender y apreciar plenamente. Por ejemplo, un número es un concepto abstracto. Podemos tener cinco manzanas o cinco lápices, pero "cinco" en sí mismo es una idea, un concepto que no puedes tocar ni ver en un sentido físico. A pesar de que a los niños se les enseña a entender estos conceptos a través de objetos físicos, eventualmente deben hacer la transición a comprender los números y las operaciones matemáticas de una forma más abstracta, sin la necesidad de objetos físicos. Algo similar ocurre con conceptos más avanzados como los de las ecuaciones, las variables, las derivadas, las integrales, o las funciones, por mencionar solo algunos (Zapata, 2020). Todos ellos son constructos abstractos que permiten describir y resolver problemas complejos, pero que no tienen una existencia física concreta. Esto es particularmente desafiante para los estudiantes que aprenden mejor a través de experiencias concretas y tangibles.

A diferencia de disciplinas como la biología o la geografía, donde los estudiantes pueden observar directamente los fenómenos que están estudiando o interactuar con ellos de alguna manera, en matemáticas los estudiantes deben trabajar con conceptos e ideas que existen solo en el ámbito del pensamiento y el razonamiento (Porlán, 2018). Para ayudar a los estudiantes a comprender estos conceptos abstractos, los maestros a menudo usan analogías, modelos y visualizaciones. Por ejemplo, pueden usar gráficos para representar funciones, o pueden usar objetos físicos para demostrar las operaciones aritméticas. Sin embargo, incluso con estas herramientas, la abstracción inherente de las matemáticas puede seguir siendo un desafío para muchos estudiantes.

Dificultad de los conceptos

Los conceptos matemáticos, como se ha mencionado anteriormente, a menudo tienen una esencia abstracta y compleja. Pero algunos conceptos van más allá de esa abstracción y presentan desafíos inherentes que pueden ser difíciles de superar para los estudiantes. Un ejemplo es el concepto de límites en cálculo, que implica acercarse a un valor específico de una manera que puede parecer contraintuitiva. Otro ejemplo es el concepto de infinito, que puede ser extremadamente difícil de comprender plenamente dado que contradice nuestra experiencia cotidiana del mundo (Bejarano y Páez, 2022). Al enfrentarse a tales conceptos, los estudiantes pueden sentir que se les pide que comprendan algo que parece estar más allá de su alcance cognitivo.

Esta percepción de inaccesibilidad puede llevar a los estudiantes a experimentar frustración y desánimo, especialmente si sienten que no están progresando en su comprensión a pesar de sus mejores esfuerzos (Gamboa, 2014). En muchos casos, los estudiantes pueden comenzar a dudar de su propia capacidad para aprender matemáticas, y pueden empezar a creer que simplemente "no son buenos para las matemáticas". Esta mentalidad puede ser perjudicial para su autoestima y motivación, y puede disminuir su compromiso con la materia, llevándolos a evitar las matemáticas en la medida de lo posible.

Ansiedad matemática

La ansiedad matemática es un fenómeno bien documentado que afecta a muchos estudiantes. Esta ansiedad puede manifestarse de muchas formas, desde una ligera inquietud o incomodidad al abordar problemas matemáticos hasta un miedo extremo que puede provocar evitación total de cualquier tarea relacionada con las matemáticas (Yanuarto et al., 2019). Este miedo puede ser causado por una serie de factores, como experiencias negativas previas con las matemáticas, falta de confianza en las habilidades matemáticas propias, presión social o estereotipos negativos sobre las matemáticas.

Cuando los estudiantes experimentan ansiedad, su capacidad para procesar información y resolver problemas puede verse seriamente afectada. La ansiedad puede distraer la atención de un estudiante, dificultando la concentración en los problemas matemáticos y disminuyendo la capacidad de recordar y aplicar conceptos y procedimientos matemáticos (Rojas et al., 2017). Además, el miedo a las matemáticas puede hacer que los estudiantes eviten las matemáticas siempre que sea posible, lo cual limita su exposición y práctica, obstaculizando aún más su progreso.

Enseñanza tradicional

La enseñanza de las matemáticas ha evolucionado significativamente a lo largo del tiempo. Sin embargo, en muchos contextos educativos, las técnicas de enseñanza tradicionales, que a menudo implican la transmisión directa de conocimientos del profesor al estudiante y la memorización de fórmulas y reglas, todavía son comunes (Capera et al., 2022). Estas técnicas pueden ser efectivas para algunos estudiantes, pero no necesariamente para todos. Los estudiantes tienen diferentes estilos de aprendizaje y pueden beneficiarse de diferentes enfoques de enseñanza (Zapatera, 2020). Por ejemplo, algunos estudiantes pueden aprender mejor mediante métodos visuales, mientras que otros pueden aprender mejor a través de la manipulación física de objetos o a través de la resolución de problemas del mundo real.

La enseñanza centrada en la memorización puede ser especialmente problemática para los estudiantes que no aprenden mejor de esta manera. Aunque la memorización de ciertas fórmulas y reglas puede ser útil en ciertos casos, este enfoque puede hacer que los estudiantes pierdan de vista el significado subyacente y el razonamiento detrás de estas fórmulas y reglas. En lugar de entender realmente los conceptos matemáticos, los estudiantes pueden terminar simplemente recordando una serie de pasos sin entender por qué esos pasos son válidos o cuándo aplicarlos (Alsina, 2020). Además, este enfoque puede hacer que las matemáticas parezcan una serie de trucos desconectados en lugar de una disciplina coherente y lógica. Por lo tanto, es crucial que los profesores de matemáticas utilicen una variedad de estrategias de enseñanza para atender a los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes y para promover una comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

1.4.1. Dificultades en la Enseñanza del Concepto de Función

Al hablar específicamente del concepto de función, este es uno de los pilares fundamentales en el estudio de las matemáticas, pero también uno de los que más dificultades presenta tanto para su enseñanza como para su aprendizaje (Campeón et al., 2018). Algunas de las dificultades específicas están relacionadas nuevamente con la abstracción, el lenguaje que se utiliza cuando se enseña, la falta estrategias usadas que propicien la visualización del concepto y la descontextualización del contenido.

El concepto de función puede ser difícil de entender para algunos estudiantes porque requiere un alto nivel de abstracción. Una función es una relación especial entre dos conjuntos de números donde a cada número del primer conjunto (el dominio) se le asigna exactamente un número del segundo conjunto (el rango). Los estudiantes a menudo luchan por comprender esta idea abstracta. Además, existe una problemática relacionada con la notación y el lenguaje que se utiliza para las funciones (por ejemplo, $f(x)$) puede resultar confusa para los estudiantes.

Como se mencionaba, otra característica que puede dificultar el aprendizaje de las funciones es el hecho de que, a pesar de que se pueden representar visualmente como gráficos en un plano cartesiano, esto es suficiente, se requiere de estrategias que exploten esta virtud, como la geometría dinámica, sin embargo, muchas de las prácticas de los docentes no incluyen esta alternativa como eje central de su enseñanza, aún cuando se han demostrado ampliamente sus bondades (Ziatdinov y Valles, 2022).

Por último, otro aspecto relevante a mencionar de la enseñanza del concepto de función y que genera problemáticas en el aprendizaje de éste, es la descontextualización del contenido. La forma de darle contexto a los objetos matemáticos y aterrizarlos, es por medio de las aplicaciones. Si el docente no utiliza las aplicaciones del concepto para el desarrollo de su praxis, los estudiantes lucharán por entender cómo se implementan en situaciones reales, lo cual puede hacer que parezcan irrelevantes y esto puede desalentarlos a aprender más sobre ellas (Bueno et al., 2020).

En resumen, la enseñanza de las matemáticas, y del concepto de función en particular, presenta varias dificultades. Los profesores pueden superar estos desafíos utilizando una variedad de estrategias, como la enseñanza diferenciada, la incorporación de ejemplos del mundo real, y la utilización de representaciones visuales y manipulativas para ayudar a los estudiantes a entender los conceptos abstractos.

1.5. La Mejora de la Comprensión y los Resultados

Los datos que se han presentado anteriormente nos invitan a reflexionar y a mejorar nuestras prácticas docentes para incidir positivamente en el desarrollo de los conocimientos matemáticos de los estudiantes colombianos, particularmente los de la región del Huila.

La preocupación por la mejora de la comprensión de los conceptos por parte de los estudiantes y sus resultados ya se viene dando desde la comunidad académica, motivada por la existencia de la relación entre el desarrollo de los municipios de Colombia y la puntuación que se ha obtenido históricamente en matemáticas, Mora y Estrada (2020) hablan sobre esto y analizan el impacto que tiene. Debido a la transcendencia que tienen las matemáticas para la vida de los ciudadanos en términos generales, el pobre desarrollo de estos conocimientos lleva consigo a un pobre desenvolvimiento de la actividad empresarial, el progreso de la industria se ve disminuido y el alcance y acceso de las personas a situaciones laborales de gran rentabilidad se ve limitado.

Esta situación ha motivado el desarrollo de actividades alternativas que buscan intervenir el proceso educativo de los jóvenes, de los profesores en servicio y de los docentes en formación. Erazo (2018) trabajó con los escolares en la generación de mejores hábitos de estudio, se enfocó, en términos generales, en la economía de fichas, técnica conductista de condicionamiento operante, en la cual se promovían y reforzaban actitudes por medio de premios. González y Díaz (2018), se acercaron a la realidad del docente de matemáticas y trataron de mejorar su desempeño para incidir en los resultados por medio del trabajo en comunidades de aprendizaje, el desarrollo profesional situado y la mejora continua de la práctica pedagógica. Pineda, et al (2019), buscaron mejorar la formación inicial de docentes de matemáticas analizando la forma en la que se planificaban las clases y trataron de que los futuros docentes se fijaran más en las necesidades de sus estudiantes.

En el caso de la presente investigación, el enfoque que se busca, como se ha mencionado, es mejorar el nivel de comprensión de los futuros docentes en el concepto de funciones matemáticas. El abordaje de este objeto matemático, al considerarlo como transversal, versátil y presente en todas las ramas, permitiría abonar a futuro al desarrollo de los docentes en formación, lo cual implicará, una vez estos estén en servicio, una posible mejora de sus prácticas de enseñanza con lo cual se podría propiciar el desarrollo y adquisición de conocimientos matemáticos en sus futuros estudiantes, mejorando así el desempeño actualmente mermado.

Como los trabajos de Martínez et al (2021) y Calderón-Zambrano et al (2018), se buscará un enfoque en el cual la tecnología sea fundamental, pues los resultados que se obtienen cuando esta se implementa de manera correcta suelen ser prominentes. Se pretende entonces generar un ambiente virtual de aprendizaje para abordar las funciones como concepto transversal y lograr que se llegue a esa comprensión matemática del objeto que permita al docente en formación desenvolverse eficazmente en su desarrollo.

Pero el abordaje debe ser consistente con lo que se pretende y una forma para lograr el nivel de comprensión matemática del concepto es a través de las denominadas representaciones semióticas (Osorio y Nesterova, 2018). Por medio de los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas entre registros de representación, se puede manipular el concepto de función y alcanzar tanto la noesis como la semiosis necesarias para llegar al dominio del objeto matemático, para lograr la comprensión matemática objetivo (Galindo, et al, 2020). Es ésta la fundamentación teórica de la presente investigación con la que se pretende alcanzar lo planteado y así favorecer indirectamente en el bajo desempeño de las futuras generaciones por medio del avance en la formación de los futuros docentes.

1.6. Problema de Investigación

Con el fin de sintetizar lo descrito hasta el momento, se puede englobar que la problemática que motiva esta investigación es el bajo desempeño de los estudiantes en matemáticas, el cual depende directamente de su proceso de enseñanza y éste a su vez de la formación que hayan adquirido sus docentes.

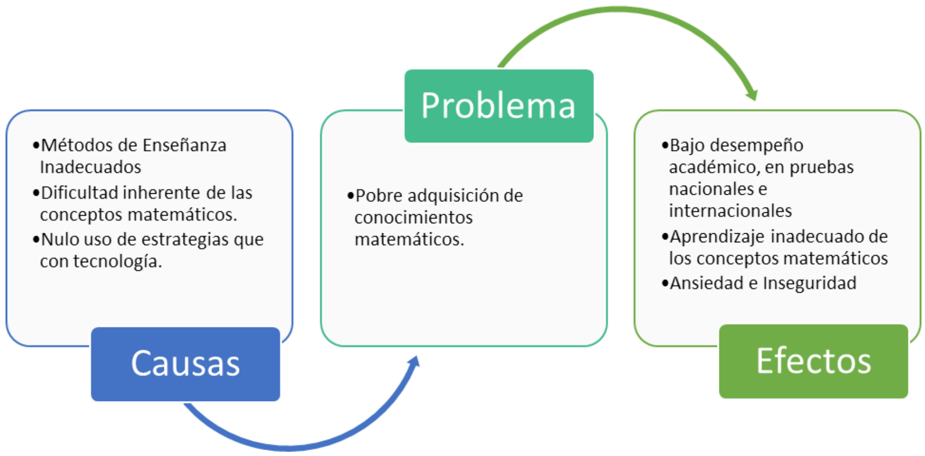
Así las cosas, se busca en este trabajo intervenir el proceso educativo de los futuros docentes, específicamente en el concepto de función, pues se considera que es clave y transversal a todas las ramas de las matemáticas y otras ciencias. La intervención se realiza aprovechando la tecnología debido a sus bondades, creando para ello un entorno virtual de aprendizaje en el cual se utilizan diversas representaciones semióticas del concepto, con lo cual se tratará de lograr que realicen procesos de tratamiento y conversión entre registros para generar la comprensión matemática del objeto en cuestión.

Si tuviera que escribirse como una pregunta, el problema de investigación se centraría en el desarrollo de la comprensión del concepto de función y sería:

¿Un ambiente virtual de aprendizaje basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas permite alcanzar la comprensión matemática del concepto de función en futuros docentes de matemáticas?

Además, para ejemplificar las relaciones establecidas entre las causas, el problema y las consecuencias, se realiza en la **Figura 6** un árbol que permite exponerlo.

Figura 6.
Árbol del problema.



Nota. Elaboración Propia.

Al disponer de una pobre adquisición de conocimientos matemáticos esto repercute en que los estudiantes alcancen bajos resultados en las pruebas nacionales e internacionales, lo cual puede producir escenarios de ansiedad e inseguridad, pues son choques de realidad en los cuales se reflexiona al respecto del tiempo desperdiciado durante su formación académica de primaria y secundaria. La mejora de su proceso educativo no sólo puede influir en sus resultados sobre pruebas estandarizadas, sino también en su propia percepción, sus sensaciones de logro y avance, y su autoestima.

1.7. Justificación

Aunque a lo largo del escrito se ha expuesto la necesidad de intervenir el proceso educativo de los futuros docentes en pro del mejoramiento de su comprensión con el fin último a futuro de influir en la mejora de los resultados de sus hipotéticos estudiantes, en esta sección se hará un esfuerzo por argumentar más sobre los elementos específicos de la propuesta como lo es el uso de ambientes virtuales y las representaciones semióticas.

Desde Herrera (2006) pueden ser considerados los ambientes virtuales de aprendizaje como una herramienta efectiva para el desarrollo de conocimientos de los estudiantes. El autor, en su análisis de las funciones cognitivas del aprendizaje, presenta argumentos sobre la manera en que cada una de las fuentes que activan el proceso de aprendizaje pueden ser reemplazadas por equivalentes virtuales con el fin de obtener resultados satisfactorios. La intención principal en estos ambientes es la modificación de estructuras mentales mediante el diálogo interno del estudiante que es activado a través de los entornos documentales, ambientales y sociales.

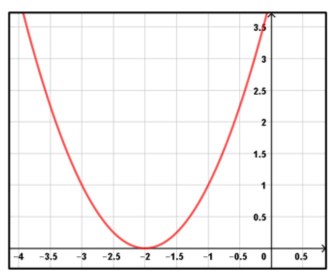
Como lo describen Osorio y Nesterova (2018), estas fuentes en la enseñanza tradicional se basan en libros, el entorno natural que los rodea y los profesores, compañeros y demás miembros del plantel educativo. Sin embargo, cuando se trabaja en un entorno virtual de aprendizaje, las fuentes documentales de los libros pueden reemplazarse con bases de información en internet (multimedia, libros electrónicos, hipertexto, bibliotecas virtuales), el diálogo y observación del entorno puede trabajarse por medio de la realidad virtual, la realidad aumentada, la realidad mixta y los simuladores; por último, su entorno social puede proveerse por medio de la interacción con otras personas a través de correo electrónico, foros de discusión, videos y enlaces.

Estos elementos no sólo cambian de manera equivalente las fuentes de activación de los procesos de aprendizaje, sino que las potencia, multiplica sus capacidades; en este caso, se habla de que el entorno virtual de aprendizaje permitirá desarrollar sus conocimientos de manera asistida con la computadora, logrando así construir su dominio sobre el objeto trabajado (Obaya, 2003). Por otro lado, los libros pueden ser limitados en la institución donde esté ubicado el estudiante, pero si posee acceso a internet, su información es prácticamente ilimitada. De igual manera, si está dentro del aula, su capacidad de observación del entorno es mínima, pero si tiene acceso a entornos mediados en realidad virtual o a simulaciones, el límite desaparece. Sus interacciones en el aula sólo pueden darse con sus compañeros o docentes, pero en internet el rango de alcance de las interacciones es ilimitado.

Por otro lado, Raymond Duval, en su primer esbozo realizado en 2006 y en la primera presentación en 2012 sobre el problema de la comprensión matemática y el uso de registros de representación semiótica, ayuda a esclarecer a la vez que argumenta sobre la necesidad de su implementación. Duval (2006) abordó el análisis de los desafíos que existían al momento de que un sujeto llegara a comprender matemáticamente un objeto. En ese momento el autor se enfoca en los procesos fundamentales de entendimiento de la semiosis y la noesis, con los cuales, respectivamente, un aprendiz extrae características de una representación semiótica, articula sus elementos, determina sus relaciones y entiende la manera en la cual está construida de tal manera que puede internalizar los símbolos y formas que están presentes; posteriormente, luego de la manipulación de esta representación puede acomodar sus conocimientos en una estructura que le permitirá después relacionarla con otras representaciones, otros conocimientos y así transferir lo aprendido y llegar a esta comprensión (Duval, 2012).

Esta manipulación de las representaciones la describe más en profundidad Duval (2016), a través de los denominados procesos de *tratamiento* y *conversión* en donde el sujeto, respectivamente, transforma las representaciones semióticas del objeto dentro del mismo registro de representación (por ejemplo, si se tiene una función representada algebraicamente, una multiplicación de sus elementos por un escalar la transforma pero sigue estando en el mismo registro algebraico, entonces se dice que hace un *tratamiento de la representación*), o las transforma entre diferentes registros de representación (por ejemplo, si el estudiante es capaz de tomar esa representación algebraica de la función y la gráfica, se dice que hace una *conversión de la representación*, en éste caso, del registro algebraico al registro gráfico). En la Figura 7 se muestra un ejemplo de estos dos procesos con una representación semiótica de una función parabólica.

Figura 7.
Tratamiento y conversión de una representación semiótica (función parabólica).

Registro Algebraico	Registro Algebraico
$\boxed{f(x) = x^2 + 4x + 4}$	$\boxed{f(x) = x^2 + 4x + 4}$
▼▼Tratamiento ▼▼	▼▼Conversión ▼▼
Registro Algebraico	Registro Gráfico
$\boxed{f(x) = (x + 2)^2}$	

Nota. Elaboración propia. En el tratamiento, la factorización simplemente cambia la expresión algebraica, pero sigue estando en el mismo registro algebraico. En la conversión, sigue siendo el mismo objeto, pero esta vez se representa en el registro gráfico.

Con estos dos procesos se alcanza la comprensión matemática del concepto manipulado. Debido a esto es que, para la propuesta didáctica que se desarrolla en este trabajo, se toma como base el uso de diversas representaciones semióticas y se propiciará el trabajo de los futuros docentes a través de los procesos de tratamiento y conversión de éstas, buscando así alcanzar la comprensión matemática.

1.8. Objetivos

1.8.1. Objetivo General

Caracterizar la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes alcanzada durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas.

1.8.2. Objetivos Específicos

- Identificar y describir las dificultades que los futuros docentes enfrentan en la comprensión del concepto de función.
- Detallar la postura conceptual y metodológica que sustenta el diseño del ambiente virtual de aprendizaje basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas.
- Implementar la propuesta didáctica y evaluar su influencia en la comprensión matemática del concepto de función que poseen los futuros docentes.
- Categorizar y analizar el avance en la comprensión matemática del concepto de función evidenciado por los participantes durante y después de la implementación del ambiente virtual de aprendizaje.
- Caracterizar las mejoras logradas en la comprensión del concepto de función por parte de los futuros docentes como resultado de la implementación de la propuesta didáctica.

1.9. Preguntas de Investigación

1.9.1. Pregunta principal

¿Cuáles son las características de la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes alcanzada durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas?

1.9.2. Preguntas secundarias

- ¿Cuáles son las dificultades que los futuros docentes enfrentan en la comprensión del concepto de función?
- ¿Cuáles son los elementos conceptuales y metodológicos que sustenta el diseño del ambiente virtual de aprendizaje basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas del objeto matemático "función"?.
- ¿Cuál es el nivel de avance de la comprensión matemática de los futuros docentes sobre el concepto de función después de implementar la propuesta didáctica?
- ¿Cómo se categoriza la comprensión matemática del concepto de función evidenciado por los participantes durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje?

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

En este capítulo se presenta la revisión de la literatura relacionada con la problemática enfrentada en la presente investigación. Se parte de los estudios que ponen de manifiesto la problemática a nivel internacional, se acota hacia los esfuerzos realizados en Colombia y se precisa en la relevancia del estudio con la presentación del escaso trabajo en el Huila. Posteriormente se presentan los referentes que han propuesto posibles alternativas para menguar el fenómeno y se finaliza con acercamientos similares a lo planteado en esta investigación.

2.1. Desarrollo del Conocimiento Matemático, un Problema Sin Resolver

Ya fuera por la propia naturaleza de la disciplina, por la amplitud de los conceptos involucrados, la complejidad de las estructuras mentales necesarias para la articulación de estos, o por la intimidante relevancia que posee en el quehacer diario de los individuos, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han ocupado un gran espacio en el campo investigativo de la educación.

Con sólo revisar los trabajos de Copeland (1970) y sus análisis desde la perspectiva sicologista del aprendizaje, los de Carpenter y Lehrer (1999) y sus esfuerzos para mostrar la necesidad de establecer los vínculos entre el aprender y la comprensión, los de Skemp (2012) y su presentación sobre la necesidad de replantear la forma en la que se analiza el conjunto de estructuras cognitivas necesarias para aprender matemáticas, los de Clements y Sarama (2014) y su llamado a la articulación de actividades dentro de trayectorias con objetivos específicos, los masivos replanteamientos de las ideas de Schoenfeld (2016) para rearticular la resolución de problemas a las necesidades actuales o las innumerables propuestas de integración apropiada de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje (Bray y Tangney, 2017), es suficiente para darse cuenta que estos procesos aún tienen un largo camino investigativo por recorrer.

Desde el punto de vista de la psicología, el proceso de aprendizaje de las matemáticas en la actualidad se ha centrado en el análisis de los obstáculos a los cuales los estudiantes deben hacerle frente en el momento de aprender nuevos conceptos, apropiarse de nuevos procedimientos y dominar la implementación de ellos. Plaza, González y Vasyunkina (2020) los describen con precisión, categorizándolos como obstáculos ontogenéticos, didácticos, epistemológicos, cognitivos, pedagógicos, mentales, semióticos, de comunicación, formalistas y algunos más derivados directamente de la complejidad de algunos elementos en cuestión.

En este sentido, estos obstáculos pueden aparecer en variados escenarios a través de cualquier nivel de formación. Si bien es cierto que algunos como los de comunicación, los semióticos, pedagógicos, formalistas y mentales pueden disminuir su presencia al escalar de etapa educativa (bachillerato, universitaria, posgrado), otros más como los cognitivos, epistemológicos o los derivados de la complejidad inherente del concepto se presentan transversalmente a través de todo el espectro educativo (Plaza, González y Vasyunkina, 2020).

Bell (2021), en la última edición de su libro de historia de las matemáticas, ya retomaba los problemas que surgieron al querer aprender matemáticas con base en la estructura misma de ésta, sus fundamentos epistemológicos, las tendencias empiristas y la necesidad de *realizar* (entendiendo esto como llevar a la realidad) matemáticas. Es por esto que se requieren de los análisis didácticos y pedagógicos para plantear, buscando optimizar los resultados en cuanto a comprensión, estrategias alternativas que permitan superar y dejar atrás estas problemáticas.

2.2. Alternativas y Propuestas Relevantes ante la Problemática

Para abordar estas problemáticas y tratar de propiciar la superación de estos obstáculos del proceso de aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes de los diferentes niveles, se ha implementado hábilmente la tecnología. A nivel didáctico y pedagógico la tecnología juega un papel crucial, transformando las actividades típicas y estáticas en novedosas y dinámicas, eliminando a su paso la pasividad del estudiante y reemplazándola por un estado activo; se aprovechan sus cualidades para la integración de diversas representaciones semióticas que acompañen el proceso de comprensión de los objetos matemáticos; se articulan simultáneamente diferentes medios de comunicación y se llega al punto de desarrollar formas de volver tangibles aquellos conceptos abstractos, aterrizando en simulaciones y experiencias concretas aquellos elementos con altos niveles de complejidad (Grisales-Aguirre, 2018).

Aunque esto no significa que se hayan solucionado todos los inconvenientes. Aún con la cada vez más omnipresente tecnología en la educación, su implementación genera retos propios de ésta. Tal como lo reseña Grisales-Aguirre (2018), los resultados en el aprendizaje de las matemáticas cuando se implementa la tecnología dependen "del tipo de tecnología y recurso usado, de las condiciones institucionales […] y de las características individuales de quienes intervienen en este proceso" (p. 211). Con la tecnología surgen problemáticas que antes podían no impactar tanto en el proceso educativo, por ejemplo, la economía, pues existen situaciones en las cuales se pueden crear brechas de aprendizaje entre quienes pueden acceder a las tecnologías en su casa además de la institución, frente a aquellos que sólo pueden llegar a ella en el claustro educativo.

Es más, aparecen otra problemática aún más sutil, que afecta al proceso de enseñanza directamente y de manera indirecta al de aprendizaje, lo que son las brechas digitales derivadas de los cambios generacionales (Romero, 2020) y la resistencia a la implementación de la tecnología en el aula por parte de algunos docentes, este último afectando particularmente a Colombia, en donde la situación se agrava debido a la pobreza de la inclusión digital de algunos sectores (Rueda-Ortiz y Franco-Avellaneda, 2018).

Ahora bien, dejando de lado las dificultades mencionadas con la tecnología, si se observan algunas investigaciones recientes, es posible notar las principales tendencias que aparecen. Por ejemplo, el uso de la tecnología como generador de motivación para el aprendizaje de las matemáticas (Velázquez et al., 2020), en donde la sola presencia de ésta, en espacios donde se trabaja de manera tradicional, consigue un aumento significativo de la predisposición del estudiante hacia el aprendizaje. Aun cuando los aprendices están acostumbrados a integración de la tecnología en sus clases usuales, la multitud de formatos en los que pueden presentarse un mismo material, supera la monotonía.

Es más, cuando se imbrican las herramientas digitales con los recursos étnicos particulares de una zona rural, no sólo la innovación tecnológica aporta, sino que realza la relevancia de procesos ancestrales y revindica métodos o técnicas que la propia cultura muchas veces menosprecia. Ramón y Vilchez (2019) lo evidenciaron en su análisis de convergencia didáctica étnica-digital, en el cual lograron, además de motivación y compromiso, mejoras en los procesos de los estudiantes cuando realizan construcciones de conceptos, resoluciones de problemas y modelación matemática, apoyando procedimentalmente sus métodos étnicos con herramientas digitales.

En particular, en el aprendizaje de las matemáticas, las representaciones semióticas son unos de los principales elementos que se ven potenciados significativamente cuando se apoya con la tecnología. Desde el uso de calculadoras gráficas (Castañeda, Quiroz y Amaya, 2021), hasta uso de simuladores (Pinzón, 2018), llegando al uso de softwares especializados como GeoGebra (Melgarejo et al., 2019), pasando por la realidad aumentada (Osorio y Nesterova, 2018) y al punto de implementar procesamiento digital de imágenes (Galindo, Osorio y Serrano, 2020), de todas las formas posibles se han aprovechado las bondades de la tecnología para explotar los diversos registros de representación y así manipular, desde distintas perspectiva, cada objeto matemático susceptible de ser representado semióticamente.

2.3. El Centro en las Representaciones Semióticas y la Tecnología

El uso particular de estas representaciones semióticas con la tecnología juega un papel principal en la vanguardia de la investigación en la matemática educativa. Se encuentran integradas en prácticamente todas las propuestas y diseños instruccionales, ya sea etnoeducación, enfoques ontosemióticos, perspectivas de modelos y modelación, resolución de problemas, aprendizaje basado en tareas, test estandarizados, etc.

Como se mencionaba, el planteamiento puede ser tan simple como reemplazar la graficación tradicional con papel y lápiz por el uso de calculadora graficadoras como Desmos en el trabajo de Castañeda, Quiroz y Amaya (2021), quienes mejoraron los niveles de comprensión del concepto de funciones lineales en estudiantes de secundaria. Con sólo este cambio, promovieron mejoras en las actividades cognitivas del estudiante que están relacionadas con la manipulación, interacción y dinamismo.

Un paso más de este tipo de estudios fue la propuesta de Melgarejo et al. (2019), quienes, a partir del enfoque ontosemiótico y la teoría de situaciones didácticas, construyeron una secuencia de actividades enfocadas al desarrollo del pensamiento geométrico y espacial en el aprendizaje de la geometría. Utilizaron representaciones semióticas de registros figurales, verbales, gráficos y algebraicos, consiguiendo así cuatro formas diferentes para permitirle al estudiante manipular un mismo objeto geométrico, consiguiendo de este modo un avance significativo en sus niveles de comprensión matemática de los conceptos.

Empleando una base similar en GeoGebra, pero llevándolo al mundo real a través de la Realidad Aumentada, se presentó el trabajo de Osorio y Nesterova (2018), investigadores que mezclaron representaciones gráficas bidimensionales y tridimensionales dinámicas junto con elementos del registro algebraico, verbal y tabular para la enseñanza del cálculo de volúmenes de cuerpos y áreas de figuras poco usuales. Con su trabajo, se incursionó en la Realidad Aumentada con el aprendizaje de las matemáticas de nivel universitario en el campo del calculo multivariado, ubicando objetos intangibles y difícilmente representables dentro de espacios reales y manipulables.

Finalmente, dentro de la integración de la tecnología para potenciar el trabajo con las representaciones semióticas también se pueden encontrar casos como el de Pinzón (2018), el cual empleó la plataforma de simulaciones de diferentes ciencias *Phet Simulations* en donde creó circuitos y utilizando la ley de Ohm enseñó el concepto de fracciones equivalentes. En este mismo sentido, pero en el campo del procesamiento digital de imágenes, está el trabajo de Galindo, Osorio y Serrano (2020), los cuales programaron un libro digital interactivo en donde los registros semióticos figurales, gráficos y matriciales se superponían entre sí para propiciar el aprendizaje de las operaciones entre matrices.

En particular, estos dos últimos trabajos presentados estructuraron sus actividades como una secuencia didáctica, instruccionalmente como un objeto de aprendizaje en un ambiente virtual. Esto no sólo permite organizar el contenido en función del orden jerárquico y los objetivos de aprendizaje, sino que también propicia la reusabilidad, la mejora continua de fragmentos de la secuencia, la granularidad y otras características propias de estos recursos, lo cual, además de la practicidad, logra darles un sentido de aporte a la comunidad de educadores (Rehak y Mason, 2003).

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se articulan los elementos teóricos que fundamentan la propuesta realizada en esta investigación. Debido a que se trabaja con la comprensión matemática, el marco teórico de las representaciones semióticas y los subprocesos de tratamiento y conversión entre registros semióticos juega un papel central en el basamento de la investigación. Además, la propuesta se enuncia en un entorno de aprendizaje virtual, así que también se hace la presentación de los aspectos teóricos vinculados a la implementación de herramientas tecnológicas que se han de tener en cuenta. Finalmente se hace una síntesis sobre el manejo de estos elementos dentro de la propuesta, con la cual el lector podrá tener claridad al respecto de la implementación de las bases teóricas en el proyecto.

3.1. Marco de Representaciones Semióticas

Como ya se adelantaba en la justificación (Sección 1.7), el marco sobre el cual se sustenta la implementación de la propuesta es el de las Teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval (1998, 2006, 2012, 2016).

3.1.1. Registros y Representaciones

Los registros de representación semiótica, o registros semióticos, se definen como un sistema de signos los cuales poseen, como función principal o fundamental, comunicar a quien interactúe con ellos, las características de los elementos dentro del sistema (Duval, 1998). En el caso específico de las matemáticas, existen multitud de registros de representación, por mencionar algunos, está el registro verbal, numérico, figural, tabular, matricial, gráfico, algebraico, entre otros (Duval, 2012).

Por ejemplo, un objeto matemático como la función polinomial, puede representarse dentro del registro de representación verbal como sigue:

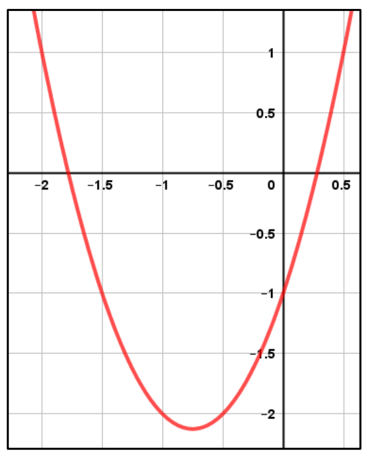
Registro Verbal de una función polinómica de ejemplo:

Polinomio de segundo grado cuyos coeficientes, en forma descendente según su la potencia son dos, tres y menos uno.

La misma función polinómica en el Registro Algebraico sería:

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1$$

La misma función polinómica en el Registro Gráfico sería:

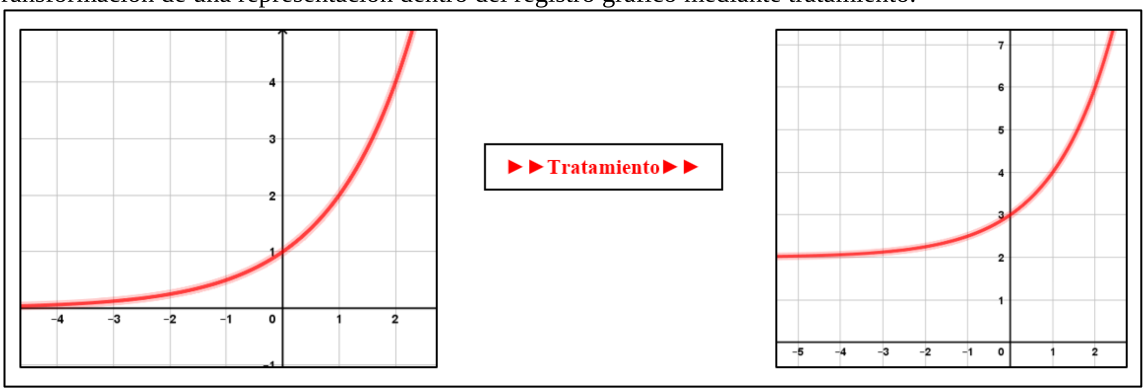


Ahora bien, estas representaciones semióticas, se definen como parte de los registros, es decir, son elementos que están inmersos en un registro específico. La representación semiótica cumple la tarea de mediar la interacción del sujeto con el objeto matemático (Duval, 2006), con lo cual este objeto abstracto puede concretarse y ser analizado a detalle en sus características. La manipulación de las representaciones semióticas puede darse de dos maneras, mediante el tratamiento y la conversión, si el futuro docente es capaz de llevar a cabo estos dos procesos con un objeto matemático en particular, se dice que *comprende matemáticamente* dicho objeto (Duval, 2016).

3.1.2. Tratamiento de Representaciones

Como se adelantaba, el tratamiento de una representación semiótica es la transformación de dicha representación sin salir del mismo registro de representación en el cual se formuló inicialmente. En este proceso se consideran transformaciones que modifiquen o no las características, por ejemplo, una traslación de una representación gráfica de una función exponencial, si bien altera su representación, continúa estando en el mismo registro, el gráfico (Figura 8).

Figura 8.
Transformación de una representación dentro del registro gráfico mediante tratamiento.

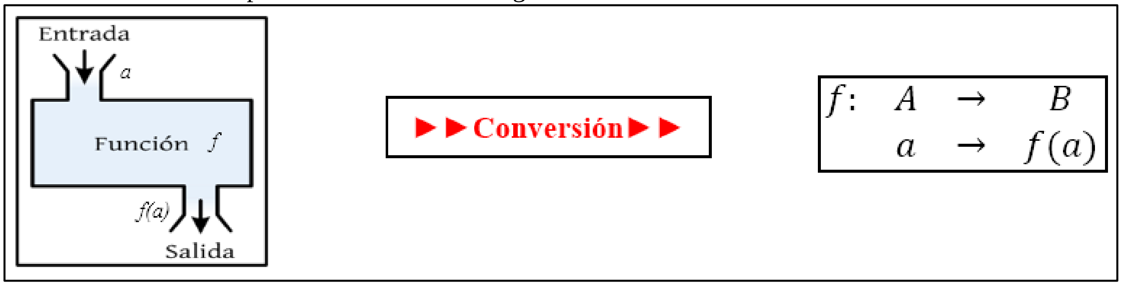


Nota. Elaboración propia.

3.1.3. Conversión de Representaciones

En la conversión de representaciones semióticas, la transformación implica un cambio de registro, del verbal al gráfico, del gráfico al algebraico, del tabular al figural, etc. Por ejemplo, un diagrama figural que represente una función puede reescribirse de manera simbólica como sigue:

Figura 9.
Transformación de una representación entre dos registros mediante conversión.



Nota. Elaboración propia.

3.2. Visualización Matemática

El marco de representaciones semióticas no estaría completo como fundamento de la investigación si no se menciona el proceso de visualización matemática descrito por Fernando Hitt (1996; 1998) y, Ricardo Cantoral y Gisela Montiel (2003). Este proceso va más allá de la simple observación, en el desarrollo de la visualización matemática el sujeto que observa una representación de un objeto abstracto debe ser capaz de entender las reglas con las cuales fue construido, las relaciones que se establecen entre los elementos que componen la representación y la forma en la cual interactúan las partes imbricadas entre ellas y con otros elementos.

El estudio sobre el empleo de la visualización matemática para el desarrollo del conocimiento matemático es ampliamente estudiado (De Guzmán, 1996; Hershkowitz et al, 1996; Nesterov, et al, 2000; Torregosa y Quesada, 2007; Marmolejo y Vega, 2012; Orozco, et al, 2016; Osorio y Nesterova, 2018; Galindo et al, 2020). Los autores se centran en la importancia del uso de distintas representaciones y cómo el entendimiento de la forma en la que se construyen y la extracción de las características de estas representaciones, propician el entendimiento del concepto trabajado.

De Guzmán (1996) describe cómo los expertos en algún objeto matemático son capaces de ver de forma intuitiva las representaciones del mismo, pues llegan a poseer una imagen mental de éste, en donde sus características particulares se presentan u ocultan de tal manera que se generan situaciones problema que pueden ser enfrentadas con el propio dominio de la representación. Así, se pueden seleccionar formas efectivas y eficaces para resolver los problemas, abstrayendo de los enunciados las características para formular sus propias representaciones y manipularlas con su conocimiento, todo ello con base en procesos de visualización matemática que han hecho a lo largo de su formación.

Aunque parezca estar relacionada la visualización matemática al registro de representación gráfico, esta concepción es errónea. El proceso de visualización puede realizarse sobre cualquier tipo de representación, de las algebraicas, por ejemplo, el sujeto que visualiza matemáticamente la representación es capaz de obtener características como lo son las magnitudes, variables, coeficientes, relaciones, operaciones, etc. (Marmolejo y Vega, 2012).

3.3. Entornos Virtuales de Aprendizaje

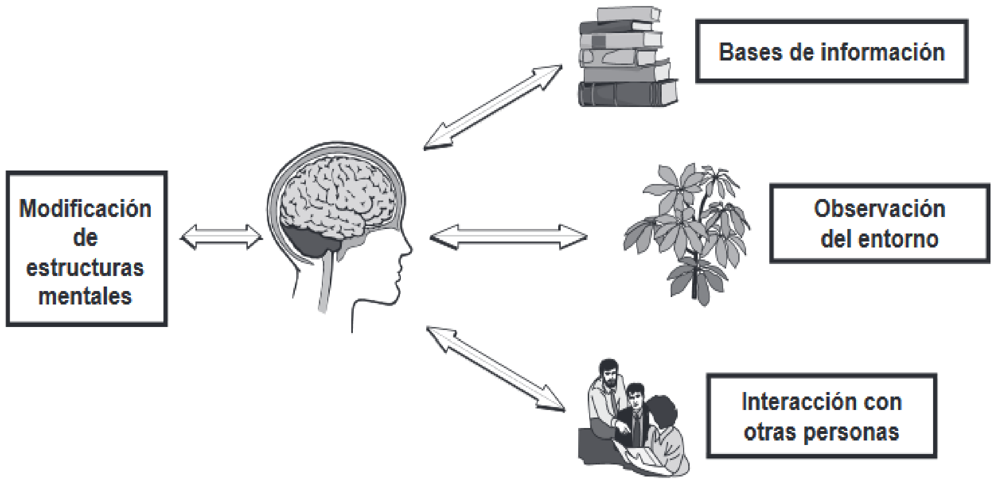
Al igual que con los trabajos que incluyen la visualización matemática, la implementación de Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA) ha sido trabajada en multitud de formas. Por ejemplo, Osorio y Nesterova (2018), utilizaron la realidad aumentada para crear su EVA y así promover el aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples; Galindo et al (2020), crearon un libro virtual como EVA en *eXeLearning* para la enseñanza de las operaciones con matrices mediante el procesamiento digital de imágenes; Olivo-Franco y Corrales (2020) replantearon totalmente la praxis de la enseñanza de la matemática en su institución para aprovechar plenamente el potencial de los EVA.

En términos generales, un Entorno Virtual de Aprendizaje puede constituirse con un conjunto de actividades que involucren software específico, portales de distribución de contenido, trabajos colaborativos en redes sociales, sistemas de gestión de contenido, y material multimedia (Quiroz, 2011). La intención de éstos, según Quiroz (2011), es generar experiencias de formación en el entorno virtual, los cuales tengan su centro en el estudiante y busquen aportar un aprendizaje significativo. Sin embargo, para ello se requiere que quienes lo implementen tengan las competencias digitales necesarias, pues pueden surgir inconvenientes de índole técnica o práctica que pueden entorpecer el proceso.

Los ambientes virtuales de aprendizaje, debido al avance de las tecnologías, la masificación de ésta y los esfuerzos por implementarlas en la educación, se convirtieron en tendencia prácticamente inapelable dentro de los procesos formativos (Flavin, 2017). Sin embargo, el uso de éstas debe hacerse de manera consciente, la optimización y adecuación de las tecnologías en el aula no es trivial y puede llegar a generar más conflictos de los que resuelve. Es debido a esto que en este trabajo se consideran las bases del Aprendizaje Asistido por Computadora (AAC) (Salas, 2007) con el fin cimentar el diseño y aplicación del ambiente virtual de aprendizaje de tal manera que los resultados obtenidos sea los mejores posibles.

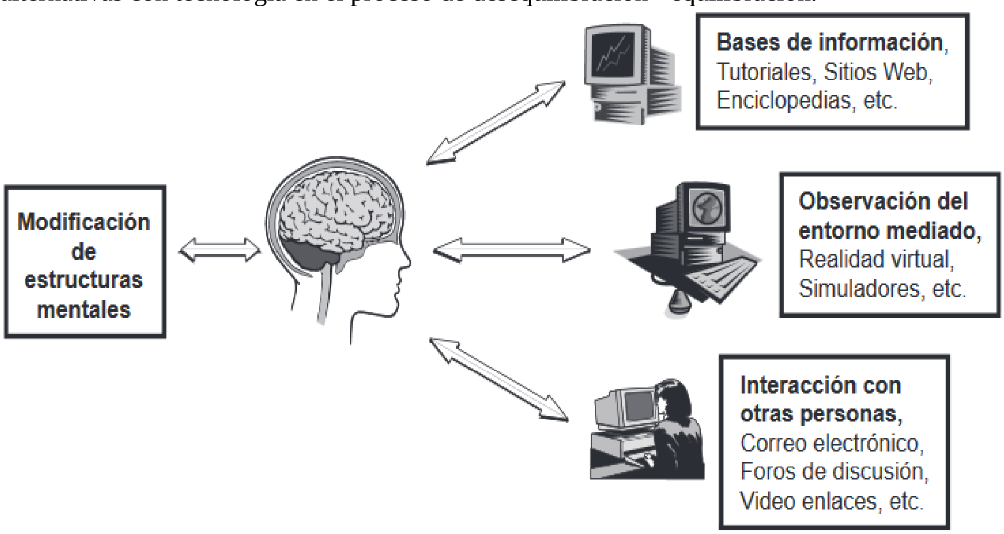
Con esto en mente, se considera que la implementación de la tecnología debe enfocarse en la construcción del conocimiento, debe permitir la creatividad, la autorregulación y hacer que el proceso de formación sea activo, interactivo y que facilite el autoaprendizaje (Hernández et al., 2016). Para ello, en el AAC se propone alternar las fuentes tradicionales (**Figura 10**) que activan el proceso de desequilibración – equilibración sin el uso de las tecnologías por otras en las cuales si se implementen (**Figura 11**) (Osorio, 2018).

Figura 10.
Fuentes tradicionales de desequilibración - equilibración.



Nota. Fuente (Osorio, 2018, p. 22).

Figura 11.
Fuentes alternativas con tecnología en el proceso de desequilibración - equilibración.



Nota. Fuente (Osorio, 2018, p. 22).

En función de optimizar la implementación de la tecnología en el ambiente virtual de aprendizaje diseñado y obtener los mejores resultados con su implementación, se incluirán: el conjunto de teoría necesaria sobre la temática, así como enlaces en los cuales se pueda profundizar; situaciones problema que pongan al estudiante en contextos reales con los cuales explore el uso del concepto; y espacios de interacción y colaboración con sus compañeros que les permitan fortalecer sus aprendizajes en conjunto.

3.4. Síntesis del Marco Teórico

Englobando de manera sintética el marco teórico que fundamenta este proyecto se puede decir que se tomarán las indicaciones para el reemplazo de los medios tradicionales de activación del aprendizaje por medios virtuales para formular un entorno de aprendizaje virtual (Quiroz, 2011). En este entorno se desarrollarán actividades que propicien la manipulación de representaciones semióticas entre diferentes registros de representación a través de los procesos de tratamiento y conversión de representaciones, esto con el fin de alcanzar una comprensión matemática del concepto de función (Duval, 1998). En conjunto con esta manipulación, se generarán en la instrucción espacios acordes para que el estudiante realice el proceso de visualización matemática, pues con ella como base, podrá abstraer todas las características de las representaciones y generar esas imágenes mentales del concepto que se estructurarán en su conocimiento (Hitt, 1996).

CAPÍTULO 4. MARCO METODOLÓGICO

A continuación, se presentan los elementos metodológicos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de la investigación. Se describe el tipo de investigación, las variables consideradas, el diseño instruccional, los instrumentos de recolección de información y el método de análisis para los datos recopilados. También, se define la población objetivo, la muestra con la que se trabajará y la estructura general de acercamiento a los individuos.

4.1. Diseño de la Investigación

Metodológicamente la investigación debe presentar fundamentos en cuanto a su tipo, obtención de datos, análisis y estructura. En este apartado se abordarán estos elementos en función de concretar el procedimiento que se sigue para desarrollar y alcanzar los objetivos planteados.

4.1.1. Tipo de investigación

En función de los objetivos, el método de análisis y el objeto de estudio, las investigaciones pueden tener diversos enfoques. Con base en Hernández-Sampieri, et al (2018), existen tipos cuantitativos, cualitativos y mixtos de investigación. Cada enfoque posee sus características y cuenta con elementos en su estructura que permiten garantizar la obtención del conocimiento buscado:

- Las investigaciones cuantitativas suelen tener un carácter más acotado, normalmente se emplean para medir el comportamiento de los fenómenos y utilizan el análisis estadístico como base para sus conclusiones. Se caracterizan por contener hipótesis probables y teorías demostradas, y el camino seguido para generar conclusiones es deductivo, con una secuencia bien definida con el fin de generar pruebas sólidas a comportamientos específicos. Otra característica es la capacidad que tienen de generalizar sus resultados, el control que se posee del fenómeno estudiado, la precisión con la que se entregan los resultados, la posibilidad de replicarlos y de predecir futuros comportamientos.

- Por otro lado, las investigaciones cualitativas, siguiendo con Hernández-Sampieri, et al (2018), son enfoques en los cuales el planteamiento del problema suele ser amplio y se acota en función del proceso investigativo. Los estudios de este tipo comúnmente se desarrollan en ambientes naturales, donde difícilmente se controlan todas las variables. En este caso, los resultados y el sentido que tienen se extraen de los mismos datos, pues son ellos los que se interpretan, categorizan y permiten generar conclusiones. Otra característica del enfoque cualitativo es su carácter inductivo, pues suelen establecerse posiciones a partir de elementos particulares y empezar a estudiar con el fin de obtener o generar aseveraciones más generales. Dentro de los beneficios de este enfoque está en la profundidad del significado de las acciones, cuando se trata de ciencias sociales, el análisis de las múltiples realidades de los sujetos y el establecimiento de consensos y relaciones entre ellos. La riqueza interpretativa y la contextualización del fenómeno estudiado es una parte inherente a estos estudios.
- Con la combinación de los dos tipos de investigación anteriores aparece el enfoque mixto, en el que, además de la recolección y análisis de datos cuantitativos, se integran datos cualitativos que permiten dar una mayor fortaleza a los resultados y conclusiones generadas. El beneficio de este enfoque mixto de debe al hecho de poseer una perspectiva mucho más amplia y profunda que en los enfoques sólo cuantitativos o sólo cualitativos. El nivel de teorización que se alcanza es mucho

mayor al de ambos, la riqueza investigativa es altamente apreciada, pues con este tipo de estudios se abren líneas de investigación con cada resultado.

En la presente investigación se abordará el aprendizaje de los estudiantes de manera descriptiva, analizando las características de su proceso al desarrollar las actividades plantadas en el Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA). Se tomarán datos cualitativos del proceso de aprendizaje, el desarrollo evidenciado por los estudiantes y se identificarán las características de dicho proceso. Finalmente, se analizará el avance conseguido por parte de los participantes al finalizar el desarrollo de las actividades del ambiente virtual de aprendizaje y se contrastará y triangularán los resultados con los elementos analizados en los momentos anteriores. Debido a esto, se define que la metodología que se seguirá es la cualitativa.

4.1.2. Fases de la investigación

Para alcanzar los objetivos planteados en la investigación se plantea el desarrollo de las siguientes fases:

- Diseño del AVA basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas del concepto de función.
- Diseño de la secuencia de instrucción para la implementación del ambiente virtual de aprendizaje desarrollado.
- Intervención del proceso educativo de los futuros docentes con la secuencia instruccional y la implementación del ambiente virtual de aprendizaje.
- Análisis, descripción y caracterización del aprendizaje de los estudiantes del concepto de función durante el desarrollo de las actividades dispuestas en el AVA.

4.1.3. Variables

Se definen cuatro variables a considerar en el proceso investigativo, entre las que se encuentra una que es independiente del proceso y las otras tres dependientes de la implementación de la propuesta didáctica. En la **Tabla 3** se presentan las variables, su tipo, la definición de éstas y las fuentes de los datos que se recopilarán.

Tabla 3.
Variables de la investigación, definición y método de recolección de datos.

Variable	Tipo	Definición	Fuentes de Datos
Acceso a Materiales	Independiente	Se corresponde con la capacidad que tienen los sujetos del estudio para acceder a los materiales necesarios para el desarrollo de las actividades, los cuales son: • Computadora o Smartphone • Lápiz, papel y otros útiles escolares. • Conexión a internet.	Se realizan las adecuaciones para que los participantes tengan acceso a todo lo necesario para el proceso, con lo cual se asegura que la variable está controlada.
Motivación	Dependiente	La motivación del futuro docente se define en función de su interés por realizar la actividad, el compromiso por desarrollarla completamente y su esfuerzo por hacerla de manera correcta.	• Porcentaje de completitud de actividades por estudiante. El cual se calcula en función de las partes que posea cada actividad.
Aprendizaje sobre el Concepto de Funciones	Dependiente	Se define como el proceso cognitivo y afectivo por medio del cual el estudiante percibe, interpreta, adquiere, transforma y desarrolla un conjunto de conocimientos y habilidades.	• Observaciones en clase mediante el formato de registro de datos experimentales (Anexo A) • Captura de imágenes, audio y video.
Comprensión Matemática del Concepto de Función	Dependiente	Tiene que ver con la capacidad del estudiante para realizar tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas de las funciones.	• Tratamientos correctamente realizados por actividad. • Conversiones correctamente realizadas por actividad.
Representación Semiótica de Funciones	Independiente	Se refiere a las diferentes formas en que se presentará el concepto de función en el ambiente virtual de aprendizaje, incluyendo representaciones gráficas, algebraicas, tabulares, verbales, entre otras.	Se diseñan las actividades y ejercicios presentados en el ambiente virtual de aprendizaje integrando diversidad de registros de representación.
Dominio de Conceptos Clave	Dependiente	Esta variable mide el nivel de dominio que tienen los futuros docentes de los conceptos clave asociados con las funciones, como dominio, rango, continuidad, entre otros.	• Las actividades y ejercicios presentados en el ambiente virtual de aprendizaje.
Habilidades de Tratamiento y Conversión	Dependiente	Se refiere a la capacidad de los futuros docentes para traducir entre diferentes representaciones semióticas de las funciones y para manipular estas representaciones para resolver problemas.	• Ejercicios y problemas resueltos durante y después de la implementación de la propuesta didáctica.

Nota. Elaboración propia.

4.1.4. Instrumentos de recolección de información

De acuerdo con el orden en que aparecen las fuentes de datos en la Tabla 3, a continuación, se presenta una breve descripción de lo que serían los instrumentos de recolección:

- **Fotografías y Grabaciones de Video:** se considera una herramienta valiosa en la recolección de información al implementar el AVA. Permite obtener datos directos sobre el desempeño de los participantes, y ofrece la posibilidad de capturar situaciones reales de aprendizaje en tiempo real, lo que permite observar detalles y elementos que no podrían ser recordados o descritos posteriormente. Estas herramientas favorecen el análisis y la interpretación posterior de las situaciones observadas, lo que enriquece la recolección de información y permite una comprensión más profunda de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el ambiente virtual de aprendizaje. Se espera recolectar información sobre las interacciones entre los participantes, su nivel de comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos trabajados, así como también sobre los recursos y herramientas utilizados en el ambiente virtual de aprendizaje.
- **Formato de registro de datos experimentales (Anexo A):** el cual se diseña en función de captar información relevante que aparece en el momento de la implementación de la propuesta y está compuesto de espacios para comentarios generales y particulares que los futuros docentes realicen en relación con el AVA, también inquietudes que tengan en relación con el tratamiento y otras de este tipo que realicen con respecto a las conversiones. Además, se deja un espacio para reseñar los fallos, errores o falencias de los futuros docentes, los aspectos de motivación que se perciban y las interacciones relevantes que el docente investigador note.

4.1.5. Método de análisis de datos

Para el análisis de los datos se establece el proceso principal derivado del enfoque cualitativo:

Se plantea la integración de los datos cualitativos registrados en el momento de la implementación, en el proceder de la clase y capturados en imágenes, audios, videos y el formato de registro. Con ellos se realiza una triangulación en la búsqueda de describir la influencia de los elementos involucrados en la propuesta sobre el aprendizaje de los futuros docentes, su dominio y comprensión del concepto de función. Con este conjunto de datos se puede combinar el análisis y producir riqueza en los resultados, con lo cual obtendremos resultados cualitativos del proceso de aprendizaje del estudiante y su logro en la comprensión del concepto matemático de función.

El trabajo realizado tiene un carácter descriptivo principalmente y busca en particular determinar la influencia de la propuesta sobre el desarrollo del dominio y la comprensión de los futuros docentes con respecto al concepto de función, por ende, el lector debe tener en consideración que existen aspectos que, aunque puedan resultar de interés, quedan fuera del análisis en cuanto se cumplen los objetivos. De igual manera se dedica una sección para los trabajos futuros derivados de los elementos que surgen en el estudio y que no son analizados en esta investigación.

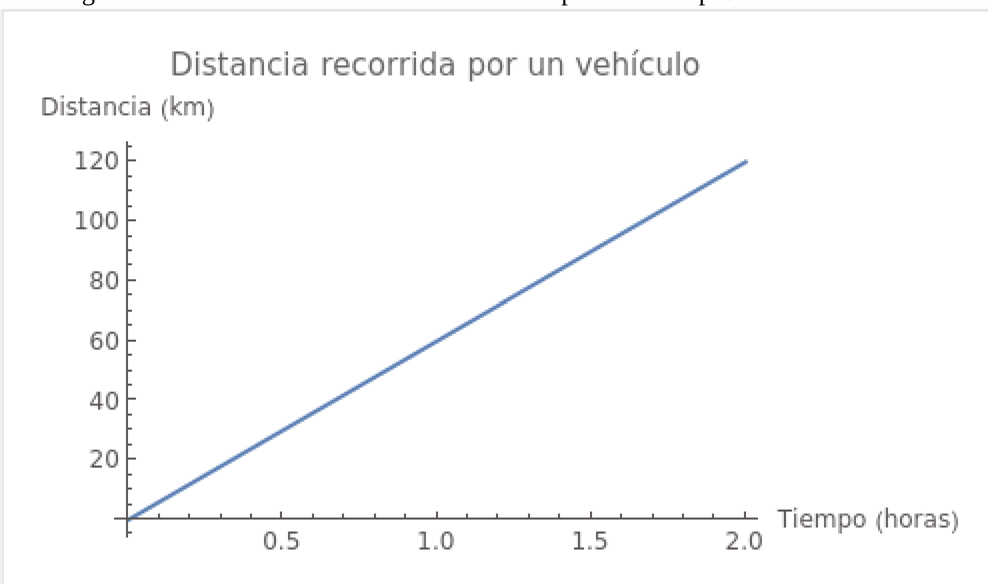
4.1.6. Elementos conceptuales del objeto que se consideraron

Cualquier propuesta didáctica para el aprendizaje de nuestro objeto matemático, las funciones, debe considerar la integración de varios elementos conceptuales. A continuación, se presentan algunos de los más relevantes, sin ahondar de manera formal en ellos, pues dentro del ambiente virtual se integra esta parte:

- **Definición de función**: Es fundamental que los futuros docentes comprendan que una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto (el dominio) exactamente un elemento de otro conjunto (el rango).
- **Notación de función**: Los futuros docentes deben familiarizarse con la notación de función, como $f(x)$, y entender que x es la variable independiente y que $f(x)$ representa a la variable dependiente.
- **Tipos de funciones**: conocer los diferentes tipos de funciones es indispensable para la formación de los futuros profesores, como las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, entre otras. Cada una de estas funciones tiene propiedades y comportamientos únicos que los estudiantes deben aprender a reconocer y utilizar.
- **Graficación de funciones**: se debe aprender a graficar funciones, lo que implica entender cómo los valores de x se traducen en valores de $f(x)$ y cómo estos pares ordenados se representan en un gráfico.
- **Análisis de funciones**: los futuros docentes deben aprender a analizar funciones en términos de sus propiedades, como su dominio, rango, intersecciones con los ejes, pendientes, máximos y mínimos, y asíntotas.
- **Operaciones con funciones**: se deben buscar el trabajo con las operaciones con funciones, como la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones.
- **Funciones y su relación con la variación**: los futuros docentes deben entender cómo las funciones pueden usarse para modelar la variación en diversas situaciones, como la velocidad de un vehículo en función del tiempo.

Para ilustrar estos conceptos, podríamos considerar la función lineal $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente de la línea y b es la intersección y con el eje y. Esta función es útil para modelar situaciones de variación constante, como la situación en donde un vehículo se mueve a una velocidad constante. Por ejemplo, si un vehículo se mueve a $60\ km/h$, podríamos representar su distancia recorrida en función del tiempo con la función $f(t) = 60t$, donde t es el tiempo en horas y $f(t)$ es la distancia en kilómetros.

Figura 12.
Representación gráfica de la variación de la distancia con respecto al tiempo.



Nota. Elaboración propia.

En la **Figura 12**, puede verse que a medida que el tiempo t aumenta, la distancia $f(t)$ también aumenta de manera lineal, lo que refleja la velocidad constante del vehículo.

4.1.7. Diseño instruccional de la propuesta

El diseño instruccional que se utiliza para la implementación de la propuesta está compuesto por 5 partes, y se consideran sesiones de 2 horas de duración.

- **Introducción y resolución de dudas de la sesión anterior:** en este espacio el docente investigador describe el desarrollo de la actividad que se implementará en la sesión actual y, si existen dudas sobre actividades de la sesión anterior, buscará realizar la solución de éstas (tiempo estimado 10 – 20 minutos).

- **Desarrollo sección individual de la actividad:** el docente investigador les pide que accedan a la sección individual de la actividad planteada para la sesión, la cual los estudiantes desarrollan de manera individual (30 minutos).
- **Desarrollo sección colaborativa de la actividad:** se pide a los futuros docentes que se reúnan en grupos máximo de tres. En estos grupos comparten los resultados obtenidos en la sección individual, la consolidan con sus compañeros y realizan un informe que entregarán al docente investigador (30 minutos).
- **Institucionalización de la actividad:** el docente investigador resuelve frente al grupo la actividad planteada, enfocándose en los aspectos clave que se requerían para su correcto desarrollo y pide que se cercioren los futuros docentes sobre sus resultados en grupo (20 minutos).
- **Finalización:** el docente pide a los participantes que, en caso de que hayan cometido errores en alguna parte de la actividad que hayan notado en la institucionalización del contenido, preparen un informe de manera individual en donde describan qué fallos tuvieron y lo corrijan para entregarlo en la siguiente sesión (5 minutos).

4.1.8. Estructura de la aplicación

La aplicación de la propuesta didáctica se considera en cuatro fases, una destinada al trabajo autónomo del estudiante y tres sesiones para el desarrollo de las actividades, tal como se muestra en la **Tabla 4**.

Tabla 4.
Estructura de la aplicación de la propuesta didáctica.

Fase	Descripción	Duración
Interacción Autónoma	El estudiante recibe el AVACOM y lo explora. No se le ofrecen pautas para la exploración de éste, pero se le solicita la elaboración de un video como	--

	evidencia de su trabajo, donde deberá mostrar la sección que más le llamó la atención del AVACOM en no más de 5 minutos.	
Sesión 1	Tratamiento de Representaciones Semióticas de funciones. Además de la sección teórica correspondiente a la definición y graficación de funciones, el investigador orientará a los futuros docentes en la resolución de las dos primeras actividades ("¿Más Características de las Funciones?" y "¡Que Coincidan!"). Además de la denominada "Actividad Extra-Tratamientos", la cual deberá ser resuelta en computadora o Smartphone, utilizando para ello algún editor de texto que permita el ingreso de ecuaciones y algún software de graficación en el plano cartesiano. Una vez terminada, deberá ser enviada a través de correo electrónico.	2 horas
Sesión 2	Conversión de Representaciones Semióticas de funciones. Además de la sección teórica correspondiente a la representaciones e identificación de funciones, el investigador orientará a los futuros docentes en la resolución de las dos primeras actividades ("Definición de Funciones" y "¿Estos datos son reales?"). Además de la denominada "Actividad Extra-Conversiones", la cual deberá ser resuelta en computadora o Smartphone, utilizando para ello algún editor de texto que permita el ingreso de ecuaciones y algún software de graficación en el plano cartesiano. Una vez terminada, deberá ser enviada a través de correo electrónico.	2 horas
Sesión 3	Tratamiento y Conversiones de Representaciones Semióticas de Funciones. Además de una revisión a cada sección teórica correspondiente al concepto de función, el investigador orientará a los futuros docentes en la resolución de la actividad denominada "¡Qué Problema!" se trata de dos problemas relacionados con el movimiento de un objeto. El tratamiento algebraico de la solución es presentado, pero las situaciones, al ser susceptibles de ser representadas gráfica y tabularmente, se espera que se realicen estas conversiones. El proceso de tratamiento ofrecido no es el único posible, se espera que haya variaciones propuestas por los estudiantes. Los problemas deben ser resueltos en computadora o Smartphone, utilizando algún editor de texto para el ingreso de ecuaciones y algún software de graficación en el plano cartesiano. Una vez terminada la actividad, deberá ser enviada a través de correo electrónico.	2 horas

Nota. Elaboración propia.

4.2. Participantes de la Investigación

Se trabajará con docentes en formación que son estudiantes de la Universidad Surcolombiana, de la Facultad de Educación, específicamente del programa de Licenciatura en Matemáticas.

Debido a que el tema de funciones se orienta inicialmente en el curso *Precálculo*, se realizará la implementación de la propuesta didáctica en dicho curso; el cual se ofrece en el primer semestre de la Licenciatura, por lo tanto, los participantes, en su mayoría, son de primer ingreso y sus edades oscilan entre los 18 y 21 años. El grupo cuenta con 35 estudiantes y se trabajará con la totalidad del grupo.

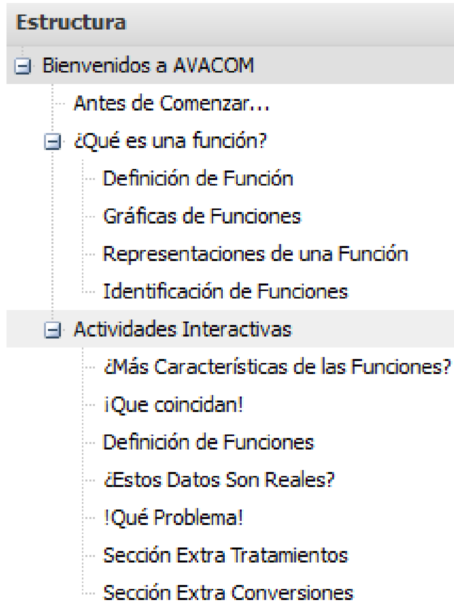
4.2.1. Abordaje con los participantes

Se hizo dentro del mismo desarrollo del curso, cuando se vio el tema de funciones. Se trabajó en el aula de clases, el ambiente natural en el cual desempeñan sus actividades académicas. Se les informó que la implementación de la propuesta hacía parte de un proceso de investigación, y que las calificaciones generadas en las actividades serían remitidas al docente titular de la asignatura; esto atiende a una cuestión de motivación externa, pues los estudiantes, al estar relacionado su desempeño en el desarrollo de las actividades de la implementación con su calificación del curso, pueden encontrarse con mayores motivos para estar comprometidos con la buena práctica a lo largo del desarrollo de la propuesta.

4.3. Diseño del Ambiente Virtual de Aprendizaje

El AVA se desarrolló en la plataforma eXeLearning. Se diseñó la plantilla, los dispositivos a utilizar y se integraron dentro de una estructura la cual se organiza en una breve introducción y luego dos grandes secciones (Figura 13). La primera sección es dedicada al concepto de función, sus aspectos intuitivos, teóricos y formales, sus representaciones semióticas y las características que poseen, además de su integración en distintos conceptos. La segunda sección es dedicada a las actividades interactivas, las cuales, en coherencia y armonía con las unidades del otro conjunto, van ofreciendo espacios para que el estudiante explore el concepto de función en diferentes ámbitos, con distintas representaciones y realizando diversos procesos.

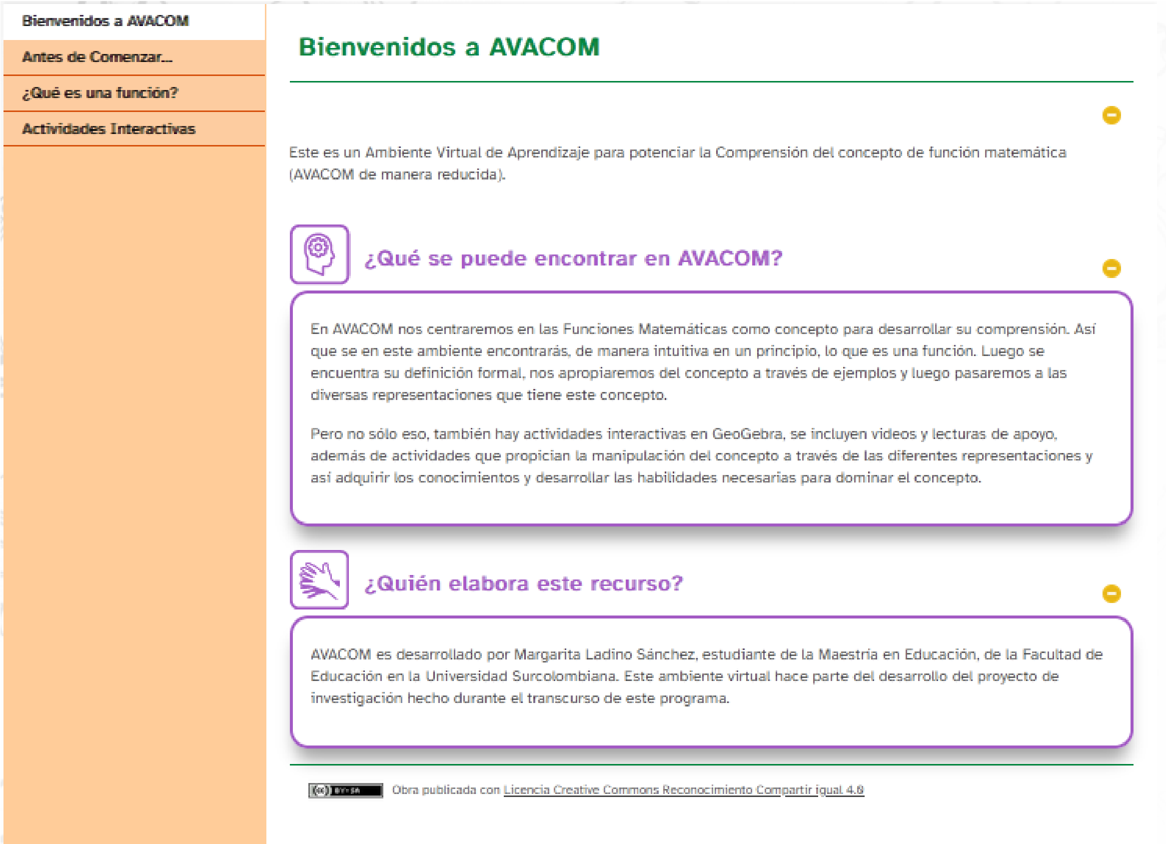
Figura 13.
Estructura de AVACOM.



Nota. Elaboración propia.

AVACOM recibe al estudiante con un mensaje de bienvenida y contextualización al ambiente virtual (**Figura 14**). El menú del lado izquierdo se despliega y deja ver cada una de las unidades.

Figura 14.
Bienvenida AVACOM.



Nota. Elaboración propia.

En la primera sección, denominada *Antes de Comenzar…* se contextualiza al estudiante con la resolución de problemas, por lo cual habrá varios de estos en el desarrollo de las actividades planteadas. La intención es familiarizarlos con los procedimientos y las prácticas recomendadas que permitan un proceso más eficiente: cómo resolver un problema partiendo del entendimiento del mismo, la trazabilidad de un plan, la ejecución de éste y recomendaciones para la reflexión de los resultados obtenidos (**Figura 15**).

Figura 15.

Contextualización resolución de problemas.

Antes de Comenzar...

Enfoque en la Resolución de Problemas

No hay reglas difíciles ni rápidas que aseguren el éxito al resolver problemas. Pero es posible esbozar unos pasos generales en el proceso de la resolución de problemas y dar principios que son útiles para resolver ciertos problemas. Estos pasos y principios son sólo sentido común hecho explícito.

1. Entienda el problema

El primer paso es leer el problema y estar seguro de que ya lo entendió. Hágase usted mismo las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para cualquier problema es útil hacer un diagrama e identificar en el mismo diagrama las cantidades dadas y las requeridas. Por lo regular es necesario introducir una notación conveniente Al elegir símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como *a, b, c, m, n, x* y *y*, pero en algunos casos ayuda usar iniciales o símbolos sugerentes, por ejemplo, *V* para volumen o *t* para el tiempo.

Piense en un Plan

Halle una conexión entre la información dada y la incógnita, que le permita calcularla. Muchas veces ayuda preguntarse uno mismo: "¿Cómo puedo relacionar la información dada con la incógnita?". Si usted no ve la conexión en forma inmediata, las ideas siguientes podrían ser útiles para trazar un plan.

■ Trate de identificar algo familiar

Relacione la situación dada con un conocimiento anterior. Examine la incógnita y trate de recordar un problema más conocido que tiene una incógnita similar.

■ Use la analogía

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, que sea semejante o que esté relacionado, pero que sea más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar más sencillo, entonces esto le podría dar las pistas que necesita para resolver el problema original más difícil. Por ejemplo, si un problema contiene

■ Intente identificar patrones

Ciertos problemas se resuelven cuando se identifica que hay un patrón. El patrón podría ser geométrico o numérico o algebraico. Si puede ver regularidad o repetición en un problema, entonces usted sería capaz de adivinar qué patrón es y demostrarlo.

■ Introduzca algo nuevo

Algunas veces necesitará introducir algo nuevo —un auxiliar— para lograr la conexión entre lo que se tiene y lo que se ignora. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, la ayuda adicional sería una nueva

Reflexione y revise

Lo que se hizo ¿Se hizo bien?

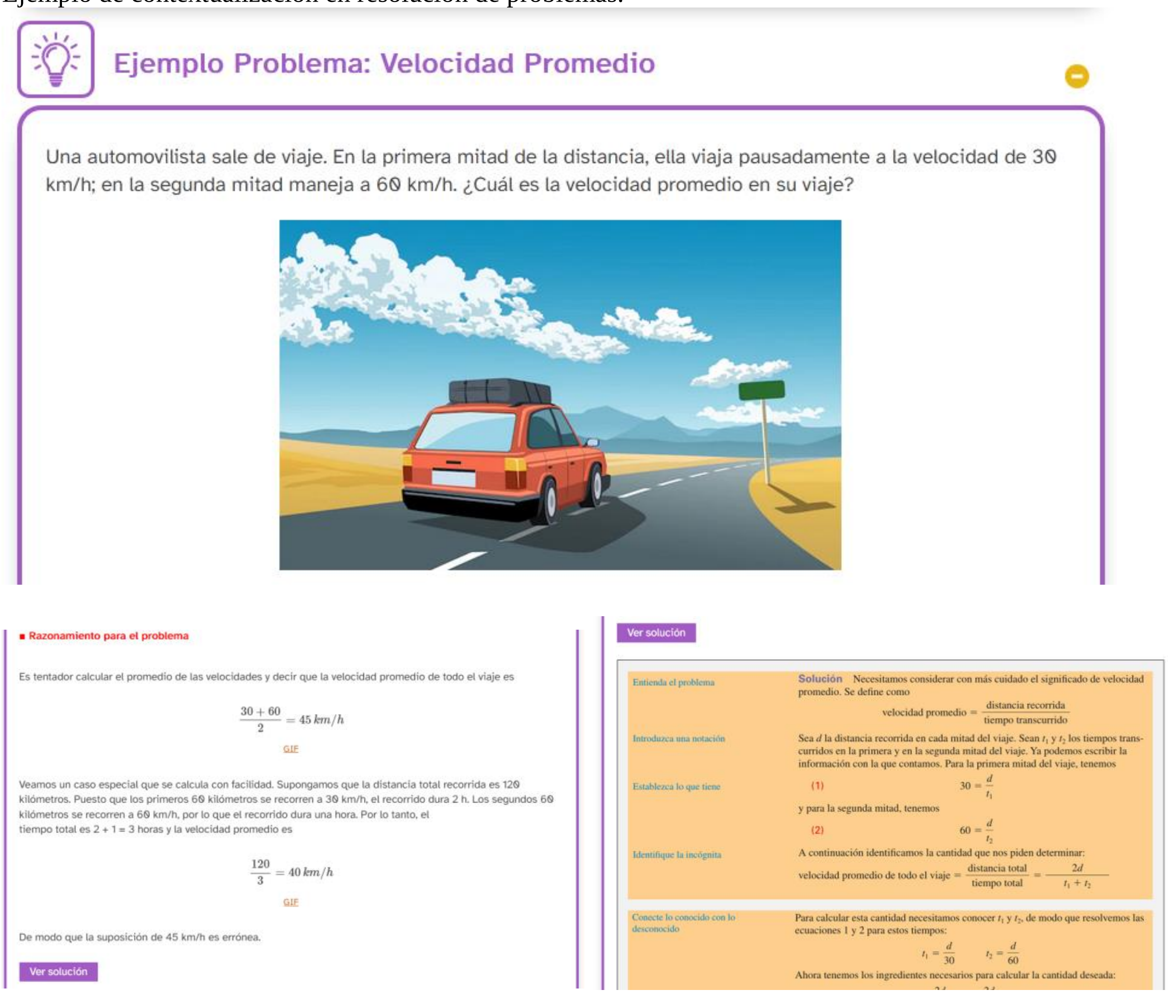
Recomendaciones para reflexionar

Al llegar a la solución, es prudente regresar y revisar, en parte para ver si hay errores y en parte para ver si hay una manera más sencilla de resolver el problema. Revisar lo hecho lo familiariza con el método de solución, lo cual podría ser útil para resolver un problema futuro. Descartes decía "Cada problema que he resuelto se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas". Ilustramos algunos de estos principios de resolución de problemas mediante un ejemplo.

Nota. Elaboración propia.

Para ejemplificar el proceso de resolución, se plantea una situación problema que desafía las ideas contraintuitivas sobre la velocidad promedio y se expone la solución considerando los pasos mencionados en la contextualización (**Figura 16**).

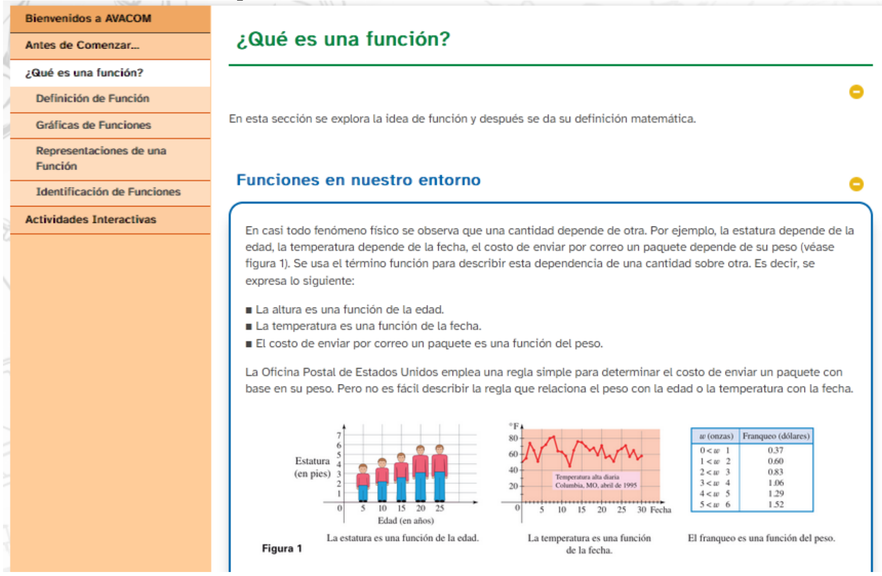
Figura 16.
Ejemplo de contextualización en resolución de problemas.



Nota. Elaboración propia.

De manera resumida, dentro de la primera sección denominada *¿Qué es una función?* Se hace una introducción intuitiva al concepto de función, se presenta dentro de contextos reales como relación entre valores de dos conjuntos diferentes de datos y se hace una aproximación a las primeras posibles representaciones. Estos elementos van compuestos por figuras y textos (**Figura 17**).

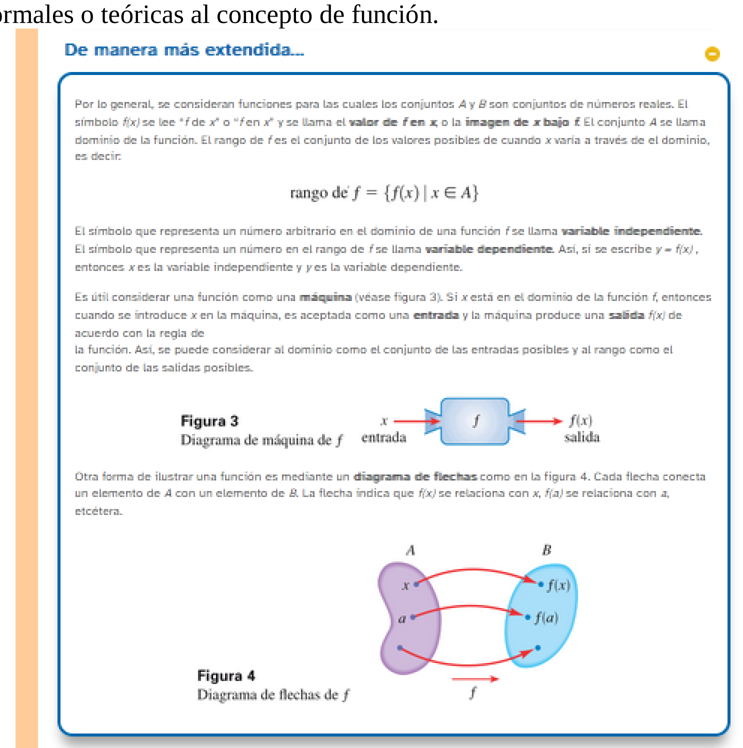
Figura 17.
Aproximaciones intuitivas al concepto de función.



Nota. Elaboración propia.

Cuando se ingresa a la unidad *Definición de Función*, se hace una aproximación teórica al concepto, acompañada de figuras, ejemplos, textos y un video con el cual se aclaran las características propias de una función (**Figura 18**).

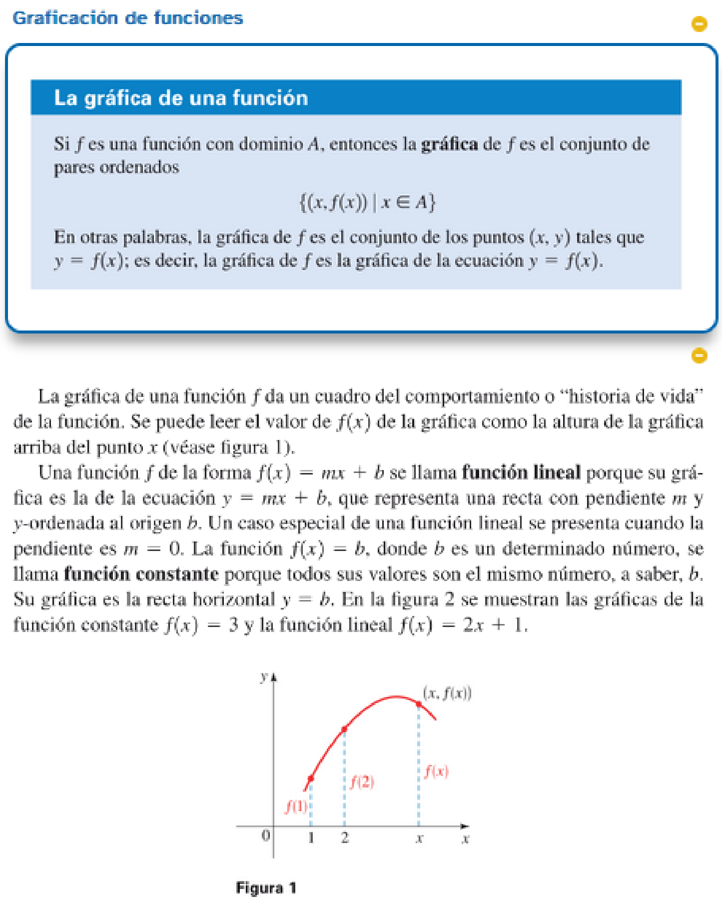
Figura 18.
Aproximaciones formales o teóricas al concepto de función.



Nota. Elaboración propia.

La siguiente unidad se dedica exclusivamente a la gráfica de una función. No se aborda desde el hecho de que es una representación semiótica, sino propiamente en el proceso de graficación: qué es una gráfica, cómo se estructuran las tablas de valores para generar un gráfico en el plano de coordenadas y cómo utilizar este para representar una función (**Figura 19**).

Figura 19.
Presentación y definición de gráfica de una función.



Graficación de funciones

La gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

La gráfica de una función f da un cuadro del comportamiento o "historia de vida" de la función. Se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase figura 1).

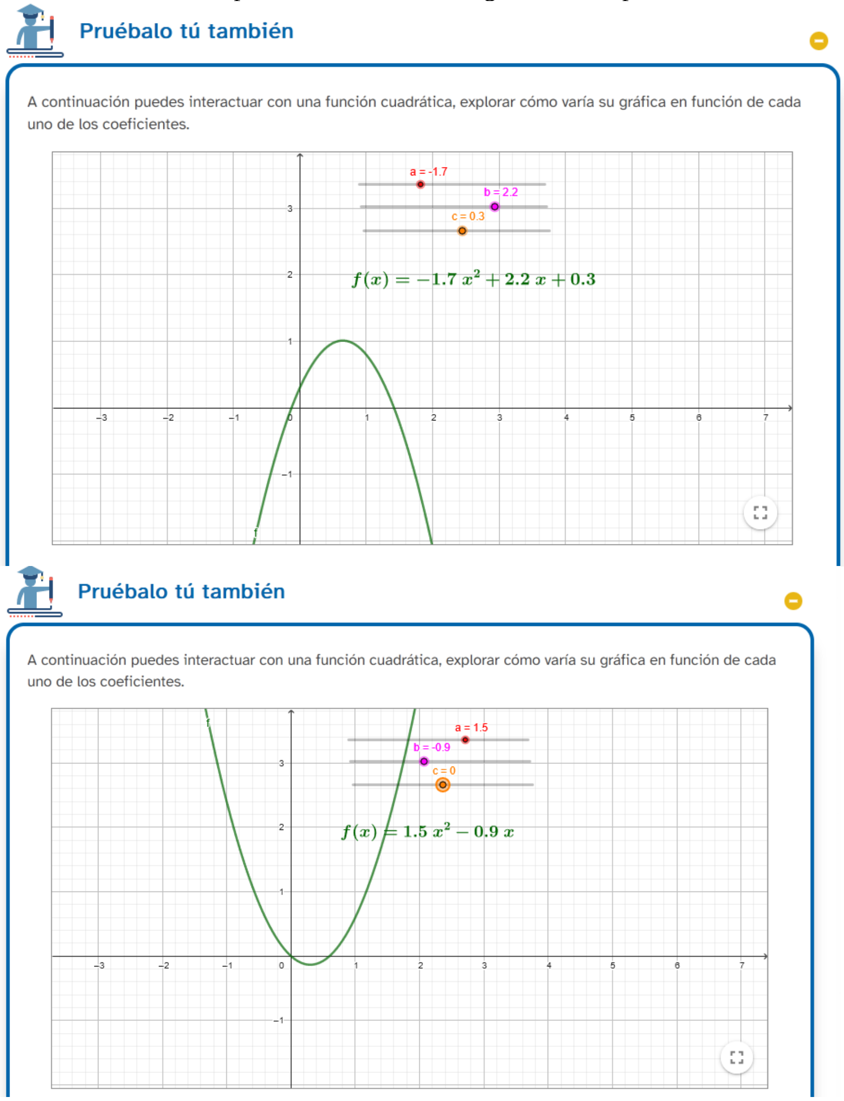
Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se llama **función lineal** porque su gráfica es la de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y y-ordenada al origen b. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un determinado número, se llama **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, a saber, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. En la figura 2 se muestran las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.

Figura 1

Nota. Elaboración propia.

Para fortalecer la graficación de funciones, se integra una actividad interactiva con GeoGebra, con la cual el estudiante puede manipular una serie de deslizadores y ver cómo esta gráfica varía en función de cada coeficiente modificado (**Figura 20**).

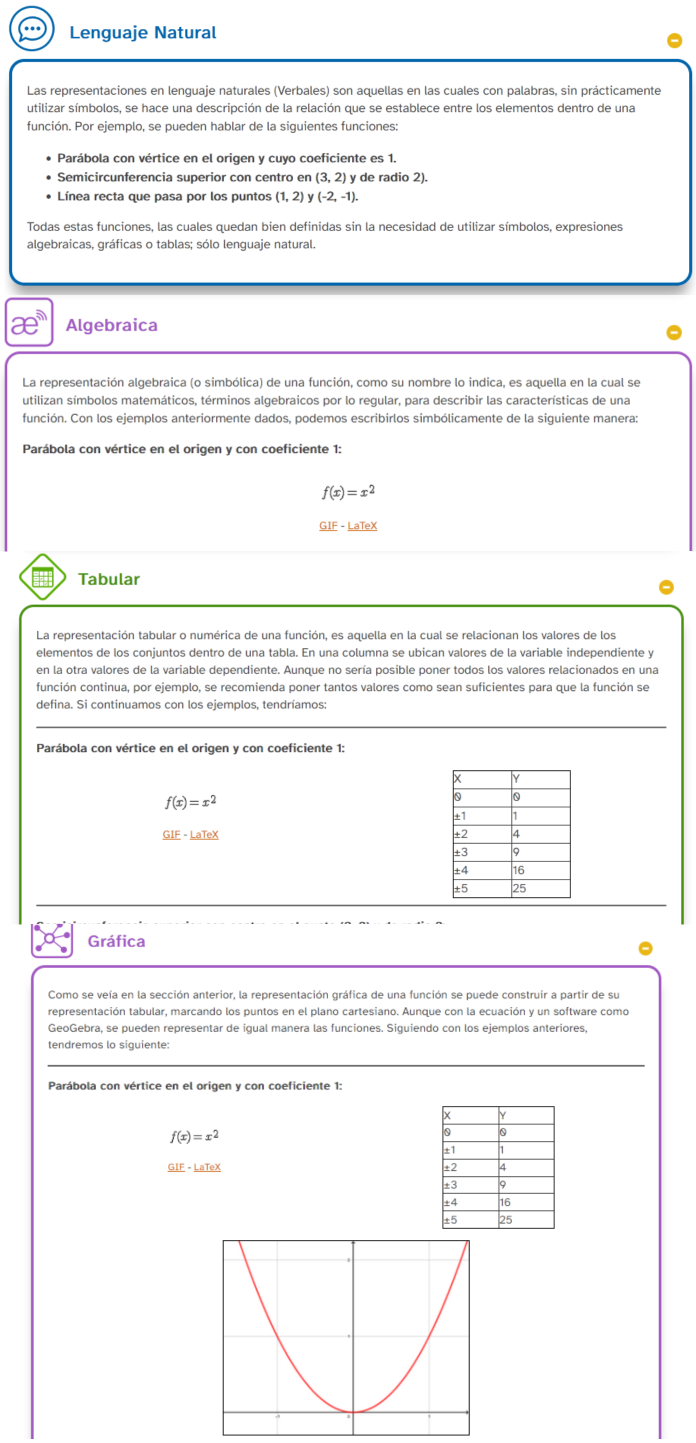
Figura 20.
Actividad dinámica: tratamiento de representación semiótica gráfica de la parábola.



Nota. Elaboración propia.

La unidad siguiente, *Representaciones de una Función*, es una de las más importantes, pues en ésta, progresivamente, se presentan diferentes representaciones semióticas de funciones, primero en lenguaje natural, luego en el registro algebraico, en el tabular y en el gráfico. Con esto se generan los vínculos entre las formas de representar, los tratamientos y conversiones de representaciones semióticas, cuestión que fundamenta el desarrollo del conocimiento de los estudiantes (Duval, 1998).

Figura 21.
Relaciones entre registros de representación semiótica en funciones.



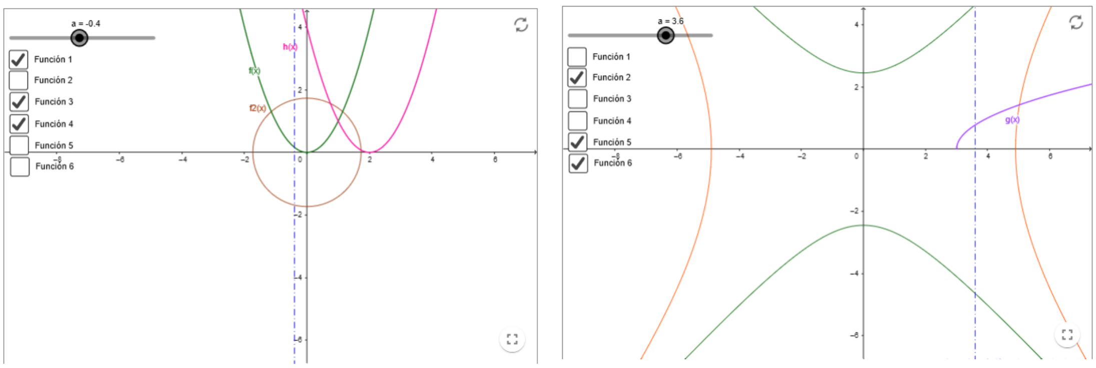
Nota. Elaboración propia.

Este primer gran bloque finaliza con una sección dedicada a la identificación de funciones por medio de la regla de la línea vertical y su utilización por medio de ejemplos.

Con esto se da paso a la sección de aplicación, manipulación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas, en conjunto, son 5 actividades denominadas:

- *¿Más características de las funciones?*: se aborda por medio de una actividad dinámica en GeoGebra las características de algunas funciones (**Figura 22**).

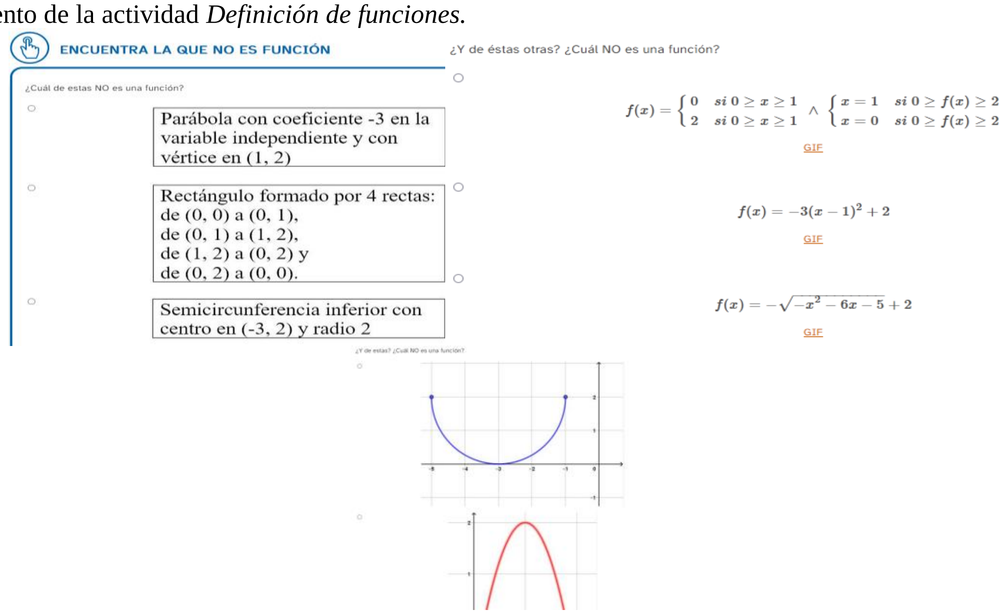
Figura 22.
Fragmento de la actividad *¿Más características de las funciones?*



Nota. Elaboración propia.

- *Definición de funciones:* aquí el estudiante, según las funciones dadas en los diferentes registros semióticos (lengua natural, gráfico y algebraico) debe encontrar cuál de ellas NO es una función e identificarla (**Figura 23**).

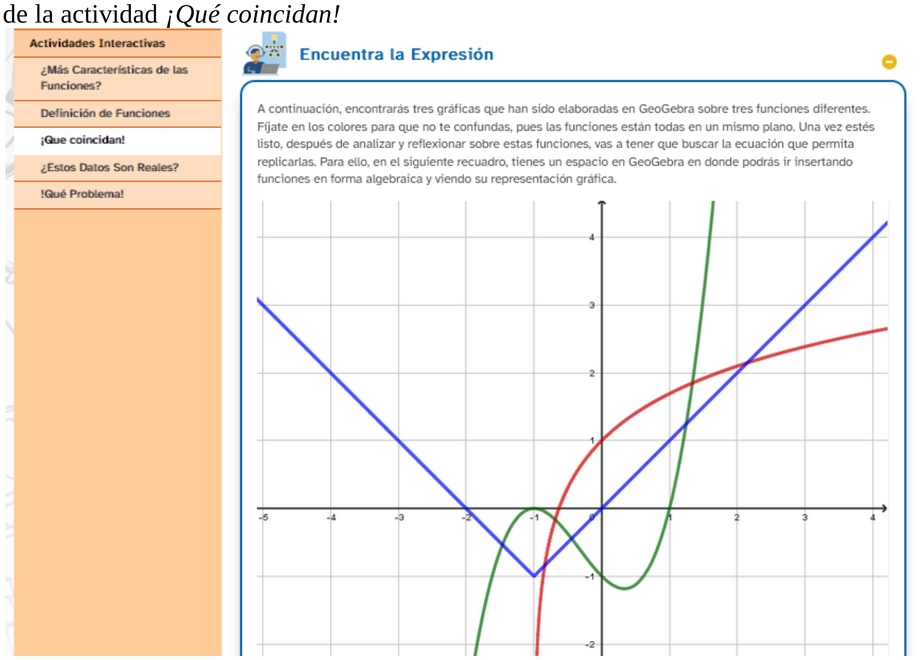
Figura 23.
Fragmento de la actividad *Definición de funciones.*



Nota. Elaboración propia.

- *¡Qué coincidan!*: en esta actividad se le plantea al estudiante una situación problema con diferentes funciones representadas gráficamente. En este caso, con ayuda de la aplicación en GeoGebra que se inserta, debe encontrar la expresión algebraica que represente la función dada en el registro semiótico gráfico (**Figura 24**).

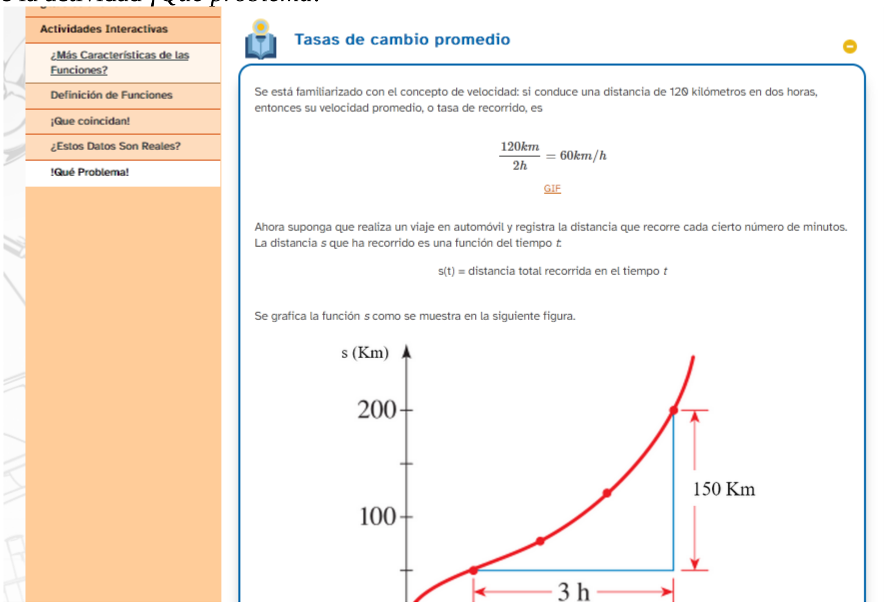
Figura 24.
Fragmento de la actividad *¡Qué coincidan!*



Nota. Elaboración propia.

- *¿Estos datos son reales?*: en esta actividad se plantean varios enunciados relacionados con las funciones, sus características y las diferentes representaciones semióticas existentes, los estudiantes deben determinar cuáles de ellos son falsos.
- *¡Qué problema!*: en esta actividad también se plantean dos situaciones problemas, esta vez de aplicación del concepto de tasas de cambio promedio (una función típica que permite la introducción a temas más avanzados), con la cual los estudiantes deberán resolverlas con los conocimientos sobre funciones desarrollados (**Figura 25**).

Figura 25.
Fragmento de la actividad *¡Qué problema!*



Nota. Elaboración propia.

El ambiente AVACOM se exhibe de manera pública en la plataforma itch.io para su AVAacceso tanto en la implementación, así también como recurso para otros docentes que lo consideren pertinente en el siguiente enlace: https://margaritaladino.itch.io/avacom.

4.4. Cronograma de Actividades

Para el desarrollo de la investigación, se organizó cada fase a lo largo de los meses de desarrollo del posgrado, tal como se muestra en la Tabla 5.

***Tabla 5**.*

Cronograma de Actividades.

Fase	**Semestre**			**2022A**					**2022B**				**2023A**			
	Mes	**01**	**02**	**03**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**01**	**02**	**03**	**04**
Elaboración de Anteproyecto																
Identificación de Elementos Conceptuales de las Funciones																
Análisis de Conocimientos Iniciales de los Docentes																
Elaboración AVACOM																
Refinamiento del AVACOM																
Implementación AVACOM																
Análisis de la Información																
Redacción del Informe Final																

Nota. Elaboración propia.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS, ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

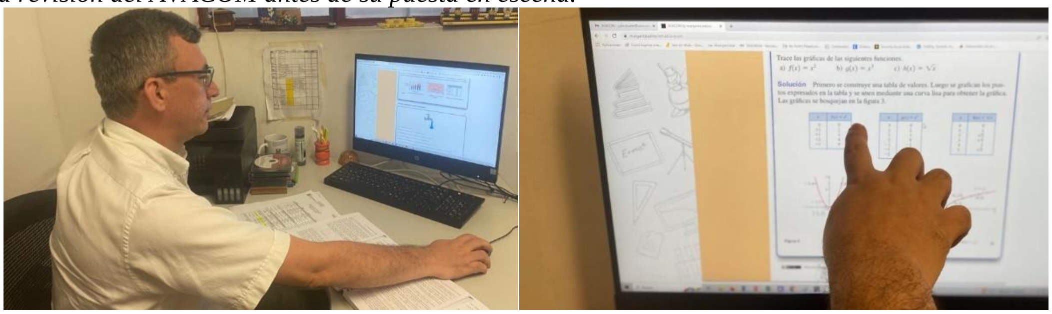
En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del proceso de implementación de la propuesta basada en la aplicación desarrollada AVACOM, el ambiente virtual de aprendizaje para el desarrollo de la comprensión matemática que se sustenta en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas.

Los resultados se dividen en dos secciones, en la primera se presenta un resumen de la implementación de la propuesta, en donde se hace énfasis en la forma en la que recibieron los estudiantes la herramienta desarrollada, sus percepciones y cómo la consideraron en cuanto a su contenido, estructura y presentación. En la segunda sección se hace énfasis en el desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes, tomando como base los procesos de tratamiento y conversión de representaciones junto a la visualización matemática y así evidenciar las fortalezas y debilidades externalizadas.

5.1. Implementación de la Propuesta

En esta sección se inicia con la narrativa del proceso de implementación de la propuesta para la comprensión de conceptos matemáticos en estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas. Durante cuatro sesiones, se implementó el instrumento con 15 estudiantes, los cuales aún no habían trabajado con el concepto de funciones dentro de sus estudios universitarios, esta fue su primera aproximación. Antes de la primera sesión con los estudiantes, se realizó una última revisión de los elementos integrados en la plataforma por parte del docente encargado del curso. Con ello se aseguró la inclusión de los elementos pertinentes y la corrección de pequeños errores de tipeo en algunas secciones. Por ejemplo, en las representaciones tabulares de las funciones, se agregó una tercera columna en donde se ubicó la relación de los dos valores de la variable como $f(x, y)$ un apoyo extra a la representación (**Figura 26**).

Figura 26.
Última revisión del AVACOM antes de su puesta en escena.



Nota. Elaboración propia.

La revisión del ambiente virtual de aprendizaje por parte de un experto es una práctica común y altamente recomendada en el campo de la educación (Morales y Diez, 2020). En este caso, aunque el docente titular del curso estuvo presente apoyando el diseño del AVACOM, una última revisión detallada permitió pulir pequeños detalles. Con esta revisión se buscó evaluar la calidad y pertinencia del material educativo para los estudiantes y su capacidad para cumplir con los objetivos de aprendizaje deseados. La retroalimentación del docente ayudó a identificar detalles menores en el diseño del ambiente y sugerir mejoras para aumentar la eficacia del aprendizaje.

5.1.1. Concepciones y Percepciones de los Estudiantes frente a AVACOM

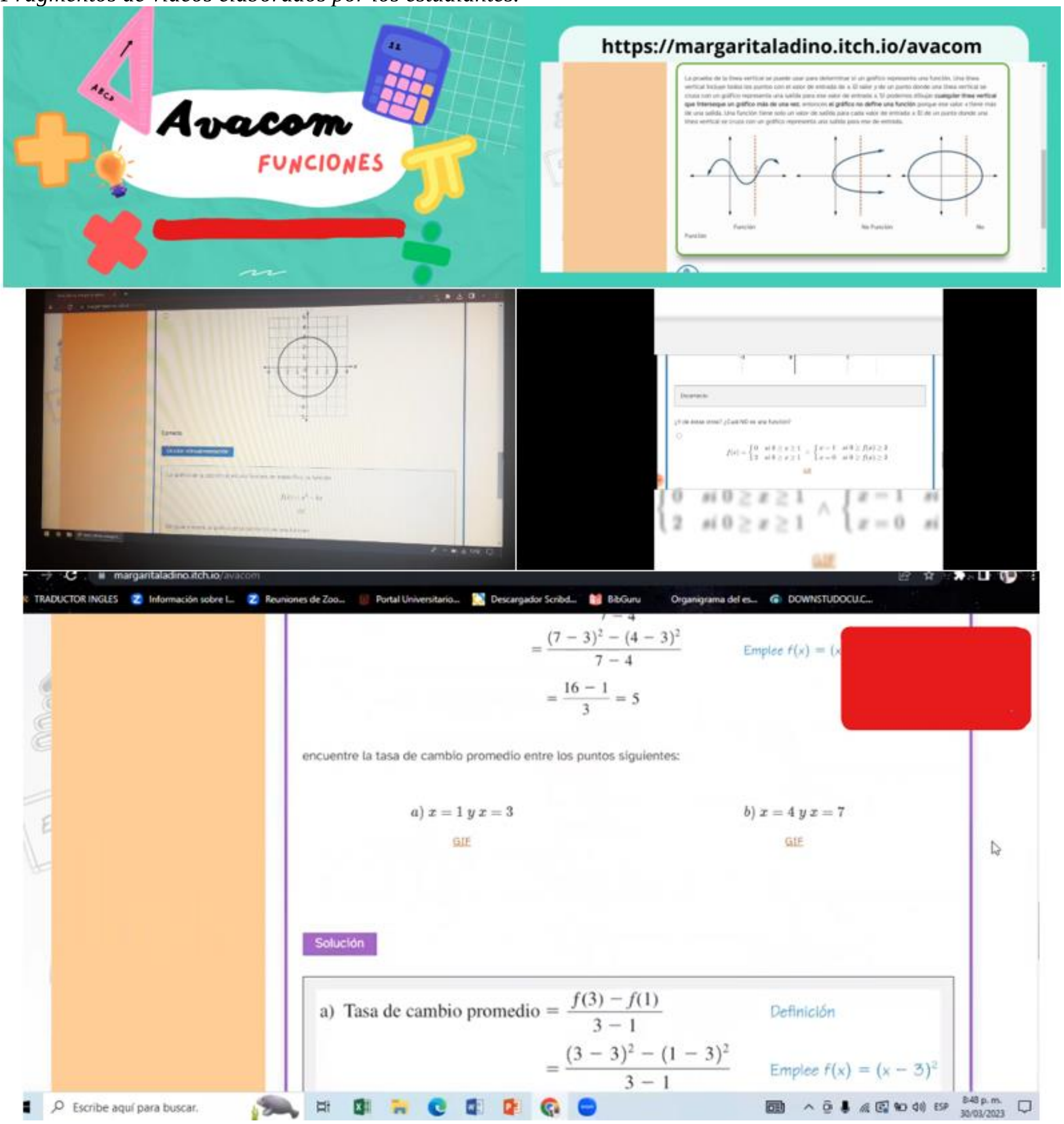
En la primera sesión se les hizo la presentación de la herramienta, indicando que con ella se abarcaría la totalidad de la temática (**Figura 27**). Las indicaciones, como se describió en el diseño metodológico, fue que realizaran su exploración, se fijaran en los elementos que se integraban en el ambiente virtual y elaboraran un video describiendo el AVACOM y destacando las características que consideraran más relevante, así como las falencias o elementos que creyeran eran necesario integrar.

Figura 27.
Presentación de AVACOM.

Nota. Elaboración propia.

Los videos obtenidos por los estudiantes fueron enviados por correos o subidos a plataformas como YouTube. Algunos de ellos presentaban a los estudiantes en pantalla, junto al AVACOM, otros utilizaron recursos extras para mejorar su presentación y otros fueron capturados desde la versión de móvil; algunas capturas de estos pueden observarse en la **Figura 28** (aunque en el material original puede verse el rostro y nombre de los participantes, además de que éstos los mencionan en los videos, se han censurado en las imágenes aquí dispuestas así como en la transcripción de los audios). Este material se organiza, comprime y presenta en el Anexo B.

Figura 28.
Fragmentos de videos elaborados por los estudiantes.



Nota. Capturas de algunos de los videos presentados por los estudiantes, se censuran nombres y rostros de los estudiantes en pantalla para proteger su privacidad.

Los audios de los videos fueron transcritos y analizados para extraer información relevante sobre las concepciones y primeras impresiones de la herramienta. En la **Figura 29** pueden observarse una nube de palabras generada con el discurso de los estudiantes en los videos donde hablaron al respecto de cómo les parecía el ambiente virtual de aprendizaje.

Figura 29.

Nube de palabras de las concepciones y percepciones sobre AVACOM.

Nota. Elaboración propia.

Como se observa, es claro que para los estudiantes el principal concepto manejado en el ambiente virtual es el de funciones, lo cual es lo esperado. Sin embargo, a pesar de usar prácticamente la misma cantidad de representaciones semióticas de diversos registros (figurales, tabulares, algebraicos y verbales) del concepto de función, la que mayor presencia tiene en su discurso es la *gráfica*. De hecho, la representación *tabular* es mencionada sólo por dos estudiantes en frases como "[…]nos muestra los ejemplos de cómo tabular y graficar la función […]" o "[…] y por último pues nos enseñan a cómo tabular las funciones dadas […]" (Transcripción Video 3, p. 3). Sólo uno señala el sentido de esta representación semiótica “[…] la representación tabular, que es donde la función se presenta en una tabla con base de entrada y salida.” (Transcripción Video 4, p. 3).

La relevancia de la representación gráfica frente a otras podría indicar una predilección por la misma de parte de los estudiantes. Un estudiante podría preferir la representación gráfica de una función a la representación tabular de la misma por varias razones. En primer lugar, la representación gráfica permite una visualización más clara y rápida del comportamiento de la función en un intervalo determinado. Esto puede ayudar al estudiante a comprender la relación entre la variable independiente y la variable dependiente de la función de una manera más intuitiva (Calderón et al., 2018). Además, la representación gráfica puede mostrar patrones y tendencias en los datos que pueden no ser evidentes en una tabla de valores. Por otro lado, una tabla de valores puede ser más adecuada para realizar cálculos y obtener valores numéricos precisos, pero si el objetivo del estudiante al momento de estudiar las funciones no es éste, puede ser que se deje de lado.

Este hecho puede abonar a la explicación del éxito de herramientas como GeoGebra frente a otras como Excel, aún cuando existan metodologías que integran ambos softwares en la enseñanza de manera efectiva, las potencialidades más inclinadas hacia el registro gráfico que al tabular de el primer software frente al segundo pueden ser un aspecto decisivo. De igual manera, las facilidades para la manipulación de datos tabulados de Excel inclinan la balanza hacia su uso cuando se pretende la realización de cálculos y modelado con grandes conjuntos de datos (Flehantov y Ovsiienko, 2019).

Algo similar pasa con la representación *algebraica* del concepto de función, su presencia en las percepciones del estudiante al explorar el AVACOM son apenas anecdóticas. Los estudiantes mencionan, por ejemplo, que es el lenguaje en que se expresa la función “[…] el lenguaje en el cual se expresa la función, en este caso el lenguaje algebraico […]”

(Transcripción Video 5, p. 4) o “[…] el lenguaje que se utiliza, la algebraica […] (Transcripción Video 1, p.1). Resulta interesante señalar que dentro del discurso del estudiante del Video 2 (transcripción p. 3), se señala que la representación del concepto de función en el registro algebraico es “[…] donde se expresa mediante una fórmula matemática.”

La poca relevancia en el discurso de los estudiantes de la presencia de esta representación en el AVACOM suscita nuevamente la misma discusión anterior, sin embargo, en este caso, con un atenuante, pues la representación algebraica es la más usual o comúnmente utilizada, lo cual podría hacer que fuera predecible o esperable su presencia y que no generara ninguna reacción, lo cual es lo que podría implicarse de su discurso. Esto puede extenderse a la representación en el lenguaje natural, pues los estudiantes lo observan como algo común “[…] lenguaje natural, o representación verbal, donde la función se describe en palabras.” (Transcripción Video 4, p. 3).

El último aspecto para señalar sobre el discurso de los estudiantes y estas primeras percepciones sobre el AVACOM es la presencia de los ejemplos y la explicación o solución de los ejercicios.

El uso de los ejemplos como método para concretar elementos y procesos abstractos en la enseñanza ha sido utilizado de manera intuitiva por los docentes a lo largo de la historia, pero su inclusión en la praxis pedagógica tiene su fundamento en la contextualización de la utilidad de lo que se aprende y se han ubicado como herramientas centrales en algunos modelos y métodos de enseñanza (Zapatera, 2020). En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular, cuando se realiza el proceso de transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado, de acuerdo con Chevallard (citado por Mendoza, 2005), implícitamente se habla de la concreción, de la generación de utilidad, de transformar el conocimiento matemático abstracto en elementos tangibles para el estudiante. La forma común de hacer esto es usar ejemplos de la aplicación del concepto, aún cuando se realice sin salirse del campo de las matemáticas.

Que para los estudiantes la presencia de estos ejemplos en el desarrollo de la temática tenga una alta relevancia (evidenciada por la presencia de éste en su discurso) refuerza la necesidad de su inclusión en diseños de herramientas similares al AVACOM. Los estudiantes mencionan cuestiones como "[…] podemos mirar a continuación algunos ejemplos para entender mejor esto." (Transcripción Video 3, p. 2); "[…] nos muestra un ejemplo y pues cómo resolverlo y al final pues no muestra la solución al problema y nos la explica paso a paso, lo cual es muy bueno." (Transcripción Video 6, p. 5); o de manera más efusiva incluso "[…] yo creo que los ejemplos fue una idea fantástica de la persona que creó esta página web […]" (Transcripción Video 7, p. 6),

Los ejemplos les permiten visualizar cómo se aplican los conceptos y cómo se resuelven los problemas. Además, los ejemplos pueden ser utilizados como modelos a seguir para que los estudiantes puedan resolver problemas similares por su cuenta. En general, los ejemplos proporcionan una experiencia práctica que facilita la comprensión de los conceptos matemáticos, lo cual, analizando sus reacciones y percepciones, muestra que puede aumentar la motivación del estudiante.

5.2. Interacción de los Estudiantes en el AVACOM

Uno de los motivos principales por los cuales se optó por el uso de un ambiente virtual para la propuesta de aprendizaje realizada, es la posibilidad de permitir la interacción del estudiante a través de actividades dinámicas de la propia plataforma en la cual fue desarrollado, eXeLearning, y externas como GeoGebra.

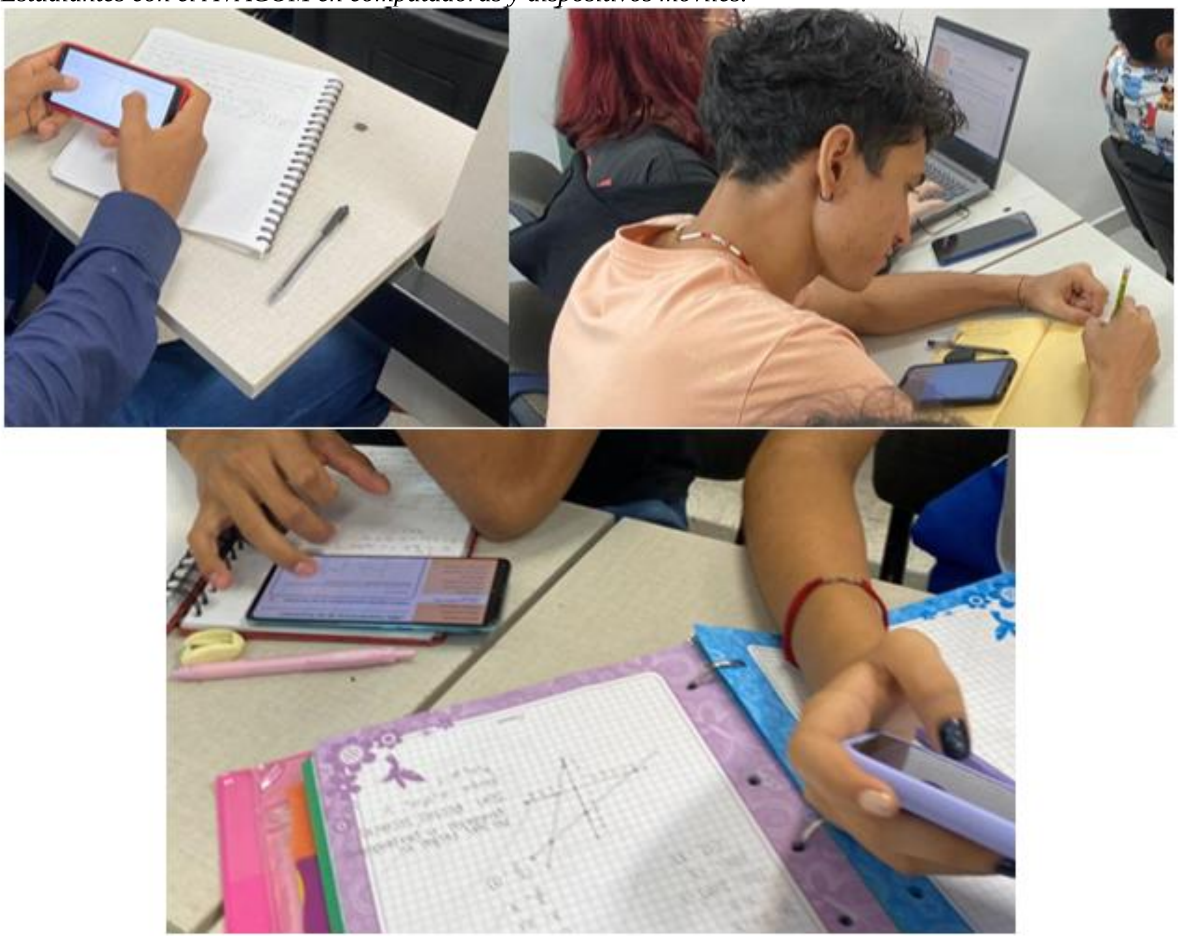
Durante las sesiones dos y tres de la implementación de la propuesta, se abordaron las diferentes secciones del AVACOM que estaban destinadas a la interacción de los estudiantes con las representaciones semióticas. Los estudiantes, gracias al diseño responsivo del ambiente virtual, pudieron acceder al mismo a través de computadoras y dispositivos móviles (**Figura 30**).

Figura 30.
Estudiantes con el AVACOM en computadoras y dispositivos móviles.

Nota. Elaboración propia.

El diseño de las actividades permitía el desarrollo de las mismas en el AVACOM propiamente, pues se integraron los applets de GeoGebra incrustados y las herramientas de eXeLearning se ejecutan en la misma pestaña. Se observó sin embargo, que en ocasiones los estudiantes utilizaban papel y lápiz para el desarrollo de algunas de las actividades, además, algunos de ellos recurrieron a fuentes externas de información como YouTube, a pesar de que, al parecer del investigador, toda la información necesaria sobre las funciones se encontraba en el AVACOM, pues su diseño es autocontenido, característica indispensable para considerarlo como herramienta suficiente para el aprendizaje de un concepto (Kurilovas et al., 2014).

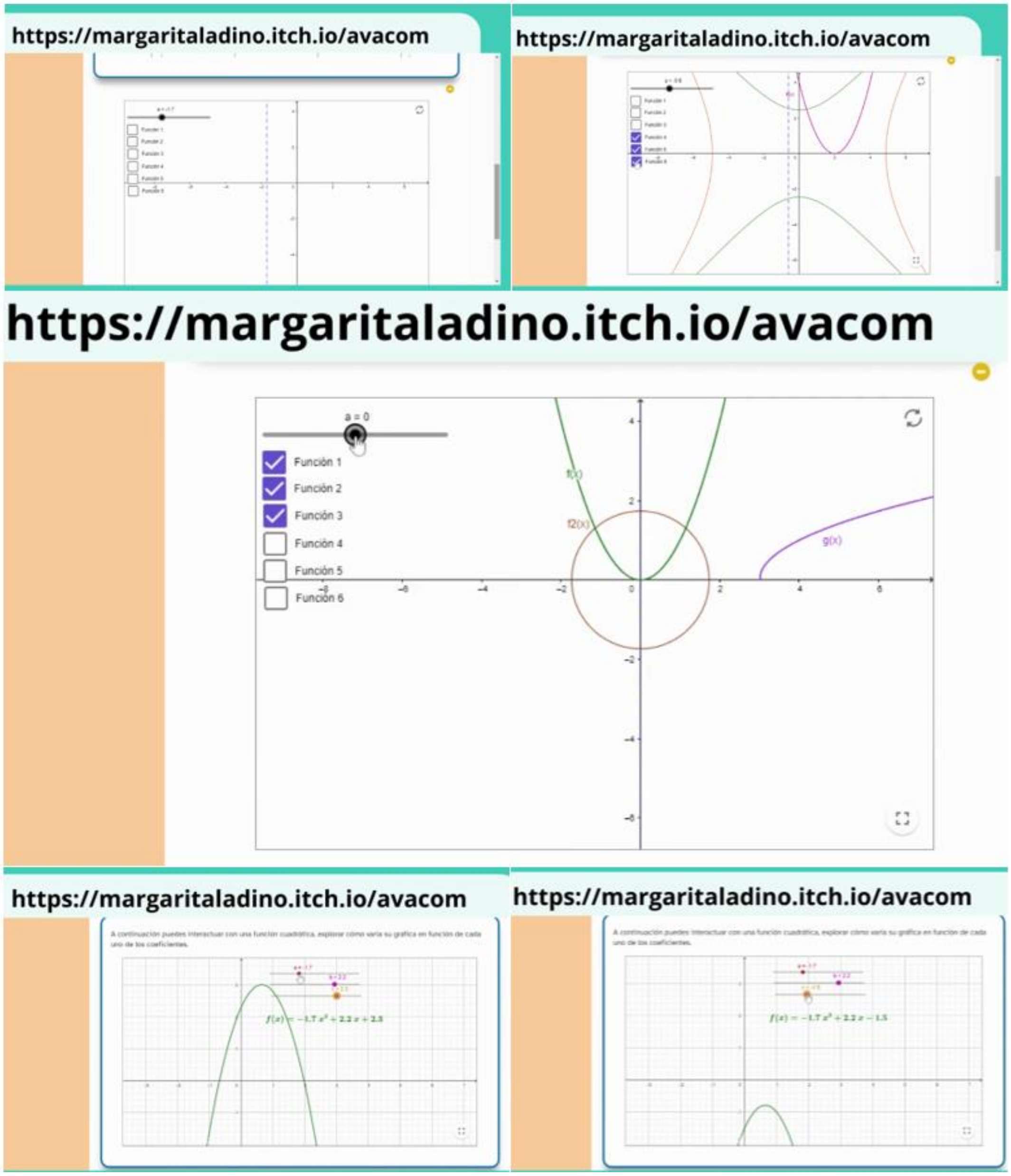
Figura 31.
Estudiantes con el AVACOM en computadoras y dispositivos móviles.



Nota. Elaboración propia.

Debido a las limitaciones que supone el texto escrito en el que se presenta este trabajo, no es posible mostrar a través de él la forma en la que los estudiantes interactuaron con las actividades dinámicas de GeoGebra. En la **Figura 32** se muestran algunas capturas tomadas como parte del Video 3 que se encuentra en el Anexo B.

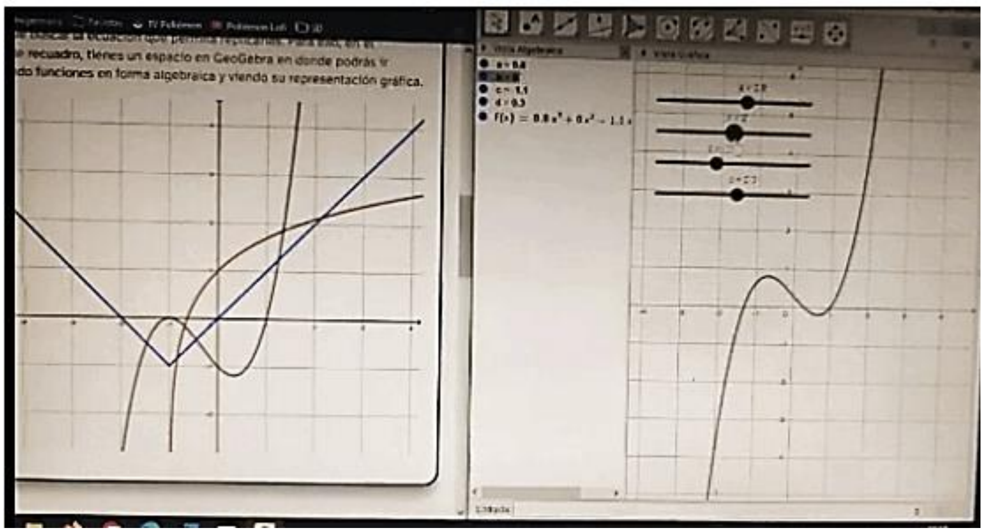
Figura 32.
Interacción de Estudiantes en Actividades con Dinámicas en AVACOM.



Nota. Elaboración propia.

Como es sabido, GeoGebra es un software libre y gratuito que combina geometría, álgebra y cálculo en una sola herramienta. Estas características, como la capacidad de representar visualmente objetos geométricos, manipular expresiones algebraicas y realizar cálculos matemáticos, lo han posicionado como en una herramienta versátil y poderosa para el aprendizaje de conceptos matemáticos (García e Izquierdo, 2017). Dado que GeoGebra permite visualizar y manipular objetos matemáticos de forma interactiva, ha sido ampliamente utilizado por investigadores en matemática educativa para estudiar el aprendizaje de conceptos matemáticos. En particular, los investigadores han utilizado GeoGebra para diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que fomentan la exploración, la experimentación y la resolución de problemas a través de todos los niveles académicos (Ziatdinov y Valles Jr, 2022).

Figura 33.
Applet destinada a la manipulación de representaciones gráficas de funciones.



Nota. Fotografía tomada durante el desarrollo de la sesión a la pantalla de uno de los computadores de los estudiantes. En ella se observa cómo el estudiante, con el ejercicio a la izquierda y GeoGebra a la derecha, usa los deslizadores para tratar de encontrar la función polinómica de tercer grado.

La sencillez y versatilidad del software han demostrado ser efectivas para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos complejos y para fomentar el aprendizaje activo entre los estudiantes. En conjunto, las características de GeoGebra lo hacen una herramienta indispensable para cualquier docente que quiera mejorar el aprendizaje de sus estudiantes en matemáticas (Wassie y Zergaw, 2018).

La implementación en el AVACOM de GeoGebra se basó en applets interactivos y actividades para desarrollar en ellos. Plasmar esta interacción en texto no permite representar completamente las formas en las cuales se realizaba la interacción de los estudiantes (**Figura**

33), es por esto por lo que se extrajo un fragmento de video y se subió en el siguiente enlace https://gifyu.com/image/SdRmR para su visualización. El AVACOM incorpora estos elementos que permiten interactuar con las representaciones semióticas gráficas y algebraicas de las funciones, lo que favorece la comprensión del concepto a través del tratamiento y conversión entre registros.

5.3. Análisis de Comprensión Matemática

Ahora bien, enfocándonos en la sección final del AVACOM, se dispusieron dos actividades con un carácter evaluativo que se basaron en tratamientos y conversiones de representaciones semióticas. Cada actividad contaba con tres ítems, los cuales presentaban una situación acompañada de diferentes representaciones semióticas de alguna función y se elaboraron un conjunto de preguntas con las cuales se buscó que los estudiantes evidenciaran sus habilidades para hacer tratamientos y conversiones.

5.3.1. Tratamiento de Representaciones Semióticas

Para el análisis de los resultados de los estudiantes en los ítems de esta actividad, se hace una breve presentación de la actividad y se retomaron las respuestas que dieron los estudiantes y que se pueden encontrar organizadas y presentadas en el Anexo C.

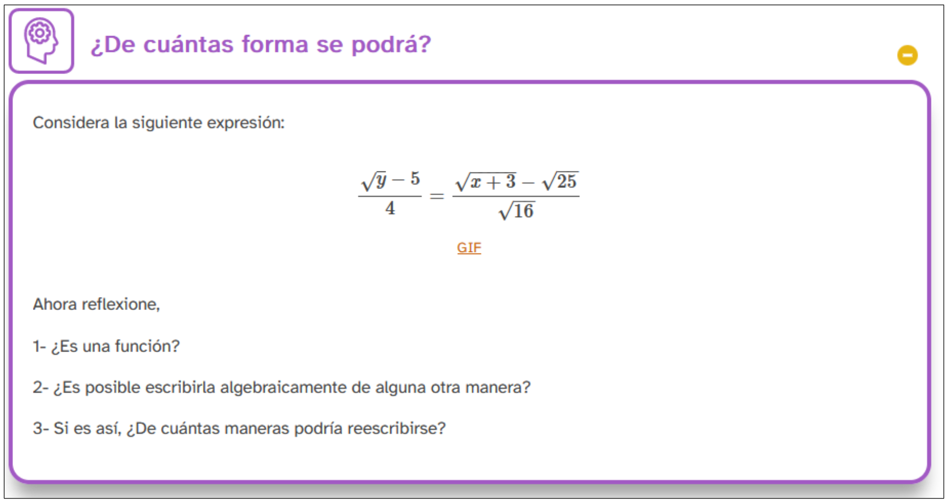
Actividad: ¿De cuántas formas se podrá?

En esta actividad se presentó una expresión algebraica de una línea recta que fue tratada de tal manera que se viera más compleja de lo que realmente es, sumando y dividiendo algunos términos, igual que operando con radicales (**Figura 34**). Se hicieron tres cuestionamientos a los estudiantes:

- Primero, para evaluar si efectivamente la expresión correspondía a una función.

- Segundo, si era posible escribirla algebraicamente de otra forma, en la búsqueda de los tratamientos que pudieran realizar.
- Tercero, una pregunta para replantear su proceso, que evaluara su habilidad para realizar tratamientos y decidiera si era la única forma de hacerlo.

Figura 34.
Primer ítem de la actividad de tratamientos en AVACOM.



Nota. Es posible ver cómo la expresión presentada en la actividad es equivalente (con excepción al dominio) a la línea recta $y = x + 3$, la intención de esta presentación compleja era precisamente que el estudiante realizara el tratamiento correspondiente para llegar a otra forma dentro del mismo registro.

Algunos ejemplos de respuestas que los estudiantes dieron se pueden observar en la **Figura 35** . Como puede notarse, hay respuestas elaboradas a mano por los participantes, a pesar de que contaban con una computadora en el momento de su realización. Aunque se dejó a la decisión de los mismos el formato, se cuestionó la falta de uso de la tecnología, teniéndola a disposición.

Existen varias posibles explicaciones para que algunos estudiantes hayan decidido desarrollar las actividades a mano en lugar de utilizar las opciones tecnológicas a su disposición. En primer lugar, es posible que algunos estudiantes no se sintieran cómodos utilizando el software y prefirieran trabajar de la manera tradicional con lápiz y papel. Es importante recordar que la adopción de la tecnología puede ser un proceso gradual y que algunos estudiantes pueden necesitar más tiempo para adaptarse (Urquidi et al., 2019).

En segundo lugar, puede ser que algunos estudiantes hayan encontrado más eficiente trabajar a mano, ya que pueden hacer dibujos y anotaciones rápidamente y de forma flexible en comparación con el software. Si bien es cierto se ha comprobado a lo largo de la investigación del uso de GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas que resulta más eficiente que su contraparte con papel y lápiz, esto requiere el dominio previo del software (Pérez et al., 2022). Por lo tanto, si los estudiantes estaban más acostumbrados a trabajar con papel y lápiz, lo cual puede ser así ya que son alumnos de primer semestre, recién egresados de bachillerato donde el uso de la tecnología no suele tener una gran presencia, puede resultar factible que consideren esta forma tradicional más eficiente.

En tercer lugar, es posible que algunos estudiantes hayan encontrado la tecnología demasiado limitada para sus necesidades específicas, o que simplemente prefirieran la sensación táctil del papel y el lápiz. Estas percepciones y sensaciones son comúnmente retratadas en las investigaciones donde se muestra la resistencia al uso de la tecnología en el sector educativo, no sólo por estudiantes, sino por docentes, en donde sus costumbres o preferencias superan las razones que existen para la implementación de las herramientas digitales (Mercader, 2019).

En general, es importante tener en cuenta que los estudiantes tienen diferentes estilos de aprendizaje y preferencias en cuanto a las herramientas y métodos de estudio. Es necesario tener opciones y flexibilidad en la metodología de trabajo para que los estudiantes puedan encontrar la que mejor se adapte a sus necesidades. En este caso, es posible que fuera beneficioso para los estudiantes que no se les limitara la forma de trabajar, ya fuera con papel y lápiz o con la tecnología, según su preferencia.

Figura 35.

Respuestas al segundo ítem de la actividad de tratamientos en AVACOM.

Tratamiento y conversiones

¿De cuantas formas se podrá?

- ¿Es una función?

Si es una función, ya que existe variable en X y Y

- ¿es posible escribirla algebraicamente de alguna u otra manera?

Si es posible y quedaría así

$$y = x + 3$$

- Si es así de cuantas maneras podría reescribirse

$$y = x + 3$$
$$x = y - 3$$

Oscar

¿De cuántas formas se podrá?

1. Si es una función.
2. Si se puede escribir de otra forma, como por ejemplo:

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{y} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x+3} = 0$$

3. De 2 formas se puede reescribir.

1 Item.

1 Es función? Si ya que obtenemos valores dependiendo los diferentes valores que le demos a la variable x

2- Es posible escribirla algebraicamente de alguna otra manera?

Si ya que en este ejercicio la función es implícita; podemos convertirla explícita dejando a un solo lado de la ecuación la variable y, además podemos cambiar la variable x por cualquier otra letra del abecedario.

3. De cuantas maneras podría reescribirse?

De diferentes maneras ya que podemos cambiar las variables con las letras que queramos, además podemos plantear la función explícitamente e implícitamente.

1. ¿Es una función?

Rta: La expresión dada si es una función.

2. ¿Es posible escribirla algebraicamente de alguna otra manera?

Rta: Considero que si es posible escribirla algebraicamente de otra forma

3. Si es así, ¿De qué cuantas maneras podría reescribirse?

Rta: pienso que podría ser de la siguiente manera:

y= x + 3 (x > 3)

¿De cuantas formas se podrá?

1- ¿Es una función? Si por que es un resultado asociado a un valor que se puede obtener por medio de las operaciones aritmeticas.

2- ¿Es posible escribirla algebraicamente de alguna otra manera?

Si es posible ya que se le puede cambiar las letras e intercambiar la igualdad.

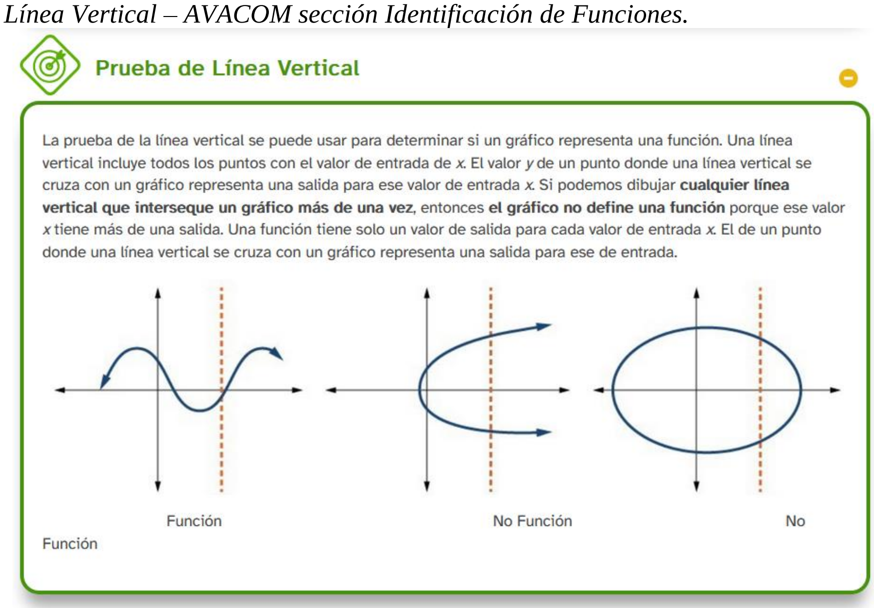
3- ¿De cuantas maneras podría reescribirse?

Se puede cambiar las letras de 23 maneras y la igualdad de dos maneras distintas., y de mas formas...

Nota. Las capturas mostradas aquí son fragmentos de las respuestas de algunos estudiantes, las respuestas completas pueden verse en el Anexo C.

Con respecto a la caracterización de la expresión algebraica como una función, todos los estudiantes respondieron que efectivamente era una función, pero sus razonamientos para llegar a dicha conclusión variaron entre sí. En la subsección *Identificación de Funciones*, de la sección *¿Qué es una función?* en el AVACOM, se describió el método de la Prueba de Línea Vertical (**Figura 36**), y se incluyó una actividad interactiva de identificación de funciones con su respectiva realimentación, sin embargo, esta prueba requiere que los estudiantes realicen la gráfica de la función y ninguno de ellos optó por representar en el registro gráfico la expresión dada.

Figura 36.
Prueba de la Línea Vertical – AVACOM sección Identificación de Funciones.



Nota. Elaboración propia.

Uno de los argumentos de los estudiantes fue la presencia de las variables x e y dentro de la expresión, lo cual, según ellos hace que esta expresión corresponda a una función. Al cuestionarles durante la sesión si esto significaba que, en una expresión en donde en lugar de y apareciera $f(x)$, seguiría siendo una función o no, los estudiantes indicaron que era lo mismo, es decir, que $f(x) = y$, con lo cual resultaría, para ellos mismos, que las letras que aparecen en la representación son irrelevantes, lo que es contradictorio con el razonamiento plasmado. Esto podría indicar que la conceptualización del objeto matemático *función*, como relación entre variables que cumple ciertas características la están ligando sólo con la presencia de dichas variables (algo que, efectivamente, más adelante se verá con mayor claridad), dejando de lado sus características.

Otro de los resultados llamativos, demuestra que efectivamente hay estudiantes que si conceptualizan de manera correcta el objeto. Transcribiendo la respuesta del último estudiante de la **Figura 36**, "Si porque es un resultado asociado a un valor que se puede obtener por medio de las operaciones aritméticas", es posible ver que, si bien no es del todo acertada la argumentación que da, se vislumbra la idea de asociación entre valores, en este caso, derivados de operaciones aritméticas.

Desde las investigaciones en educación matemática es importante destacar que, los errores conceptuales sobre el concepto de función han sido trabajados en innumerables publicaciones y suelen asociarse a falencias en la enseñanza o aprendizaje. En el primer caso, la orientación del docente es la protagonista, una presentación incorrecta o poco clara del concepto de función de parte del docente durante su praxis, deriva en un pobre entendimiento de las características del concepto (Ay, 2017). En el segundo, se describe que el estudiante ha concebido de manera superficial el objeto matemático, identificando sólo elementos aislados y sin establecer las relaciones pertinentes entre estos, por ejemplo, el hecho de que se presenten variables sin que se establezca la relación inmersa entre ellas (Özkan y Ünal, 2009).

Teniendo en cuenta que la orientación recibida por el estudiante se basó en lo plasmado dentro del ambiente virtual y que esto está correctamente presentado y se profundiza en la definición y características de la función, puede considerarse que fue esta falta de compromiso en ahondar en el aprendizaje del concepto de parte de los estudiantes. Si éste fuera el caso, existen diversos motivos que inciden en la falta de compromiso de parte de los estudiantes (Fernández, 2018), entre algunas podemos destacar:

- Falta de interés: El estudiante no está interesado en el tema o en el curso en sí. En este caso, es posible que el estudiante no se sienta motivado para aprender y por lo tanto no se comprometa con el proceso de aprendizaje. Sin embargo, desde el punto de vista de la investigadora, los estudiantes seleccionaron la carrera de Licenciatura en Matemáticas por su propia convicción, de donde puede implicarse que tienen interés en el desarrollo de sus conocimientos en ella.
- Falta de habilidad: El estudiante puede sentir que no tiene las habilidades necesarias para entender el concepto o para aplicar lo que ha aprendido, en este caso, puede sentirse frustrado y desmotivado. Aunque no se evidenciaron expresiones de frustración de parte de los estudiantes, es probable la existencia de ésta.
- Problemas personales: El estudiante puede estar experimentando problemas personales o emocionales que están afectando su concentración y capacidad de respuesta académica. Aunque no es un aspecto que se relaciona con el ambiente virtual, es necesario considerarlo pues puede llegar a afectar el desempeño de los estudiantes.
- Falta de apoyo o recursos para aprender: Si el estudiante no siente que tiene acceso a la ayuda que necesita para comprender el concepto, puede ser menos probable que se comprometa con el aprendizaje. Considerando que la propuesta de trabajo se basa en un nivel considerable en el trabajo autónomo del estudiante, si éste no está acostumbrado a dicha dinámica, puede sentirse que el proceso lo supera.

Por otro lado, con respecto a la segunda y tercera pregunta del ítem 1, se buscó que el estudiante abordara el tratamiento de la expresión algebraica en cuestión:

$$\frac{\sqrt{y}-5}{4}=\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{25}}{\sqrt{16}}$$

El estudiante podría ir operando los elementos dentro de la expresión hasta reducirla a su mínima forma explícita:

$$y = x + 3$$

Como se observa en las respuestas, hay varios de los estudiantes que señalaron esta última forma como solución a la pregunta. Aunque también se presentaron algunos que se quedaron en pasos intermedios como:

$$\frac{1}{4} \cdot \sqrt{y} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{x + 3} = 0$$

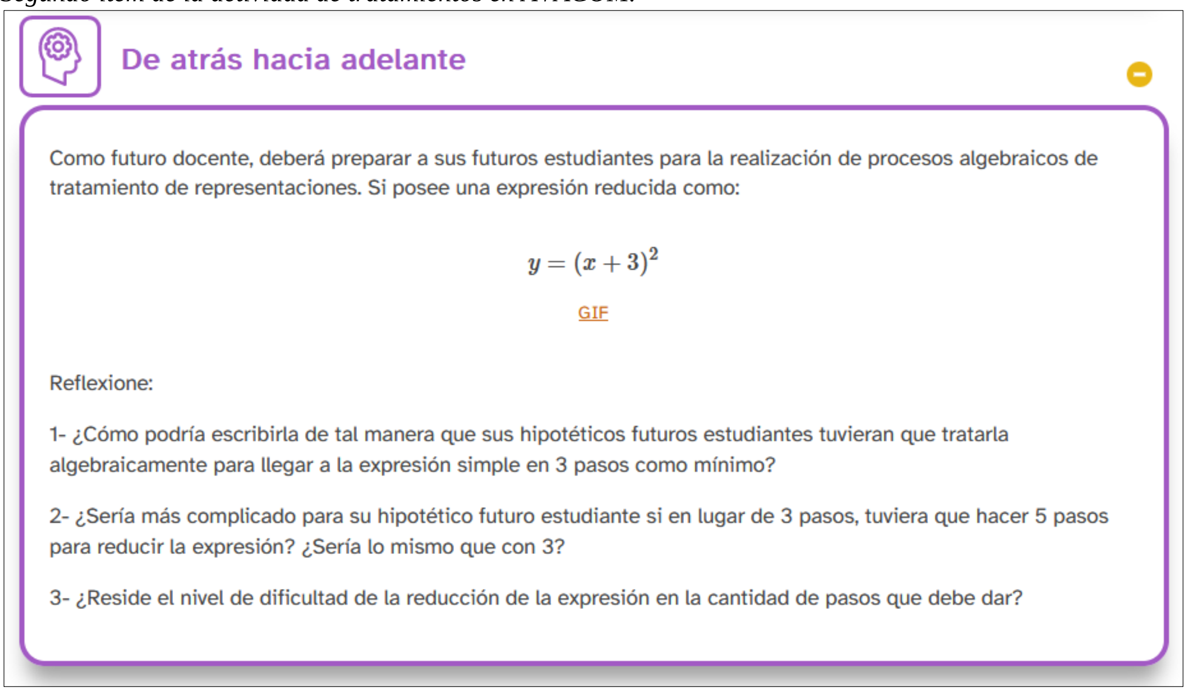
Este estudiante en particular utilizó una herramienta en línea llamada Symbolab, con la cual, al escribir la ecuación, le dio esta otra forma de la misma.

Con esto se observó que efectivamente los estudiantes fueron capaces de hacer tratamientos a la representación semiótica de esta función dentro del registro algebraico. Sin embargo, cuando respondieron la tercera pregunta (*¿De cuántas maneras podría reescribirse?*) sus respuestas indican, en algunos casos, un dominio limitado de este proceso. Por ejemplo, algunos mencionan que sólo de dos formas es posible reescribirla, y dan de ejemplo $y = x + 3$, y, $x = y - 3$, considerando que la primera expresión algebraica dada en la actividad misma ya se configura como una forma, con éstas dos tendrían tres formas como mínimo. También mencionan "Si es posible ya que se le puede cambiar las letras e intercambiar la igualdad", y se especifica "Se pueden cambiar las letras de 23 maneras y la igual de dos maneras distintas, y de más formas". Si bien es cierto esto es una forma de tratamiento de la representación, no es una concepción del todo completa, pues no se toman en cuenta las posibles operaciones que se pueden aplicar a la función para alterar la representación sin que se afecte la relación entre las variables.

De atrás hacia adelante

En esta actividad se presentó una función polinómica de segundo grado de manera factorizada como un binomio al cuadrado (**Figura 37**). La intención de las preguntas fue generar la reflexión de los estudiantes sobre los distintos tratamientos que tendrían que hacerse a la expresión de tal manera que un estudiante hipotético tuviera que realizar un número específicopasos para llegar a la forma reducida.

Figura 37.
Segundo ítem de la actividad de tratamientos en AVACOM.

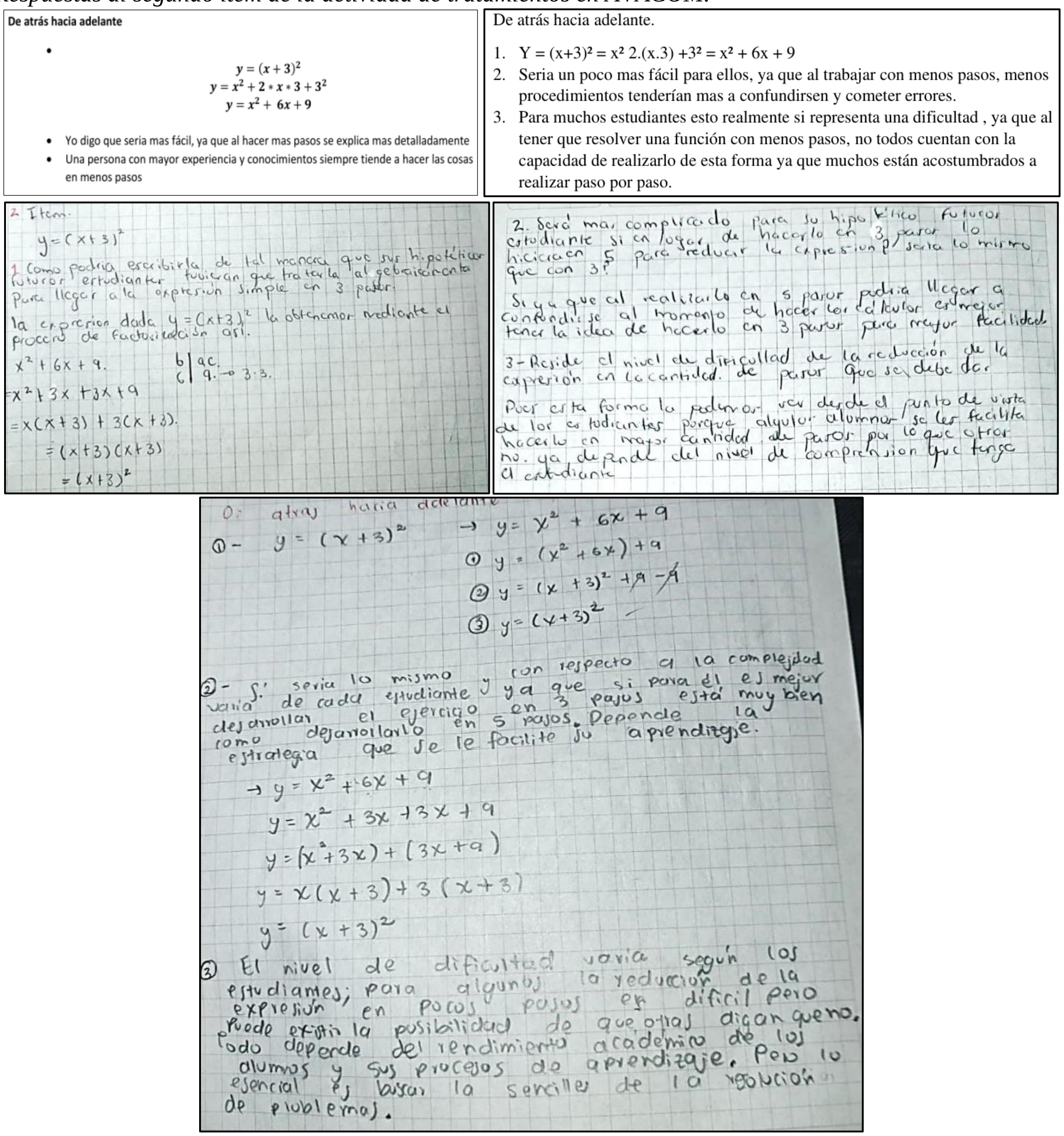


Nota. En esta actividad se profundiza en el análisis del proceso de tratamiento, más que en su ejecución.

Algunas respuestas dadas por los estudiantes pueden observarse en la **Figura 38** . Entre estas pueden observarse que, efectivamente, los estudiantes en este ítem demostraron sus capacidades para realizar tratamientos a la representación semiótica dentro del registro algebraico, tanto para proponer tres pasos como cinco.

Los estudiantes, en su desarrollo, optaron por expandir el binomio y luego sugirieron que debería plantearse así no más, con su desarrollo. Esta solución es válida, por supuesto, sin embargo, cuando se les solicitó reflexionar al respecto de un tratamiento para la misma representación de tal manera que costara cinco pasos para volver a la original, consideraron que el estudiante hipotético hiciera otro proceso diferente, con la misma expresión producto del desarrollo del binomio. Esto implica que, los estudiantes no concibieron su tratamiento de la representación semiótica original con base en los pasos, sino que lo basaron en el proceso para volver.

Figura 38.
Respuestas al segundo ítem de la actividad de tratamientos en AVACOM.



Nota. Las capturas mostradas aquí son fragmentos de las respuestas de algunos estudiantes, las respuestas completas pueden verse en el Anexo C.

La misma representación para dos procesos diferentes:

$$y = x^2 + 6x + 9$$

La diferencia, en la cantidad de pasos, según las evidencias de las reflexiones de los estudiantes es que el estudiante en lugar de hacer el proceso de factorización de la siguiente forma:

$$y = x^2 + 6x + 9 \rightarrow \underbrace{y = (x^2 + 6x) + 9}_{1} \rightarrow \underbrace{y = (x+3)^2 + 9 - 9}_{2} \rightarrow \underbrace{y = (x+3)^2}_{3}$$

Lo hicieran:

$$(1)\ y = x^2 + 6x + 9$$

$$(2)\ y = x^2 + 3x + 3x + 9$$

$$(3)\ y = (x^2 + 3x) + (3x + 9)$$

$$(4)\ y = x(x+3) + 3(x+3)$$

$$(5)\ y = (x+3)^2$$

Ahora bien, cuando se les cuestiona sobre la dificultad que tendría la ejecución de tres o cinco pasos para el tratamiento de la representación en el registro algebraico, sus respuestas dejan ver que consideran que la dificultad no está en el tratamiento de la representación, sino en el conocimiento de quien desarrolle el proceso: “El nivel de dificultad varía según los estudiantes; para algunos la reducción de la expresión […] es difícil pero puede existir […] que otros digan que no. Depende del rendimiento académico”; “Sería un poco más fácil” (al referirse a tres en lugar de cinco) “ya que al trabajar con menos pasos, menos procedimientos tendería más a confundirse […] no todos cuentan con la capacidad de realizarlo de esta forma”; “Una persona con mayor experiencia y conocimientos siempre tiende a hacer las cosas en menos pasos”.

En realidad, cuando se realizan tratamientos a representaciones semióticas dentro del registro algebraico, no es relevante la cantidad de pasos que se involucren en el proceso, eso depende exclusivamente de la capacidad para realizar operaciones mentales por parte del individuo quien realice el tratamiento (Presmeg, 2016). La dificultad, sin embargo, podría derivarse de la forma en la que se presente la representación semiótica en el registro algebraico. Por ejemplo, si en lugar de darle al estudiante la función:

$$y = (x + 3)^2$$

Se le entrega como:

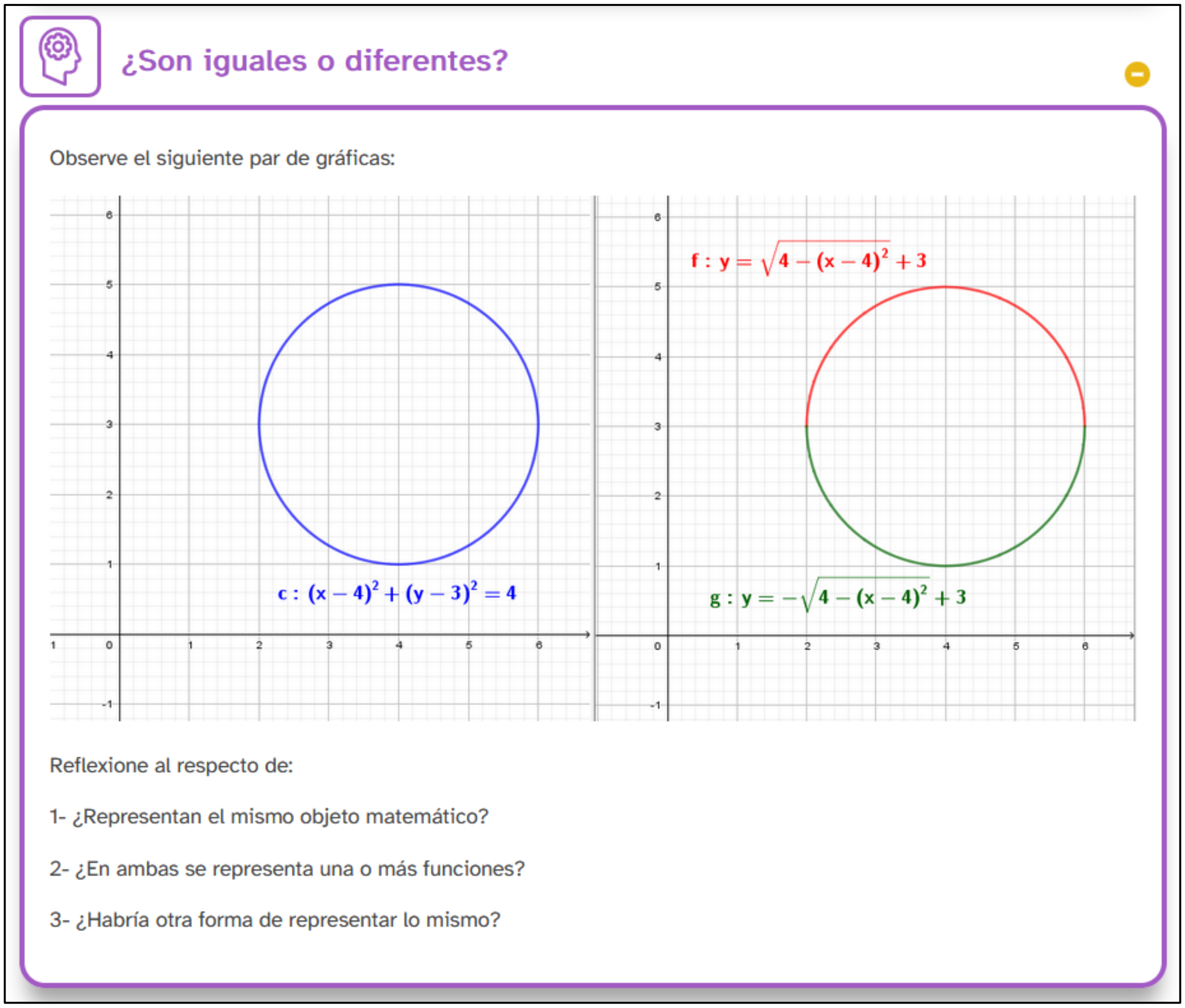
$$\sqrt{y} = |x + 3|$$

Aunque parezca igual de simple, genera en los estudiantes una sensación de complejidad mayor que tener el polinomio desarrollado, esto se debe a la inclusión del valor absoluto y el radical dentro de la expresión algebraica, operadores cuyo nivel de dificultad asociado es más alto según lo narran algunas investigaciones (Ramírez y Zúñiga, 2019; Demetgül y Baki, 2020; Adinda et al., 2021). Aunque el objetivo de la actividad no era que los estudiantes llegaran a esta representación semiótica específica como forma alternativa de reescribir la original, resulta relevante observar que, en sus análisis, el único tratamiento que previeron fue el de desarrollar el binomio al cuadrado. Esto sugiere un nivel bajo de reflexión en el proceso, lo cual se refuerza al observar las respuestas que dieron cuando se pedía reflexionar sobre tratamientos con los cuales se necesitaran más pasos.

¿Son iguales o diferentes?

En el último ítem de la actividad de tratamientos, denominada *¿Son iguales o diferentes?*, se le presenta a los estudiantes dos representaciones semióticas para una circunferencia con centro en $(3, 4)$ y radio 2 (**Figura 39**). Las primeras dos preguntas que se establecen en el ítem son para comparar las representaciones, la tercera es para reflexionar al respecto de la existencia de otro tipo de representación.

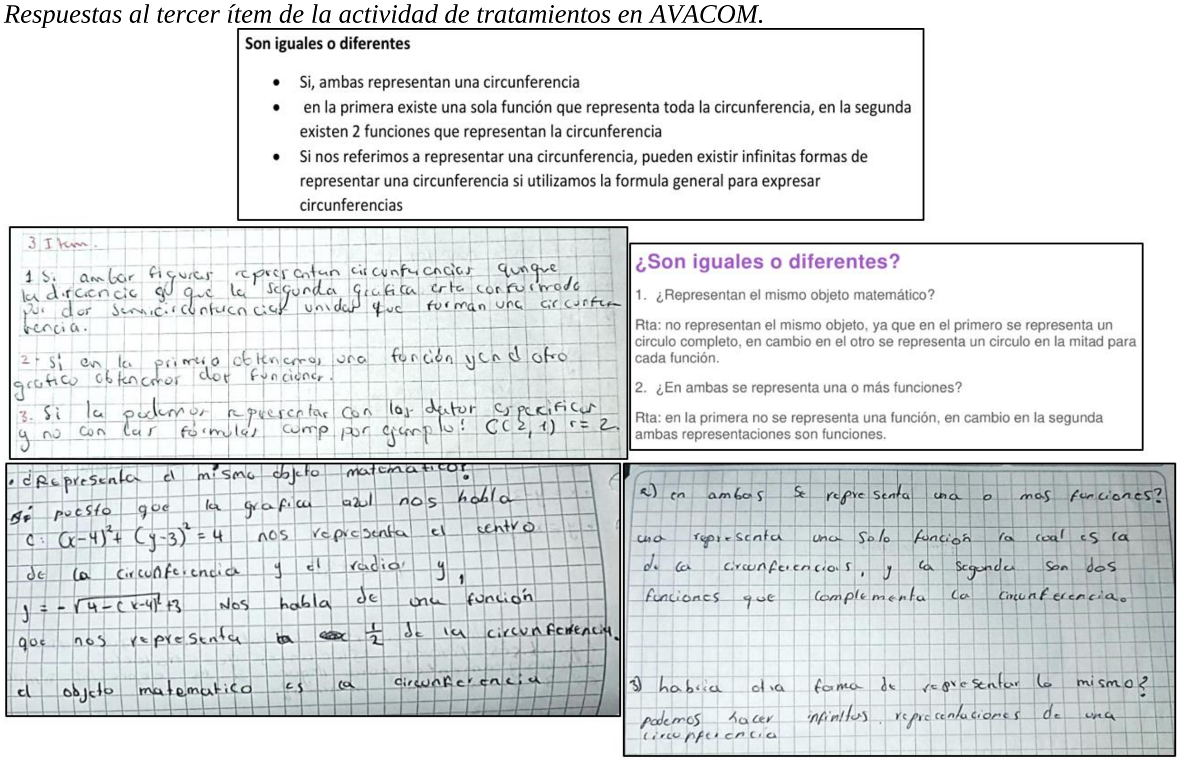
Figura 39.
Tercer ítem de la actividad de tratamientos en AVACOM.



Nota. En esta actividad se profundiza en la manipulación de la representación semiótica de la circunferencia dentro del registro gráfico, esto con el objetivo de caracterizar las representaciones usadas y compararlas entre sí.

En la **Figura 40** se observan las respuestas que dieron algunos estudiantes a las preguntas de esta actividad. Con respecto a la primera pregunta, en donde se les pide responder si representan el mismo objeto matemático, las respuestas fueron variadas y algunas con razonamientos que vale la pena resaltar. Por ejemplo, la respuesta más común fue que ambas gráficas representaban el mismo objeto matemático, una circunferencia, lo cual, efectivamente, es cierto, sin embargo, considerando que dentro del contexto en el que se está trabajando son las funciones, la respuesta correcta debería ser que no, pues en un caso se representan dos funciones y en el otro una relación. Así lo describe uno de los estudiantes “Sí, ambas figuras representan circunferencias, aunque la diferencia es que la segunda gráfica está conformada por dos semicircunferencias unidas”. Esto indica que, como se tenía considerado, algunos fueron capaces de identificar que la segunda gráfica es en realidad una representación semiótica del objeto matemático en cuestión y no como funciones por separado. Esto es relevante para nuestro análisis debido a que una de las formas de realizar tratamientos dentro del registro gráfico es subdividir la representación y presentarlas en el mismo plano (Duval, 2017).

Figura 40.
Respuestas al tercer ítem de la actividad de tratamientos en AVACOM.



Nota. Las capturas mostradas aquí son fragmentos de las respuestas de algunos estudiantes, las respuestas completas pueden verse en el Anexo C.

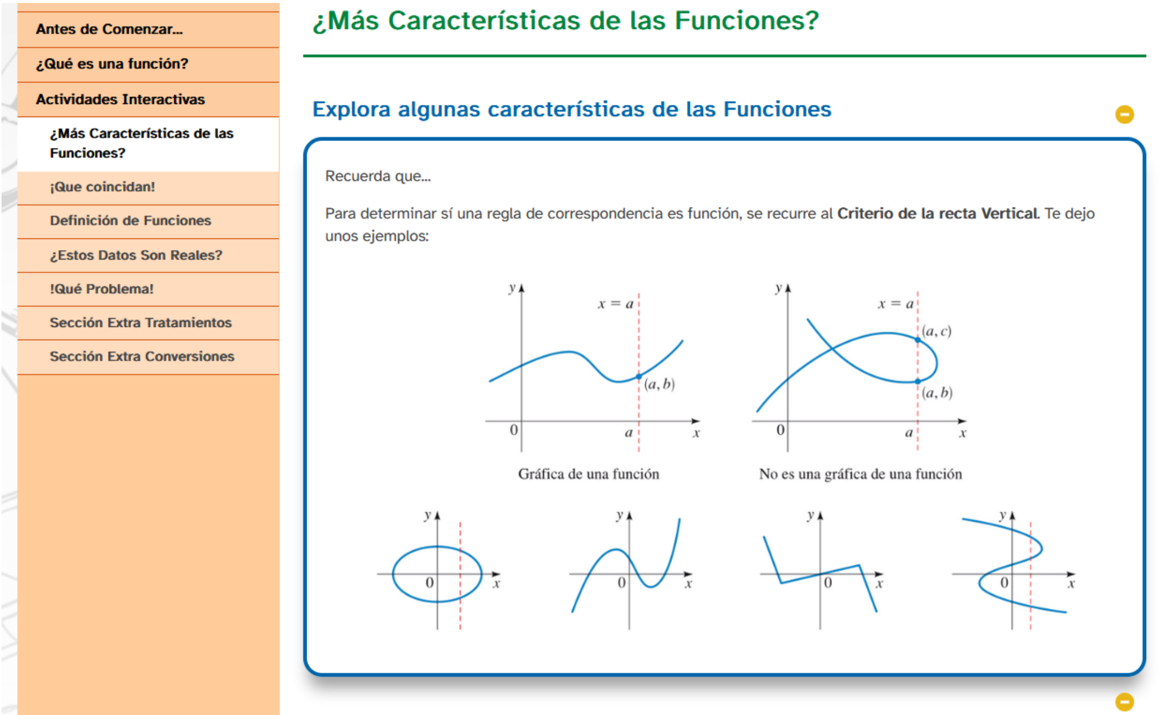
También se presentaron respuestas en donde los estudiantes argumentaron usando las representaciones semióticas algebraicas que estaban incluidas en las gráficas (respuesta inferior izquierda de la **Figura 40**), sin embargo, el análisis hecho por el estudiante no es relevante, ni justifica el hecho de decir que se trata del mismo objeto matemático. Esta llama la atención debido a que extrae dicha información algebraica anexa de la representación gráfica, lo cual puede evidenciar una preferencia al registro algebraico, cuestión que es contraria con los hallazgos anteriormente mencionados en la Sección 5.1.1, cuando se analizaron los discursos de los estudiantes en los videos y que mostraban una predilección mayor hacia el registro gráfico.

Dentro de las respuestas de los estudiantes a este primer cuestionamiento comparativo sobre las representaciones gráficas también se encontraron algunas en las cuales se evidencia la falta de comprensión sobre el concepto representado: "[…] en el primero se representa un círculo completo, en cambio en el otro representa un círculo en la mitad para cada función". Es claro que el objeto matemático representado es una circunferencia, no un círculo; este es un ejemplo común de confusión con este par de objetos matemáticos que se presenta y, según las investigaciones, deriva principalmente de la falta de precisión en el discurso del docente cuando se enseña y del paso de las representaciones concretas (materiales) a figurales en la niñez sin el estudio de las características y diferencias entre estos dos (Oller, 2021).

De cualquier forma, los estudiantes, en su totalidad, consideraron que la representación gráfica de la expresión $(x-4)^2+(y-3)^2=4$, representa una función, lo cual, como se mostró antes, con sólo aplicar la prueba de la línea vertical sería suficiente para notar que no lo es. Esta problemática sugiere una debilidad en la propuesta desarrollada, pues es evidente que no se logró que el estudiante utilizara la información integrada, que aprendiera dicha técnica de prueba, elemento intuitivo y útil para caracterizar las representaciones gráficas de las funciones y diferenciarlas de las que no lo son.

Aunque podría considerarse que esto deriva de la estructura del AVACOM, que la ubicación de esta información se encuentra lejos y en conjunto con otros elementos de la sección donde se integró haciéndola que se perdiera o pasara sin relevancia, lo cierto es que la técnica vuelve a presentarse como un recordatorio en la sección donde se encuentran estas actividades, dentro de la primera actividad interactiva denominada *¿Más Características de las Funciones?* (**Figura 41**), haciéndola presente poco antes de ingresar a las actividades en donde se resolvían estos ítems.

Figura 41.
Recordatorio del criterio de la recta vertical en AVACOM.



Nota. Elaboración propia.

Con respecto a la última pregunta del ítem, los estudiantes debían describir si era posible representar la misma circunferencia de otras formas, es decir, proponer otra serie de tratamientos de las representaciones semióticas en el registro gráfico. Algunas de las respuestas de los estudiantes dan a entender que en este punto se comprendió el sentido de los tratamientos, de las funciones que representaban la circunferencia: “podemos hacer infinitas representaciones de una circunferencia"; "[…] pueden existir infinitas formas de representar una circunferencia si utilizamos la fórmula general para expresar circunferencias"; o "Sí, la podemos representar con los datos específicos y no con las fórmulas como por ejemplo: $C(2,1), r = 2$".

En particular, estas dos aseveraciones hablan de la representación semiótica de la circunferencia en otros registros (algebraico y simbólico), pero no se refieren a formas de representarla de manera gráfica. Esto sugiere que los estudiantes no perciben correctamente el tratamiento de la representación, pues buscar formas alternativas de representar el mismo objeto matemático y lo relacionan con buscar en otro registro de representaciones. Esta tendencia a realizar la conversión de la representación en lugar del tratamiento es algo presente en propuestas similares de uso de representaciones semióticas con otros objetos matemáticos (Galindo et al., 2020; Rodríguez et al., 2021). Además, el hecho de que la representación hacia la que se inclinaron fuera la simbólica y algebraica, muestra una vez más la predilección por este registro, lo cual hace pone una vez más entredicho los hallazgos de la sección anterior en el análisis del discurso realizado.

Profundizando en estas preferencias, Caligaris et al. (2015) afirman que los estudiantes que poseen un estilo de aprendizaje kinestésico prefieren explorar, manipular y representar objetos en el registro gráfico, pues sus sensaciones al dibujar representaciones gráficas promueven la facilidad de su aprendizaje. Ahora bien, considerando que cuando se emplean los entornos virtuales de aprendizaje, como el AVACOM, se reemplaza esta fuente de activación del aprendizaje por una mediada por el software (Salas, 2007), en este caso por GeoGebra, lo cual cambia la sensación que experimenta al elaborar una representación. Entonces, podría considerarse que, a pesar de que los estudiantes tienen una preferencia por la representación gráfica, según lo evidenciado en sus discursos, esta preferencia no se percibe en sus respuestas porque la forma en la cual se realiza la representación no generan las mismas sensaciones que generan la preferencia.

Todo lo anterior permite explicar la previa incoherencia detectada entre sus discursos iniciales y sus respuestas posteriores, entre preferir el registro gráfico y luego utilizar con mayor inclinación el algebraico y simbólico. Ahora bien, considerando que la preferencia también puede generarse por la familiaridad del estudiante con los registros, y tomando en cuenta que el registro algebraico o simbólico suele presentarse en mayor medida cuando se habla de manipulación de objetos matemáticos, a pesar de los grandes esfuerzos por aumentar la concreción de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y reducir el manejo abstracto (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014), puede decirse que los estudiantes prefieren el registro algebraico y simbólico por su presencia cuando resuelven una actividad con representaciones semióticas, aun cuando presentan evidencias de que prefieren el registro gráfico en el material con el que se les enseña y aprenden. Por supuesto, esto tomando en cuenta que la tecnología interviene en el proceso, por lo señalado con las sensaciones.

Este hallazgo genera a su vez una implicación relevante de señalarse en cuanto a la dinámica de planteamiento de actividades cuando se utilizan las representaciones semióticas. Si se desea que el estudiante realice tratamientos en el registro gráfico, por encima del algebraico o simbólico, si se tiene interés en que opte por estas representaciones, se debe tener en cuenta que su trabajo debe asegurar que tenga la misma carga de sensaciones que si lo hiciera con papel y lápiz. Esto es fácilmente argumentable si se toma en consideración los buenos resultados de las investigaciones que se basan en las construcciones geométricas con métodos tradicionales (Cano, 2020; López y Martin, 2020). De igual manera, si se desea que haya una inclinación hacia el registro simbólico, algebraico, la familiaridad y presencia de estas representaciones puede propiciar su inclinación si las demás representaciones se median a través de herramientas que no generen las sensaciones mencionadas anteriormente.

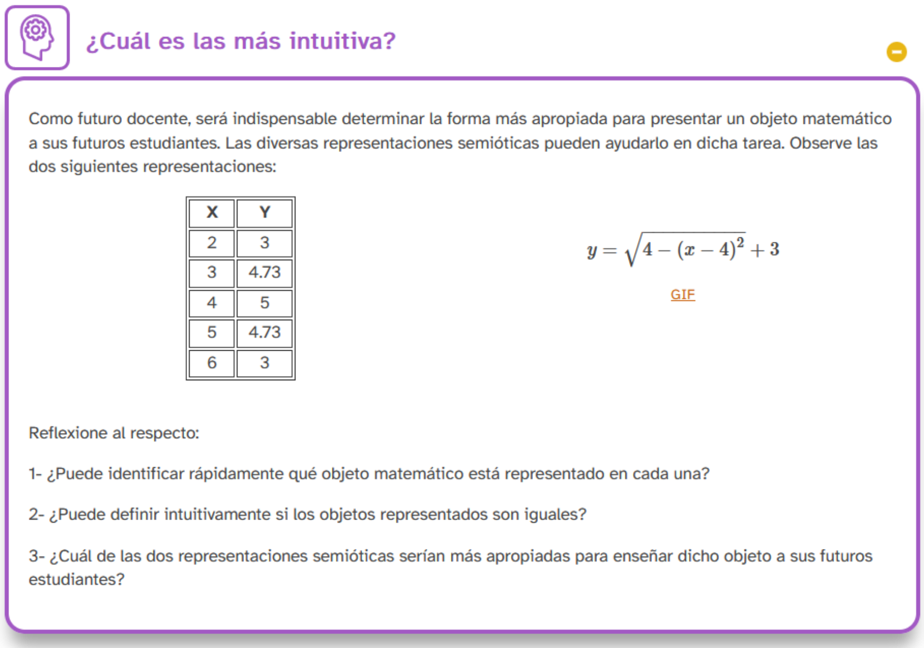
5.3.2. Conversión de Representaciones Semióticas

Al igual que con los tratamientos, para evidenciar los procesos de conversión que el estudiante realizó durante el desarrollo de la implementación del AVACOM se planteó una actividad con dos ítems en los cuales se involucraron diversas representaciones semióticas de funciones en varios registros de representación diferentes. Se abordó el registro tabular, el algebraico, el verbal y el gráfico, incluyendo tres preguntas en cada ítem que creaban la necesidad de reflexionar al respecto de las representaciones semióticas y su conversión entre registros.

¿Cuál es la más intuitiva?

En el primer ítem de esta actividad, se volvió a contextualizar al estudiante como futuro docente, se presentó una situación en la cual tuviera que analizar dos representaciones semióticas (tabular y algebraica) de un mismo objeto matemático, una semicircunferencia con centro en $(3,4)$ y radio 2. Se les cuestionó al respecto de lo intuitivas que eran estas representaciones (en el caso de la tabla, se dieron pocos valores y en el caso de la representación algebraica, se escribió con radicales) y cómo podrían decidir sobre qué tipo de representación utilizar de tal forma que fuera la apropiada para sus hipotéticos estudiantes (**Figura 42**).

Figura 42.
Primer ítem de la actividad de conversiones en AVACOM.



¿Cuál es las más intuitiva?

Como futuro docente, será indispensable determinar la forma más apropiada para presentar un objeto matemático a sus futuros estudiantes. Las diversas representaciones semióticas pueden ayudarlo en dicha tarea. Observe las dos siguientes representaciones:

X	Y
2	3
3	4.73
4	5
5	4.73
6	3

$$y = \sqrt{4-(x-4)^2}+3$$

GIF

Reflexione al respecto:

1- ¿Puede identificar rápidamente qué objeto matemático está representado en cada una?

2- ¿Puede definir intuitivamente si los objetos representados son iguales?

3- ¿Cuál de las dos representaciones semióticas serían más apropiadas para enseñar dicho objeto a sus futuros estudiantes?

Nota. En esta actividad se busca la reflexión sobre lo intuitiva o no que puede ser una representación de una función en un registro de representaciones en particular. La forma en la que se presentaron las representaciones fue intencionalmente poco intuitiva, pues se buscaba que el estudiante optara por usar otra representación, que hiciera una conversión.

En la **Figura 43** puede observarse un conjunto de respuestas que algunos estudiantes dieron a este ítem de la actividad de conversiones. Dentro de éstas se encuentran dos posturas claras sobre la intuición, algunos estudiantes consideran que, efectivamente, las representaciones ofrecidas sobre la semicircunferencia son intuitivas (la tabla y la expresión algebraica) y otros consideran que se debió incorporar la representación dentro del registro gráfico para poder decir que es intuitiva. Esto último, como ya se ha hablado al respecto, muestra una vez la preferencia por el registro gráfico, sin embargo, no es la mayoría, como se vislumbraba en un comienzo.

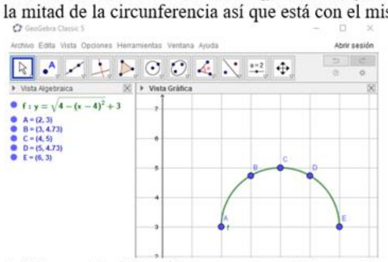
Inicialmente resulta sencillo destacar la respuesta del estudiante que incorporó la conversión de la representación tabular y representación algebraica en el registro gráfico por medio del software GeoGebra. Además, presenta en sus respuestas que efectivamente las dos representaciones corresponden con un mismo objeto matemático (semicircunferencia) y señala que efectivamente, las dos no son intuitivas, y al respecto describe “No pues tendría que graficar ambos elementos para así identificarlo”. El mismo estudiante hace referencia que no es fácil saber si los objetos representados son iguales, pues “no conozco bien la fórmula de la mitad de una circunferencia”. Finalmente, el estudiante acaba escribiendo que “la mejor forma sería con la gráfica” cuando se le pregunta cuál de las representaciones semióticas era más apropiada para enseñar dicho objeto, y sigue con “ya después de eso se podría utilizar la ecuación y luego la tabla”.

Esta articulación entre las representaciones de un mismo objeto en diferentes registros y la inclinación de ellos al registro gráfico por encima de los otros, como ya se ha mencionado, se ha retratado en diversas publicaciones con variedad de temáticas en las matemáticas (Lozano et al., 2015; Valenzuela y Vigo, 2018). Sin embargo, la argumentación que ofrece el estudiante al respecto, de por qué usar la representación gráfica antes que las otras, está orientada al reconocimiento o a la percepción visual, “es más fácil de ver”; “no conozco bien la fórmula”; “Si graficamos vemos”; indicando así que la predilección por este registro puede estar dada por la familiaridad con el mismo o por la visualización matemática que pueden realizar, pues esta última se da con mayor facilidad dentro de éste registro (De guzmán, 1996).

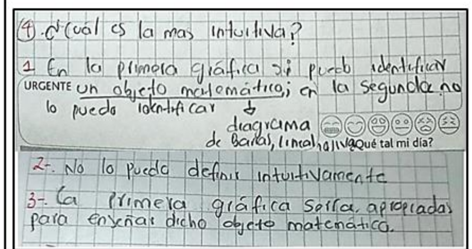
En el otro extremo encontramos respuestas de estudiantes muy fuera de lugar, tomando en cuenta que durante estas sesiones se trabajó con funciones, pues ellos mencionan cosas como “En la primera representación identifico un diagrama de barras” o “puedo identificar un objeto matemático […] diagrama de barras”. Cuando se les cuestionó al respecto de por qué afirmaban esto, mencionaron que las tablas de este estilo se usan para hacer diagramas estadísticos como los de barras. Estas respuestas dejan en evidencia que los estudiantes no comprendieron el sentido de estas representaciones de las funciones en el registro tabular (las cuales se encuentran integradas en prácticamente todas las secciones del AVACOM). No sólo eso, sino que las asociaron erróneamente con las representaciones usuales en estadística.

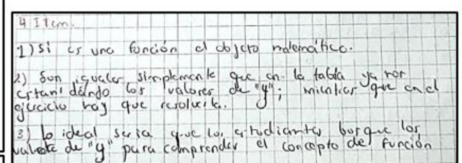
Figura 43.
Respuestas al primer ítem de la actividad de conversiones en AVACOM.

1- ¿Puede identificar rápidamente qué objeto matemático está representado en cada una?
No pues tendría que graficar ambos elementos para así identificarlo. Si graficamos vemos que es la mitad de una circunferencia la función. Si se grafican los puntos vemos que también están sobre la mitad de la circunferencia así que está con el mismo objeto.



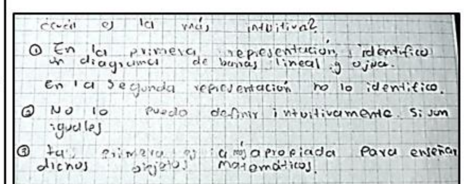
2- ¿Puede definir intuitivamente si los objetos representados son iguales?
Es difícil hacerlo sin ver la gráfica, no conozco bien la fórmula de la mitad de una circunferencia.
3- ¿Cuál de las dos representaciones semióticas serían más apropiadas para enseñar dicho objeto a sus futuros estudiantes?
Ninguna de las dos. La mejor forma sería con la gráfica, pues es más fácil de ver de qué se trata la función. Ya después de eso se podría utilizar la ecuación y luego la tabla.





¿Cuál es más intuitiva?

¿Puede identificar rápidamente qué objeto matemático está representado en cada una?
Sí, podemos identificar rápidamente que ambas representaciones están mostrando una semicircunferencia.
¿Puede definir intuitivamente si los objetos representados son iguales?
Sí, podemos definir intuitivamente que los objetos representados son iguales porque ambos representan la misma semicircunferencia. La tabla de valores muestra los mismos puntos que la semicircunferencia definida por la ecuación algebraica.
¿Cuál de las dos representaciones semióticas serían más apropiadas para enseñar dicho objeto a sus futuros estudiantes?
Ambas representaciones son útiles para enseñar la semicircunferencia a los estudiantes. La tabla de valores puede ser útil para que los estudiantes puedan identificar fácilmente los puntos que están sobre la semicircunferencia y cómo se relacionan con la ecuación algebraica. La representación algebraica puede ser útil para mostrar cómo se puede describir la semicircunferencia mediante una ecuación y cómo se puede utilizar para resolver problemas matemáticos. La representación gráfica de la semicircunferencia también sería útil para visualizar la relación entre los puntos y la ecuación algebraica.



Nota. Las capturas mostradas aquí son fragmentos de las respuestas de algunos estudiantes, las respuestas completas pueden verse en el Anexo C.

Profundizando sobre estas concepciones erradas, la relación que establecieron los estudiantes entre las representaciones tabulares y los objetos estadísticos puede entenderse si se consideran que el registro figural, gráfico y tabular, son los principales usados en la enseñanza y aprendizaje de la estadística (Arteaga et al., 2018). Esta sobrerrepresentación de registro para su aprendizaje genera que cualquier otra inclusión de alguna representación de éste en otro contexto o con otra temática, termine siendo erradamente relacionada con la temática en donde se utiliza ampliamente.

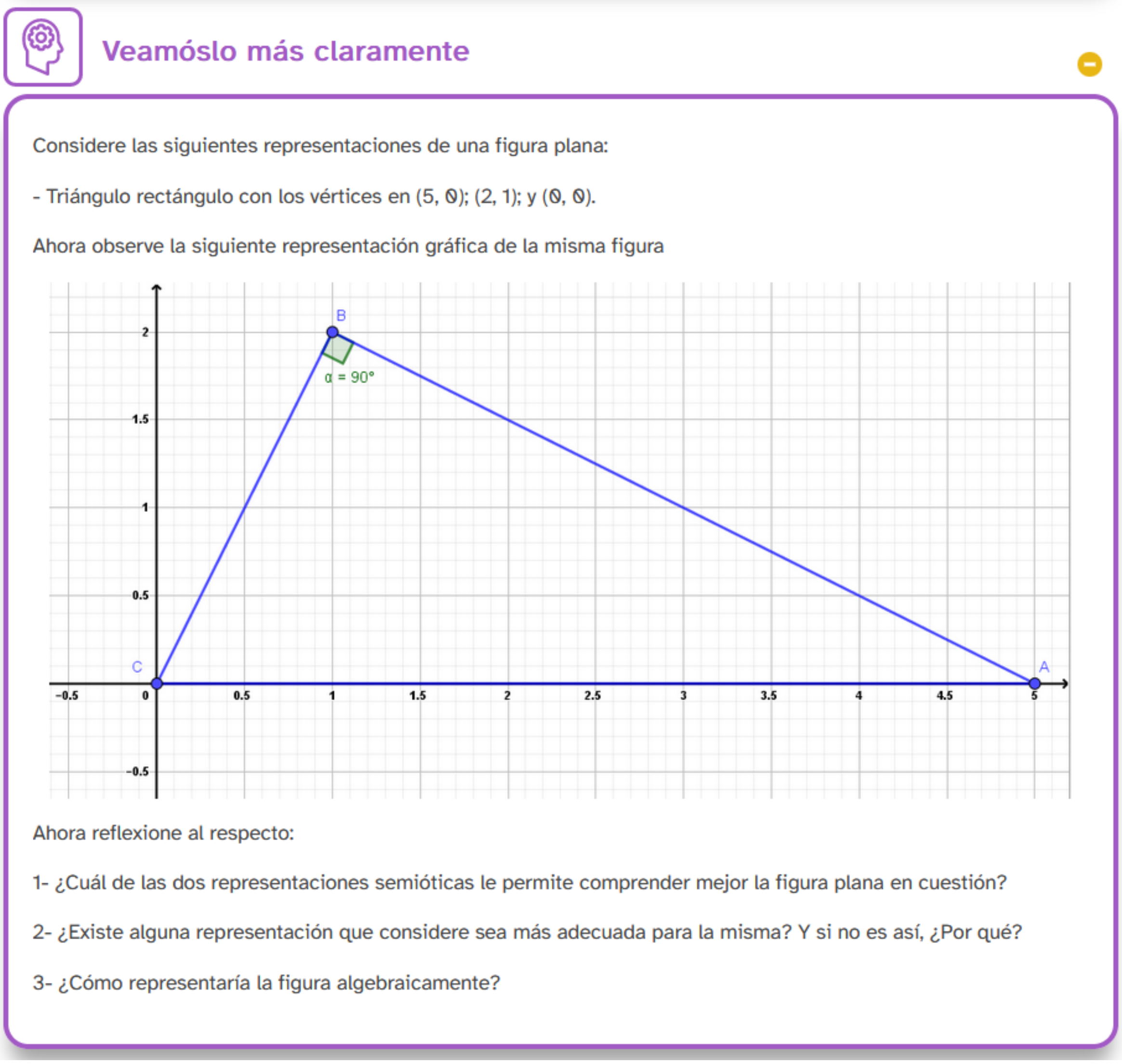
Esto no es exclusivo de este registro tabular, pasa lo mismo con el registro figural. Una representación figural con un diagrama circular, por ejemplo, puede intuitivamente ser relacionada por parte de los estudiantes con un número fraccionario en lugar de una cantidad porcentual (Niño, 2022). Una representación de una matriz en el registro matricial puede fácilmente ser relacionada de manera errónea por los estudiantes con una representación de un sistema de ecuaciones (Galindo et al., 2020). Una representación dentro del sistema gráfico de una distribución de probabilidad también puede ser confundida por los aprendices por una representación del área bajo una curva (Ruiz, 2018). Y así se puede continuar en diversas temáticas y diferentes niveles académicos.

Esta problemática se relaciona con el sentido y significado que les dan los estudiantes a las representaciones semióticas y cómo estos tienen una mayor asociación a ciertos objetos matemáticos en comparación con otros, a pesar de que existan representaciones similares o incluso iguales para diferentes objetos (D’Amore, 2006). Lamentablemente, en esta investigación sólo fue posible identificar que se presenta esta problemática con las representaciones semióticas de las funciones en el registro tabular. Solucionar dicha dificultad requiere de un análisis más profundo y esfuerzo más enfocado en ello, lo cual no está dentro de las pretensiones del trabajo, pero será señalado dentro de las recomendaciones y trabajos futuros.

Veámoslo más claramente

El segundo ítem de la actividad de conversiones del AVACOM ponía a disposición del estudiante una representación gráfica de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa estaba sobre el eje x en el plano cartesiano y su ángulo recto estaba en el punto $(1,2)$ (**Figura 44**).

Figura 44.
Segundo ítem de la actividad de conversiones en AVACOM.


Veamóslo más claramente

Considere las siguientes representaciones de una figura plana:

- Triángulo rectángulo con los vértices en (5, 0); (2, 1); y (0, 0).

Ahora observe la siguiente representación gráfica de la misma figura

Ahora reflexione al respecto:

1- ¿Cuál de las dos representaciones semióticas le permite comprender mejor la figura plana en cuestión?

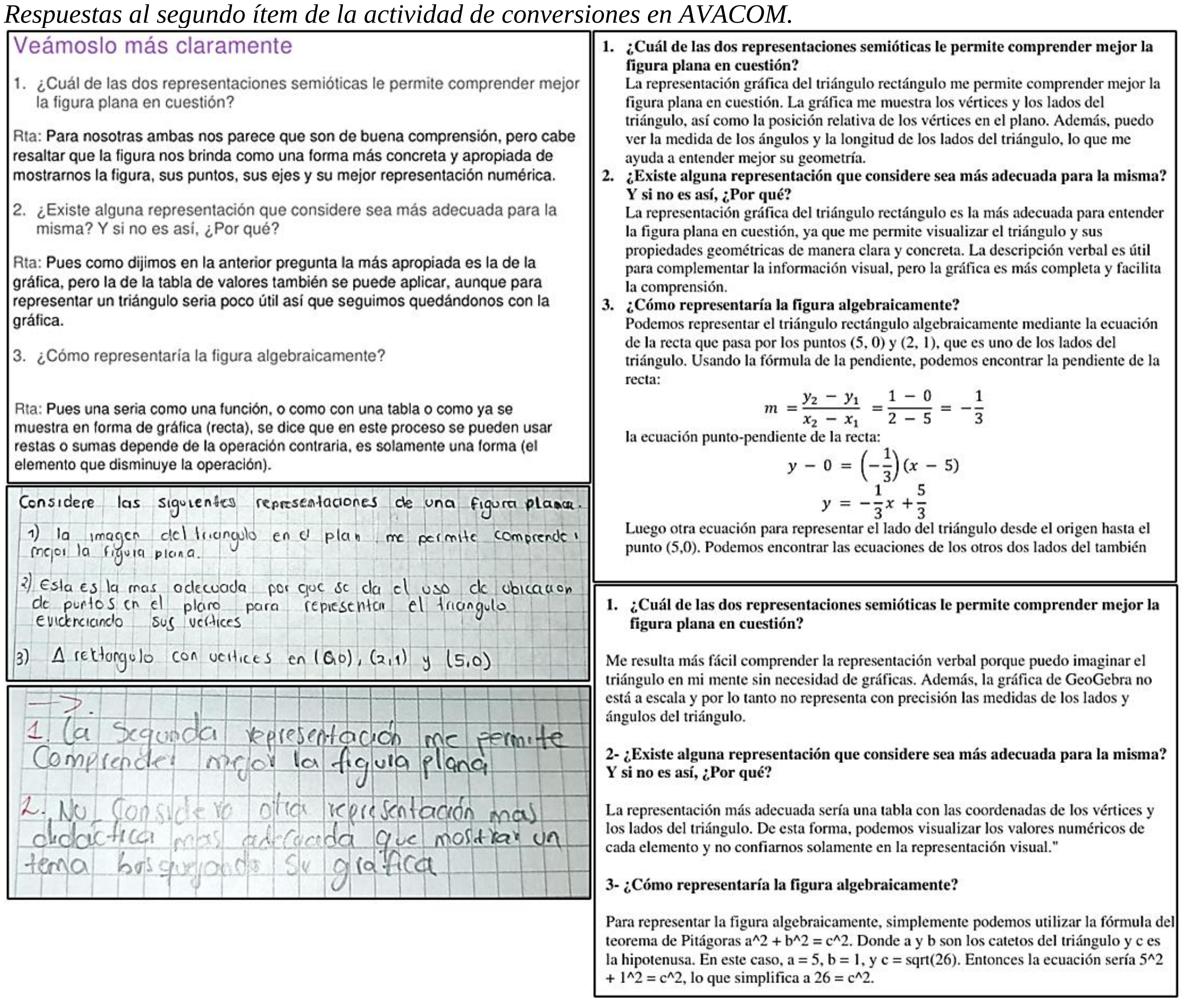
2- ¿Existe alguna representación que considere sea más adecuada para la misma? Y si no es así, ¿Por qué?

3- ¿Cómo representaría la figura algebraicamente?

Nota. En este ítem el triángulo no es como tal una función, pero puede representarse como un conjunto de tres funciones, tres líneas rectas, las primeras dos preguntas son de análisis de la representación semiótica, para que el estudiante realice la visualización matemática necesaria para llegar a la conversión que se solicita en la última pregunta.

En la **Figura 45** pueden verse algunas de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas del segundo ítem de la actividad de conversiones del AVACOM. A nivel general, se observan algunos acercamientos a la representación en el registro algebraico de la figura plana planteada (triángulo rectángulo), así mismo otras aproximaciones erradas a la misma. Una diferencia remarcable en este ítem, en comparación con los otros (y que se repite en el último que se verá posteriormente), es que las respuestas dadas por los participantes son más tímidas, en el sentido de que no parecen seguros con ellas. Junto a esto, también se observa que hay ciertos indicios de trabajo colaborativo que no se consideró para la realización de la actividad (en la instrucción se indicó que se realizaría de manera individual). Por último, en este vistazo general, una de las respuestas dadas está cerca de ser muy completa y elaborada, lo cual, considerando las anteriores respuestas del mismo estudiante, lleva a considera que buscó alguna fuente externa de apoyo.

Figura 45.
Respuestas al segundo ítem de la actividad de conversiones en AVACOM.


Veámoslo más claramente

1. ¿Cuál de las dos representaciones semióticas le permite comprender mejor la figura plana en cuestión?

Rta: **Para nosotras ambas nos parece que son de buena comprensión, pero cabe resaltar que la figura nos brinda como una forma más concreta y apropiada de mostrarnos la figura, sus puntos, sus ejes y su mejor representación numérica.**

2. ¿Existe alguna representación que considere sea más adecuada para la misma? Y si no es así, ¿Por qué?

Rta: **Pues como dijimos en la anterior pregunta la más apropiada es la de la gráfica, pero la de la tabla de valores también se puede aplicar, aunque para representar un triángulo seria poco útil así que seguimos quedándonos con la gráfica.**

3. ¿Cómo representaría la figura algebraicamente?

Rta: **Pues una seria como una función, o como con una tabla o como ya se muestra en forma de gráfica (recta), se dice que en este proceso se pueden usar restas o sumas depende de la operación contraria, es solamente una forma (el elemento que disminuye la operación).**

Considere las siguientes representaciones de una figura plana.
1) la imagen del triangulo en el plan me permite comprender mejor la figura plana.
2) Esta es la mas adecuada por que se da el uso de ubicacion de puntos en el plano para representar el triangulo evidenciando sus vertices
3) Δ rectangulo con vertices en (0,0), (2,1) y (5,0)

1. La segunda representación me permite comprender mejor la figura plana
2. No considero otra representación mas didactica mas adecuada que mostrar un tema bosquejando su grafica

1. ¿Cuál de las dos representaciones semióticas le permite comprender mejor la figura plana en cuestión?
La representación gráfica del triángulo rectángulo me permite comprender mejor la figura plana en cuestión. La gráfica me muestra los vértices y los lados del triángulo, así como la posición relativa de los vértices en el plano. Además, puedo ver la medida de los ángulos y la longitud de los lados del triángulo, lo que me ayuda a entender mejor su geometría.

2. ¿Existe alguna representación que considere sea más adecuada para la misma? Y si no es así, ¿Por qué?
La representación gráfica del triángulo rectángulo es la más adecuada para entender la figura plana en cuestión, ya que me permite visualizar el triángulo y sus propiedades geométricas de manera clara y concreta. La descripción verbal es útil para complementar la información visual, pero la gráfica es más completa y facilita la comprensión.

3. ¿Cómo representaría la figura algebraicamente?
Podemos representar el triángulo rectángulo algebraicamente mediante la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5, 0) y (2, 1), que es uno de los lados del triángulo. Usando la fórmula de la pendiente, podemos encontrar la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{2 - 5} = -\frac{1}{3}$$

la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$y - 0 = \left(-\frac{1}{3}\right)(x - 5)$$
$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

Luego otra ecuación para representar el lado del triángulo desde el origen hasta el punto (5,0). Podemos encontrar las ecuaciones de los otros dos lados del también

1. ¿Cuál de las dos representaciones semióticas le permite comprender mejor la figura plana en cuestión?

Me resulta más fácil comprender la representación verbal porque puedo imaginar el triángulo en mi mente sin necesidad de gráficas. Además, la gráfica de GeoGebra no está a escala y por lo tanto no representa con precisión las medidas de los lados y ángulos del triángulo.

2- ¿Existe alguna representación que considere sea más adecuada para la misma? Y si no es así, ¿Por qué?

La representación más adecuada sería una tabla con las coordenadas de los vértices y los lados del triángulo. De esta forma, podemos visualizar los valores numéricos de cada elemento y no confiarnos solamente en la representación visual."

3- ¿Cómo representaría la figura algebraicamente?

Para representar la figura algebraicamente, simplemente podemos utilizar la fórmula del teorema de Pitágoras a^2 + b^2 = c^2. Donde a y b son los catetos del triángulo y c es la hipotenusa. En este caso, a = 5, b = 1, y c = sqrt(26). Entonces la ecuación sería 5^2 + 1^2 = c^2, lo que simplifica a 26 = c^2.

Nota. Las capturas mostradas aquí son fragmentos de las respuestas de algunos estudiantes, las respuestas completas pueden verse en el Anexo C.

Con excepción de la respuesta puesta de ejemplo en la parte inferior derecha de la **Figura 45**, la totalidad de los estudiantes mencionó que preferían la representación semiótica del triángulo rectángulo dentro del registro gráfico, aunque como se mencionaba, algunas de estas elecciones resultaron tímidas: "ambas nos parece que son de buena comprensión, pero cabe resaltar que la figura nos brinda como una forma más concreta". La expresión "comprender mejor" apareció en la mayoría de las respuestas de los estudiantes cuando escogieron la representación gráfica de la figura y, según las respuestas de los estudiantes, esto se da por la cantidad de información presente en la misma: "[…] más concreta y apropiada de mostrarnos la figura, sus puntos, sus ejes[…]"; "La gráfica me muestra los vértices y los lados del triángulo […], puedo ver la medida de los ángulos y la longitud de los lados"; "[…] se da el uso de ubicación de puntos en el plano".

Como se había resaltado anteriormente, el proceso de visualización matemática se presenta con mayor ahínco cuando se utilizan representaciones dentro del registro gráfico, los estudiantes pueden extraer la información con la cual se construyó la figura, identificar las características del objeto representado y utilizarlas para establecer las relaciones que permitan entender conceptualmente el objeto (Osorio y Nesterova, 2018). Esto es notable ya que aun cuando en la representación verbal del triángulo, incluida en el ítem de esta actividad (**Figura 44**), se integran los vértices y se caracteriza al triángulo como rectángulo (indicando así al menos la medida de uno de sus ángulos), ésta se concibe como menos adecuada que la gráfica, la cual tiene las mismas características.

Para este ítem se tienen dos estudiantes con respuestas las cuales, aunque consideran los elementos y se reflexiona sobre las representaciones, se llegan a resultados opuestos en cuanto a certeza. Primero, viendo a quien responde correctamente, como se señalaba anteriormente, parece que buscó apoyo externo para su solución. En esta respuesta se observa que el estudiante justifica que la representación gráfica es la que le permite comprender mejor y considera que ésta es la más adecuada para representar el triángulo rectángulo. Como se describía, las razones que lo llevan a esta elección de la representación en el registro gráfico es el hecho de que aparecen distintas propiedades del objeto, esto le permite "visualizar el triángulo y sus propiedades geométricas de manera clara y concreta". Como ya se había descrito antes, la representación verbal dada en la actividad: "Triángulo rectángulo con los vértices en (5, 0); (2, 1); y (0, 0)", también incluye varias propiedades geométricas de la figura, con lo cual quedaría sólo el hecho de verlo de forma concreta.

Si bien es cierto existe la necesidad de que el estudiante eleve su nivel de comprensión a lo abstracto cuando se habla de aprender matemáticas (Angulo et al., 2020), también lo es que el dominio del concepto depende de la capacidad del estudiante para manipularlo, aterrizarlo en contextos y transferir su conocimiento (Lozada y Fuentes, 2018). Por ende, cualquiera de las dos representaciones utilizadas por el estudiante para llegar a comprender el objeto en cuestión, pero puede ser posible que la preferencia, como ya se describía antes, se dé por la familiaridad con el registro semiótico o las sensaciones que este produzca, en este caso, parece que la percepción de concreción entre ambas representaciones es mayor en la gráfica que en la verbal.

Con esto mismo descrito, se puede hablar al respecto de la otra respuesta que, aunque completa, va diametralmente opuesta a la anterior. El estudiante en cuestión responde a la pregunta sobre cuál representación le permitiría comprender mejor con lo siguiente: "Me resulta más fácil comprender la representación verbal porque puedo imaginar el triángulo en mi mente sin necesidad de gráficas". Esto último está estrechamente relacionado con el pensamiento abstracto, el manejo de una imagen mental del objeto, construcción mental del objeto matemático indicaría, de cierta manera, que se ubica en un nivel más avanzado de aprendizaje (Angulo y Arteaga, 2018). Sin embargo, la continuación de su respuesta indica que tiene una percepción alterada de la representación semiótica del registro gráfico: "[…]

la gráfica de GeoGebra no está a escala y por lo tanto no representa con precisión las medidas”.

Ahora bien, cuando vemos las respuestas a la última pregunta del ítem, en donde se les pide representar la figura de forma algebraica, algunos estudiantes muestran un desconocimiento evidente sobre el concepto de función, no son capaces de convertir ninguna de las representaciones (verbal y gráfica) en la algebraica. Hay un estudiante que hace una aproximación, tomando para ello dos puntos, calcula una pendiente de la recta que pasa por ellos y luego con ésta determina la ecuación de la recta que contiene uno de los lados del triángulo representado. Este estudiante finaliza mencionando que de la misma manera podrían determinarse el resto de las ecuaciones para cada lado. Lamentablemente, no realiza el proceso y no menciona ningún aspecto del dominio de dichas rectas, pues estos lados del triángulo podrían ser representados por las líneas, pero su dominio debería estar restringido.

Otro estudiante asoció, de manera incorrecta, el teorema de Pitágoras con la forma de representar en el registro algebraico el triángulo rectángulo. Esta asociación tiene sentido, como ya se hablaba anteriormente, debido a que existen procesos, conceptos y operaciones que se asocian comúnmente con objetos matemáticos por la sobrerrepresentación de estos en comparación con otros (al igual que las tablas con la estadística). Esta confusión podría explicarse por esto, pues la trigonometría, el Teorema de Pitágoras y los triángulos rectángulos, guardan una estrecha relación como contenidos del bachillerato.

CAPÍTULO 6. RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se sintetizan los hallazgos en forma de respuesta a las preguntas de investigación planteadas. Se abordan en función de cómo fueron estructuradas y se adelantan y esbozan las conclusiones más relevantes del estudio. Es aquí donde el lector puede ver con claridad cómo se concretan los resultados de la investigación y en donde se valora el alcance del procedimiento realizado.

6.1. ¿Cómo se categoriza la comprensión matemática del concepto de función evidenciado por los participantes durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje?

De acuerdo con los hallazgos obtenidos, se puede afirmar que la comprensión matemática del concepto de función evidenciado por los participantes durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje varía en función de su capacidad para realizar tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas del concepto de función. En este sentido, se puede categorizar la comprensión matemática de los participantes en tres grupos:

1. Participantes que lograron realizar tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas del concepto de función correctamente, lo que sugiere una comprensión profunda del concepto. Estos participantes pudieron realizar correctamente los procesos de tratamiento y conversión de las diferentes representaciones semióticas del concepto. Además, pudieron establecer conexiones precisas entre las diferentes representaciones y el concepto de función, lo que sugiere una comprensión integrada y completa del concepto.

2. Participantes que tuvieron dificultades en el proceso de tratamiento y/o conversión de las representaciones semióticas del concepto de función, lo que indica una comprensión limitada o incompleta del concepto. Aunque pudieron trabajar con algunas de las representaciones semióticas del concepto de función, tuvieron dificultades para tratar o convertir otras. Esto puede ser indicativo de una falta de familiaridad con algunas representaciones o de la necesidad de más práctica en la realización de tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas.
3. Participantes que malinterpretaron las cualidades de las representaciones y las asociaron a otros conceptos y objetos, lo que sugiere una comprensión incorrecta del concepto. No solo tuvieron dificultades para realizar tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas, sino que también asociaron incorrectamente algunas de las cualidades de las representaciones con otros conceptos y objetos. Esto puede indicar una falta de comprensión del concepto de función en sí mismo, así como una necesidad de revisar y clarificar las relaciones entre las diferentes representaciones semióticas y el concepto de función.

Como se describía, la categorización de la comprensión matemática del concepto de función de los participantes durante la implementación del AVA depende de su capacidad para realizar tratamientos y conversiones de las representaciones semióticas y de la precisión de sus asociaciones entre las cualidades de las representaciones y el objeto matemático en cuestión.

En general, estos resultados sugieren que la comprensión matemática del concepto de función puede variar significativamente entre los estudiantes, dependiendo de su habilidad para trabajar con las diferentes representaciones semióticas y de la precisión de sus asociaciones entre las cualidades de las representaciones y el objeto. Por lo tanto, es importante diseñar actividades y ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes practicar y mejorar su capacidad para trabajar con las diferentes representaciones semióticas y para establecer conexiones precisas entre ellas y el concepto matemático subyacente.

El uso del ambiente virtual AVACOM, que integra actividades interactivas con GeoGebra y diferentes representaciones semióticas del concepto de función, favoreció y afectó a los estudiantes en su comprensión del concepto matemático. En tal sentido, como elementos a destacar entre beneficios y afectaciones tenemos los presentados en la **Tabla 6**.

Tabla 6.
Beneficios y afectaciones del AVACOM en la comprensión del concepto de función.

Beneficios	Afectaciones
Interacción con diferentes representaciones semióticas del concepto de función: los estudiantes tuvieron la oportunidad de interactuar con diferentes representaciones semióticas del concepto de función, como gráficos, tablas y expresiones algebraicas. Esto les permitió tener una visión más completa del concepto y comprenderlo de una manera más profunda y holística.	**Sobrecarga de información**: La gran cantidad de representaciones semióticas y actividades interactivas disponibles en AVACOM pudo ser una sobrecarga de información para algunos estudiantes. Esto afectó su capacidad para procesar y comprender el concepto de función de manera efectiva.
Facilidad para visualizar y manipular gráficos de funciones: La integración de GeoGebra permitió a los estudiantes visualizar y manipular gráficos de funciones con mayor facilidad. Esto les permitió explorar diferentes funciones y comprender cómo cambian en función de los valores de sus parámetros, lo que facilitó la comprensión del concepto de función.	**Dificultades técnicas**: El uso de GeoGebra y las actividades interactivas en línea pudo generar dificultades técnicas para algunos estudiantes. Esto afecta su capacidad para interactuar con las representaciones semióticas y comprender el concepto de función de manera efectiva.
Retroalimentación inmediata en las actividades interactivas: Las actividades proporcionaron a los estudiantes retroalimentación inmediata sobre su desempeño, lo que les permitió corregir sus errores y mejorar su comprensión del concepto de función de manera más efectiva.	**Falta de interacción interpersonal entre los estudiantes y el profesor:** Esto puede haber limitado la retroalimentación y la orientación personalizada que los estudiantes necesitan para comprender el concepto de función de manera efectiva.
Aprendizaje autónomo: se proporcionó a los estudiantes la oportunidad de aprender de manera autónoma y a su propio ritmo. Al tener acceso a actividades interactivas, representaciones semióticas diversas y un conjunto amplio de ejemplos, los estudiantes pudieron explorar el concepto de función a su propio ritmo y en función de sus propias necesidades y habilidades.	

Nota. Elaboración propia.

En general, desde el punto de vista de la investigadora, el uso de AVACOM benefició a los estudiantes al proporcionarles una experiencia de aprendizaje más interactiva, autónoma y rica en representaciones semióticas. Sin embargo, también pudo afectar negativamente a algunos debido a la sobrecarga de información, las dificultades técnicas y la falta de interacción interpersonal. Por lo tanto, es importante diseñar y adaptar los ambientes virtuales de aprendizaje para maximizar los beneficios y minimizar los posibles efectos negativos.

6.2. ¿Cuáles son los problemas que enfrentan los futuros docentes en el proceso de alcanzar la comprensión matemática del concepto de función?

Dentro de los resultados encontrados se pueden destacar cuatro problemáticas principales, las cuales se relacionan con: incorrectas asociaciones de las representaciones semióticas; inclinación hacia un registro semiótico particular; preferencias y actuaciones contrarias sobre los registros; y por último, las dificultades en la identificación del objeto, sentido y significado.

En cuanto al primer problema, es común que los estudiantes asocien erróneamente ciertas representaciones con otras que han trabajado previamente y que equivocadamente en ocasiones les parecen similares. En este caso, la representación tabular de una función se puede confundir con un conjunto de datos estadísticos representados por un diagrama de barras. Esto podría deberse a una sobrerrepresentación de las representaciones estadísticas o gráficas en su formación previa. Para solucionar este problema, se debe destacar las diferencias entre ambas representaciones y ayudar a los estudiantes a comprender las características y la función específica de cada una de ellas.

En cuanto al segundo problema, el hecho de que algunos estudiantes se inclinen más hacia la representación dentro del registro gráfico puede deberse a que les resulta más fácil la interpretación visual. Es importante destacar que, si bien la representación gráfica es una herramienta muy útil en matemáticas, es necesario que los estudiantes desarrollen la capacidad de utilizar y comprender otras representaciones, como la algebraica y la tabular, para tener una comprensión más completa y profunda del concepto de función.

En cuanto al tercer problema, es interesante observar cómo las preferencias de los estudiantes pueden variar según el contexto en el que trabajan con las representaciones semióticas. Mientras que algunos estudiantes prefieren la representación gráfica al trabajar con lápiz y papel, al utilizar un ambiente virtual de aprendizaje, prefieren la representación algebraica. Es importante tener en cuenta estos cambios y trabajar en el desarrollo de habilidades y estrategias que les permitan utilizar diferentes representaciones en diferentes contextos.

Finalmente, en cuanto al último problema, se requiere que los estudiantes comprendan la diferencia entre el objeto, el sentido y el significado al trabajar con diferentes representaciones semióticas del concepto de función. Esto implica comprender que la representación no es el objeto mismo, sino una herramienta para visualizarlo de diferentes maneras. Además, es importante destacar que el sentido y el significado de una representación pueden variar según el contexto en el que se utilice. Es fundamental que los estudiantes desarrollen la capacidad de identificar estos aspectos para poder comprender de manera más profunda el concepto de función.

6.3. ¿Cuál es el nivel de avance de la comprensión matemática de los futuros docentes sobre el concepto de función después de implementar la propuesta didáctica?

A partir de los resultados obtenidos en la investigación, se puede decir que el nivel de avance en la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes es variable. Algunos de ellos lograron comprender el concepto de función y realizar tratamientos y conversiones de representaciones semióticas de manera adecuada, lo que sugiere un nivel avanzado de comprensión. Sin embargo, otros presentaron dificultades en este proceso, lo que indica que aún les falta desarrollar una comprensión más profunda del concepto de función. En general, se puede decir que la propuesta didáctica implementada en el ambiente virtual AVACOM fue beneficiosa para algunos estudiantes y puede ser una herramienta útil para mejorar la comprensión del concepto de función. Sin embargo, es necesario seguir trabajando en la mejora de la estructura y diseño de este tipo de ambientes virtuales para optimizar los resultados obtenidos.

6.4. ¿Cuáles son las características de la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes alcanzada durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje basado en el tratamiento y conversión de representaciones semióticas?

Durante la implementación del AVA, se pudo observar que la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes tuvo ciertas características particulares:

En primer lugar, se evidenció que algunos de los estudiantes lograron construir una comprensión profunda del concepto de función, tanto en su sentido abstracto como en su aplicación en situaciones concretas, lo cual se vio reflejado en el nivel de complejidad de las tareas que pudieron resolver.

En segundo lugar, se observó que los futuros docentes adquirieron una mayor habilidad para identificar y utilizar diferentes representaciones semióticas, tales como gráficas, tablas, expresiones algebraicas y lenguaje natural, para analizar y describir funciones, lo que sugiere que los estudiantes mejoraron en su capacidad para reconocer, tratar y convertir representaciones semióticas entre los mismos y diferentes registros de representación.

En tercer lugar, se pudo notar que algunos de los futuros docentes desarrollaron una actitud tanto crítica como reflexiva frente a las representaciones semióticas utilizadas para describir funciones, lo que les permitió comprender la importancia de elegir adecuadamente las representaciones en función del contexto y de las preguntas que se quieran responder.

En cuarto lugar, se observó que la implementación del ambiente virtual de aprendizaje permitió a los futuros docentes experimentar con diferentes escenarios y situaciones relacionados con el concepto de función, lo que favoreció el desarrollo de su pensamiento matemático y su capacidad para resolver situaciones de manera creativa.

Por último, aunque se concibieron las actividades para ser resueltas de forma individual, se evidenció que la implementación del ambiente virtual de aprendizaje con el AVACOM fue capaz de generar un entorno de aprendizaje colaborativo y participativo, en el que los estudiantes pudieron interactuar y compartir conocimientos entre sí, lo que podría propiciar un aprendizaje más significativo y duradero.

En resumen, las características de la comprensión matemática del concepto de función de los futuros docentes durante la implementación del ambiente virtual de aprendizaje fueron: una comprensión más profunda del concepto de función, una mayor habilidad para identificar y utilizar diferentes representaciones semióticas, una actitud más crítica y reflexiva frente a las representaciones semióticas, el desarrollo de su pensamiento matemático y su capacidad para resolver problemas de manera creativa, y un aprendizaje más significativo gracias al entorno colaborativo y participativo generado por el ambiente virtual de aprendizaje.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

La implementación de la propuesta didáctica basada en el uso de diferentes representaciones semióticas y actividades interactivas en el ambiente virtual AVACOM favoreció que los futuros docentes, en algunos casos, alcanzaran la comprensión del concepto de función. La utilización de múltiples representaciones semióticas permitió que estos pudieran abordar el concepto de función desde diferentes perspectivas y a través de los procesos de tratamiento y conversión, lo que resultó en una mejor comprensión global del mismo.

Se encontró que algunos estudiantes tenían dificultades para distinguir entre los diferentes registros semióticos utilizados en la enseñanza del concepto de función. Específicamente, se observó que algunos estudiantes asociaron incorrectamente la representación tabular de una función con un conjunto de datos estadísticos que podrían representarse como un diagrama de barras. Este hallazgo sugiere la importancia de analizar e identificar las construcciones que poseen los estudiantes de antemano y asegurar que se reorientan de forma adecuada para poder abordar el concepto de función desde múltiples perspectivas semióticas sin que se generen confusiones de este estilo.

Las representaciones semióticas del registro gráfico fueron las que se evidenciaron con mayor nivel de preferencia por parte de los estudiantes, al menos cuando se analizó su discurso sobre el AVACOM. Sin embargo, también se observó que algunos estudiantes preferían la representación algebraica en algunos casos sobre la gráfica, resultando en algunos casos contradictorio. En particular, la discusión generada al respecto sugiere que esto está relacionado con el trabajo en un ambiente virtual y las sensaciones que difieren del trabajo tradicional con las representaciones gráficas. Se percibe que es importante proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que integren tanto la representación gráfica como la algebraica del concepto de función a través de mediaciones tecnológicas, así como en escenarios de trabajo con papel y lápiz, esto con el fin de abordar las predilecciones anteriormente generadas y aprovecharlas en pro del aprendizaje del estudiante.

Por último, se puede decir que algunos estudiantes enfrentaron dificultades para identificar entre el objeto, el sentido y el significado cuando trabajaban con diferentes representaciones semióticas del concepto de función. Esto refuerza la importancia de abordar el concepto de función desde múltiples perspectivas y proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que integren diferentes representaciones semióticas del mismo, así como discutir explícitamente el papel de cada registro semiótico en la comprensión del concepto de función, los tratamientos posibles y las conversiones apropiadas y útiles.

En complemento a lo anterior, es importante resaltar el papel de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Si bien el AVACOM demostró ser una herramienta útil para fomentar la interacción de los estudiantes con las diferentes representaciones semióticas del concepto de función, también se evidenciaron algunos problemas que podrían relacionarse con su estructura de integración de los elementos, lo que plantea la necesidad de un enfoque más cuidadoso en el diseño y desarrollo estas herramientas tecnológicas en el campo educativo.

Además, es importante tener en cuenta que la tecnología no puede ser vista como una solución mágica para los desafíos educativos, sino como una herramienta que puede ayudar a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje si se utiliza de manera adecuada y consciente. La tecnología no reemplaza al maestro ni a la interacción humana, sino que puede complementar y enriquecer la experiencia educativa.

Por lo tanto, se reitera la necesidad de prestar especial atención a la forma en que se integra la tecnología en la enseñanza, y cómo se puede aprovechar al máximo sus beneficios sin sacrificar la calidad de la educación. Esto implica tener en cuenta las necesidades y características de los estudiantes, así como la formación y capacitación de los docentes para poder utilizar la tecnología de manera efectiva.

CAPÍTULO 8. RECOMENDACIONES

Como parte del final de la redacción del informe y con base en los hallazgos obtenidos en la investigación y las conclusiones a las que se llegaron, se elabora el siguiente listado de recomendaciones que pueden considerarse para futuras reimplementaciones de la herramienta desarrollada y nuevas investigaciones:

1. En relación con el AVACOM, es necesario prestar especial atención a la estructura y presentación de las diferentes representaciones semióticas, asegurando que se integren adecuadamente y sean fácilmente accesibles para los estudiantes.
2. Es importante considerar un análisis en detalle los ejemplos y casos prácticos que se utilizaron para los estudiantes en el AVACOM, con el fin de que se puedan consolidar y aplicar los conceptos en cuestión de la manera más efectiva.
3. Se debe prestar especial atención a la forma en que se presentan los datos y la información en el AVACOM, a fin de evitar posibles confusiones o malinterpretaciones por parte de los estudiantes.
4. Es necesario potenciar aún más la interacción de los estudiantes con el AVACOM, mediante la realización de actividades y ejercicios que les permitan experimentar y explorar diferentes representaciones semióticas del concepto de función.
5. Se requiere incorporar nuevas estrategias de retroalimentación más efectivas en el diseño del AVACOM, para que los estudiantes puedan identificar sus fortalezas y debilidades y puedan mejorar su comprensión del concepto de función.
6. Se recomienda la inclusión de actividades colaborativas en el AVACOM, a fin de fomentar la interacción y el trabajo en equipo entre los estudiantes, lo que puede contribuir significativamente a su aprendizaje, teniendo en cuenta para ello que los

procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas se conciben con un carácter individual y tendría que reformularse considerablemente la fundamentación teórica de esto.

7. Es importante prestar atención a la retroalimentación y los comentarios de los estudiantes sobre el uso del AVACOM, para realizar ajustes y mejoras en el diseño de la herramienta.
8. En caso de implementar el mismo ambiente virtual de aprendizaje nuevamente, se recomienda proporcionar una capacitación adecuada a los docentes encargados de utilizarlo, para que su implementación sea más efectiva y puedan orientar a los estudiantes en su aprendizaje.
9. Es importante considerar la integración del AVACOM con otras herramientas tecnológicas y recursos educativos, a fin de ampliar y enriquecer las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes.
10. Se recomienda realizar futuras investigaciones que profundicen en la comprensión de los procesos cognitivos y afectivos involucrados en el aprendizaje del concepto de función, y en la manera en que el uso del AVACOM puede influir en estos procesos.

REFERENCIAS

Adinda, A., Parta, N., y Chandra, T. D. (2021). Investigation of students' metacognitive awareness failures about solving absolute value problems in mathematics education. *Eurasian Journal of Educational Research*, (95), 17-35.

Alsina, Á. (2020). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar, 28,* p. 1-13.

Angulo, M. L., Arteaga, E., y Carmenates, O. A. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Conrado, 16*(74), 298-305.

Angulo, M. L., y Arteaga, E. (2018). Las representaciones mentales en la aprehensión de conceptos matemáticos: formación del concepto de fracción. *Conrado, 14*(63), 147-154.

Arteaga, P., Díaz-Levicoy, D., y Batanero, C. (2018). Investigaciones sobre gráficos estadísticos en Educación Primaria: revisión de la literatura. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet, 18*(1), 1-12.

Ay, Y. (2017). A review of research on the misconceptions in mathematics education. En Shelley, M. y Pehlivan, M. (Eds.) *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017,* 21-31.

Bell, E. T. (2021). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica. ISBN: 9786071634658

Borrero, O. F. (2020*). Análisis del nivel de calidad educativo en Colombia, a partir de los resultados de las pruebas PISA en el periodo 2012-2018*. (Tesis de Especialización) Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá D.C.

Borja, L. E. A. (2015). *Evaluación psicológica: Historia, fundamentos teórico-conceptuales y psicometría*. Editorial El Manual Moderno.

Bray, A., y Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research–A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, 114, 255-273.

Bueno, R., Naveira, W., y González, W. (2020). Los conceptos matemáticos y sus definiciones para la formación de los ingenieros informáticos para la sociedad. *Revista Universidad y Sociedad, 12*(6), 444-452.

Burt, R. S. (2012a) Las posiciones en los sistemas de redes múltiples, parte I: concepción general de la estratificación y el prestigio en un sistema de actores concebido como una topología social. En Requena Santos, Félix *Análisis de las redes sociales. Orígenes, teorías y aplicaciones*. España: Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) pp. 311-341

Burt, R. S. (2012b) Las posiciones en los sistemas de redes múltiples, parte II: Estratificación y prestigio entre la elite influyente en la comunidad de Altneustadt. En Requena Santos, Félix *Análisis de las redes sociales*. Orígenes, teorías y aplicaciones. España: Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) pp. 347-375.

Cano, J. J. (2020). *Construcciones geométricas como puente entre la visualización y el razonamiento geométrico, utilizando regla, compás y hoja calco como plano auxiliar.* [Bachelor Thesis] Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Calderón-Zambrano, R. L., Franco-Pesantez, F., y Alvarado-Espinoza, T. M. (2018). Logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del Geogebra. *Polo del Conocimiento, 3*(8), 449-470.

Caligaris, M., Rodríguez, G., y Laugero, L. (2015). Learning styles and visualization in numerical analysis. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 174, 3696-3701.

Cantoral, R., y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta latinoamericana de matemática educativa, 16*(2), 694-701.

Campeón, M. C., Aldana, E., y Villa, J. A. (2018). Ingeniería didáctica para el aprendizaje de la función lineal mediante la modelación de situaciones. *Sophia, 14*(2), 115-126.

Capera, M., Menjura, M., & Sarmiento-Rivera, D. (2022). Enseñanza de las matemáticas en básica primaria: Revisión sistemática. Revista *ESPACIOS, 43*(07), 49-64.

Carpenter, T. P., y Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics With Understanding1. En *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Routledge.

Castañeda, A. G., Quiroz, M. P., y Amaya, M. (2021) Desmos: calculadora grafica para la enseñanza de funciones y sus representaciones semióticas. *Congreso Nacional de Investigación Educativa XVI.* Área Temática 18.

Castro, C. A. (2021) *El rendimiento de Colombia en matemáticas con respecto a las Pruebas PISA desde 2006 hasta 2018*. (Tesis de Grado) Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Colombia Aprende (CA) (2022). *Programa para la evaluación internacional de Alumnos – PISA. ¿Qué es y para qué sirven las pruebas PISA?* Gobierno de Colombia. Recuperado de https://colombiaaprende.edu.co/recurso-coleccion/que-es-y-para-que-sirven-las-pruebas-pisa.

Copeland, R. W. (1970). *How Children Learn Mathematics, Teaching Implications of Piaget's Research.*

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 177-196.

Datos Abiertos (2022). *Resultados Icfes por Desempeño. Resultados Icfes – Desempeño por Municipios*. Gobierno de Colombia. Recuperado de https://www.datos.gov.co/Educaci-n/RESULTADOS-ICFES-POR-DESEMPE-O/jp62-3an9.

De Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático Elementos del Análisis*. España: Editorial Pirámide.

Demetgül, Z., y Baki, A. (2020). Reflections on Instruction of Inequality and Absolute Value in a Technology-Equipped Classroom: An Action Research. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 11*(1), 91-127.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Didáctica Investigaciones en Matemática Educativa II (1)*. (pp. 173-201). México D.F.: CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales*, 14-17.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*. (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.

Erazo, Ó. A. (2018). Programa de hábitos escolares para mejorar el bajo rendimiento académico en estudiantes de bachillerato de un colegio público de Popayán-Colombia. *Encuentros, 16*(2), 117-133.

Eves, H. W. (1997). *Foundations and fundamental concepts of mathematics*. Courier Corporation.

Fernández, S. G. (2018). Rendimiento académico en educación superior: desafíos para el docente y compromiso del estudiante. *Revista Científica de la UCSA, 5*(3), 55-63.

Flavin, M. (2017). *Disruptive technology enhanced learning: The use and misuse of digital technologies*. Springer. https://doi.org/10.1057/978-1-137-57284-4. in higher education. Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Flehantov, L., y Ovsiienko, Y. (2019). The simultaneous use of Excel and GeoGebra to training the basics of mathematical modeling. In *Proceedings of the 15th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer* (Vol. 2, No. 2393, pp. 864-879). CEUR Workshop Proceedings.

Gamboa, R. (2014). Relación entre la dimensión afectiva y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Educare, 18*(2), 117-139.

Galindo, D. M., Osorio, E. A., y Serrano, S. (2020). Objeto de Aprendizaje para las Operaciones con Matrices en el Procesamiento Digital de Imágenes. En Manuel Prieto, Silvia Pech y Joel Angulo, *Tecnología, Innovación y Práctica Educativa*, 18-28.

García, J. G., y Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad, 4*(7).

González, A., y Díaz, A. M. (2018). Formación docente y desarrollo profesional situado para la enseñanza del lenguaje y matemáticas en Colombia. *Panorama, 12*(22), 6-17.

Grisales-Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado, 14*(2), 198-214.

Gusdorf, G., y Megías, F. F. (2019). *¿Para qué profesores?: por una pedagogía de la pedagogía*. Miño y Dávila.

Hernández, M., Castrillon, A., Morales, G., y Sandoval, N. (2016). Uso de las TIC despierta una mayor motivación que con la no inclusión de las mismas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. *Revista Ingenio UFPSO, 9*(1), 101-119.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2018). *Metodología de la investigación (6ª Ed.)*. México DF: McGraw-Hill Interamericana.

Hernández, S. A., Acosta, W. R., y Marrón, B. S. (2021). Funciones matemáticas a través del enfoque Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemática (CTIAM*). Números: revista de didáctica de las matemáticas, 108*(2), 161-177.

Herrera, M. (2006). Consideraciones para el diseño didáctico de ambientes virtuales de aprendizaje: una propuesta basada en las funciones cognitivas del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de educación, 38*(5).

Hershkowitz, R., Parzysz, B., y Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. En B. &. others, *International Handbook of Mathematics Education* (págs. 161–204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers. Recuperado el 13 de noviembre de 2018

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. (H. F., Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa*, 245-264.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática*, *10*(02), 23-45.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). (2022). Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2021.

Kurilovas, E., Kubilinskiene, S., y Dagiene, V. (2014). Web 3.0–Based personalisation of learning objects in virtual learning environments. *Computers in Human Behavior, 30*, 654-662.

López, E. A., y Martin, Y. (2020). Las construcciones geométricas en el entrenamiento a concursos y olimpiadas de matemática. *Varona. Revista Científico-Metodológica*, (71), 49-53.

Lorenzato, S. (2015). *Para aprender matemáticas.* Autores Associados (Editora Autores Asociados LTDA).

Lozada, J. A., y Fuentes, R. D. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 32, 57-74.

Lozano, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., y Córdoba, L. M. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11*(41), 20-38.

Marmolejo, G., y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, *24*(3), 7-32.

Martínez, O. M., Mejía, E., Ramírez, W. R., y Rodríguez, T. D. (2021). Incidencia de la realidad aumentada en los procesos de aprendizaje de las funciones matemáticas. *Información tecnológica*, *32*(3), 3-14.

Melgarejo, C. Á., Torres, J. D., Bareño, J. G., y Delgado, O. S. (2019). Software GeoGebra como herramienta en enseñanza y aprendizaje de la Geometría. *Educación y Ciencia*, (22), 387-402.

Mendoza, M. A. G. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, *1*(1), 83-115.

Mercader, C. (2019). Las resistencias del profesorado universitario a la utilización de las tecnologías digitales. *Aula abierta*, *48*(2), 167-174.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. *Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Proyecto editorial y coordinación Escribe y Edita.

Ministerio de Educación Nacional (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje DBA V.2. Matemáticas*. Panamericana Formas e Impresos S.A.

Mora, J. J. y Estrada, D. (2021). La relación entre el desarrollo de los municipios y la puntuación en Matemáticas: un caso aplicado para Colombia. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 32, 112-129.

Morales, R. A., y Diez Day, E. (2020). Revisión de metodologías para diseñar Objetos de Aprendizaje OA: un apoyo para docentes. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, (26), 35-46.

Nesterov, A., Nesterova, E., y Sussman, R. (2000). *MAPLE V RV: Manual de Introducción*. Guadalajara: Universidad de Guadalajara.

Niño, N. J. G. (2022). Representaciones semióticas en números racionales. *Revista Habitus: Semilleros de investigación*, *2*(3), e13966-e13966.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2019a). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do.* PISA, OECD Publishing, Paris.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2019b). *PISA 2018 Colombian's Results*. PISA, OECD Publishing, Paris. Recuperado el 19 de agosto de 2022 de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf.

Osorio, E. (2018) *El Aprendizaje de Aplicaciones de las Integrales Múltiples con Empleo De la Realidad Aumentada.* (Master Thesis) Universidad de Guadalajara.

Osorio, E., y Nesterova, E. (2018). El aprendizaje de las aplicaciones de las integrales múltiples con empleo de la realidad aumentada. *AMIUTEM, 6*(2), 15-35.

Obaya, A. (2003). El construccionismo y sus repercusiones en el aprendizaje asistido por computadora. *Contactos, 48*, 61-64.

Oller, A. M. (2021). A vueltas con la circunferencia (y el círculo). *Entorno Abierto*, *40*(8), 24-26.

Olivo-Franco, J. L., y Corrales, J. (2020). De los entornos virtuales de aprendizaje: hacia una nueva praxis en la enseñanza de la matemática. *Revista Andina de Educación, 3*(1), 8-19.

Orozco, R. C., Morales-Morgado, E., y Campos, O. (2016). Creación de Objetos de Aprendizage basados en la teoría de los Modelos Mentales de Johnson-Laird. *SérieEstudos*, *21*(42), 21-40.

Özkan, E. M., & Ünal, H. (2009). Misconception in Calculus-I: Engineering students' misconceptions in the process of finding domain of functions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 1792-1796.

Bejarano, K. A y Páez, E. J. (2022). *Una revisión a los distintos usos del concepto de infinito a través de la Historia.* [Degree Thesis]. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Pérez, J. I., Paira, D. C., Matos, F. A., Romero, M. S., y Quispe, R. (2022*). Revisión de la literatura del uso de GeoGebra y su relación con el aprendizaje en el período 2012-2021*. Universidad de Lima, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas.

Plaza, L., González, J., y Vasyunkina, O. (2020). Obstáculos en la enseñanza–aprendizaje de la matemática. Revisión sistemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*(1), 295-304.

Pineda, W., Suárez, C. A., y Leal, O. L. (2019). Estrategias para la enseñanza de la matemática: una mirada desde los docentes en formación. *Revista Perspectivas, 4*(1), 48-53.

Pinzón, J. E. (2018). Aprendizaje de las matemáticas con el uso de simulación. *Sophia, 14*(1), 22-30.

Porlán, R. (2018). *Enseñanza universitaria: cómo mejorarla*. Ediciones Morata.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., y Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. ICME13, Hamburg 2016, Springer Nature.

Quiroz, J. S. (2011). *Diseño y moderación de entornos virtuales de aprendizaje (EVA)*. Editorial UOC.

Ramírez, P. A., y Zúñiga, C. O. (2019). *Las Tic's en la calidad del aprendizaje significativo en Matemática con función de Valor Absoluto* (Bachelor's thesis, Universidad de Guayaquil. Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación).

Ramón, J. A., y Vilchez, J. (2019). Tecnología Étnico-Digital: Recursos Didácticos Convergentes en el Desarrollo de Competencias Matemáticas en los Estudiantes de Zona Rural. *Información tecnológica, 30*(3), 257-268.

Rodríguez, N. J., Monroy, D. H., y Delgado, O. S. (2021). La comprensión del movimiento rectilíneo a través de las representaciones semióticas. *Boletín Redipe, 10*(1), 195-204.

Rehak, D., y Mason, R. (2003). Keeping the learning in learning objects. En Littlejohm, A. (Ed.) *Reusing online resources: A sustainable approach to e-learning*, 20-34.

Rojas, C. A., Escalera, M. E., Moreno, E., y García, A. (2017). Motivación, ansiedad, confianza, agrado y utilidad. Los factores que explican la actitud hacia las matemáticas en los estudiantes de Economía. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, (1), 527-540.

Romero, A. M. M. (2020). La brecha digital generacional. *Temas laborales: Revista andaluza de trabajo y bienestar social,* (151), 77-93.

Ruiz, E. F. (2018). Uso de aplicações tecnológicas no tratamento de problemas de Probabilidade e Estatística. Dificuldades apresentadas pelos alunos na formulação de abordagens corretas. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 8*(16), 216-245.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education, 196*(2), 1-38.

Salas, E. (2007). *Las TIC y la educación. Aprendizaje asistido por computadora en persona con necesidades educativas especiales*. Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Sánchez, R. A. (2015). t-Student: Usos y abusos. *Revista mexicana de cardiología*, *26*(1), 59-61,

Skemp, R. R. (2012). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Routledge.

Torregosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamercana de investigación en matemática educativa*, 276-300.

Tovar, J. G., y Montaño, A. H. (2012). La desesperanza aprendida y sus predictores en jóvenes: análisis desde el modelo de Beck. *Enseñanza e investigación en psicología*, *17*(2), 313-327.

Urquidi, A. C., Calabor, M. S., y Tamarit, C. (2019). Entornos virtuales de aprendizaje: modelo ampliado de aceptación de la tecnología. *Revista electrónica de investigación educativa, 21,* e22, 1-12. doi.10.24320/redie.2019.21.e22.1866.

Valenzuela, B. y Vigo, K. (2018). Dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del teorema fundamental del cálculo: un estado del arte. En Gaita, C., Flores, J., Ugarte, F. y Quintanilla, C. (Eds.), *IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 616-626). Huancavelica: Universidad Nacional de Huancavelica.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. En S. Lerman (ed.), Encyclopedia of Mathematics Education, (521-529) DOI 10.1007/978-94-007-4978-8.

Velázquez, R. V., Zúñiga, K. M., Holguín, W. J. D., y Tamayo, P. V. (2020). Motivación de los estudiantes hacia el uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Científica Sinapsis, 1*(16).

Wassie, Y. A., y Zergaw, G. A. (2018). Capabilities and contributions of the dynamic math software, geogebra---a review. *North American GeoGebra Journal*, *7*(1), 68-86.

Weiss, E., Block, D., Civera, A., Dávalos, A., y Naranjo, G. (2019). La enseñanza de distintas asignaturas en escuelas primarias: una mirada a la práctica docente. *Revista mexicana de investigación educativa*, *24*(81), 349-374.

Yanuarto, W. N., Maat, S. M., Husnin, H., y Atweh, B. W. (2019). Creencias de los docentes, ansiedad matemática y alfabetización en TIC: una revisión sistemática. *Religación. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades*, *4*(20), 43-51.

Ziatdinov, R., y Valles Jr, J. R. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, *10*(3), 398.

Zapatera, A. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas: enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *Revista INFAD de Psicología International Journal of Developmental and Educational Psychology*, *1*(2), 263-274.

Ziatdinov, R., y Valles Jr, J. R. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, *10*(3), 398.

ANEXOS

8.1. Anexo A. Registro de Datos Experimentales

FORMATO DE REGISTRO DE DATOS EXPERIMENTALES

Sesión: __ Fecha: __/__/__ (DD/MM/AA) Duración: __ horas

En relación con los objetivos de la sesión	**En relación a los estudiantes**	**En relación con el software**
C / NC / MC	Observaciones generales:	Observaciones generales:
Comentario:	Dudas o comentarios particulares:	Dudas o comentarios particulares:
Aspectos de motivación a resaltar	**Interacciones E-E, E-D y E-S**	**Fallos, errores o falencias**

C = Cumplidos, NC = No cumplidos, MC = Medianamente cumplidos, E-E = Estudiante con estudiante, E-D: Estudiante con docente, E-S: Estudiante con software.

8.2. Anexo B. Videos de Estudiantes Percepciones con AVACOM

Estos videos pueden encontrarse en la carpeta comprimida denominada Anexo B.

8.3. Anexo C. Respuestas de los Estudiantes en Actividades de Tratamiento y Conversión.

Estas respuestas pueden encontrarse en el documento PDF adjunto denominado Anexo C.