LÓGICA POLIVALENTE

— Trabajo de Grado —

Por:
ANDRÉS FELIPE BARREIRO LOSADA
ZAIRA LUCIA REYES CUÉLLAR

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA - HUILA
2010

LÓGICA POLIVALENTE

— Trabajo de Grado —

Por:

ANDRÉS FELIPE BARREIRO LOSADA

ZAIRA LUCIA REYES CUÉLLAR

Magister

GUSTAVO LONDOÑO BETANCOURT

Asesor

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

NEIVA - HUILA

2010

Nota de Aceptación

Presidente del jurado.

Jurado.

Jurado.

Neiva, Agosto de 2010

Dedicatoria

Andrés Felipe Barreiro Losada

A Dios y a su hijo Jesús, quienes me dieron la fortaleza, la salud y la esperanza en mi corazón para culminar esta meta en mi camino.

A el regalo más hermoso que Dios me ha podido dar en la vida; a mi apreciada y amada madre **Yolanda Losada Mendez**; por ser un gran ejemplo, apoyo moral, espiritual y sobre todo por sembrar en mi valores de superación y perseverancia para conquistar mis metas. Todo lo que he logrado te lo debo a ti, porque lo has dado todo por mí. Gracias mamá. Te amo.

A mi Papá **Eduardo Barreiro** por ser un apoyo incondicional en la culminación de mis estudios y por sembrar en mi el valor de la responsabilidad y puntualidad.

A mi Hermano y Abuelos quienes fueron siempre una voz de aliento durante toda mi carrera profesional.

Zaira Lucia Reyes Cuellar

Detrás de un logro exitoso siempre se encuentran grandes seres. Por esta razón, entrego este triunfo al gran hacedor del universo, a mi Padre Celestial por permitirme vivir, ser virtuosa y ser fuerte para cerrar una etapa más de crecimiento profesional y humano.

A mis papitos, seres luchadores y amorosos, que me han dado el privilegio de tener un hogar, todas mis victorias, alegrías, tristezas y elogios de manera efusiva son para ustedes, papá Rumid Reyes y mamá Maria Lucy Cuéllar, grandes ejemplos que han dedicado su vida por intentar ofrecerme las mejores condiciones para ser la mejor. Los Amo.

A mis hermanitas, Maria Alejandra y Stefany porque han sido la mayor motivación para conquistar esta meta, mostrándoles mi ejemplo y perseverancia en el caminar diario; mis amigos, que han aportado muchísimo a mi formación personal: Profesor Ricardo Cedeño, Gustavo Londoño, Felipe Barreiro, Profesora Martha Mosquera, entre muchos más.

Agradecimientos

Los autores expresan su gratitud a las siguientes personas, quienes contribuyeron significativamente en el desarrollo de esta investigación:

Al Magister Gustavo Londoño Betancourt, quién actuó como asesor del presente trabajo de grado. De igual forma, a la Magister Martha Mosquera, quien decidió acompañarnos en la parte final de esta investigación como nuestra segunda lectora; orientando sugerencias y correcciones pertinentes.

A el Profesor Ricardo Cedeño, Jefe de Programa; por exhortarnos, guiarnos y ser un gran apoyo en el transcurso de nuestra carrera Profesional, y además por facilitarnos información valiosa acerca del Programa LATEX.

A todos los profesores que hacen parte de la Facultad de Educación, Ciencias Exactas y Naturales por enseñarnos parte de sus conocimientos y llevarnos siempre a la excelencia con su buen ejemplo y motivación en la vocación que escogimos.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1

Presentación

La influencia de Aristóteles a lo largo de la historia es indudable; pocos pensadores han marcado una huella muy perdurable y que sería seguida por muchos a lo largo de los tiempos. Sin embargo, la magnitud y profundidad de su influencia impide, de cierta manera, en los últimos siglos desarrollar una lógica más amplia al pensamiento del hombre moderno, para esto es necesario que pensadores, filósofos y matemáticos debatan sobre el argumento presentado por Aristóteles. Por esta situación en la edad contemporánea, la lógica generalmente es entendida como cálculo y se aplica a los razonamientos en una forma prescrita mediante la aplicación de reglas de inferencia como un cálculo lógico o matemático, actualmente a la lógica se le considera como una única ciencia lógico-matemática, cuya expresión más importante en el campo de la ciencia es la creación de modelos de conocimiento e inteligencia gracias a la aplicación técnica en los circuitos lógicos, que hacen posible la informática y el cálculo numérico.

El presente trabajo de investigación da a conocer una nueva disciplina y rama de la filosofía, que estudia los principios formales del conocimiento del hombre moderno; ésta admite mas de dos valores de verdad en sus proposiciones, por lo tanto contradice principios establecidos en la Lógica Aristótelica[1] de lo cual recibe el nombre de **Lógica Polivalente**.

Por lo anteriormente enunciado se realizará en su respectivo desarrollo una explicación sobre las algunas Lógicas que toman más de dos valores de verdad y se mostrarán sus pertinentes Tablas de verdad. En el proceso investigativo del trabajo, se tendrá en mayor relevancia a la Lógica Trivalente, debido a su importante aporte para la construcción y conceptualización de las otras Lógicas, es por esta razón que se pretende mostrar un método que permite entender y enseñar el estudio de esta lógica con ayuda de una gama de tres tonalidades del color rojo, estableciendo así tres valores de verdad lo cual facilitará hacer una contribución significativa en la explicación, utilidad y desempeño de ésta, lo dicho con anterioridad se llevará a cabo en el capítulo “Una Propuesta Metodológica para la enseñanza de la Lógica Trivalente”

[1]Identidad, No Contradicción y Tercero Excluido

CAPÍTULO 2

Planteamiento del Problema

Con la revolución tecnológica vista desde el siglo XX y el acceso cada vez mas generalizado a ésta y su inclusión en las actividades de la vida diaria, se ha notado que el pensamiento, la capacidad de organizar ideas y hacer criterios válidos se ha modificado de manera trascendental, haciendo que el conocimiento del hombre sea cada vez mas amplio. Debido a esta avance en los últimos años, se ha creado la necesidad de implementar y estudiar una Lógica que permita direccionar las ideas de éste sujeto, haciendo que abra nuevos caminos hacia la técnología y a sus propios pensamientos, es de esta manera que se descubre la Lógica Polivalente[1]; el cual es el enfoque principal de esta investigación.

[1]Lógica Trivalente, Lógica Difusa, Lógica Paraconsistente, Lógica de Pierce.

2.1. Antecedentes

Problemática alrededor del currículo de la Educación Básica y Media Técnica

Se recurrió a tres libros que utilizan los profesores Licenciados en Matemáticas en algunos colegios privados[2] de Neiva, estos son: Hipertexto Matemáticas Editorial Santillana, Supermat Editorial Voluntad, Pensamiento Matemático Editorial Libros & Libros. En su contenido se observó que en la Unidad Didáctica, Lógica vista en la Educación Básica Secundaria, no expone una Lógica con mas de dos valores de verdad, en efecto se denota que los estudiantes no tienen una noción básica de la existencia de lógicas con mas de dos valores de verdad.

Problemática alrededor del Microdiseño Curricular de la Educación Superior en la carrera de Licenciatura en Matemáticas

En la carrera de Licenciatura en Matemáticas, en el III semestre según el Plan de Estudios académico se enseña una materia "Lógica y Teoría de Conjuntos" de lo cual en su microdiseño curricular[3] en el capítulo 2 "Presentación resumen del curso" se presenta la idea de que existe una lógica que va mas allá de la Lógica Bivalente, pero queda tan sólo en la presentación porque en la Programación Semanal del Curso, no se enuncia ningún tema relacionado con esto, por consecuencia esta diseñado para la enseñanza de la educación Básica y Media. Por lo tanto se puede deducir que al implementar un tema como las Lógicas No-Clásicas en el microdiseño, no sería desconocido para los jóvenes bachilleres.

[2] Maria Auxiliadora, Ideha, Gimnasio Yumaná, Colombus American School
[3] Anexos

2.2. Situación Real

De los antecedentes enunciados en el anterior subtítulo, se verifica que el tema de Lógica Polivalente es casi desconocido en la educación, teniendo en cuenta que éste es de vital importancia para la organización del pensamiento del hombre, además ayuda al aporte y desarrollo de la tecnología e informática del siglo XXI. La mayoría de los estudiantes desconocen el argumento presentado en la siguiente investigación, lo cual conlleva a el estancamiento de su desarrollo y por tanto su campo de acción se verá perjudicado en los siguientes años.

2.3. Alcances y Limitaciones de la Investigación

El enfoque de la presente investigación es de tipo cualitativo, en la que se realizará un estudio minucioso acerca de la Lógica Polivalente desarrollando de esta manera aplicaciones a ésta. Por otra parte, las investigaciones cualitativas se caracterizan por que su diseño es de carácter descriptivo, aportando bases e información adecuada para en un futuro guiarse de esta y llevar a cabo un trabajo investigativo de tipo cuantitativo.

Se dará a conocer un método para la enseñanza de la Lógica Trivalente mas no se llevará a cabo, una recolección de datos aplicando esta metodología en un campo educativo, y además no se tendrá que probar ninguna hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico. En efecto, el trabajo investigativo expuesto, no es de tipo experimental, de esta manera se diseña en capítulos posteriores una metodología para la enseñanza del tema trabajado como centro de la investigación.

CAPÍTULO 3

Justificación

El estudio de la Lógica en las Instituciones Educativas, juega un papel pasivo en el proceso del aprendizaje; por tanto la aplicabilidad no se denota de gran importancia cuando se enseña. Este fenómeno se debe a que el material Bibliográfico empleado por los docentes, ayuda a la poca información suministrados en estos, en efecto los futuros profesionales no cultivan e investigan la inteligencia Lógico-Matemática y tienen en poco el estudio de la Lógica como parte de su diario vivir, teniendo en cuenta que es una herramienta indispensable para desarrollo tecnológico de las innovaciones creadas por el hombre contemporáneo.

La enseñanza de la Lógica debe llevarse a cabo de una manera activa en la educación, teniendo siempre en cuenta que esta va progresando a medida que el pensamiento del hombre lo haga, pero hay también una variable que no permite su agilidad en la educación; son pocos los libros o artículos en los cuales se ha llegado a mostrar la lógica aplicada a nuestra diario vivir, eximiendo de ella su seguimiento histórico y analítico; en algunos solo se muestra aspectos generales que dicha rama de la matemática ha tenido y de una forma bastante incompleta, debido a que no trasciende de la Lógica Aristótelica o Clásica. Esto para algunos investigadores resulta molesto, ya que si están interesados en profundizar y hacer un trabajo mas minucioso, generalmente no encuentran el texto de forma asequible, ya que la mayor parte de los desarrollos matemáticos no se muestran a cabalidad y en consecuencia, no despliegan todas las deducciones matemáticas de dichos temas, por tal motivo la importancia que suministra esta investigación es de ser un aporte y ayuda en el conocimiento y estudio de las Lógicas No-Clásicas.

Con gran preocupación se analiza la poca utilidad que se le da al tema de la Lógica Polivalente, teniendo en cuenta que su estructura hace parte del desarrollo del pensamiento del hombre. Es por esta razón que surge en este Trabajo Investigativo una estrategia para enseñar de manera ágil el tema de Lógica Trivalente, como fundamento al perfeccionamiento de las otras Lógicas de este siglo.

El capítulo “Una propuesta Metodológica para la enseñanza de la Lógica Trivalente”, es concebido como un proceso de investigación eficaz que persiste en el conocimiento y mejoramiento de la educación Básica Y Superior, a través del beneficio de una gama de colores, haciendo que a través de está no se aplique únicamente para tres valores de verdad sino para más valores.

CAPÍTULO 4

Objetivos

4.1. Objetivo General

- Presentar la "Lógica Polivalente" como una extensión de la Lógica Aristótelica, teniendo en cuenta sus principios y como se ven refelajados en las diferentes lógicas que se presentan en este trabajo investigativo.

4.2. Objetivos Específicos

- Contribuir de manera significativa a la investigación de temas que se enuncian de manera implícita en algunas materias del curriculo del programa de Licenciatura en Matemáticas y promover la construcción y fundamentación de un semillero de investigación cuyo tema esencial es "Lógica y computación" en la Universidad Surcolombiana.

- Identificar 3 valores de verdad que se dan como principio de la Lógica Polivalente, analizando su estructura y su estudio a través de los colores teniendo como guía un color con tres tonalidades diferentes.

- Estudiar algunas de las aplicaciones de la Lógica Polivalente y su campo de acción en el estudio de la lógica matemática.

- Manifestar la importancia de la "Lógica Polivalente" en el estudio de las nuevas tendencias tecnológicas e informáticas y aportar con esto hacia su implementación en el curriculo de la educación Básica y media.

CAPÍTULO 5

Marco Teórico

"La lógica se expresa en el lenguaje y constituye un cuerpo de conocimiento que participa en las experiencias humanas"

5.1. Historia de la Lógica

La gramática nace después de las grandes manifestaciones poéticas de los griegos (poemas homéricos, la tragedia); la lógica se formaliza por obra de Aristóteles, después que el saber griego se había desplegado en los sistemas filosóficos, doctrinas médicas, construcciones históricas y sobre todo en saber matemático reflejado en la labor técnica de los pitagóricos, de un Hipócrates de Quio, de un Eudoxo de Cnido, de esta manera se afianzo el conocimiento matemático de ese tiempo en el estudio de la lógica, los griegos la definieron así: (logike) que significa "dotado de razón, intelectual, dialéctico, argumentativo" que a su vez viene de Logos "palabra, pensamiento, idea, argumento, razón o principio".

Sus principios se vislumbran en la obra de Parménides y, sobre todo, en la "dialéctica" de Zenón de Elea [1] fundador de la lógica según Aristóteles, es a este quien se debe la creación de la lógica formal, que se mantendrá estancada e incólume hasta casi tiempos presentes. En parte la "autoridad" de Aristóteles mantuvo en la sombra toda posible modificación de esta estructura y en parte también contribuyó a ese estancamiento el carácter que el mismo Aristóteles confirió a su creación considerándola un *Organon*[2], es decir, tan solo un instrumento, un útil desprovisto de jerarquía científica por sí mismo.

Es de esta manera como la lógica se constituye como una disciplina autónoma, a partir de Aristóteles, quien la instauró como ciencia, elevándola al grado de saber supremo; tal grado fue alcanzado debido a la importancia que se la atribuyó como método y herramienta indispensable en el manejo de los procesos mentales. De ahí que se diga que el objeto sobre el cual trabaja la lógica, es el pensamiento y sus formas, es decir la manera como la mente consigna y ordena los datos provenientes de la naturaleza y a su vez, da validez a los razonamientos y argumentos, por lo que se esfuerza para determinar las condiciones que justifican que el individuo, a partir de proposiciones dadas, llamadas "premisas" alcance una conclusión derivada de aquellas.

El filósofo y matemático Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$, verdadero precursor de la lógica matemática debido a su interés por un "alfabeto de los pensamientos humanos" y de un "Idioma Universal", se propone construir el proyecto de "característica Universal", especie de lenguaje simbólico capaz de expresar sin ambigüedad, todos los pensamientos humanos. Estas ideas de Leibniz solo dieron su fruto en este siglo debido a que su propuesta contiene muchos conceptos de Lógica Simbólica.

Por otra parte, las ideas de Kant en el siglo $XVIII$ y principios del XIX, contribuyeron sin duda al estancamiento de la lógica porque, pensaba que Aristóteles

[1] **Paradojas Lógicas:** enunciados que lo mismo son verdaderos que falsos

[2] Es un conjunto de obras de lógica escritas por Aristóteles estas obras, compuestas por Aristóteles a lo largo de un amplio periodo de tiempo, constituyen el nacimiento de la **Lógica Aristotélica** como disciplina académica, capaz de analizar argumentos y determinar su validez mediante las reglas formales del silogismo.

había llevado la lógica formal a su perfección, por lo que básicamente hasta entonces no se habían realizado modificaciones de importancia.

Las cosas cambian a mediados de siglo cuando, en 1854, George Boole (1815−1864) publica *The Laws of Thought* que lo convierte en el verdadero fundador de la lógica simbólica, Boole le da una importancia muy relevante a la abstracción y muestra la tendencia del pensamiento de los filósofos de su época. Pero Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) perfecciono la lógica de Boole y definió nuevos conceptos como "los valores de verdad y tablas de verdad".

De este modo, en la edad contemporánea, la lógica generalmente es entendida como un cálculo y se aplica a los razonamientos en una forma prescrita mediante aplicación de reglas de inferencia como un cálculo lógico o matemático, actualmente a la lógica se le considera como una única ciencia lógico-matemática, esta corriente desemboco, ya en este siglo, en los *Principia Mathematica*, obra que entre 1910 y 1913, publicó Russell; y esta es una síntesis armoniosa de los resultados de Frege y de Peano, esta representa a comienzos de este siglo la expresión más acabada de la lógica matemática o, mejor de acuerdo con su orientación de la matemática como lógica.

Si bien hasta ahora el estudio de la lógica ha sido enmarcada por la Lógica Aristotélica, desde el siglo XX a nuestros días esta ha sido muy criticada debido al estancamiento que ha hecho en el raciocinio, lo que crea la necesidad de extender su conocimiento e investigación hacia tipos de razonamientos lógicos que el mismo ser humano ha construido y ha creado por su desarrollo intelectual y social; debido a este progreso en el hombre se debe extender el estudio de la lógica, y fue así como nacio lo que actualmente llaman**Lógicas no-Clásicas**.

5.2. De la Lógica Clásica a las Lógicas no-Clásicas

La lógica clásica se ha formalizado a través de muchos sistemas lógicos formales a lo largo de la historia. Desde la época de Aristóteles, el hombre ha tratado de estudiar y sistematizar las formas correctas de pensar, de razonar, de inferir resultados y afirmaciones en las ciencias. La Lógica Simbólica, como la Lógica Clásica se refiere a los principios generales del razonamiento. La diferencia básica entre ellas es que la Lógica Clásica, sistematizada por Aristóteles, elaborada por el pensador medieval y enseñado durante siglos en la educación media y superior, utiliza como símbolos, las palabras; mientras que la lógica simbólica utiliza un conjunto de signos especiales.

La Lógica Clásica tiene ciertas propiedades representativas que la caracterizan y fueron sustentadas por Aristóteles y sus seguidores y, que han mantenido vigentes desde él hasta nuestros días en el pensamiento occidental. La Lógica Clásica es:

- **Apofántica:** Deja fuera enunciados de los que no quepa preguntar si son verdaderos o falsos.
- **Bivalente:** Solo admite dos valores de verdad; Verdadero y Falso.
- **Asertórica:** Excluye la existencia de modalidades de verdad. No existen graduaciones de los valores, como podría ser: muy verdadero, algo verdadero, muy falso, casi falso, etc.
- **Extensional:** Opera sólo en términos de la verdad global de sus expresiones. Cada proposición mantiene en todo el discurso su valor de verdad, no es posible que por alguna ésta cambie de valor de verdad en medio del discurso.

Se dice que un sistema es *divergente* de otro, si se utiliza el vocabulario del primer, pero tiene un conjunto diferente de teoremas o inferencias válidas. Un sistema es *Extensión* de otro si contiene nuevo vocabulario, además del compartido y tiene nuevas inferencias que esencialmente se refieren al nuevo vocabulario. A partir de estas definiciones una lógica, puede ser a la vez una extensión y una divergencia de la lógica clásica: puede añadir nuevo vocabulario y por lo tanto nuevos teoremas y al mismo tiempo diferir de la lógica clásica en lo que respecta a inferencias que contienen esencialmente solo el vocabulario incorporado. Las **Lógicas Polivalentes** son divergentes: si bien introducen nuevos términos e inferencias a la clásica, carecen de ciertos principios y teoremas de la misma, como es el caso del **Principio del Tercero Excluido**.

Aristóteles en la metafísica enunció el principio del tercero excluido de la siguiente manera:

> *"Tampoco puede haber un término medio entre afirmaciones contrarias, y respecto a una cosa debemos afirmar o negar algo, cualquiera que sea."*
>
> **(Citado por Guétmanova, 1986, p. 124)**

Este principio se basa claramente en que para Aristóteles cada proposición puede tener solo uno de dos valores de verdad: verdadero o falso, ya sustentada por Aristóteles. Podría decirse que el primero en detectar la existencia de enunciados a los que es imposible asignar uno de estos dos valores, fue el mismo Aristóteles, que analiza, el enunciado:

"Mañana habrá una batalla naval"

Si se quiere determinar si se trata de una proposición verdadera o falsa, será necesario esperar al día de mañana. Solo entonces y comparándola con la realidad, se podrá estar en condiciones de saber si se trato de una proposición verdadera o falsa. Sin embargo, por tratarse de una proposición debe tener un valor de verdad; es verdadera o falsa, lo que ocurre es que no se puede saber su valor de verdad hasta que pase el tiempo propuesto. Si es verdadera la proposición, sería necesaria la batalla naval, entonces el futuro está determinado. Lo mismo ocurre si es falsa. Aristóteles dio a este tipo de enunciados el nombre de *Futuros Contingentes*. Para salvar el obstáculo de determinar su valor de verdad, las excluyo del conjunto de enunciados con los que trabaja la lógica, no les dio el status de proposición. Se baso para hacerlo en la consideración de que como la lógica es para Aristóteles el sustento de las ciencias y los enunciados de las ciencias son verdaderos o falsos más allá del tiempo, las ciencias no trabajan con futuros contingentes y por ello la lógica no necesita dar una respuesta a su valor de verdad. Los epicúreos, que tenían una visión determinista del mundo en la que no tenía cabida la bivalencia y por lo tanto el principio del tercero excluido. Para ellos los futuros contingentes no debían ser destacados. Sin embargo, los estoicos mantuvieron una visión rígidamente determinista y apoyaron la posición de necesidad de la bivalencia.

La idea de otros valores de verdad, además de los dos valores verdadero y falso clásicos, es central para las lógicas polivalentes. El primer paso es la consideración de un valor de verdad de cierta manera intermedio entre el verdadero y el falso. Desde el punto de vista histórico, en la Edad Media el problema de los futuros contingentes y sus posibles valores de verdad fue abordado por tanto lógicos europeos como islámicos (Rescher, 1969), Guillermo de Occam $(1298 - 1349)$[3] en la *Summa Teologica*, al comentar esta obra Aristotélica, parece llegar a un sistema trivalente, en el que el valor de verdad de estos enunciados es tratado a través de un valor neutro al esbozar tablas de verdad.

La concepción de modalidad de valores de verdad para las proposiciones también dio origen a otro tipo de lógicas no clásicas denominadas lógicas modales, en las cuales algo no es solo verdadero o falso, sino que aparecen modos de verdad o falsedad para cada proposición (necesariamente verdadero, posiblemente verdadero, necesariamente falso, posiblemente falso). Otras lógicas no clásicas que surgieron son las denominadas lógicas probabilísticas, en las que los valores de verdad toman valores que son regidos por las leyes de la teoría de las probabilidades.

Un sistema es $n - valente$ si n es el menor número de valores que tiene cualquier tabla de verdad característica de dicho sistema. En las lógicas polivalentes [4] se mantiene $n > 2$ por lo que las bivalentes no se designan como polivalentes, por lo general. Aunque solamente hay un sistema de Lógica Bivalente en el sentido amplio del término, surgen para las lógicas polivalentes, sistemas alternativos que llevan a valores distintos para las formulas compuestas. Esto significa que los conectivos en la lógica bivalente tienen una sola definición posible, mientras que en las lógicas polivalentes, hay distintas definiciones posibles, dependientes de la interpretación

[3] la verdad es una *coherencia semántica* que involucra algo más que la consistencia lógica. Con este punto de vista, una proposición es verdadera hasta el extenso de que es un constituyente necesario de un todo sistemáticamente coherente.

[4] son simplemente desarrollos contemporáneos de la lógica aristotélica (Diálogo sobre la enseñanza de las Lógicas No-Clásicas).

de los valores de verdad intermedios. Las Lógicas Polivalentes son divergentes; si bien incorporan el vocabulario de la Lógica Clásica, carecen de ciertos teoremas de la misma, tales como el principio del tercero excluido.

CAPÍTULO 6

Lógica Trivalente

6.1. Los significados del tercer valor de verdad en las Lógicas Trivalentes

6.1.1. Lógica Trivalente Lukasiewicz

Jan Lukasiewicz fue el primero en publicar su propuesta de tratamiento de una lógica trivalente (Rescher, 1969). Este matemático polaco centró su trabajo en la lógica matemática y reporto en 1920 una manifestación de supremacía de la lógica trivalente por encima de la lógica bivalente, proponiendo su generalización a lógicas polivalentes con incluso una cantidad infinita de valores de verdad, basada en trabajos anteriores. Para Jan Lukasiewicz, la disputa de la bivalencia de la lógica tiene un trasfondo metafísico: los que la afirman son decididos deterministas, los que no, tienen una visión indeterminista del mundo. En su escenario científico, tuvo influencias de las ideas de Russel, en cuanto a las contradicciones que introducía la lógica y a los estudios de las vaguedades del lenguaje.

La visión de ciencia de Lukasiewicz, difiere de la aristotélica:

> *"La creatividad poética no difiere de la creatividad científica en que encierre mayor cantidad de fantasía. Cualquiera que, como Copérnico, haya cambiado a la Tierra de posición y la haya enviado a hacer revoluciones en torno al Sol, o que, como Darwin, haya percibido en las nieblas del pasado las transformaciones genéticas de las especies, puede codearse con el mayor de los poetas. Pero el científico difiere del poeta en que, en todo tiempo y lugar, razona. No necesita ni puede justificarlo todo, pero todo lo que afirme tiene que ligarlo mediante lazos lógicos en un todo coherente. El fundamento de ese todo consiste en juicios acerca de hechos, y ello sostiene la teoría, que explica, organiza y predice hechos. Así es como se crea el poema de la ciencia."*
>
> **(Lukasiewicz, "Elementos creativos de la ciencia"** 1912**,** *p*,13**)**

Esta visión de ciencia, en la que se conjugan la creatividad y la razón, permitieron a Lukasiewicz imaginar más allá de la lógica clásica y dar una interpretación al valor de verdad de los futuros contingentes. Él mismo reconoce que en su intento de modificar el concepto de ciencia basado en la Lógica Aristotélica, se vio obligado a forjar armas más poderosas que esa misma lógica, para poder vencer la "dominación de la lógica" que había sido impuesta por Aristóteles y por Euclides. (Lukasiewicz, "Lección de despedida pronunciada por el profesor Lukasiewicz en el Aula Magna de la Universidad de Varsovia el 7 de Mayo de 1918", 1918).

Interpretó el tercer valor como "**Indeterminado**" o "**posible**", atribuible a los enunciados futuros contingentes descritos por Aristóteles, y obtuvo un "sistema tan coherente y consistente como la lógica aristotélica, pero más rico en leyes y formulas" (Lukasiewicz, 1918, p.16). Según el criterio aristotélico, los enunciados sobre el futuro no son verdaderos ni falsos, bajo pena de verse empujado hacia el fatalismo. El razonamiento de Lukasiewicz se puede esquematizar con el siguiente ejemplo así:

> *"En la noche del 21 de diciembre, está en el presente determinado de manera ni positiva ni negativa. Ya que es posible pero no necesario que yo esté pre-*

sente en Varsovia en el tiempo dado. Sobre esta afirmación, la proposición "Yo estaré en Varsovia en la noche del 21 de diciembre el año próximo", no puedo en el presente decir que es ni verdadera ni falsa. Porque si fuera verdadera hoy, mi futura presencia en Varsovia debería ser necesaria, que es contradictorio con la afirmación asumida. Si fuese falsa ahora, por otra parte, mi futura presencia en Varsovia debería ser imposible, que también es contradictorio con la afirmación asumida"

(Lukasiewicz, citado por Rescher, 1969, p,23**)**

La única manera de evitar esta conclusión fatalista, argumenta Lukasiewicz es rechazar la bivalencia. Para cada interpretación de los valores de verdad intermedios en una lógica trivalente, será necesario definir las tablas de verdad para poder determinar la manera en la que se evalúan las proposiciones compuestas en esa lógica. Las funciones de verdad correspondientes a las proposiciones compuestas en la lógica trivalente de Lukasiewicz, pueden explicitarse de la siguiente manera:

Negación: $v(\neg p) = 1 - v(p)$

p	$\sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Tabla 6.1: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Lukasiewicz

Conjunción: $v(p \wedge q) = \text{mín}(v(p), v(q))$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Disyunción: $v(p \vee q) = \text{máx}(v(p), v(q))$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1

Tabla 6.2: Tabla de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Lukasiewicz

Para definir Lukasiewicz la implicación, toma la conjunción $\text{mín}(v(p), v(q))$ y al $v(p)$ y $v(q)$ le adiciona el $v(\neg p)$ quedando $\text{mín}(v(p) + v(\neg p), v(q) + v(\neg p))$ por tanto retomando la definición propuesta anteriormente de la negación obtenida por Lukasiewicz, se concluye que $v(p \to q) = \text{mín}(1, 1 - v(p) + v(q))$ de los cuales resultan la tabla de verdad (Para definir Lukasiewicz los conectivos básicos usa la negación y el condicional como primitiva).

Implicación: $v(p \to q) = \text{mín}(1, 1 - v(p) + v(q))$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.3: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Lukasiewicz

Ni el principio del tercero excluido ni el de no contradicción se cumplen, de forma que ninguna es una ley en esta lógica; "$p \vee \neg p$" y "$\neg(p \wedge \neg p)$".
Para que se cumpla la implicación en la Lógica Trivalente se deben cumplir con los siguientes criterios:
Si el valor de p es igual o menor que el valor de q entonces el valor de la Implicación es 1; así: Si $p \leq q$ entonces $p \rightarrow q = 1$. Si el valor de p es mayor que el valor de q entonces el valor de la implicación es igual al valor de q menos el valor de p más 1; así: Si $p > q$ entonces $p \rightarrow q = v(q) - v(p) + 1$.

Coimplicación: $v(p \leftrightarrow q) = 1 - |v(p) + v(q)|$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.4: Tabla de verdad de la coimplicación según lógica trivalente de Lukasiewicz

Para la coimplicación se cumplen los siguientes criterios: Si el valor de p no es igual que el valor de q entonces la Coimplicación vale el módulo de, 1 menos el módulo de, el valor de p más el valor de q. Si $v(p) \neq v(q)$ entonces, $v(p) \leftrightarrow v(q) = 1 - |v(p) + v(q)|$.

6.1.2. Lógica Trivalente de Bochvar

El matemático ruso Bochvar propone en 1939 una lógica trivalente con el objeto de resolver el problema planteado por la existencia de paradojas semánticas, o sea de proposiciones que no tienen valor de verdad en la Lógica Clásica porque al ser verdaderas deben tomar el valor falso y por otra parte al suponérselas falsas, se conduce a tomar el valor verdadero. Un ejemplo de este tipo de proposiciones es la denominada Paradoja del mentiroso. Si se afirma “Yo miento” y se supone que esta es una proposición verdadera, entonces la persona que la afirma miente, es decir, que la proposición no puede ser verdadera. Supongamos ahora que “Yo miento” es falso, en ese caso no es cierto que mienta, por lo que debe ser verdadera la proposición considerada. Como conclusión, la proposición “Yo miento” no puede ser verdadera ni falsa. Este tipo de afirmaciones eran conocidas en la lógica y en la matemática durante siglos. De ellas por no ser posible asignarles un valor de verdad en la lógica clásica, se dijo que eran paradojas y se las exceptuó de los posibles abordajes lógicos.

La lógica Trivalente de Bochvar fue propuesta originalmente como una solución a las paradojas semánticas y la interpretación que el dio para el tercer valor fue “*Paradójico*” o “*Carente de significado*”. Esta interpretación de carencia de significado es herencia de la concepción bivalente de que las afirmaciones paradójicas tenían esa propiedad.

En la definición de los conectivos de esta lógica se sustentó el principio de que una oración compuesta que contiene un componente paradójico es asimismo paradójica, algo así como que una proposición simple “infectaría” la proposición compuesta con esa carencia de significado. Los valores de verdad de las proposiciones compuestas para Bochvar son definidos a través de las siguientes expresiones y tablas de verdad.

Negación: $v(\neg p) = 1 - v(p)$

p	$\sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Tabla 6.5: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Bochvar

Conjunción:

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } v(p) = \frac{1}{2} \text{ ó } v(q) = \frac{1}{2} \\ \text{mín}(v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Disyunción:

$$v(p \vee q) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } v(p) = \frac{1}{2} \text{ ó } v(q) = \frac{1}{2} \\ \text{máx}(v(p), v(q)) \end{cases}$$

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.6: Tabla de verdad de la conjunción y disyunción según lógica trivalente de Bochvar

Implicación:

$$v(p \to q) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } v(p) = \frac{1}{2} \text{ ó } v(q) = \frac{1}{2} \\ \text{máx}(1 - v(p), v(q)) \end{cases}$$

Resulta importante hacer notar que con los conectivos definidos de esta manera no hay ninguna fórmula bien formada dentro de este cálculo que tome el valor verdadero para todas las asignaciones de sus componentes atómicas, es decir, que en esta lógica no existen tautologías y por lo tanto no hay leyes lógicas. Un $\frac{1}{2}$ en la entrada siempre produce $\frac{1}{2}$ a la salida. Este hecho trae conflicto, por lo que Bochvar añade con la finalidad de solucionar este problema, un operador con el significado de "**es verdadero que**" al que se denota $\mathbf{V_x}$ definido como verdadero si y solo si la proposición x es verdadera, y falso en cualquier otro caso (Haack, 1978). De esta manera se recuperan las leyes lógicas a través de proposiciones denominadas

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.7: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Bochvar

cuasitautologías, a las que se les da un significado similar que tienen las tautologías en la lógica clásica (Rescher, 1969). Sin embargo estas leyes lógicas tienen distinta significación que las clásicas cuando intervienen en ellas proposiciones paradójicas. Esto le permite definir conectivos "externos" del siguiente modo:

$$v(p \wedge q) = Vv(p) \wedge \forall v(q)$$
$$v(\sim p) = \sim Vv(p)$$
$$v(p \vee q) = Vv(p) \vee \forall v(q)$$
$$v(p \rightarrow q) = Vv(p) \rightarrow Vv(q)$$

Este conectivo externo actúa en cierta manera como un filtro; mediante la aplicación de este conectivo, solo las tautologías bivalentes de la lógica se mantienen. El conectivo externo V actúa algo así como transformando tablas trivalentes para la lógica bivalente con $\frac{1}{2}$ y 0 como tipo de falsedad.

6.1.3. Lógica Trivalente de Kleene

Teniendo como antecedente el trabajo de Lukasiewicz, y otros realizados a partir de él acerca de la consideración de grados de verdad de las proposiciones, en 1938, Stephan Kleene introdujo una Lógica Trivalente diferente. La preocupación de Kleene no son las paradojas ni los futuros contingentes, sino ciertas proposiciones que se encuentran dentro de la matemática, cuyo valor de verdad es desconocido o indecidido. Por ejemplo, consideremos una proposición de la que no sabemos su valor de verdad pues recién la enunciamos y aun no hemos intentado demostrarla o refutarla. A ella se le aplicaría este valor de verdad al que Kleene denomina "**Indecidido**", asignárselo a oraciones que, aunque verdaderas o falsas no son aún demostradas ni refutadas. Es decir que la asignación de este valor a una formula bien formada no se propone para indicar que no es ni verdadera ni falsa, sino solamente para indicar que no es ni verdadera ni falsa, sino solamente para indicar que no se puede decir qué es.

La lógica trivalente de Kleene difiere de la de Lukasiewicz con respecto a la implicación. La implicación de Kleene se construye de forma que, ahí donde la verdad o falsedad de un componente es suficiente para decidir la verdad o falsedad del compuesto, este toma el valor correspondiente, aunque el valor de otros componentes sea indecible. En otro caso el compuesto en sí mismo es indecible. Mientras Lukasiewicz preocupado por salvar la ley de identidad, asigna el valor de verdad 1 a: $v(p \to q)$ para $v(p) = v(q) = \frac{1}{2}$, Kleene asigna al mismo el valor: $\frac{1}{2}$ quedando la explicación funcional de la implicación de Kleene como:

Implicación: $v(p \to q) = \text{máx}(1 - v(p), v(q))$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.8: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Kleene

6.1.4. Lógica Trivalente de Gödel-Brouwer

En 1907 Luitzen Brouwer funda la escuela intuicionista. La intuición fundamental, según él es la “presencia de percepciones en una sucesión temporal”. Concibe el pensamiento matemático como un proceso de construcción que edifica su propio universo independientemente de nuestra experiencia. Las ideas matemáticas están en nuestra mente previamente al lenguaje, la lógica y la experiencia. Hacia 1930 Arend Heyting, formalizó las ideas de Brouwer al construir el cálculo proposicional intuicionista. En la lógica hay algunos principios y procedimientos claros, intuitivamente aceptables, pero no todos. Por ejemplo, se aplica demasiado libremente el principio del tercero excluido. Este principio afirma que toda proposición es verdadera o falsa, y es fundamental para el método de demostración indirecta. Históricamente surgió por la aplicación de razonamientos a subconjuntos de conjuntos finitos. Fue aceptado y se lo aplicó injustificadamente a conjuntos infinitos.

La idea de infinito de Brouwer coincide con la del "infinito potencial de Aristóteles".[1] Para Brouwer, el dogma de la validez universal del principio del tercero excluido es un fenómeno de la historia de la civilización. El rechazo del principio del tercero excluido dio origen a una nueva posibilidad: la de las propiedades indecidibles: propiedades que no pueden ser refutadas ni demostradas. Por ejemplo: definamos k como el primer cero seguido de la secuencia $1, 2, \ldots, 9$ en el desarrollo decimal de π. La lógica clásica dice que existe o no existe. Brouwer, en cambio rechaza este razonamiento: dice que hay afirmaciones matemáticas que pueden no ser decididas nunca a partir de los axiomas de la matemática, estas cuestiones son indecidibles.

Por otra parte, en 1933, Kurt Gödel demostró el Teorema de Incompletitud de la Aritmética. Esto significa que existen realmente algunas afirmaciones indecidibles en la aritmética. Esto significa que existen proposiciones matemáticas que no podrán ser nunca demostradas ni refutadas.

Si bien las bases de ambas teorías (la propuesta por los intuicionistas y por Gödel) son sustancialmente distintas, en ambos casos es posible interpretar el tercer valor de verdad de la lógica trivalente que proponen como "indecidible". No debe olvidarse en cada caso qué significa que algo sea indecidible.

Para los intuicionistas, por lo tanto, no es válida la ley del contrarrecíproco. Basado en esto Heyting elaboró su Lógica Proposicional Trivalente. Es fundamental el concepto de implicación de los intuicionistas, así como el de la negación. Aunque en las que las definiciones de la implicación y de la negación se distinguen en un sólo caso de las de Lukasiewicz, estas son fundamentales para rechazar las pruebas por simple reducción al absurdo:

Negación:

$$v(\sim p) = \begin{cases} 1 & \text{Si } v(p) = 0 \\ 0 & \text{Si } v(p) \neq 0 \end{cases}$$

[1]El infinito Potencial, es una construcción a lo largo del tiempo, es la cantidad que puede volverse mas grande o mas pequeña, sin que dicho devenir llegue a transformarse en ser

p	$\sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

Tabla 6.9: Tabla de verdad de la negación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer

Implicación:

$$v(p \to q) = \begin{cases} 1 & \text{Si } v(p) \leq v(q) \\ v(q) & \text{Si } v(p) > v(q) \end{cases}$$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.10: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Gödel-Brouwer

En esta implicación si el valor de verdad del antecedente no supera al de consecuente, la implicación se considera verdadera, mientras que si lo supera resulta tan verdadera como lo sea el consecuente. La negación puede definirse como: $v(\neg p) = v(p \to 0)$

La conjunción y la disyunción se definen respectivamente como el mínimo y el máximo de los valores de los argumentos, tal como en el caso de Lukasiewicz y de Kleene. Pese a que los cambios en las evaluaciones son pequeños, los cambios de los resultados son de consideración. En esta lógica no son tautologías las leyes del tercero excluido ni su negación. En cambio si los son: la ley de no contradicción[2], los dos modos del silogismo condicional categórico, la ley del contrarrecíproco[3], las leyes de De Morgan[4] y la ley del cuarto excluido.[5]

En la lógica intuicionista, incoherencia implica contradicción, pero no al revés, tal como analizamos en el capítulo que corresponde a la descripción y fundamentación de las demostraciones por reducción al absurdo.

6.1.5. Lógica Trivalente de Mamdani

Ebrahim Mamdani, ingeniero inglés que trabajó desde la década del 80 en el área de inteligencia artificial, refiriéndose a controladores, que periódicamente evalúan variables de estado y producen una variable de acción, propuso sobre la base de considerar el producto cartesiano de los universos del discurso del antecedente y del consecuente basado en la teoría de Lofti Zadeh para lógica difusa, la evaluación de la implicación como el mínimo entre los valores de verdad de ambas proposiciones. Por esta causa propuso la evaluación de la implicación como el mínimo de los valores de verdad de antecedente y consecuente. El escenario en el que realizó Mamdani sus desarrollos es radicalmente distinto de aquellos en los que se desempeñaron los matemáticos que anteriormente se han descrito; se trata de un ámbito característico de las aplicaciones de la ingeniería, correspondiente a una visión de la matemática en la que es fundamental el pragmatismo.

Para la evaluación de negaciones, conjunciones y disyunciones, la propuesta de Mamdani no difiere de la de Lukasiewicz, la diferencia fundamental se encuentra en la definición de la implicación:

[2] "$\neg(p \wedge \neg p)$" como ley de no contradicción "no se da que tanto p (cualquier enunciado) como no p (la negación de dicho enunciado); y "$p \vee \neg p$"

[3] $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

[4] $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ y $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

[5] Ley en la cual por primera vez expuso la idea de una lógica no-aristotélica, libre del principio del tercero excluido y del principio de no contradicción.

Implicación: $v(p \to q) = \text{mín}(v(p), v(q))$

p	q	$p \to q$
0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Tabla 6.11: Tabla de verdad de la implicación según lógica trivalente de Mamdani

La implicación de Mamdani no extiende los valores clásicos de la implicación, ya que si restringimos sus valores al caso bivalente, presenta diferencias en relación a la tabla de verdad de la implicación clásica.

Esta forma de evaluación no parece además en principio aceptable, ya que se trata de la misma utilizada en una conjunción. Restringiéndonos al caso trivalente diferiría solamente en la implicación respecto de la lógica de Lukasiewicz, en los casos en que el antecedente no es verdadero. Este autor sustenta lo anterior remarcando su fácil implementación computacional y que los casos en los que difiere de la lógica de Lukasiewicz son justamente aquellos en los que un sistema de control no debe actuar. Si se rastrea en el área de control, esta implicación es una de las más utilizadas por optimizar la cantidad de operaciones realizadas por el programa en su evaluación y por lo tanto la complejidad del algoritmo utilizado en la resolución del problema y por obtener resultados similares a los que corresponderían a la aplicación de los conectivos del lógico polaco.

6.2. Los principios Aristotélicos y las Lógicas Trivalentes

Nos interesa analizar si en cada una de las lógicas trivalentes que se han presentado anteriormente, son válidos o no los principios aristotélicos, en particular el Principio del tercero excluido y el Principio de no contradicción, por ser ellos los que sustentan las argumentaciones por reducción al absurdo.

Para mostrar que el Principio del tercero excluido no es válido en ninguna de las Lógicas Trivalentes anteriores, evaluemos su tabla de verdad para cada interpretación semántica, en todos los casos el Principio del tercero excluido falla para el caso en que el valor de verdad de la proposición en juego no es ni verdadero ni falso, cualquiera sea la interpretación semántica de los valores intermedios. Sólo podemos considerar que se trata de una pseudo tautología en el caso de Bochvar si se considera el conectivo externo.

Lukasiewicz

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Bochvar

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

p	$Vp \vee \sim Vp$
0	1
$\frac{1}{2}$	1
1	1

Kleene

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Gódel-Brouwer

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Mamdani

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Tabla 6.12: Principio del tercer excluido en lógica trivalente

En relación con el Principio de no contradicción, las tablas de verdad que se obtienen para esta ley aristotélica son:

Lukasiewicz

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Bochvar

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

p	$Vp \vee \sim Vp$
0	1
$\frac{1}{2}$	1
1	1

Kleene

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Gódel-Brouwer

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Mamdani

p	$p \vee \sim p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1

Tabla 6.13: Principio de no contradicción en lógica trivalente

La situación presentada es la misma que en el caso del Principio del tercero excluido. El Principio de no contradicción tampoco es válido para estas lógicas no clásicas. Estas lógicas son divergentes en relación con la lógica clásica.

Estas no son las únicas leyes de la lógica clásica que no se verifican en estas lógicas polivalentes (Alberti et al., 1995). Algunas de ellas se verifican en algunas lógicas y no en otras. No entramos en este análisis pues no se trata de leyes en las que se base la estrategia de argumentación de la que nos estamos ocupando en esta investigación.

CAPÍTULO 7

Logica Difusa

Conocida también con el nombre de lógica Borrosa y definida en términos más abstractos como Lógica Fuzzy, esta palabra es un término que se asigna a la fotografía para definir la condición de la imagen en el sentido de movido o borroso. De hay se origina la traducción de difusa o Borrosa que emplea el castellano.

Esta lógica se ha establecido desde hace varios años como una tecnología de vanguardia en Japón. Desde un punto de vista práctico, es un método de razonamiento estadístico que permite especificar los problemas de control del mundo real en términos probabilísticas sin necesidad de recurrir a modelos matemáticos y con un nivel de abstracción mucho mas elevado visto en otra palabras es un tipo de lógica basado en la teoría de conjuntos y que trata de copiar el método de razonamiento que usualmente los humanos utilizamos en nuestra vida diaria, por tanto, las cosas no son blancas o negras, sino que tienen un grado muy diverso de matices. A tal diversidad algunos le llaman los grados de verdad.

7.1. Antecedentes Históricos

La lógica difusa fue investigada, por primera vez, a mediados de los años sesenta en la Universidad de Berkeley (California) por el ingeniero **Lotfy A. Zadeh** cuando se dio cuenta del hallazgo lo llamó principio de incompatibilidad:

> *"Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cual, la precisión y el significado son características excluyentes".*

Introdujo entonces el concepto de conjunto difuso (Fuzzy Set) bajo el que reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números sino etiquetas lingüísticas. La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos. Permite trabajar a la vez con datos numéricos y términos lingüísticos; los términos lingüísticos son inherentemente menos precisos que los datos numéricos pero en muchas ocasiones aportan una información más útil para el razonamiento humano.

El aspecto central de los sistemas basados en la teoría de la lógica difusa es que, a diferencia de los que se basan en la lógica clásica, tienen la capacidad de reproducir aceptablemente los modos usuales del razonamiento, considerando que la certeza de una proposición es una cuestión de grado. Más formalmente se puede decir que si la lógica es la ciencia de los principios formales y normativos del razonamiento, la lógica difusa o borrosa se refiere a los principios formales del razonamiento aproximado, considerando el razonamiento preciso (lógica clásica) como caso límite. Así pues, las características más atractivas de la lógica difusa son su flexibilidad, su tolerancia con la imprecisión, su capacidad para modelar problemas no-lineales, y su base en el lenguaje natural.

Aunque la lógica difusa es conocida con este nombre desde que Zadeh la bautizó así en 1965, la idea que se esconde tras ella y sus orígenes se remontan hasta 2,500 años atrás. Los filósofos griegos, Aristóteles entre ellos, consideraban que existían ciertos grados de veracidad y falsedad y Platón ya trabajó con grados de pertenencia.

El término borroso aplicado a la lógica y a la teoría de conjuntos y sistemas procede de la expresión *fuzzy sets* (conjuntos borrosos) acuñada por **Lofti A. Zadeh**, brillante ingeniero eléctrico iraní nacionalizado en Estados Unidos, profesor en las más prestigiosas universidades norteamericanas y doctor honoris causa de varias instituciones académicas. Sus tesis entroncan, como podemos observar, con la obra de pensadores de distintas disciplinas que tenían una visión similar de los problemas alejada de la lógica tradicional. La paradoja del conjunto de **Bertrand Russell**, el principio de incertidumbre de la física cuántica de **W. Heisenberg**, la teoría de los conjuntos vagos de **Max Black**, sin olvidar la fundamental aportación del polaco **Jan Lukasiewicz**, creador de la *lógica multivaluada*, influyeron para que Zadeh publicase su famoso ensayo "Fuzzy Sets" en "Informations and Control" en 1965 y más tarde "Fuzzy algorithm" en la misma revista en 1968. Mientras que Russell y Black utilizaron el término vagueness (vaguedad, vago) para referirse a la nueva lógica o para calificar a los conjuntos en la teorización sobre los mismos, Zadeh prefirió el término fuzzy (borroso, difuso) para denominar a sus conjuntos y a la lógica en la que se apoya su análisis.

Aunque en un principio la lógica difusa encontró una fuerte resistencia entre la comunidad científica, algunos investigadores se convirtieron en seguidores de las teorías de Zadeh y mientras él siguió ampliando y asentando los fundamentos de la teoría de conjuntos difusos estos investigadores exploraron estas nuevas teorías durante la década posterior a su nacimiento. Además de las contribuciones del propio Zadeh, otros autores como **Bellman, Lakoff, Goguen, Kohout, Smith, Sugeno, Chang, Dunn, Bezdek, Negoita, Mizumoto, Tanaka, Kandel, Zimmermann,** etc... hicieron aportes al desarrollo de las bases de esta teoría. Durante esta primera década, gran parte de estructuras lógicas y matemáticas son generalizadas en términos de lógica difusa: relaciones lógicas, funciones, grupos, operaciones, operadores, algoritmos, etc...

A principios de la década de los setenta, se establecen varios grupos de investigación en lógica difusa en algunas pequeñas universidades japonesas; los profesores Terano y Shibata en Tokio y los profesores Tanaka y Así en Osaka, y pese a encontrar también un ambiente hostil en estos primeros años de investigación, hacen grandes contribuciones tanto al desarrollo de la teoría de la lógica difusa como al estudio de sus aplicaciones.

Un hito importante en el desarrollo de la lógica difusa fue establecido por **Assilian** y **Mamdani** en 1974 en el Reino Unido al desarrollar el primer controlador difuso diseñado para una máquina de vapor, pero la primera implantación real de un controlador de este tipo fue realizada en 1980 por **F.L. Smidth & Co.** en una planta cementera en Dinamarca. En 1983 **Fuji** aplica la lógica difusa para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua por primera vez en Japón y en 1987 **Hitachi** pone en marcha un controlador fuzzy para el control del tren-metro de Sendai, y la empresa **Omron** desarrolla los primeros controladores difusos comerciales.

Paralelamente al desarrollo de las aplicaciones de la lógica difusa, investigadores teóricos siguen, en la década de los ochenta, el camino iniciado por Mamdani. Así, Takagi y Sugeno desarrollan la primera aproximación para construir reglas fuzzy a partir de datos de entrenamiento, y aunque en un principio no tiene mucha repercusión, más tarde será el punto de partida para investigar la identificación de modelos fuzzy. Otro de los factores que contribuye a seguir con la investigación en este campo es el creciente interés en las redes neuronales y su similitud con los sistemas fuzzy; la tendencia es buscar vías de relación entre las dos técnicas y los resultados son los llamados neuro-fuzzy systems, sistemas fuzzy que usan métodos de aprendizaje basados en redes neuronales para identificar y optimizar sus parámetros. B. Kosko es conocido por su contribución a los sistemas neuro-fuzzy y con sus publicaciones introdujo en la lógica difusa a muchos lectores interesados en las redes neuronales.

En la década de los noventa, además de las redes neuronales y los sistemas fuzzy, hacen su aparición los algoritmos genéticos. Estas tres técnicas computacionales, que pueden combinarse de múltiple maneras y se pueden considerar complementarias, son herramientas de trabajo muy potentes en el campo de los sistemas de control en la última década.

7.2. ¿Qué es la Lógica Difusa?

Una de las disciplinas matemáticas con mayor número de seguidores actualmente es la llamada lógica difusa o borrosa, que es la lógica que utiliza expresiones que no son ni totalmente ciertas ni completamente falsas, es decir, es la lógica aplicada a conceptos que pueden tomar un valor cualquiera de veracidad dentro de un conjunto de valores que oscilan entre dos extremos, la verdad absoluta y la falsedad total.

> *"En ese sentido la lógica difusa es una extensión de los sistemas lógicos polivalentes, pero sus objetivos son bastante diferentes, tanto en espíritu como en esencia"*

Conviene recalcar que lo que es difuso, borroso, impreciso o vago no es la lógica en sí, sino el objeto que estudia: expresa la falta de definición del concepto al que se aplica. La lógica difusa permite tratar información imprecisa, como estatura media o temperatura baja, en términos de conjuntos borrosos que se combinan en reglas para definir acciones: si la temperatura es alta entonces enfriar mucho, como esto existen otras expresiones que se pueden podrían utilizar en la lógica borrosa como "Alto", "Gordo", "la Mayoría", "Lentamente", "Viejo", "Familiar", "Relevante", "Mucho Mayor que", "Amable" y otras similares.

Refiriéndose a conceptos de este tipo, el Profesor Lotfy A. Zadeh afirma:

> *"Una suposición clave en la lógica borrosa es que tales conceptos denotan conjuntos borrosos, es decir clases de objetos en los que la transición de la pertenencia a la no-pertenencia es gradual y no abrupta."*

A pesar de que en la vida real las cosas casi nunca son de un carácter absoluto, por siglos nos hemos limitado mayoritariamente a la lógica Aristotélica, que solo acepta dos proposiciones: VERDADERO o FALSO. Cuando en realidad, en ese camino del 0 al 1, existe un amplio rango de situaciones posibles. La lógica borrosa se trata de una lógica multivaluada. De esta manera, los sistemas de control basados en lógica difusa combinan variables de entrada, definidas en términos de conjuntos difusos, por medio de grupos de reglas que producen uno o varios valores de salida.

Un ejemplo donde se ilustra con claridad el concepto básico de la lógica difusa es el siguiente:

Consideremos el conjunto de las personas jóvenes, asumiendo que nuestra percepción de una persona joven es alguien que tiene una edad no mayor a 20 *años, entonces según la teoría clásica el conjunto se define de la siguiente manera:*

$$Joven = \{x \in P / edad(x) \leq 20\}$$

sobre algún dominio P de todas las personas y usando la función edad que retorna la edad en años de alguna persona $x \in P$. Además podemos definir la función característica:

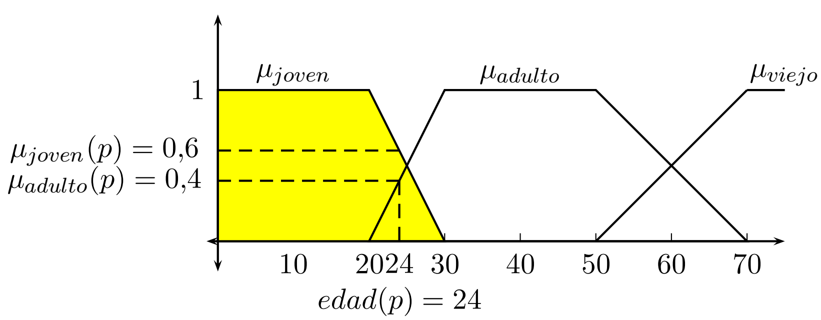
$$m_{joven}(x) = \begin{cases} 1 & \text{edad}(x) \leq 20 \\ 0 & \text{edad}(x) > 20 \end{cases}$$

el cual asigna a los elementos de P el valor de 1 *cuando un elemento pertenece al conjunto de las personas jóvenes, y* 0 *sino. Esta función* *característica puede ser vista como una función de membresía para el conjunto joven, definiendo el conjunto joven en P.*

Sin embargo, una persona que tenga un poco más de 20 años reclamará que se considera una persona joven con un alto grado de pertenencia, por lo tanto la definición del conjunto joven usando una frontera tan marcada no es la manera más apropiada. La idea fundamental que existe detrás de la teoría de conjuntos difusos es una visión diferente de la noción de membresía y consiste en que los elementos pueden pertenecer a más de un conjunto con cierto grado de pertenencia. En nuestro ejemplo, podemos decir que una persona de 21 años pertenece al conjunto de joven pero con un grado de $0,9$. Por lo tanto la función de membresía podría ser:

$$\mu_{joven}(x) = \begin{cases} 1 & \text{edad}(x) \leq 20 \\ 1 - \dfrac{edad(x) - 20}{10} & 20 < edad(x) < 30 \\ 0 & \text{edad}(x) > 20 \end{cases}$$

Ahora el conjunto joven contiene a personas entre 20 y 30 años con un grado de membresía que decrece linealmente. Un conjunto difuso A es definido a través de la especificación de la función de membresía de $A : \mu_A(x) \in [0, 1]$.[1]

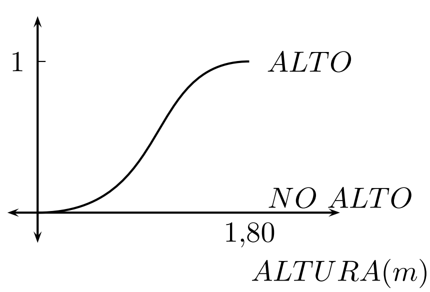


[1]Ejemplo del artículo de Lógica Difusa, Autor: Rodrigo Salas, Universidad Valparaíso Chile.

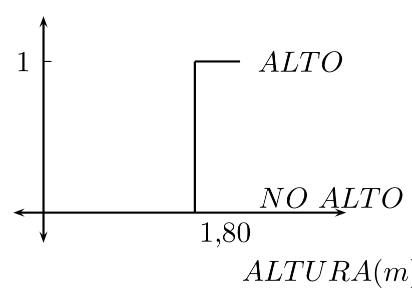
7.3. Conjuntos Difusos

El primer ejemplo utilizado por **Lofti A. Zadeh**, para ilustrar el concepto de conjunto difuso, fue el conjunto "hombres altos". Según la teoría de la lógica clásica el conjunto "hombres altos" es un conjunto al que pertenecerían los hombres con una estatura mayor a un cierto valor, que podemos establecer en 1,80 metros, por ejemplo, y todos los hombres con una altura inferior a este valor quedarían fuera del conjunto. Así tendríamos que un hombre que mide 1,81 metros de estatura pertenecería al conjunto hombre altos, y en cambio un hombre que mida 1,79 metros de altura ya no pertenecería a ese conjunto. Sin embargo, no parece muy lógico decir que un hombre es alto y otro no lo es cuando su altura difiere en dos centímetros. El enfoque de la lógica difusa considera que el conjunto "hombres altos" es un conjunto que no tiene una frontera clara para pertenecer o no pertenecer a él: mediante una función que define la transición de "alto" a "no alto" se asigna a cada valor de altura un grado de pertenencia al conjunto, entre 0 y 1. Así por ejemplo, un hombre que mida 1,79 podría pertenecer al conjunto difuso "hombres altos" con un grado 0,8 de pertenencia, uno que mida 1,81 con un grado 0,85, y uno que mida 1,50 m con un grado 0,1. Visto desde esta perspectiva se puede considerar que la lógica clásica es un caso límite de la lógica difusa en el que se asigna un grado de pertenencia 1 a los hombres con una altura mayor o igual a 1,80 y un grado de pertenencia 0 a los que tienen una altura menor.

Visión de la Lógica Difusa



Visión de la Lógica Clásica



Así pues, los conjuntos difusos pueden ser considerados como una generalización de los conjuntos clásicos: la teoría clásica de conjuntos sólo contempla la pertenencia o no pertenencia de un elemento a un conjunto, sin embargo la teoría de conjuntos difusos contempla la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto, es decir, cada elemento presenta un grado de pertenencia a un conjunto difuso que puede tomar cualquier valor entre 0 y 1. Este grado de pertenencia se define mediante la función característica asociada al conjunto difuso: para cada valor que pueda tomar un elemento o variable de entrada x la función característica $\mu_A(x)$ proporciona el grado de pertenencia de este valor de x al conjunto difuso A.

Considerar por ejemplo que deseamos encontrar el conjunto de las personas altas y jóvenes, usando la lógica clásica construiremos el nuevo conjunto usando la conjunción booleana:

$$m_{alto\ y\ joven}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } m_{alto}(x) = 1 \text{ y } m_{joven}(x) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Sin embargo, en la lógica difusa esa condición tan estricta es no deseada. Asumir por ejemplo que una persona pertenece al conjunto joven con un grado de 0,5 y al conjunto alto con grado 0,8, ¿Cuál sería el grado de pertenencia al conjunto de las personas jóvenes y altas? Para responder a esta pregunta existe una familia entera de operadores que pueden ser definidas para poder derivar la función de membresía.

Lofti Zadeh introdujo las siguientes funciones:

- Conjunción (Mínimo): $\mu_{A \wedge B}(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- Disyunción (Máximo): $\mu_{A \vee B}(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- Complemento: $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Por lo tanto, en nuestro ejemplo, la persona pertenecería al grupo de las personas jóvenes y altas con un grado de 0,5.

7.4. ¿Cómo se Aplica la Lógica Difusa?

Esta Lógica se basa en **reglas difusas o heurísticas**[2] que forman el conjunto de proposiciones **IF-THEN, SI (antecedente) ENTONCES (consecuente)**, el antecedente y el consecuente son también conjuntos difusos. Una regla difusa simple tiene la forma:

- SI hace **muchísimo** calor ENTONCES disminuyo **drásticamente** la temperatura.
- SI voy a llegar un **poco** tarde ENTONCES aumento **levemente** la velocidad.

En pocas palabras, se puede expresar lo anterior en términos matemáticos:

Si **u** es **A** entonces **v** es **B**.

dónde A y B son conjuntos difusos[3] definidos en los rangos de "u" y "v" respectivamente. Una regla expresa un tipo de relación entre los conjuntos A y B cuya función característica sería $\mu_{A \to B}(x, y)$ y representa lo que conocemos como implicación lógica. La elección apropiada de esta función característica está sujeta a las reglas de la lógica proposicional.

Como es bien sabido se puede establecer un isomorfismo[4] entre la teoría de conjuntos, la lógica proposicional y el álgebra booleana[5] que garantiza que cada teorema

[2] Capacidad de un sistema para realizar de forma inmediata innovaciones positivas para sus fines "Ciencia del descubrimiento"

[3] Un conjunto difuso A se define como una Función de Pertenencia que enlaza o empareja los elementos de un dominio o Universo de discurso X con elementos del intervalo $(0, 1) : A : X \to (0, 1)$

[4] es un homomorfismo es decir una función que es compatible con todas las estructuras relevantes

[5] Es una estructura algebraica que rigorizan las operaciones lógicas (Y, O y NO), así como el conjunto de operaciones unión, intersección y complemento

enunciado en una de ellas tiene un homólogo en las otras dos. La existencia de estos isomorfismos nos permitirá traducir las reglas difusas a relaciones entre conjuntos difusos y éstas a términos de operadores algebraicos.

7.4.1. Implicación difusa

Al igual que para describir las nociones básicas de la teoría de conjuntos difusos podemos establecer un paralelismo con las de la teoría clásica de conjuntos, también los fundamentos de la teoría de la lógica difusa parten y toman los conceptos fundamentales de la lógica clásica.

Como ya hemos visto, en términos de teoría de lógica difusa la proposición "SI u es A, ENTONCES v es B" donde $u \in U$ y $v \in V$, tiene asociada una función característica $\mu_{A \to B}(x, y)$ que toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Es decir, cada una de las reglas o proposiciones if-then es a su vez un conjunto difuso con su función característica que mide el grado de verdad de la relación de implicación entre x e y.

En lógica difusa el Modus Ponens se extiende a lo que se llama Modus Ponens Generalizado y que puede resumirse de la siguiente forma:

> *Premisa 1: "u es A^*", Premisa 2: "SI u es A ENTONCES v es B" y Consecuencia: "v es B^*"*

En dónde el conjunto difuso A^* no tiene por qué ser necesariamente el mismo que el conjunto difuso A del antecedente de la regla y el conjunto difuso B^* tampoco tiene por qué ser necesariamente el mismo que el conjunto difuso B que aparece en el consecuente de la regla.

Como vemos en lógica clásica una regla se ejecuta sólo si la primera premisa es exactamente la misma que el antecedente de la regla y el resultado de cada regla ejecutada es exacto al consecuente, en cambio en lógica difusa, una regla es ejecuta si existe un grado de similaridad distinto de cero entre la primera premisa y el antecedente de la regla y el resultado de la ejecución de la regla es un consecuente que tiene un grado de similaridad distinto de cero con el consecuente de la regla.

Así pues el Modus Ponens generalizado es una composición difusa en la que la primera relación difusa es el conjunto difuso A^* y que puede expresarse:

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in a^*1} \mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)$$

Teniendo en cuenta que, en las aplicaciones de la lógica difusa a la ingeniería la función característica de la implicación se construye con los operadores mínimos y producto, que además de ser los más simples conservan la relación causa-efecto.

7.4.2. Reglas difusas

Una regla difusa base es un conjunto de reglas SI-ENTONCES que pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$R^m : \text{Si } u_1 \text{ es } A_1^m \text{ y } u_2 \text{ es } A_2^m \text{ y } \ldots u_p \text{ es } A_p^m \text{ Entonces } v \text{ es } B^m$$

Y donde A_i^m y B^m son conjuntos difusos en $U_i \subset \Re$ (números reales) y $V \subset \Re$ respectivamente, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ y $v \in V$, y $x = x_1, x_2, \ldots, x_n \in U$ e $y \in V$ son los valores numéricos concretos de u y v, también respectivamente.

Vemos que esta regla tiene además la particularidad de que es un regla multi antecedente; este tipo de reglas, que combina varias variables en el antecedente, es el más utilizado en el diseño de sistemas difusos. Un sistema difuso estará formado por varias reglas difusas base con diferentes consecuentes, ya que una regla con multi antecedente y multi consecuente siempre podrá ser descompuesta en un conjunto de reglas base con multi antecedente pero un solo consecuente.

Existen dos caminos para obtener el conjunto de reglas correspondiente a un conjunto de datos numéricos:

- Dejar que los datos establezcan los conjuntos difusos que aparecen en los antecedentes y los consecuentes

- Predefinir los conjuntos difusos para antecedentes y consecuentes y luego asociar los datos a esos conjuntos

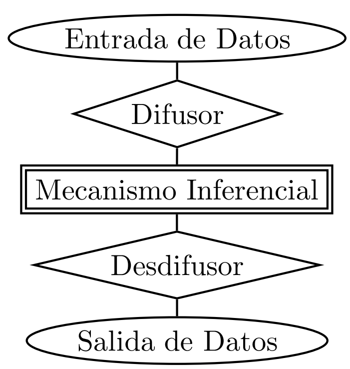
Para llegar a obtener el conjunto completo de reglas que modelan un problema se puede partir de considerar todas las combinaciones de reglas P_t que es posible establecer teóricamente, entre el número de antecedentes p y el número de conjuntos difusos de entrada A_p considerados para cada antecedente. Así, para cada consecuente, el número teórico de reglas posibles será:

$$P_t = \prod_n A_n \text{ para } n = 1, 2, \ldots, p$$

Sin embargo entre estas P_t reglas teóricamente posibles para cada consecuente, habrá algunas que no tengan sentido físico y otras que no se ajusten a las características del problema a resolver. Se deberá pues seleccionar, de entre todas las reglas posibles, el conjunto de reglas más adecuadas al problema que se considera.

7.5. Diagrama de Bloques de un Sistema Basado en Técnicas de Lógica Difusa

El esquema de un sistema basado en técnicas de lógica difusa se representa de la siguiente manera:



Está compuesto por los siguientes bloques:

BLOQUE DIFUSOR: bloque en el que a cada variable de entrada se le asigna un grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos difusos que se ha considerado, mediante las funciones características asociadas a estos conjuntos difusos. Las entradas a este bloque son valores concretos de las variables de entrada y las salidas son grados de pertenencia a los conjuntos difusos considerados.

BLOQUE DE INFERENCIA: bloque que, mediante los mecanismos de inferencia que veremos más adelante, relaciona conjuntos difusos de entrada y de salida y que representa a las reglas que definen el sistema. Las entradas a este bloque son conjuntos difusos (grados de pertenencia) y las salidas son también conjuntos difusos, asociados a la variable de salida.

DESDIFUSOR: bloque en el cual a partir del conjunto difuso obtenido en el mecanismo de inferencia y mediante los métodos matemáticos de desdifusión, se obtiene un valor concreto de la variable de salida, es decir, el resultado.

MECANISMOS DE INFERENCIA: Los mecanismos de inferencia son aquellos en los que se usan los principios de la lógica difusa explicados en el apartado para realizar un mapeo de los conjuntos difusos de entrada a los conjuntos difusos de salida. Cada regla es interpretada como una implicación difusa. Es decir, el bloque de inferencia es aquel en el cual se realiza la "traducción matemática" de las reglas difusas.

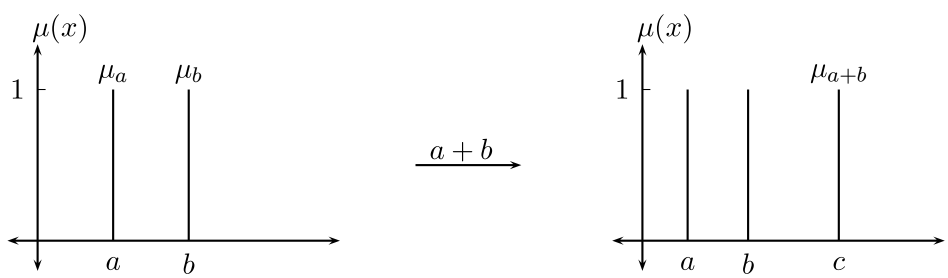
7.6. Números Difusos

La motivación de usar números difusos radica en aplicaciones del mundo real. Mediciones del mundo real son de naturaleza imprecisa y un número rígido no pueden describir este efecto de la manera más adecuada. Generalmente las mediciones son modeladas a través de un número rígido x para el valor más probable con un intervalo que describe la imprecisión. En el sentido lingüístico esto puede ser expresado como alrededor de x. Al usar conjuntos difusos podemos agregar esta información directamente. Esto resulta en números difusos los que son un tipo especial de conjuntos difusos que restringe los posibles tipos de funciones de membresía[6]:

- La función de membresía debe estar normalizada y singular (es decir, el núcleo es no vacío y único). Esto resulta en un punto ubicado dentro del núcleo modelando el número más probable de nuestro número difuso. El punto recibe el nombre de valor modal.
- además μ_A tiene que ser monótonamente creciente por la izquierda y monótonamente decreciente por la derecha del núcleo. El ancho del soporte indicará el grado de imprecisión.

Además necesitamos realizar cálculo como sumas, restas, multiplicación con los números difusos. Primero consideremos el caso clásico de sumar dos números: $c = a+b$, operación que se ilustran usando funciones de membresía para representar ambos números. Por lo tanto la función de membresía correspondiente a la suma, $\mu_c = \mu_{a+b}$, viene dado por:

$$\mu_{a+b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists y, z \in \Re : y + z = x \wedge \mu_a(y) = 1 \wedge \mu_b(z) = 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$



[6]Funciones que nos rotan de un valor de 0 a 1

En efecto, se define una función que asigna el grado de membresía de 1 sólo a aquellos puntos $x \in \mathfrak{R}$ al cual se puede encontrar los puntos $y, z \in \mathfrak{R}$ que también tienen el grado de pertenencia de 1 usando las funciones de membresía de a y b y, que sumados, satisfacen $y + z = x$. Como es esperado en el caso rígido, el resultado es un singleton[7] en el punto $a + b$. Para el caso difuso se utiliza el principio de extensión. Para un operador arbitrario $*$, se tiene:

$$\mu_{A*B}(x) = \max_{y,z \in \mathfrak{R}} \{\min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\} \mid y * z = x\}$$

esto significa que para un valor $x \in \mathfrak{R}$ el grado de pertenencia es obtenido el cual es el máximo de $\min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\}$ sobre todos los posible pares $y, z \in \mathfrak{R}$ tal que se cumple $y * z = x$.

En otras palabras, la nueva función de membresía asigna el máximo grado de pertenencia que puede ser alcanzado al encontrar la mejor combinación de parámetros en el dominio de $\mathfrak{R}$ de las variables involucradas.

7.7. Alguna Aplicaciones en nuestro entorno.

En realidad, la intención original del profesor Zadeh era crear un formalismo para manipular de forma más eficiente la imprecisión y la vaguedad del razonamiento humano expresado lingüísticamente, sin embargo causó cierta sorpresa que el éxito de la lógica borrosa llegase en el campo del control automático de procesos. Esto se debió básicamente al boom que la lógica borrosa causó en Japón, iniciado en 1987 y que alcanzó su máximo apogeo a principios de los noventa. Este boom fue el resultado de una estrecha colaboración entre el gobierno, las universidades y las industrias japonesas, estableciéndose dos proyectos nacionales a gran escala llevados a cabo por el Ministerio de Industria y Comercio (MITI) y la Agencia de Ciencia y Tecnología (STA) en consorcio con el LIFE, Laboratory for International Fuzzy Research, y en los que se involucraron más de 50 compañías durante seis años. Desde entonces, han sido infinidad los productos lanzados al mercado que usan tecnología borrosa, muchos de ellos utilizando la etiqueta fuzzy como

[7] Patrón que esta diseñado para restringir la creación de objetos computacionales

símbolo de calidad y prestaciones avanzadas. El control difuso ha sido aplicado con éxito en muy diversas ramas tecnológicas, por ejemplo la metalurgia, robots para la fabricación, controles de maniobras de aviones, sensores de imagen y sonido (sistema de estabilización de la imagen en cámaras fotográfica y de video Sony, Sanyo y Cannon), lavadoras (Panasonic y Bosch) que son capaces de autorregular la cantidad de jabón que requiere un lavado dependiendo del grado de suciedad de la ropa, aire acondicionado (Mitsubishi) en el que el sistema fuzzy evita las oscilaciones entre el exceso y el defecto de temperatura), rice-cooker capaces de elaborar diversas variedades de arroz regulando la cantidad de agua y la temperatura en cada caso para que el grano quede cocido y suelto, en automoción, sistemas de frenado ABS (Mazda y Nissan), cambio automático de Renault, control automático de velocidad que controla la frenada en casos peligrosos y selecciona la relación de marchas a partir del rendimiento del motor, climatizadores, fotocopiadoras (ajusta el voltaje del tambor a partir de la densidad de la imagen, la temperatura y la humedad), lavaplatos (ajusta el ciclo de lavado y enjuague a partir del número de platos y cantidad de comida adherida), ascensores (reduce el tiempo de espera a partir del número de personas), humidificadores (ajusta el contenido de humedad a las condiciones de la habitación), mejoras en imágenes médicas (ajustando el contraste en los bordes), sistemas de reconocimiento de escritura, hornos microondas (establece y afina el programa de energía y cocción), neveras (establece los tiempos de descongelación y enfriamiento en función del uso que se haga), televisores (ajusta el color de la pantalla y la textura de cada imagen), mecanismos de atraque automático de naves espaciales, sistemas automáticos de regulación de la cantidad de anestesia que se suministra a los pacientes en un quirófano -aunque bajo supervisión médica, por supuesto-, sistemas de concesión -o denegación- automática de créditos según el perfil económico del solicitante, etc... Estas son algunas de las muchísimas aplicaciones de la lógica difusa, que ya están funcionando en el campo de los llamados sistemas expertos. Todos estos sistemas utilizan información, esencialmente, imprecisa con el fin de lograr sus cometidos.

La lógica difusa está teniendo, por lo tanto, bastante éxito en su utilización sobre los sistemas de control, aplicación que ya podría considerarse como rutinaria. Sin embargo, los investigadores buscan nuevos campos de aplicación de esta técnica. Se investiga en áreas como el reconocimiento de patrones visuales o la identificación de segmentos de ADN, por mencionar dos ejemplos. Además, según algunos de los más prestigiosos investigadores en Internet, parece que el futuro para abordar la ingente cantidad de datos, recuperar la información, controlar y gestionar la red, pasa por el uso de las tecnologías borrosas. Esta intuición parece ser que coincide con la nueva orientación que, según el profesor Zadeh, debe seguir la lógica borrosa. Prueba de ello fue la celebración del primer encuentro sobre lógica borrosa e Internet en el año 2001 (FLINT 2001) en la universidad de Berkeley organizado por el propio Zadeh.

El empleo del enfoque Borroso también está relacionado con el nivel de coherencia dentro de una organización, evitando que se transforme en una organización dictatorial con imposiciones desde arriba. También los conceptos Borrosos poseen significado virtual que facilita un espacio para la extensión, elaboración y negociación y cataliza la creatividad humana y favorece la interdependencia y la necesidad mutua. Otra ventaja del uso de la Borrosidad en las interacciones sociales es que permite la ocurrencia del fenómeno de equivocaciones creativas. Estas se manifiestan cuando se comunican conceptos borrosos en una sociedad. Si A lleva un concepto borroso a B y B lo malinterpreta, o sea lo interpreta de manera diferente a como espera A, esto no destruye la comunicación sino que se amplía el significado virtual del concepto y se estimula así la creatividad de A. Entonces A y B se vuelven co-creadores del concepto. Así se facilita el flujo de interacciones sociales y la sobrevivencia y evolución de la sociedad como un todo. La existencia de Gránulos Borrosos en la Lógica Borrosa ayuda a trascender la dualidad entre el pensamiento diferenciador y el unificador. El primero que profundiza en los detalles de los fenómenos y el segundo que persigue la integración, sabiendo que el conocimiento disponible del todo es siempre “borroso”. Los fractales y los gránulos borrosos refuerzan la capacidad de los investigadores sociales para profundizar en los enigmas y paradojas de la complejidad social.

Finalmente la lógica difusa ayuda a las inteligencias humanas y de máquina a enlazar A con no A. Las matemáticas difusas nos permiten enlazar polaridades del tipo SI y NO, CAOS y Orden, Simplicidad y Complejidad, Palabras y Números, Subjetivo y Objetivo, Dentro y Fuera, Apego y Desapego. Y aunque aún no hemos logrado la metodología borrosa necesaria, estamos en caminos de llegar a trascender otras dualidades más profundas como “mío” y “tuyo”, “nuestro” y “de ellos”, “nosotros” y “ellos”, “yo” y “el otro”.

7.8. Función de la Lógica Difusa en la Vida Diaria.

El sistema Fuzzy Logic (Lógica Difusa), permite que todas las herramientas que están al alcance del ser humano sean de un gran beneficio, ya que es el primordial sistema utilizado en la inteligencia artificial.

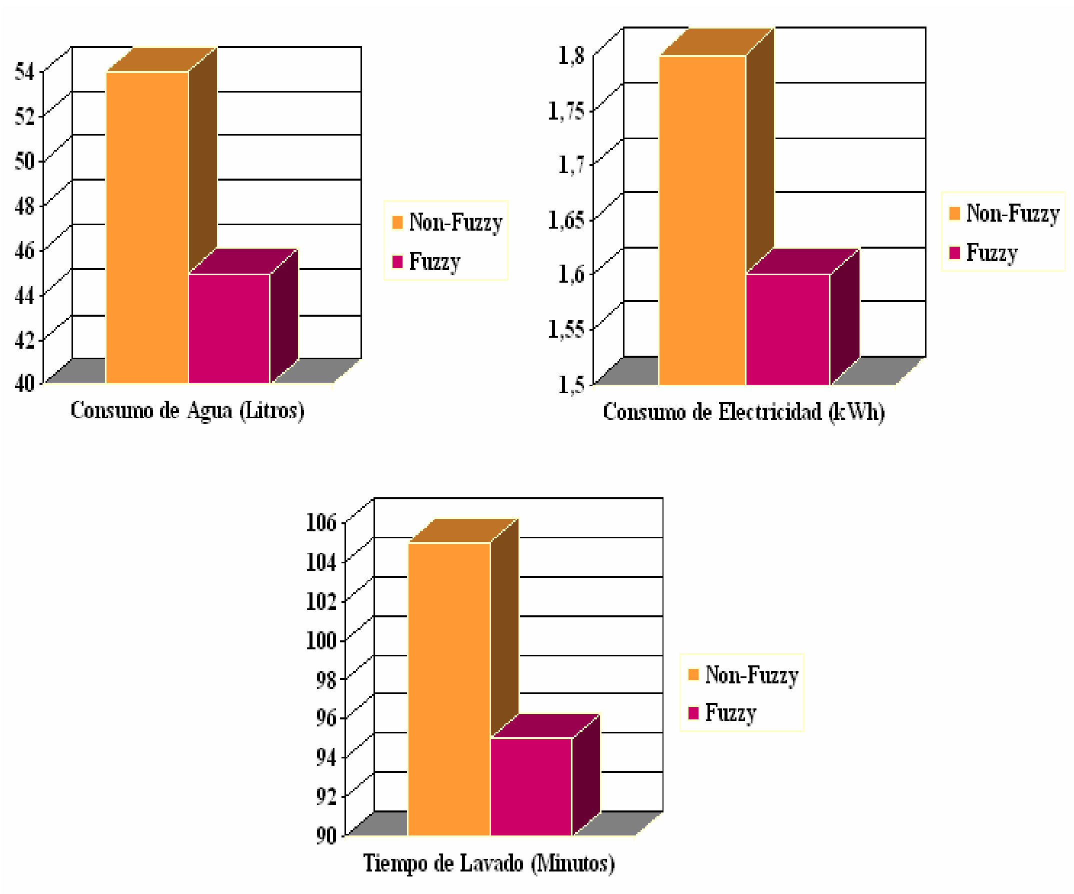
Son muchas las aplicaciones en donde se maneja este sistema útil para el ser humano pero se presentará solo dos ejemplos:

- Lavadoras digitales con sistema Fuzzy Logic
- Duchas con el programa Fuzzy Logic

En las duchas con Fuzzy Logic, deja saber el calor corporal del cuerpo y así mismo, medir el aumento del agua que se debe utilizar en el transcurso del baño y la temperatura del agua a salir del grifo, este sistema de inteligencia artificial funciona por medio de sensores de calor y al mismo tiempo sensores de peso.

En las lavadoras digitales que manejan más de 150 ciclos para el lavado de ropa, la técnica “Fuzzy Logic” admite que ciclos es el adecuado dependiendo del material y la cantidad de la ropa. Este sistema funciona por medio de inteligencia artificial que consiente en obtener el peso y la calidad de ropa, es decir que la lavadora selecciona el ciclo de lavado por medio del peso y también calcula la cantidad de agua y detergente necesario para el lavado.

Por medio de este sistema se puede obtener un gran beneficio para el medio ambiente ya que, consume la menor cantidad de bienes (agua, tiempo, electricidad y productos de limpieza).



CAPÍTULO 8

Lógica Paraconsistente

El término paraconsistente fue acuñado por el conocido filósofo peruano Francisco Miró Quesada, a petición de Newton da Costa, en el Tercer Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática en Campinas Brasil (1976). Aclaremos, a nuestro parecer, cuál sería la acepción correcta del término paraconsistente. Señalemos las distintas acepciones que tiene el prefijo *para*.

1. Contra, como en paradoja (En contra del sentido común).
2. Más allá de, como en paranormal.
3. Muy similar, como en paramilitar.

Es así que tal vez esta última acepción sea la más indicada en el significado del prefijo para dentro del término paraconsistente. Sin embargo, en el paso del tiempo dentro de la comunidad académica no se ha logrado una total satisfacción con el uso de este término. Así por ejemplo en el II WCP3 se defendió por un amplio grupo participante que tal vez es más apropiado el término parainconsistente. Además recientemente se ha usado el nombre de lógicas de la inconsistencia formal.

8.1. Historia de la Lógica Paraconsistente

Desde el punto de vista de algunos autores, la lógica paraconsistente es algo relativamente nuevo y que no necesariamente depende o se origina de una motivación filosófica, sino tal vez de una práctica o matemática, llamándole así al hecho de querer formular teoría que lidien con contradicciones pero eviten la trivalente. Otros consideran que la paraconsistencia tiene orígenes que remota a la antigua Grecia. Más aún, el primer grupo de autores parece estar inconforme en general con el trabajo del segundo. En vista de ambas corrientes, aquí las sintetizamos muy brevemente para ofrecer un panorama más completo.

La lógica formal mas antigua formula silogismos de Aristóteles, que no son explosivos y donde incluso se consideran que algunos silogismos con premisas inconsistentes o contradictorias son válidas. Parece ser que hasta el siglo XII que hace aparición el principio de explosividad, gracias al lógico francés Willian de Soissons. Y en el siglo XIX que la *negación Booleana* fue promovida e incorporada a lo que hoy se conoce como *lógica clásica*.

La historia de la lógica Paraconsistente ha tenido cuatro etapas, todas ellas en el siglo XX. En la primera, de 1910 a 1963 se encuentran trabajando con los de **Lukasiewicz** (1910, quien analizó el trabajo de Aristóteles en relación al principio de contradicción, encontrando que el argumento que lo sustenta no es valido), **Vasiliev** (1910, que visualizó la creación de la lógica "imaginaria o no-aristotélica") y finalmente **Jaskowski** (1948, que creo el primer calculo proposicional paraconsistente, el cual debía cumplir con ciertos requisitos).

El siguiente periodo comprende de 1963 a 1976. En él la lógica paraconsistente es reconocida como objeto de estudio sistemático. De éste periodo los trabajos más importantes está el de da Coste, quien sin conocimiento de los trabajos del periodo anterior se encontró en la fomulación de un calculo proposicional paraconsistente que, entre otros requisitos, tuviera las más características clásicas posibles y a partir del cual fuera fácil formular un cálculo de predicados.

Esté cálculo proposicional fue C_1 y la familia C_n (a la cual pertenece la lógica C_w). La primera aparición de este cálculo fue como sistema formal en 1963.

La tercera etapa es de 1967 a 1991. Aquí, la filósofo Miró Quesada, motivado por da Costa, acuña el término *paraconsistente* para referirse a esta familia lógica. Además, en los 80 surge un interés por ellas, especialmente en el campo de la inteligencia artificial.

La etapa de 1991 al presentar está caracterizada por la aceptación por parte de la comunidad matemática como un área de estudio y se crea una sección especial para la revista *Mathematical Reviews*.

8.2. ¿Qué es la Lógica Paraconsistente?

La característica fundamental de la paraconsistencia es proveer teorías inconsistentes no triviales. En la búsqueda de este objetivo es necesario desarrollar lógicas subyacentes que sean tolerantes a ciertas inconsistencias.

En esta apreciación pensaremos la inconsistencia como un fenómeno primario, mientras que la paraconsistencia es derivada. Por este motivo el término "paraconsistencia" califica una propiedad de la lógica y no de la teoría, así como el término "inconsistente" califica la teoría y no a la lógica. Sin embargo, es usual encontrar en la literatura errores en ambas direcciones. Se puede concluir que las lógicas paraconsistentes exhiben formalmente maneras de "controlar" ciertas contradicciones.

En la lógica clásica, de una contradicción se deducen todas las proposiciones, es decir, si al modelar cualquier teoría con la lógica clásica, aparece una contradicción entonces se infieren todas las proposiciones de tal teoría. Este hecho usualmente se abrevia diciendo que la teoría se vuelve trivial. Así es comprensible el pavor a las contradicciones y el afán por eliminarlas.

En la inteligencia artificial, donde es frecuente que en una base de conocimiento se tenga alguna inconsistencia “local”, que bien podría considerarse “irrelevante” en vista del conjunto total de información contenida. ¿Que es lo razonable? Seguir sacando conclusiones interesantes. Pero la lógica clásica la vuelve trivial. Más específicamente, en consultas técnicas con distintos expertos éstos suelen no coincidir sobre un mismo aspecto del conocimiento del dominio. Por ejemplo en una base de datos de diagnóstico médico, se encuentra con la siguiente información; a partir de síntomas observados, dos distintos especialistas consignan opiniones contrarias. Obviamente no hay que eliminar la base de datos, ni tampoco dichas opiniones; por el contrario, es muy importante para el paciente en cuestión, quizás eso sugiera por lo menos consultar una tercera opinión. Esta ligera justificación es una invitación a desarrollar nuevas lógicas donde no aparezca el límite de la no contradicción, al menos en un sentido tan fuerte.

8.3. La Lógica Paraconsistente en Latinoamérica

En algunos países de Latinoamérica y en forma preponderada en Brasil viene gestandose desde hace unos treinta años un cultivo cada vez mayor de la lógica pudiendo afirmarse hoy que en nuestro continente existe un nivel de investigación que puede compararse con el de los grandes centros internacionales. Brasil ha recibido en el correr de esos años visitas de esos lógicos tan encumbrados como **W. V. Quine, Alfred Tarski** y **J. Shoenfleld** por solo citar algunos de ellos.

Hoy día existe en la Universidad de San Pablo y Campinas, un grupo de lógicos de relevancia internacional. Dicho grupo ha sido formado y orientado por el brasileño **Newton Da Costa**, uno de los más importantes de Brasil y una de las personas que más a contribuido con el estudio y el desarrollo de la lógica en Latinoamérica. El profesor Da Costa, es además, uno de los fundadores de la Lógica Paraconsistente y autor de diversos artículos de libros como “Ensayo sobre los fundamentos de lógica” e “Introducción a los fundamentos Matemáticos”.

Según Da Costa este grupo de investigación de lógica se dedica principalmente al estudio de las llamadas lógicas no clásicas o heterodoxas, es decir, que no admiten alguno de los tres "Grandes Principios" de identidad, de no contradicción y de tercer excluido (como por ejemplo, las lógicas modal, polivalente, paraconsistentes e intuicionista). Pero también son cultivadas otras áreas clásicas, tales como los fundamentos de la teoría de conjuntos, la teoría de los modelos, la lógica algebraica, entre otras.

> *Hace más o menos* 25 *años que lucho por el desarrollo de la lógica en Brasil y, en general, en América Latina, dice Da Costa*

Hoy en día el grupo brasileño ha realizado muchas cosas importantes que se han proyectado a nivel internacional. Sus integrantes publican regularmente en revistas de reputación internacional y han contribuido para la realización de congresos que marcarán épocas no sólo en Brasil, sino también en América Latina. Por otra parte el grupo ha contribuido para el progreso de la lógica y disciplinas correlacionadas, mereciendo sus trabajos referencias provenientes de los grandes centros de lógica.

Todo lo realizado por el grupo a mano de Da Costa no ha sido fácil ya que al principio tuvieron que luchar contra el atraso cultural de toda América Latina y mas aún de Brasil. Sin embargo los obstáculos fueron cediendo, al menos en Brasil, y hoy las cosas van por muy buen camino y pintan un futuro mejor.

8.3.1. Perspectiva Latinoamericana acerca de la Lógica Paraconsistente

La Lógica Paraconsistente en Latinoamérica se ha desarrollado en Brasil y se trabaja sobre tres áreas fundamentales:

1. La lógicas no clásicas, en esencia la lógica paraconsistente.
2. La teoría de los reticulados.
3. La teoría de los operadores que forman términos ligados variables.
4. Los fundamentos de la teoría de las categorías.

5. Lógica Inductiva y probabilidad.

6. Filosofía de las ciencias formales (Lógica y Matemática) y la filosofía de las ciencias empíricas.

En lo referente a la lógica paraconsistente, es una especie de lógica no clásica cuyos precursores fueron el filósofo **N. A. Vasilev** y el lógico polaco J. Lukasiewicz, los cuales publicaron trabajos sobre el tema en 1910. Tal vez hasta Aristóteles puedan ser considerados como un precursor de este tipo de lógica. Sin embargo, es solamente entre 1948 y 1958 que tal lógica fue creada como disciplina autónoma en forma independiente por **S. Jaskowski** y **Newton Da Costa**.

La lógica paraconsistente es una especie de lógica en la cual se pueden fundamentar teorías que encierran contradicciones, lo cual no puede ser hecho por medio de la lógica clásica ni con auxilio de varias de las lógicas no clásicas existentes como, por ejemplo, la lógica intuicionista.

La posibilidad de esta lógica es de extraordinaria relevancia para la filosofía, pues pone en evidencia, contrariamente a una creencia milenaria, que la existencia de contradicciones, por si sola, no es suficiente para destruir la racionalidad de un discurso o para refutar una teoría. Sin embargo debe quedar claro que, para la lógica paraconsistente, hay proposiciones que satisfacen los requerimientos de la lógica clásica y que por consiguiente no pueden ser juntamente con sus negaciones simultáneamente verdaderas. El hecho de que algunas contradicciones son permitidas no acarrea que todo sea contradictorio.

Sorprendentemente, ésta da origen a una matemática mucho más fuerte que la matemática común, en particular, algunas teorías paraconsistentes de conjuntos son más fuertes que los sistemas tradicionales. La lógica paraconsistente se ha desarrollado mucho en los últimos años encontrando numerosas aplicaciones, especialmente en filosofía.

8.3.2. Notables Desarrollos en los últimos años en Latino América sobre la Lógica Paraconsistente.

El desarrollo de la lógica paraconsistente en América Latina ha sido muy notable en los últimos 30 años. El mayor progreso en este momento se da en Brasil con los grandes aportes a la lógica paraconsistente que le da más evolución y permite la elaboración de teorías inconsistentes para sistemas lógicos.

También hay grupos importantes en Chile liderados por el profesor **Rolando Chuaquí**, en Venezuela y en Argentina.

8.4. La Lógica de Da Costa

Las lógicas desarrolladas por Newton da Costa, en sus propios términos, en rasgos generales obedecen a los siguientes lineamentos:

1. El principio de no contradicción, $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, en general, no debe ser válido.
2. De dos fórmulas contradictorias, α y $\neg\alpha$, en general, no debe existir la posibilidad de deducir una fórmula arbitraria.
3. Mantener los esquemas y reglas de deducción del cálculo clásico que no interfieran con las dos condiciones anteriores.

8.4.1. Axiomas y Reglas

$\rightarrow 1\ \ A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$\rightarrow 2\ \ (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\rightarrow 3\ \ A, \dfrac{A \rightarrow B}{B}$

$\wedge 1\ \ A \wedge B \rightarrow A$

$\wedge 2\ \ A \wedge B \rightarrow B$

$\wedge 3$ $A \to (B \to (A \wedge B))$

$\vee 1$ $A \to A \vee B$

$\vee 2$ $B \to A \vee B$

$\vee 3$ $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

$\vdots$

CAPÍTULO 9

Lógica de Pierce

Las ciencias sociales siguen viendo a **Charles Sanders Peirce** como el padre de la semiótica, como el fundador del pragmatismo o el creador del pragmaticismo y no como un lógico, como sí pasa en las ciencias naturales, especialmente en el área de la inteligencia artificial y en lingüística computacional. Para estas áreas la lógica de Peirce es fundamental porque permite crear nuevas ideas, lo cual no pasa con las lógicas tradicionales, la deducción y la inducción, puesto que éstas realizan recorridos tautológicos (Lógica Aristotélica).

Otro caso es el de cierta Comunicación, en especial cuando, desde esta disciplina se pretende ver a Peirce como un recurso para explicar las imágenes, para ello se acude a la tríada: icono, índice y símbolo pensándola en términos autónomos y valida por sí misma. Nuevamente se vuelve a caer en un error, porque como sabemos la tríada no es suficiente en sí misma y por tal razón apela a un mecanismo lógico que desprende el conjunto de los signos al interior de eso que llaman “la tabla de categoría de Peirce”[1]. La tabla de categorías se refiere no a categorías autónomas a saber: cualisigno, sinsigno y legisigno; icono, índice y símbolo; rema, dicente y argumento, sino a nueve ámbitos categorizados que están siempre en relación lógica y que desprenden diez momentos, es en el décimo momento donde se encuentra la capacidad de significar un objeto del mundo, porque en la décima relación se da eso que Peirce llama hábito o argumento. Como vemos el trabajo de significación es un recorrido lógico y se alcanza hasta el argumento, por eso significar algo es argumentar sobre ese algo con bases lógicas.

Peirce desarrolla una nueva lógica criticando a Aristóteles, a Duns Escoto, a Kant, y a Léibniz, entre otros lógicos. Para Peirce el silogismo que se encuentra desde Aristóteles no aporta conocimiento. Aristóteles en una obra que todavía hoy es fundamental, el famosos libro cuarto de la Metafísica, crea las condiciones del conocimiento, pero también abre la duda sobre su veracidad.

En la lógica de Pierce intervienen cuatro tipos de juicios para procesos lógicos:

- Cantidad.
- Cualidad.
- Relación.
- Modalidad.

que a su vez se descomponen en universales. Cuando convertimos estos juicios en categorías tenemos:

- unidad, pluralidad y totalidad.
- realidad, negación y limitación.
- sustancia, causalidad y comunidad o acción recíproca.

[1]Peirce elabora su propia tabla de las categorías, distinta de la aristotélica y la kantiana, aunque inspirada en una parte de esta última. Sólo admite tres categorías, las de primeridad, segundidad y terceridad.

- posibilidad, existencia y necesidad.

Como son doce categorías las de Kant, mientras que en Perice encontraremos solamente diez[2], pero en una relación de categorías que obedecen a tres momentos, primeridad, segundidad y terceridad, las cuales pertenecen al nivel de la gramática, de la lógica y de retórica, respectivamente.

Así, para Peirce la lógica que propone Kant tampoco aporta conocimiento, porque lo único que hace es una construcción con base a una premisa mayor y con base a una premisa menor, la famosa deducción, o el caso contrario a partir de una premisa menor construir una premisa mayor, es decir, la inducción. En la deducción tenemos un razonamiento analítico o explicativo, mientras que en la inducción tenemos un razonamiento sintético o ampliado, aparentemente agrega algo nuevo, pero no es así. En la única lógica donde sí se agrega algo nuevo es en la lógica de Peirce, es decir, en la abducción (base de la lógica de Pierce).

El pensamiento de Pierce en términos de regularidad, es la regulación que conduce a la predicción, por eso los signos son parte de una lógica de la investigación y no de una semiótica. Los signos permiten construir hipótesis, son parte de la abducción, así la semiótica en Peirce, si hay tal cosa, es quizá un camino, es por tanto un modelo metodológico y se inserta dentro del debate de construcción de conocimiento. La lógica sería para los que consideran a Peirce como semiótico parte de esta disciplina y estaría antecedida por la gramática y le seguiría la retórica. Sin embargo, gramática, lógica y retórica no apuntan solamente a la constitución de la semiosis sino que articula un proyecto de creación de conocimiento.

Así, para Peirce un signo es "Cualquier cosa que determina a otra cosa (su interpretante) a referirse a un objeto al cual ella también se refiere (su objeto) de la

[2]Pierce toma de Kant, a saber, de las categorías de posibilidad, actualidad y necesidad, aunque también parecen concordar con las de cualidad, modalidad y relación. "De las de Aristóteles dice haber dedicado a su estudio lógico los dos años más laboriosos y apasionados de su vida a pesar de no haber podido llegar a ninguna aserción al respecto. Le valora haber explicitado dos modos de ser-potencia-acto y sus análogos, materia-forma- pero más aún, haber vislumbrado en la "entelequia" un tercer modo de ser que lamentablemente no desarrolla". También estudió las categorías de Hegel, pero no las acepta; con todo, asegura que sus categorías coincidirían con los modos hegelianos del pensamiento: tesis, antítesis y síntesis.

mima manera, deviniendo el interpretante a su vez en signo y así sucesivamente ad infinitum”[3]

Para **Charles Sanders Peirce** muestra una propuesta donde problematiza no solamente el universo aristotélico, escolástico o kantiano sino que lo trata de superar y agrupa el problema en tres ámbitos, el de la lógica, el de la ética y el de la estética. En esta propuesta donde Pierce plantean algunos elementos teóricos, ciertos autores la han llamado “Lógica de las afecciones” y una “Fenomenología”, y separarlo del ámbito de la semiótica, en el cual ha estado durante más de medio siglo. Para ello nos parece necesario señalar los diferentes momentos del pensamiento de Peirce.

En los años de 1868 a 1878 cuando Peirce gozaba entre los 29 y 39 años de edad, decía que Kant se equívoca, en su teoría del conocimiento, porque sólo toma dos momentos: calidad y relación, es decir, sujeto y predicado. Para Peirce es necesario un tercer elemento que en Kant no encontramos, y ese elemento es la terceridad o representación que no recae en un yo sino en una potencialidad de un yo que se hace patente y se fija momentáneamente en un aquí y ahora.

Para Pierce entre sus 46 y 75 años de su vida abre la reflexión sobre una nueva lógica. Se trata de un proyecto al que denomina de distintas maneras, por unos momentos lo llama “lógica objetiva”, “retórica especulativa” y “gramática especulativa”.

9.1. La Abducción y su Formación como Lógica

Según Peirce, tal como aparece aquí planteado, la lógica, en su sentido general, es uno de los nombres, una de las ramas de la semiótica, la doctrina cuasi-necesaria o formal de los signos. Es la ciencia de lo que es cuasi-necesariamente verdadero de los representámenes de cualquier inteligencia científica para que puedan ser válidos para algún objeto, esto es, para que puedan ser ciertos. Vale decir, la lógica

[3]Peirce, Charles Sanders, *La ciencia de la semiótica*, Buenos Aires, Nueva Visión 1974, pag. 59.

propiamente dicha es la ciencia formal de las condiciones de verdad de las representaciones. Para él, uno de los dos objetivos fundamentales de la lógica debería ser extraer toda la posible y esperable uberty[4] -o valor de productividad- de los tres tipos canónicos de razonamiento, a saber: deducción, inducción y abducción o retroducción. Sobre este último término, abducción, Peirce lo denominará alternativamente retroducción o inferencia hipotética[5]. Su feracidad, uberty o valor de productividad, aumenta a medida que su certidumbre disminuye. Respecto de los tres tipos canónicos de razonamiento, conviene detallar sus diferencias:

La Deducción: "Depende de nuestra confianza en la habilidad para analizar el significado de los signos con los que, o por medio de los que, pensamos". El diccionario de la **Real Academia Española**, dice al respecto: *"Deducir: sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto. Inferir, sacar consecuencias de una cosa. Rebajar, restar, descontar alguna partida de una cantidad. Alegar, presentar las partes sus defensas o derechos"*. Por otra parte, según el Diccionario de Filosofía Abreviado de **J. Ferrater Mora**, *"es un proceso discursivo descendente que pasa de lo general a lo particular"*. Según Peirce, *es el paso mediante el cual se llega a las consecuencias experimentales necesarias y probables de nuestra hipótesis.*

La inducción: "Depende de nuestra confianza en que el curso de un tipo de experiencia no se modifique o cese sin alguna indicación previa al cese". El diccionario dice: *"Inducir: instigar, persuadir, mover a uno. Ocasionar, causar. Ascender lógicamente el conocimiento de los fenómenos, hechos o cosas, a la ley o principio que virtualmente los contiene o que se efectúa*

[4]Uberty es, como nos informa Thomas Sebeok, un vocablo casi desaparecido en el inglés moderno, y equivale a fecundidad, fertilidad, capacidad fructífera, abundancia o aproximadamente a lo que los italianos suelen llamar ubertá (cualidad de ubérrimo).

[5]El concepto de abducción no es en verdad para nada nuevo, podemos encontrarlo ya en Aristóteles: el los Analíticos, podemos encontrar esta compleja definición: La abducción tiene lugar cuando es cierto que el primer término es atribuido al medio, y es incierto que el medio lo es al último, por más que esta menor sea tan creíble y, si se quiere, más creíble que la conclusión. Además, la abducción tiene lugar cuando los intermedios del último extremo y del medio son menos en número; porque entonces de estas dos maneras se está más cerca de saber. Ver Analíticos Primeros, capítulo 25.

en todos ellos uniformemente. Producir un cuerpo electrizado fenómenos en otro situado a cierta distancia de él". En Peirce, es el nombre que él da a las pruebas experimentales de la hipótesis.

La abducción: Depende de nuestra esperanza de adivinar, tarde o temprano, las condiciones bajo las cuales aparecerá un determinado tipo de fenómeno. El diccionario dice: *Abducción: silogismo en que la premisa mayor es evidente y la menor menos evidente o solo probable. Movimiento por el cual un miembro u otro órgano se aleja del plano medio imaginario del cuerpo".* Para Peirce, el lugar de la abducción en el método científico es *"meramente preparatorio"*, constituye el paso de adoptar una hipótesis o una proposición que conduzca a la predicción de los que, aparentemente, son hechos sorprendentes.

Para ilustrar estos tres tipos de razonamiento, Peirce utiliza el conocido ejemplo de *la bolsa de porotos*. Al desarrollo de cada uno de ellos lo llama "argumento". Debe observarse que todo argumento expresado, por ejemplo, como silogismo, es en sí mismo un signo "cuyo interpretante representa su objeto como un signo ulterior a través de una ley, es decir, la ley de que el paso de tales premisas a tales conclusiones tiende a la verdad". Podemos agregar algunas consideraciones más acerca de este término: "argumento", es un razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición o bien para convencer a otro de aquello que se afirma o se niega.

Vayamos a la bolsa de porotos de Peirce, y los distintos argumentos que constituyen los tres tipos de razonamiento. Cada argumento está compuesto, a su vez, de tres proposiciones: caso, regla y resultado, en tres permutaciones que producen respectivamente las tres figuras que expone el ejemplo:

Deducción:

- Regla: todos los porotos de esta bolsa son blancos.
- Caso: estos porotos son de esta bolsa.
- Resultado: estos porotos son blancos.

Inducción:

- Caso: estos porotos son de esta bolsa.
- Resultado: estos porotos son blancos.
- Regla: todos los porotos de esta bolsa son blancos.

Abdunción:

- Resultado: estos porotos son blancos.
- Regla: todos los porotos de esta bolsa son blancos.
- Caso: estos porotos son de esta bolsa.

Por lo anterior Pierce concluye mas claramente que la abducción es realmente un razonamiento sintético, porque agrega algo nuevo, a partir de una hipótesis, que como tal es probable. Pero, ¿cómo se logra la abducción? Para Peirce se llega con una vía de retroceso, por eso también la llama retroducción o razonamiento hacia atrás. Hay algo en el mundo que llamamos signos y que nos posibilitan construir nuevas ideas, sin que necesariamente estos signos estén contenidos en la observación, por eso es importante el tiempo y la imaginación, es decir, la memoria y el futuro, que puede traer cosas del pasado y proyectarlas creando una conjetura o abducción.

La abducción es un proceso de creación de hipótesis donde interviene la observación pero la información que se encuentra en esta observación se ha autonomizado, se trata de crear hipótesis a partir de asociaciones de lo que se percibe con lo que se percibió, como vemos en la construcción de hipótesis el tiempo es fundamental, por eso en la lógica de la abducción, la información o los datos de la percepción no bastan para crear ideas nuevas, estas se crean a partir de la adivinación. Por eso es importante la imaginación que es la parte creativa del trabajo científico, por tanto, las hipótesis o la abducción, se logra a partir de la adivinación, adivinar e inferir son dos conceptos radicalmente diferentes, cuando Peirce propone salir de las lógicas tradicionales y entrar a una tercera lógica, se sitúa en un proceso si bien no de derivación propiamente hablando sí de inferencia. La abducción es un argumento y se da en la acción, actuar equivale a descifrar, comprender o simplemente hacer inteligible un conjunto de signos. De esta manera, la acción no presupone un conjunto de ocurrencias o de intuiciones, por el contrario la acción presupone un proceso lógico.

Por último, un ejemplo del modo de profundizar en la riqueza y uberty del concepto de abducción lo podemos encontrar en el artículo de **Umberto Eco**, *"Cuernos, cascos, zapatos: algunas hipótesis sobre tres tipos de abducción"*. Allí él propone, en realidad, cuatro tipos:

a) Hipótesis o abducción hipercodificada, en donde la regla "viene dada de manera automática o semi-automática".

b) Abducción hipocodificada, cuando la regla "debe seleccionarse entre una serie de reglas equiprobables puestas a nuestra disposición por el conocimiento corriente del mundo".

c) Abducción creativa, allí donde "la ley tiene que ser inventada **ex novo**", tomando como ejemplo los descubrimientos "revolucionarios" que cambian un paradigma científico establecido.

d) Meta-abducción, que "consiste en decidir si el universo posible delineado por nuestras abducciones de primer nivel es el mismo que el universo de nuestra experiencia".

La meta-abducción es originada de otras abducciones -las cuales no han sido previamente verificadas-, y que se basa en "apostar por el resultado final sin aguardar las verificaciones intermedias". Aquí puede entenderse porqué Peirce sostiene que cuanto más nos alejamos de la certidumbre de la regla, aumentará en forma proporcional el valor de productividad de la abducción, acercándonos de este modo al sentido más afinado de este concepto: "la abducción, a fin de cuentas, no es otra cosa que intentar adivinar".

9.2. Teoría de los Signos

La filosofía de Peirce se llama a veces filosofía **pragmática**, donde se toma al pragmatismo más que como una teoría del significado o un método de análisis de las concepciones. Combina la vertiente de Peirce del empirismo con el método científico y el proceso de orientación del evolucionismo darwiniano -junto al giro teleológico aristotélico- en un amplio programa filosófico. Es una filosofía en la que el propósito aparece para tomar el sitio en Peirce que tiene la intencionalidad para Brentano. La marca de la inteligencia, en la perspectiva de Peirce, es el propósito, y el propósito está siempre vinculado a la acción. El pragmatismo de Peirce puede verse entonces como una filosofía práctica: "Los elementos de cada concepto entran en el pensamiento lógico por la puerta de la percepción y salen por la puerta de la acción propositiva; y cualquiera que no pueda mostrar su pasaporte en alguna de estas dos puertas deberá ser arrestado y desautorizado por la razón".

El pragmatismo, sin embargo, se centra en el propósito intelectual, que podría parecer que acompaña sólo una parte del conjunto de una semiótica posible. Consecuentemente, el pragmatismo puede ser estrechado o aplicado a sólo una parte de la teoría de Peirce de los signos. Quizás es mejor describir su filosofía como una filosofía semiótica.

> *"Un signo, o representamen, es una cosa que está en lugar de otra para algien, en algún sentido o capacidad. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás mas desarrollado."*
>
> **(Citado por Pierce, 1897, "División of Signs")**

Según **David Savan**, Peirce es un idealista semiótico. Distingue entre dos formas de idealismo semiótico: una variada mezcla que sostiene que cualquiera de las propiedades, atributos o características de cualquiera cosa que existe depende del sistema de signos, representaciones o interpretaciones a través de las cuales significan y una firme variedad que sostiene la existencia de todo depende de los sistemas de signos, representaciones e interpretaciones que se proponen para referirse a ello.

Savan sostiene que Peirce es una mezcla de semiótico con idealista.

Según **Thomas Short**, por otra parte, Peirce es un realista semiótico. La teoría de Peirce de los signos, más que ninguna otra de sus teorías, es la que más llamó la atención en los años recientes. Fue un crecimiento de diversos factores e influencias incluyendo, quizás primariamente, su estudio de y la reacción de Schiller pero especialmente Kant; su estudio de la lógica, sobre todas las lógicas de Morgan y Boole (y también las de Aristóteles y los lógicos medievales); su reacción frente a Darwin y la idea de evolución, y finalmente, la creciente abstracción en matemáticas, quizás especialmente el desarrollo de la topología y la geometría no Euclídea. A partir de todas estas influencias Peirce adquirió nuevas perspectivas y nuevas direcciones que lo llevaron a caminos nunca antes transitados. Pero, más que ninguna otra cosa, fue su descubrimiento que su concepción del signo podía resolver algunos problemas filosóficos que lo convencieron de la importancia de resolver el problema de los signos. Luego de rechazar ciertas restricciones kantianas acerca de lo que podían o no ser representado, él se dedicó a sostener una investigación acerca de la representabilidad, y estudió entre otras cosas, las concepciones de Dios, la matemática infinita, la totalidad, inmediatez y necesidad. Como resultado de estas investigaciones Peirce desarrolló dio forma a sus ideas semióticas, y con el añadido de ciertas concepciones fenomenológicas (quizás tomas de Schiller) llegó a la conclusión que "toda conciencia es signo de conciencia" y que estudiando signos uno se encuentra "con cualquier cosa que pudiera ser un tema de tratamiento y preocupación filosóficos". Creyendo que en semiótica tenía un mejor fundamento para la filosofía que en la epistemología tradicional, Peirce trabajó expandiendo su investigación hacia una teoría general de los signos, y luego, considerando que el universo debe ser visto como un universo de signos (o semiosis) para ser posible, construyó un marco semiótico para sus trabajos filosóficos mayores.

En su forma más abreviada, la teoría de los signos de Peirce puede describirse de la siguiente manera. Un signo es algo que está en lugar de algo para algo. Lo que el signo está en lugar de su objeto, lo que está para quien es su interpretante. La relación con el signo es fundamentalmente triádica o triada (elimina ya el objeto o el interpretante y aniquila el signo). Esta era la clave de la perspectiva semiótica de Peirce, y lo que lo diferencia de la mayoría de las teorías de la representación que tratan de dar sentido a los signos (representaciones) que se relacionan sólo a los objetos.

Cuando su teoría evolucionó, llegó a distinguir entre diferentes clases de objetos e interpretantes. Cada signo tiene dos objetos, un objeto dinámico, "el objeto realmente eficiente pero no como objeto inmediatamente presente", y un objeto inmediato, "el objeto como signo que lo representa". Y cada signo tiene tres interpretantes, un interpretante final (o lógico) que es el "efecto que debería producirse en la mente por el signo después de un desarrollo suficiente de pensamiento", un interpretante dinámico, que es el efecto "realmente producido en la mente", y un interpretante inmediato que es el "interpretante representado o significado en el signo". Si consideramos la relación del signo con su objeto dinámico, encontraremos que es como su objeto (un icono), que tiene una conexión real, existencial con su objeto (un índice), o que está relacionado con su objeto por una convención o hábito (un símbolo). Si consideramos la relación del signo con su interpretante final -como el signo es interpretado- aparecerá como signo de posibilidad (rhema), como signo de existencia actual (decisigno) o como signo de una ley (argumento). Dado que cada signo es algo en sí mismo, tiene una relación con su objeto y representa a su objeto de alguna manera, estas divisiones pueden utilizarse para vincular a otras clasificaciones de signos que hacen más distinciones que la mayoría de las otras teorías.

Este esquema de la teoría de los signos de Peirce se centró en Gramática Especulativa, Lógica Objetiva o Crítica y Retórica Especulativa.

9.2.1. Gramática Especulativa

La Gramática Especulariva de Pierce es una detallada y compleja clasificación de los signos, pero la parte central de la misma es la descripción de la relación semiótica y ésta es en sí misma, una clasificación de signos: El interpretante es un signo y el objeto, al menos de forma frecuente, también es un signo.

En palabras mas claras, la gramática especulativa considera "qué sentido y cómo puede haber una proposición verdadera o falsa y cuáles son las condiciones generales a las que el pensamiento o los signos de cualquier clase deben conformarse para afirmar cualquier cosa". El filósofo que se concentra en esta rama de la semiótica investiga la relación representación (singos), busca trabajar las condiciones necesarias y suficientes para representar, y clasifica los diferentes tipos posibles de representación. La Gramática Especulativa se presenta a menudo como si fuera la totalidad de la semiótica de Peirce, quizás porque es donde se encuentran algunas de sus más conocidas tricotomías[6].

9.2.2. Lógica Objetiva o Crítica

La lógica crítica es el estudio de las condiciones necesarias para que los signos puedan decirnos algo verdadero de los objetos que representan, es decir, "intentar discernir aquellas condiciones sin cuyo cumplimiento los signos no serían signos del objeto intencionados, esto es, no serían verdaderos". En otras palabras, dado que el pensamiento únicamente es posible por medio de los signos, su propósito es establecer cómo se produce dicho pensamiento mediante signo. Pierce llama a la Lógica "Teoría de las condiciones que determinan un razonamiento seguro". Como tal le compete el análisis de los varios procesos de razonamiento, la clasificación de los argumentos y sus evaluaciones. La lógica constituye, pues, el aspecto más normativo de la Semiótica, ya que busca establecer criterios para el buen razonamiento (para el pensamiento correcto, es decir, el pensamiento que, en su mayor parte, llega a la verdad). En definitiva, busca establecer criterios para discriminar aquellos malos razonamientos que conducen al error; es el intento de descifrar un método para eliminar el error, la ilusión y la distorsión y llegar (o tener) lo más posible a la verdad; Por tal motivo, la *Lógica Crítica* se encarga de investigar las condiciones de verdad en general, y según Pierce de aquí ha de discernirse la verdad o falsedad de una proposición.

[6]Se basa en la relación de un signo con su interpretante final.

> *"Esta es la ciencia de lo que es necesariamente verdadero de los signos de cualquier inteligencia científica en tanto se hace cargo de los objetos. O bien, la lógica crítica es la ciencia formal de las representaciones verdaderas"*
>
> **(Citado por Pierce, 1897, "División of Signs")**

9.2.3. Retórica Especulativa

La Retórica Especulativa, es el estudio de las condiciones de necesidad de la transmisión de significados por medio de signos de mente a mente, y de un estado de mente a otro. Más sucintamente, estudia las condiciones de desarrollo y crecimiento del pensamiento. El centro para el lógico que estudia esta rama es la relación entre las representaciones y la interpretación de los pensamientos (o interpretaciones). Mientras que la crítica es la ciencia de condiciones necesarias para alcanzar la verdad, en palabras más contextuales la Retórica Especulativa es la ciencia de las condiciones generales para alcanzar la verdad. Peirce a menudo enfatizó en el estudio de los métodos de razonamiento como las cuestiones principales de la retórica especulativa, y a veces sugirió que esta rama de la lógica podría llamarse mejor "metodéutica". Cuestiones de significado e interpretación dominan esta rama, y puede ser que el pragmatismo, como una teoría del significado o de la investigación, pertenezca aquí. Así puede considerarse al estudio de la hermenéutica, algo que el mismo Peirce sugirió, aunque con referencia a la hermenéutica de Aristóteles.

En resumen, de las tres ramas de Pierce, tenemos que, la retórica especulativa no esta completamente estructurada, mientras que la lógica crítica, estudiada en detalle, nos lleva a áreas de la filosofía y de la lógica simbólica pierciana no comúnmente asociada a la Teoría de los signos.

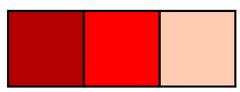
CAPÍTULO 10

Una Propuesta Metodológica para la Enseñanza De la Lógica Trivalente

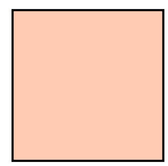
La misión del posterior capítulo es entregar un aporte para la enseñanza de las Lógicas No-Clásicas en los planteles educativos, por consiguiente se trabaja acerca de la Lógica Trivalente debido a su importancia en las otras aplicaciones de las lógicas con más de dos valores de verdad, como siendo considerada como una herramienta importante para los desarrollos tecnológicos y razonamientos lógicos; de lo cual suscita en el currículo la prioridad de ser enseñada en las aulas de clase.

Por tal razón se logra una aproximación intuitiva, partiendo de la noción de pintura (generalización de la noción de conjunto) como interpretación de la realidad para llegar a las leyes de una lógica asociada a admitir más de tres valores de verdad con sus respectivas leyes y tautologías. Dentro del concepto de pintura deberían incluirse varios colores y una forma de ordenarlos, sin embargo esto no es necesario, debido a que con varias tonalidades de un mismo color basta para ejemplificar todas las construcciones que se requieran resaltar.

Lo primero que se concreta es una gama de tres tonos de un mismo color, ordenados ascendentemente del más oscuro al más claro, en la *Paleta*, una vez definida la gama de tonos, se escoge la hoja o *lienzo* con una hoja pintada de la tonalidad más clara posible, la cual se denota como universo de referencia. Se representará a los subconjuntos de un conjunto donde la relación de pertenencia tiene más de dos valores de verdad y definiremos operaciones entre ellos, en una lógica con tres valores de verdad.



$H(Paleta)$



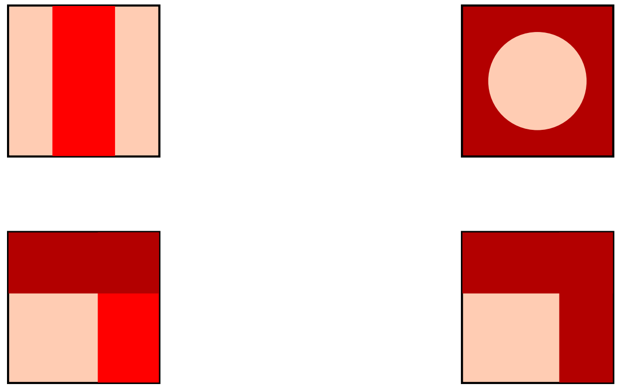
$X(Lienzo)$

Al resultado de asignarle a cada uno de los puntos del lienzo un tono de la paleta le llamaremos $3-$**pinturas**.

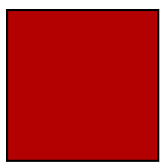
10.1. Construcción de $3-$Pinturas:

Para el estudio, se genera $3-$**pinturas** mediante dos procedimientos básicos:

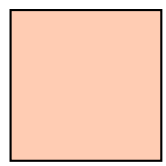
- Coloreando cada uno de los puntos del lienzo de manera arbitraria, a este proceso de asignación de colores de H a cada punto del universo X, así:



- Estableciendo un conjunto de instrucciones que nos indique de qué color debe ser cada uno de los puntos del lienzo. Dos ejemplos son:



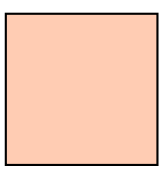
F



V

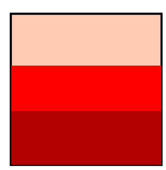
En las 3−**pinturas** marcada con V (Verddero) se le asigna a cada punto del lienzo el color más claro posible y la marcada con F (Falso) el color más oscuro, de la paleta definida.

Ejemplo:

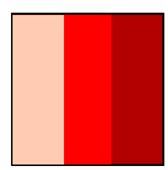


V

F



A



B

Resaltamos las $3-$pinturas marcadas con F y V, asociadas a asignar a cada punto el color más claro y a asignar a cada punto el color más oscuro, que dejan la hoja de un solo color, pues serán de particular importancia para los desarrollos que siguen.

Estas 3-pinturas tienen una generalización, cualquiera que sea la selección de las tonalidades, pues siempre va a haber una n-pintura con la tonalidad más clara en todos los puntos que llamaremos V y una tonalidad más oscura en todos sus puntos, que llamaremos F.

10.2. Orden entre $3-$Pinturas.

Definiremos una relación de orden en un conjunto de tonos de un mismo color (estos tonos, no necesariamente tienen que ser de un mismo color; pero lo consideramos conveniente para facilitar los ejemplos y la comprensión), donde se puede considerar un conjunto ordenado por la relación ser más oscuro o claro según H (Paleta), por tanto antes de mostrar esta definición en nuestro universo de referencia X(Lienzo), presentaremos algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos lo cual servirá como soporte preciso de la propuesta a desarrollar en este capítulo.

<u>Retículo:</u>

Sea B un conjunto ordenado, decimos que B es un retículo si para todo x, y que pertenecen a B existe $sup\{x, y\}$ e $inf\{x, y\}$.

Ejemplos:

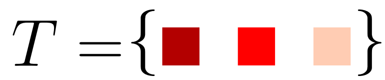
1. $(P(X) \subseteq)$ es un retículo cuyo elemento mínimo, notado 0, es el conjunto vacío y elemento máximo, notado 1, es X.

2. Si notamos con 0, el valor de verdad “falso” y con 1, el valor de verdad “cierto”, $\underline{2} = \{0, 1\}$ y se dice que este conjunto es un retículo, porque tiene dos elementos; uno mínimo (0) y otro máximo (1).

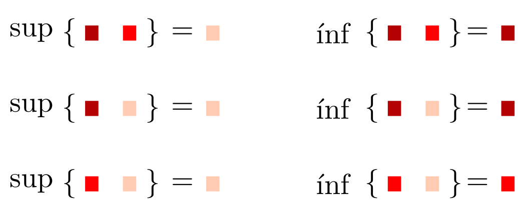
3. $(T, \leq)$ donde T es un conjunto de tonos de un mismo color y $\leq$ es la relación “ser mas oscuro o igual a”, es un retículo. Gráficamente, presentamos un

ejemplo de este retículo en 3−Pinturas por ser el objeto de nuestro estudio.

Sea T un conjunto de tonos ordenado ascendentemente, del mas osuro al más claro; así:



Veamos que para todo par de elementos $x, y \in T$ existen $\sup\{x, y\}$ e $\text{ínf}\{x, y\}$:

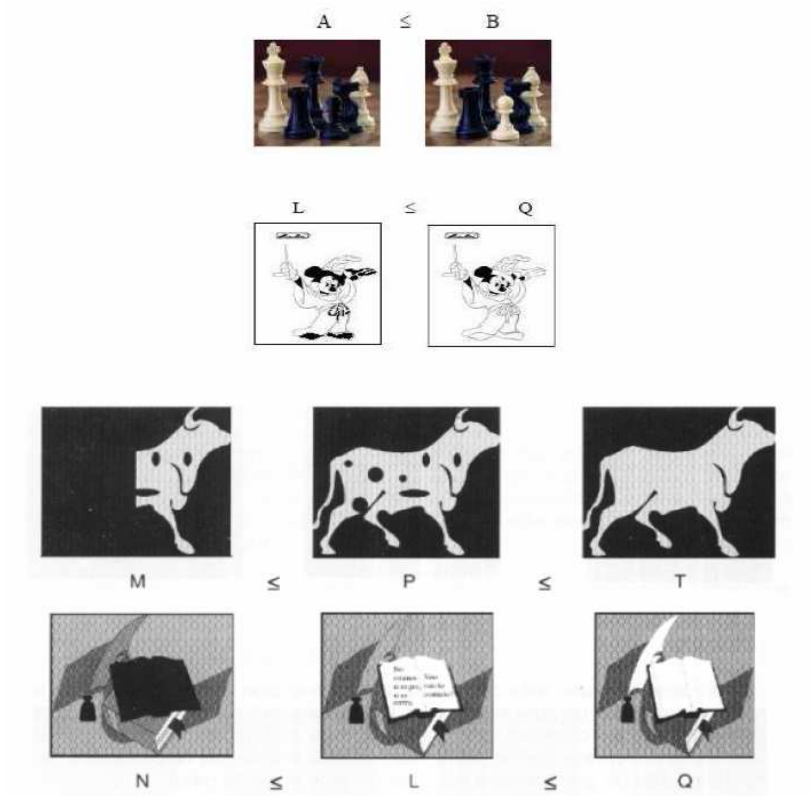


Definición de la relación orden entre 3−pinturas:

Para definir el orden entre 3−Pinturas estableceremos como condición que éstas sean construidas con la misma paleta. En el ejemplo anterior demostramos que una gama de tonos de un mismo color es un conjunto ordenado por una relación definida por el enunciado formal “ser más oscuro o igual a”; entonces, si A y B son dos tres-Pinturas construidas con las condiciones expuestas en el párrafo anterior, se dice que:

A es menor o igual a B si y sólo si cada punto de A es más oscuro o igual a su correspondiente en B.

La n-pintura A esta contenida en la n-pintura B, notado $A \leq B$ si cada punto en la n-pintura A es mas oscuro o igual que en la n-pintura B.



10.3. Operaciones entre 3−Pinturas

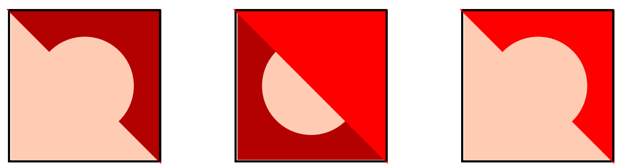
Análogamente a lo que sucede en teoría de conjuntos cuando se definen las operaciones de unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complementación entre ellos, utilizando los conectivos lógicos de disyunción, conjunción, implicación, equivalencia y negación, podemos utilizar el orden definido entre 3−Pinturas para generar operaciones entre ellas que sean generalizaciones de las generadas en los conjuntos por los conectivos de la lógica bivalente.

Una operación entre dos 3−Pinturas, A y B, define la instrucción o conjunto de instrucciones con las que va a ser construida una tercera 3−Pinturas que llamaremos $A * B$ donde $*$ es la operación mencionada, con el orden lineal expuesto antes. La paleta y el lienzo con los cuales haremos los ejemplos posteriores.

10.3.1. Unión entre 3−Pinturas

Sean A y B, dos 3−Pinturas construidas con la misma gama de tonos. La unión entre A y B notada $A \vee B$, se define así: a cada punto x de $A \vee B$ lo pintamos del tono $\sup\{a, b\}$ (la tonalidad mas clara de las presentes en cada una de ellas, o igual si las dos coinciden), y donde a y b son los colores de los puntos correspondientes a x en A y en B respectivamente.

Ejemplos:

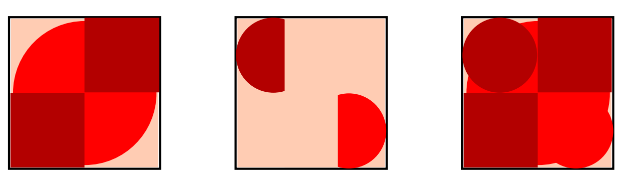


A $\quad$ B $\quad$ $A \vee B$

10.3.2. Intersección entre 3−Pinturas

Sean A y B, dos 3−Pinturas construidas con la misma gama de tonos. La intersección entre A y B notada $A \wedge B$, se define así: a cada punto x de $A \wedge B$ lo pintamos del tono $\inf\{a, b\}$ (la tonalidad más oscura de las presentes en cada una de ellas o igual si las dos coinciden), y donde a y b son los colores de los puntos correspondientes a x en A y en B respectivamente.

Ejemplos:



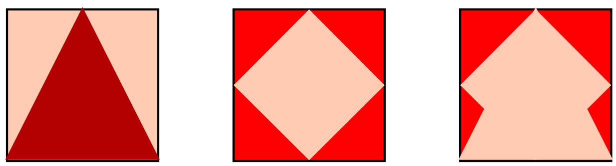
A $\quad$ B $\quad$ $A \wedge B$

10.3.3. Implicación entre $3-$Pinturas.

La implicación entre A y B, dos $3-$pinturas, se denota $A \longrightarrow B$, y se construye con la siguiente instrucción:

Sea un punto x en A y su correspondiente x en B. El tono con el que se debe pintar un punto c en $A \longrightarrow B$ correspondiente a x en A, es el más claro de la gama disponible si $\inf\{a, b\} = a$, donde a es el color de x en A y b el x en B, de lo contrario c debe ser pintado del tono b, para todo x en A.

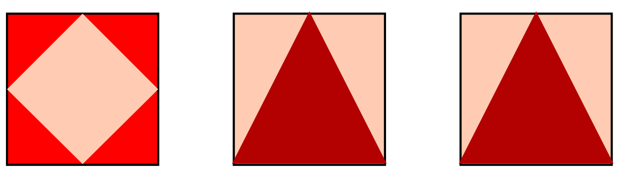
Ejemplo:



A $\qquad$ B $\qquad$ $A \rightarrow B$

Es conveniente aclarar que en $3-$Pinturas, al igual que en la lógica clásica, $A \longrightarrow B$ es distinto de $B \longrightarrow A$ si A es distinto de B.

Ejemplo:

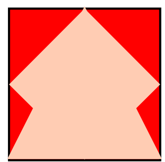


B $\qquad$ A $\qquad$ $B \rightarrow A$

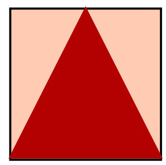
10.3.4. Doble Implicación entre $3-$Pinturas.

La Doble Implicación entre A y B, dos $3-$Pinturas, se denota $A \longleftrightarrow B$, al igual que en la lógica clásica, resulta de la intersección entre $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow A$. Es decir que a cada punto x en $A \leftrightarrow B$ correspondiente a x en A lo pintamos del tono $\text{ínf}\{a \rightarrow b, b \rightarrow a\}$ para todo x en A.

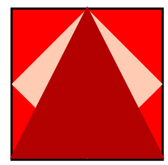
Ejemplo:



$A \rightarrow B$



$B \rightarrow A$



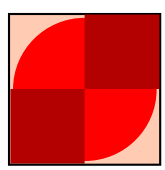
$A \leftrightarrow B$

10.3.5. Negación de 3−Pinturas.

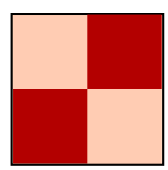
De una 3−Pinturas A, notada $\neg A$ se construye con la siguiente instrucción:

Para todo elemento x en A, si x esta pintado de el tono más oscuro de la gama, su correspondiente x en $\neg A$ lo pintamos de la totalidad más clara disponible. De lo contrario, lo pintamos de la tonalidad más oscura.

Ejemplo:



A



$\neg A$

10.4. Operaciones en Lógica Trivalente

Un procedimiento para generar 3−Pinturas es disponer de un conjunto de instrucciones que nos indique cómo llenar el lienzo, tal como lo hemos realizado al definir operaciones entre $3-$Pinturas, basados en las operaciones usuales definidas en la lógica clásica, conjunción, disyunción, implicación, doble implicación y negación; sólo que hemos asumido no dos, sino tres valores de verdad, representados por tres tonos de una gama de colores. Basados en esto, es posible definir las operaciones en una Lógica Trivalente a partir de las operaciones definidas en $3-$Pinturas. En Lógica Trivalente, es usual definir el conjunto de valores de verdad como:

$$\underline{3} = \{0, 1, 2\}$$

Sin embargo, haciendo sólo un cambio de símbolos, podemos considerar que:

$$\underline{3} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Correspondientes a los valores de falso, indeciso y verdadero respectivemente, por la correspondencia que hay entre la falsedad con el 0 y la certeza con el 1.

10.4.1. Proposiciones y Conectivos Lógicos

Definición de Predicados Trivalentes.

Son expresiones con una variable, de las cuales no se puede decir que son ciertas, indecisas o falsas hasta que la variable no sea remplazada por algún elemento de un conjunto de referencia dado. Estas frases se representan por $p(x), q(x), \ldots,$ etc. Por ejemplo, la expresión "Las $3-$Pinturas A tiene la tonalidad x" es una afirmación, la cual permite definir las $3-$Pinturas cuando la variable x sea reemplazada por una tonalidad de una gama; esta recibe el nombre de $3-$Predicado. Así, teniendo una gama de tonos como universo de referencia, cada $3-$Pinturas corresponde a un $3-$Predicado y viceversa

Operaciones	
$3 - pinturas$	$3 - predicados$
Intersección	Conjunción
Unión	Disyunción
Codiferencia	Implicación
Codiferencia	Equivalencia
Negativo	Seudonegación

Definición de Proposiciones Trivalentes

Llamaremos *Proposición Trivalente* a la frase que nos permite seleccionar una tonalidad en una gama de 3−Pinturas, del resultado de esta elección diremos que es un valor de verdad, debido a que este proceso corresponde en lógica bivalente a la elección de un valor de verdad (verdadero (V) o Falso (F)) de los posibles para un predicado en un universo de referencia preestablecido.

Esta selección puede hacerse por diversos caminos, algunas alternativas son las siguientes:

1. Escogiendo el color de un punto x_0 de una 3−Pintura dada. Esto es el equivalente en la lógica clásica a la obtención de proposiciones $p(x_0)$ a partir de un predicado $p(x)$ evaluándolo en un elemento x_0 del conjunto universal.

2. Escogiendo la tonalidad más clara utilizada en todas las 3−Pinturas. Esta selección de tonalidad garantiza la presencia de por lo menos un punto con esa tonalidad, junto con la ausencia de una tonalidad más clara en todo la paleta. Tomaremos esta escogencia como definición del cuantificador existencial ($\exists$), generalizado a n−Pinturas, puesto que cuando nos restringimos como es nuestro caso, donde trabajamos con 3−pinturas, le damos el valor verdadero a la tonalidad mas clara, y a la tonalidad mas oscura le asignaremos un valor de falsedad, de esta manera le asignamos un valor de incierto al color que me indica el punto medio de la gama que estoy tomando como referencia.

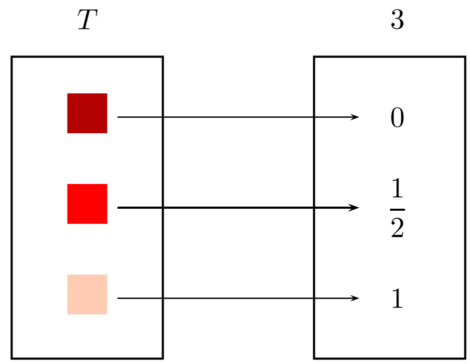
3. Escogiendo la tonalidad más oscura utilizada en toda las $3-$Pintura, obtenemos la definición para el cuantificador Universal $(\forall)$ generalizado a $n-$Pinturas, garantizando que hay un punto con esa tonalidad y la ausencia de una tonalidad más osucra, puesto que cuando nos restringimos a 3 tonalidades como es nuestro caso, la elección tiene valor verdadero cuando toda la hoja está pintada del color más claro, tiene valor incierto cundo algún punto de la hoja toma la tonalidad intermedia de la paleta y por último tiene valor falso si hay por lo menos un punto con la tonalidad más oscura.

En la vida cotidiana se presentan situaciones que usualmente son descritas con afirmaciones que solo tienen tres posibilidades extremas: Excelente, Aceptable e Insuficiente, clase alta, clase media y clase baja. Sin embargo, ampliando la gama de posibilidades utilizando algún criterio preestablecido, estas podrían describirse mejor.

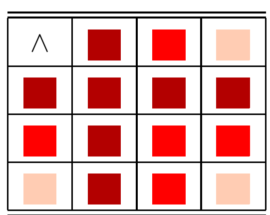
Por ejemplo, si el universo es un conjunto de seres humanos, el predicado "x es sagaz" genera una división del universo en tantas partes como opciones de clasificación de lo sagaz tengamos. Y si logramos una lista de comportamientos que permitan clasificarlo en n estados, podríamos hacer el mapa de sagacidad de la población, el cual correspondería a las $n-$Pinturas, de tal manera que si logramos establecer principios de razonamientos válidos utilizando $n-$Pinturas, tendremos principios de razonamientos válidos para lógicas con dos o más valores, tarea que abordaremos.

Operaciones con Proposiciones Trivalentes

De forma similar a como se definen las operaciones en proposiciones de lógica bivalente; realizaremos una correspondencia entre el retículo $T = \left\{ \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare \right\}$ y el conjunto, $\underline{3} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$ de la siguiente manera:

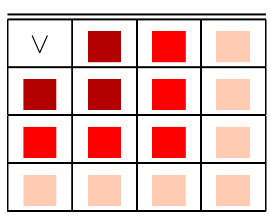


Por esta similitud, llamaremos a las operaciones básicas entre proposiciones de lógica trivalente, con los mismos nombres de la lógica clásica: conjunción, disyunción, implicación, doble implicación y negación. Utilizando las definiciones de las operaciones $\wedge$ y $\vee$ definidas para los elementos de $T = \{ \;,\;, \; \}$ en el capítulo 4 donde se obtienen **"Los significados del tercer valor en las Lógicas Trivalentes"** Teniendo en cuenta las tablas de verdad expuestas por Lukasiewicz.



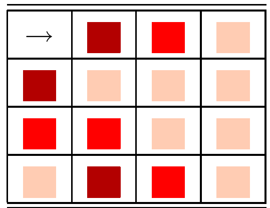
$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabla 10.1: Tabla de conjunción para $\underline{3}$



$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

Tabla 10.2: Tabla de disyunción para $\underline{3}$



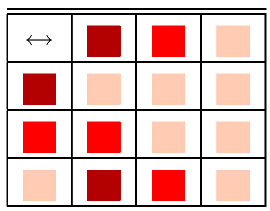
$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabla 10.3: Tabla de implicación para $\underline{3}$

Con esta definición de implicación, es posible construir la equivalencia lógica de forma análoga a la lógica clásica, es decir:

$$p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

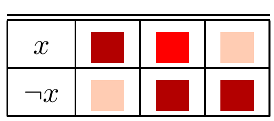
Obteniendo como resultado la tabla:



$\leftrightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Tabla 10.4: Tabla de equivalencia para $\underline{3}$

La negación Trivalente notada por $\neg x$ se define usado la implicación definida anteriormente así: $\neg x = x \rightarrow 0$ dando como resultado:



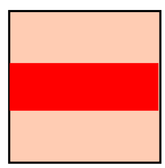
x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\neg x$	1	0	0

Tabla 10.5: Tabla de negación para $\underline{3}$

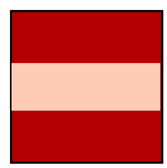
Las combinaciones de proposiciones, conectivos lógicos $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ y paréntesis forman proposiciones compuestas, que reciben el nombre de **Fórmulas Trivalentes**. Las cuales tienen que ser combinadas con las mismas reglas de la lógica clásica para que sean *fórmulas trivalentes bien formadas*. El valor de verdad de una *fórmula trivalente bien formada* está definido por el valor de sus proposiciones componentes y por las tablas de las operaciones; las posibles combinaciones de los valores de verdad de las proposiciones componentes reciben el nombre de **tablas de verdad trivalentes**.

10.4.2. Tautologías

Dado un conjunto de 3−Pinturas, es posible definir operaciones entre ellas cuyo resultado sean las 3−Pintura de una sola tonalidad, que en particular puede ser las 3−Pinturas V ó F. Por ejemplo si R y S son las 3−Pinturas:



R

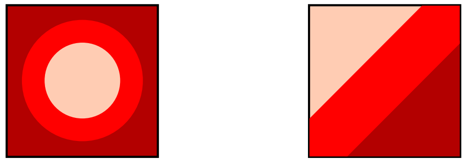


S

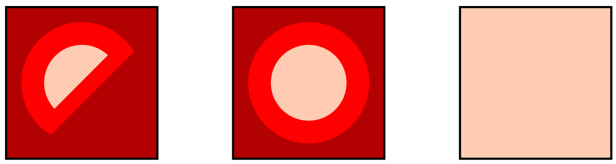
Su unión es las 3−Pinturas V, pero esto naturalmente no es válido para cualquier para de n−Pinturas. Sin embargo, existen operaciones entre n−Pinturas cuyo resulado es una hoja de una sola tonalidad, sin importar las n−pinturas que se utilicen para efectuar la operación, por ejemplo, la operación:

$$(A \wedge B) \rightarrow A$$

Tiene como resultado las 3−Pinturas V, independientemente de las 3−Pinturas que hay entre A y B que se escojan para ser operadas, como puede verificarse en el caso particular siguiente:



A B



$(A \wedge B)$ A $(A \wedge B) \rightarrow A = V$

Esta verificación en uno o varios casos particulares no constituyen una demostración, pero nos permite acercarnos de manera intuitiva a la validez de la afirmación realizada.

Una demostración deberá hacerse e términos de $n-$pinturas y tonalidades arbitrarias, utilizando las definiciones dadas para las operaciones. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa debemos observar que dadas dos $n-$pinturas A y B cualesquiera, la tonalidad que tiene en un punto elegido de manera arbitrara en las $n-$pinturas $(A \wedge B)$ es mas clara que la que tiene el mismo punto en cualquier de las $n-$Pinturas A y B (por definición de $(A \wedge B)$), esto significa, por la definición del orden entre $n-$pinturas, que

$$(A \wedge B) \leq A$$

Y por lo tanto la tonalidad del punto en la $n-$pinturas.

$$(A \wedge B) \rightarrow A$$

Es el mas claro de todos los posibles (por la definición de $X \rightarrow Y$), lo que da como resultado la $n-$pinturas que hemos notado como V.

En el lenguaje de n-Predicados, diremos que si $p(x)$ y $q(x)$ son dos $n-$Predicados cualesquiera, asociados con $n-$pinturas A y B respectivamente el $n-$predicado

$$((p(x)q(x) \rightarrow p(x))$$

Que es el asociado a las $n-$pinturas

$$((A \wedge B) \rightarrow A)$$

Asigna la tonalidad más clara en todos los puntos de la hoja y por lo tanto da lugar a una proposición que escribimos simbólicamente:

$$(\forall x)((p(x) \wedge q(x)) \rightarrow p(x))$$

La cual tiene el valor de verdad de la tonalidad más clara (Verdadero) independiente de las $n-$pintura que se escojan para hacer la operación.

Las proposiciones que tengan esta característica las llamaremos tautologías. Si de manera similar se puede construir proposiciones a partir de operaciones entre $n-$pinturas en las cuales que sin importar cual sea el conjunto inicial de $n-$pinturas el resultado sea una hoja de una sola tonalidad, no necesariamente la más clara (digamos la tonalidad asociada con k), las llamaremos $k-$tautologias. En particular a las $o-$tautologias las llamaremos contradicciones y las $(n-1)-$Tautologias simplemente tautologias.

10.4.3. Razonamientos

Toda Tautologia de la forma $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$ la llamaremos un razonamiento válido. Así mismo, llamaremos un k-razonamiento a la proposición $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$ si para cualquier par de $u-$predicados $p(x)$ y $q(x)$ es ella una $k-$Tautologia. Usaremos de nuevo las $u-$pinturas A y B de la figura anterior, que suponemos asociadas con los predicados $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente, para intuir razonamientos válidos y para encontrar razonamientos que siendo válidos en la lógica clásica, no lo son cuando consideramos más valores de verdad. La demostración de la validez de un razonamiento requiere, como antes, la consideración de todas las tonalidades y todas las $3-$Pinturas pero la demostración de su no validez sólo requiere de un contraejemplo.

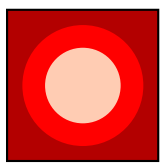
1. Hemos observado que las 3−pinturas $(A \wedge B) \to A$ tiene la tonalidad más clara en todos sus puntos y se ha demostrado que esto es válido cualesquiera que sean las $n-$pinturas A y B seleccionadas, por lo tanto el razonamiento

$$\forall x((p(x) \wedge q(x) \to p(x))$$

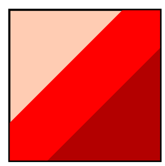
   Conocido como la ley de eliminación es válido.

2. Otra forma clásica de razonamiento que se encuentra en la base de todas las demostraciones en matemáticas es conocida como el modus poniendo ponens. En la siguiente figura se representa la secuencia de operaciones que conducen a las $n-$pinturas $((A \to B) \wedge A) \to B$ asociada con la proposición.

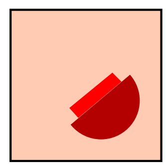
$$\forall((p(x) \to q(x)) \wedge (p(x) \to q(x))$$



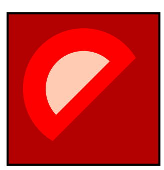
A



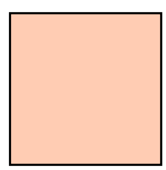
B



$A \to B$



$A \wedge (A \to B)$



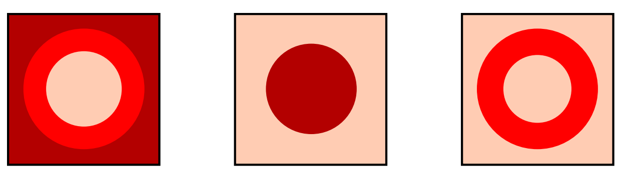
$(A \to B) \wedge A \to B$

   Sugiriéndonos que el razonamiento es válido también cuando se consideran tres valores de verdad en correspondencia con las tres tonalidades de rojos presentados. Una demostración de su validez para el caso de n tonalidades, tiene la siguiente forma:
   Sea X un punto arbitrario de un universo X, A y B dos 3−pinturas en X, analicemos dos casos:

Si la tonalidad que tiene el punto X en la $3-$Pinturas A es mas oscuro o igual a ala tonalidad que tiene en las $3-$Pinturas B, el color del punto en $A \rightarrow B$ es el correspondiente a la tonalidad mas clara de todas las posibles y por lo tanto al compararla con la tonalidad del punto en A con la operación de intersección, en $(A \rightarrow B) \wedge A$ nos da como resultado el color que tiene en A. Por consiguiente, la tonalidad que tiene el punto x en las $3-$pinturas $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ será la tonalidad más clara de todas las posibles.

Si por el contrario, la tonalidad que tiene el punto x en las $3-$pinturas A es más clara que la que tiene en las $3-$pinturas B, el color del punto en $A \rightarrow B$ es el correspondiente a la tonalidad que tenga en las $3-$pinturas B y por lo tanto al compararla con la tonalidad del punto en A con la operación intersección, en $((A \rightarrow B) \wedge A)$ nos da como resultado el color que tiene en B. Por consiguiente, la tonalidad que tiene el punto x en las $3-$pinturas $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ será la tonalidad más clara de todas las posibles.

3. Un razonamiento que es válido en la lógica clásica es el principio del tercio exluso, la cual afirma que una proposición cualquiera o su negación, siempre es verdadera. Este sin embargo no es válido cuando se consideran tres o más valores de verdad, asociados con diferentes tonalidades de un mismo color, como lo garantiza el ejemplo representado en la siguiente figura, correspondiente a las $3-$pinturas $A \vee \neg A$, la cual no coincide con las $3-$pinturas V



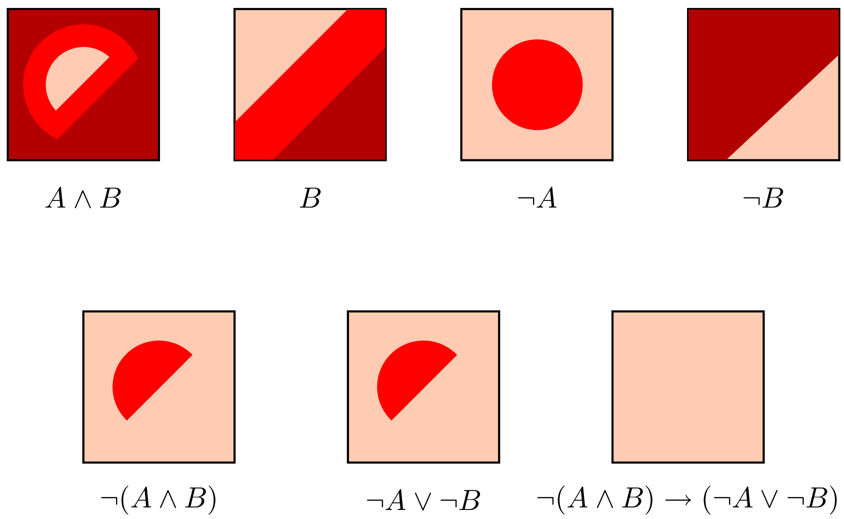
A $\qquad$ $\neg A$ $\qquad$ $A \vee \neg A \neq V$

4. A pesar de que la seudo negación no tiene el mismo comportamiento que la negación de la lógica clásica, como puede verse en la ley del tercio excluso, las proposiciones,

   $\forall x(\neg(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\neg p(x) \vee \neg q(x)))$

$\forall x((\neg(p(x) \vee \neg q(x))) \rightarrow (\neg(p(x) \vee q(x)))$
$\forall x(\neg(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\neg p(x) \vee \neg q(x)))$
$\forall x(\neg(p(x) \wedge \neg q(x)) \rightarrow (\neg p(x) \vee q(x)))$

Que son eqeuivalentes a las leyes de De Morgan, son también razonamientos válidos cuando se consideran valores de verdad asociados con tonalidades de un mismo color, como lo sugieren los diagramas de la siguiente figura:



Son también razonamientos válidos, que sugerimos intuya a partir de la $3-$Pintura:

Principio de no-contradicción: $\forall x(\neg(p(x) \wedge \neg p(x)))$

Ley de casos: $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (p(x) \rightarrow q(x))) \rightarrow ((p(x) \wedge p(x)) \rightarrow q(x)))$

Ley del absurdo: $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (p(x) \rightarrow \neg q(x)) \rightarrow \neg p(x)$
Se tiene solamente una de las implicaciones de la ley de doble negación:

$$\forall x((p(x) \rightarrow \neg\neg p(x)))$$

Son ejemplos de razonamiento válidos en la lógica clásica, que se puede comprobar mediante diagramas, que no son válidos en lógicas con más de dos valores de verdad como las construidas a partir de las tonalidades:

La otra implicación de la ley de la doble negación:

$$\forall x(\neg(\neg p(x) \rightarrow p(x))$$

Ley de la Contrapositiva:

$$\forall x((\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow q(x)))$$

Ley de la reducción al absurdo:

$$\forall x(p(x) \wedge \neg q(x)) \rightarrow (p(x) \wedge \neg p(x)) \rightarrow (p(x) \rightarrow q(x)))$$

La propuesta metodológica expuesta aproxima de manera intuitiva a razonamientos válidos en Lógicas No-Clásicas, donde se utiliza inicialmente las $3-$Pinturas y el orden existente entre sus tonalidades de un mismo color para definir operaciones entre ellas con el fin de asociar con cada $n-$pinturas un $n-$predicado y con cada operación un conectivo lógico que permite construir proposiciones con tantos valores de verdad como tonalidades. Con estas herramientas se puede identificar razonamientos válidos dentro de una lógica así construida, reconociendo resultados de operaciones que deja la hoja de la tonalidad más clara, sin importar las $n-$pinturas de partida. Se considera que esta Propuesta Metodológica se debe proponer a un grupo de estudiantes que tengan nociones sobre lógica Aristótelica con la intención de facilitar el acercamiento de los estudiantes a las diferentes aplicaciones de la Lógica Polivalente.

CAPÍTULO 11

Conclusiones

- Por medio de la Propuesta Metodológica para la enseñanza de la Lógica Trivalente, se puede dar a conocer el tema de Lógica Polivalente en un grupo de estudiantes que no son conocedores de una Lógica diferente a la Bivalente.

- Las lógicas expuestas en el trabajo investigativo tienen su aplicabilidad en el campo tecnológico; en especial la Lógica Difusa, que contribuye en el avance y progreso de herramientas encargadas de investigar la inteligencia artificial como mecanismo de apoyo al ser humano.

- Conocer el tema de las Lógicas No-Clásicas son indispensables para el desarrollo del pensamiento en el hombre, debido a su importancia a que todas las actividades diarias que se realizan llevan de manera implícita esta disciplina de la Matemática.

CAPÍTULO 12

Recomendaciones

- Crear un Semillero o Línea de Investigación como parte de alguno de los Grupos existentes en Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, enfocada en el estudio de la Lógica Polivalente aplicada a la Tecnología e Informática.

- Realizar una renovación del Plan de Estudios de la Educación Formal, teniendo en cuenta la enseñanza de la Lógica Polivalente y sus respectivas aplicaciones, y con esto ayudando a abrir caminos de Investigación con temas actuales y nuevos en el campo de la matemática.

- Escoger este Trabajo Investigativo como fuente de motivación en los estudiantes para continuar indagando y explorando el mundo de la Inteligencia Lógico-Matemático, y además de esto las diferentes aplicaciones y utilidad de la Lógica Polivalente en la vida diaria.

- Difundir, con las consideraciones respectivas de la Propuesta Metodológica de la Lógica Trivalente, en el Plantel Educativo y de esta forma obtener los mejores resultados en su enseñanza a los futuros profesionales.

- Implementar el Método de enseñanza de Lógica Trivalente en un Plantel Educativo, construyendo una investigación de carácter cuantitativo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Rosanna Pérez Pueyo, *Procesado y Optimización de Espectros Raman mediante Técnicas de Lógica Difusa: Aplicación a la identificación de Materiales Pictóricos, Capitulo 2: Conceptos fundamentales de Lógica Difusa.*, Universidad Politécnica de Catalunya.

[2] Rodrigo Salas, *Articulo: Lógica Difusa*, Universida Valparaíso - Chile.

[3] Tamara Benito Matías y Maria Isabel Durán Vicente *Articulo: Lógica Barrosa*, Universidad Carlos *III* - Madrid, España.

[4] http://www.sci2s.ugr.es/docencia/doctoSCTID/FSIConjuntos%20difusos-Introduccion.pdf

[5] Gillermo Ortíz Rico, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Capitulo: La heterodoxia de las lógicas de da Costa, Vol. XVI*, Universidad del Valle - Cali, Colombia. En http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=46816105.

[6] Manuel Sierra A. *Lógica básica paraconsistente y paracompleja sin negación clásica y algunas de sus extensiones, pp. 29-43*, Universidad EAFIT - Medellín, Colombia.

[7] M.C. José Luis Ramírez Alcántara, *Una versión de Lógica paraconsistente proposicional: enfoque semántico*, Universidad Autónoma de Guerrero.

[8] Edgar Sandoval, *Conocimiento y lógica: a noventa años de la muerte de Charles S. Peirce*, Universidad Autónoma de México. En: http://www.pucp.edu.pe/eventos/congresos/filosofia/programa_general/viernes/sesion15-16.30/SandovalEdgar.pdf

[9] http://www.unizar.es/arenas/Paloma_Atencia_Peirce_y_la_Teoria_de_los_Signos.PDF

[10] Jorge Páez, Carlos Luque, Alberto Donado, *Razonando con Colores (Una aproximación a la lógica Intuicionista.)*, Universidad Pedagógica Nacional.

[11] Martin Emilio Rodriguez Plata, Freddy Alexander Vargas Martínez, *Software para la introducción al estudio de operaciones en una lógica con tres valores de verdad por medio de la noción de* $3 - pinturas$, Licenciatura en Matemáticas UPN.

[12] Cecilia Rita Crespo Crespo, *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología, capítulo 4.*, Instituto Politécnico Nacional, centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada, Mexico.