TEORIA DE JUEGOS

LIBY LORENA CORTES PERDOMO
PAOLA ANDREA OTALORA PUENTES

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA - HUILA

2011

TEORIA DE JUEGOS

LIBY LORENA CORTES PERDOMO
Código 2006136386
PAOLA ANDREA OTALORA PUENTES
Código 2005101362

Magister
AUGUSTO SILVA SILVA
Asesor

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA - HUILA
2011

Nota de Aceptación

Presidente del jurado.

Jurado.

Jurado.

Neiva, Enero de 2011

Índice general

Presentación **5**

Justificación **6**

Objetivos **7**

1. Teoría **9**

1.1. ¿Qué es la Teoría de Juegos? 9

1.2. ¿Qué es una Estrategia? 10

1.3. ¿Qué es una Jugada? 11

1.4. Elementos de un Juego 11

1.5. Representación de Juegos 13

1.5.1. Juegos en forma normal o estratégica 13

1.5.2. Juegos en forma extensiva 15

2. Juego de Suma - Cero **17**

2.1. Juegos de suma cero - dos jugadores 19

2.1.1. Matriz de Juego 20

2.1.2. Casos 21

3. Juegos de Suma Constante **28**

4. Estrategias Dominadas **32**

5. Estrategias Puras **36**

6. Estrategias Mixtas **45**

6.1. Valor Esperado 50

6.2. Valor Inferior y Superior del juego 53

6.3. Estrategias Mixtas Óptimas. 54

6.3.1. Etrategias Mixtas para matrices de Juego 2x2. 54

6.3.2. Estrategias Mixtas para matrices de juegos 2XM ó (MX2) . 58

7. Modelos Importantes de Juegos **66**

7.1. El Dilema del Prisionero 66

7.2. Modelo Halcón Paloma: 68

7.3. La Guerra de los Sexos 69

Bibliografía **71**

Presentación

En 1928 Jhon Newmann presentó ante la Sociedad Matemática de Gotinga (Alemania) un método para el desarrollo de un juego denominado “modo de aparear monedas”, constituyéndose en el inicio de una nueva rama de la Matemática: **La Teoría de Juegos**. Esta teoría no solo trata los juegos como juegos sino que tiene que ver con todas las situaciones en las que se presenta competencia y en donde se tienen reglas y contendores (juegos no cooperativos), al igual que, no sin la misma profundidad, situaciones o juegos de cooperación, con alianzas y varios contendores.

El presente trabajo de grado da a conocer que es la teoría de juegos, y de que manera se puede estudiar en consecuencia la forma racional de proceder cuando nos enfrentamos a situaciones de competencia contra otro u otros contendores racionales, bien sea permitiendo alianzas, o cooperaciones.

Lo presentado a continuación son los elementos iniciales de lo que es la Teoría de Juegos, como una rama interesante de la Matemática Aplicada con el proposito de mostrar una de las tantas facetas en las cuales se hace ver la utilidad de algunos temas de la disciplina.

Justificación

La elaboración del presente trabajo de grado se justifica por las siguientes razones:

1. El desarrollo de la probabilidad y la estadística tiene sus raíces en la Teoría de Juegos.

2. El desarrollo sistemático y riguroso de la Teoría de Juegos muestra una de las facetas importantes de la Matemática cual es su presencia en todas las actividades del ser humano, de la ciencia y de la sociedad.

3. La Teoría de Juegos usa una lógica que algunos autores llaman "lógica retorcida" que riñe una buena parte con la lógica intuitiva que hace presencia en muchas ramas de las Matemáticas. Esta forma de actuar hace que en la Teoría de Juegos aparezcan muchas situaciones sorprendentes y paradójicas. Ejemplos de ellas son:

    - Cuando se va a elegir un comité puede ocurrir que la mejor decisión de algunos de sus miembros sea votar por el candidato que menos le gusta.
    - En un juego de póker, puede ocurrir que a un jugador le han servido la peor mano decida hacer la máxima apuesta.
    - Puede suceder que el comandante de un ejército decida atacar o no dependiendo del resultado de tirar una moneda.

4. La Teoría de Juegos muestra que en Matemáticas las apariencias, a veces, también engañan: las decisiones aparentemente absurdas, pueden ser las mejores.

Objetivos

- Contribuir de manera significativa en el campo del aprendizaje ofreciendo una guía de estudio dirigida a personas interesadas en aprender a manejar la Teoría de Juegos.
- Precisar los elementos fundamentales de la Teoría de Juegos, como son: estrategias, jugadas, elementos de un Juego, tipos de juegos y sus ejemplos.

Capítulo 1

Teoría

1.1. ¿Qué es la Teoría de Juegos?

La teoría de juegos (o teoría de las decisiones interactivas) es el estudio del comportamiento estratégico cuando dos o más individuos interactúan y cada decisión individual resulta de lo que él (o ella) espera que los otros hagan. Esta teoría no solo trata los juegos como juegos sino que tiene que ver con todas las situaciones en las que se presenta competencia y en donde se tienen reglas y contendores (juegos no cooperativos), al igual que, no sin la misma profundidad, situaciones o juegos de cooperación, con alianzas y varios contendores.

La teoría de juegos estudia en consecuencia la forma racional de proceder cuando nos enfrentamos a situaciones de competencia contra otro u otros contendores racionales, bien sea permitiendo alianzas, cooperaciones o no.

¿Con qué estructuras estudiamos la teoría de juegos?

Existen, fundamentalmente, dos formas distintas de aproximarnos al análisis de una situación de interacciones entre individuos.

- La primera (que es quizás la dominante dentro del ambiente de los economistas) es la *teoría de juegos no cooperativos*, en la que, básicamente, tenemos un conjunto de jugadores, cada uno con estrategias a su disposición, y unas asignaciones de pagos que reciben por llevar a cabo tales estrategias. La característica "no cooperativa" está en la manera de cómo eligen y en lo que saben de los otros jugadores cuando eligen: en general, se supone que los individuos toman sus decisiones *independientemente unos de otros* aunque conociendo sus oponentes y las posibles estrategias que estos tienen a su disposición. Es decir, son individuos egoístas pero que tratan de predecir lo que los otros agentes harán para obrar entonces en conveniencia propia. En esta estructura de análisis los agentes no alcanzan ningún nivel de cooperación.

- La segunda estructura fundamental para el estudio de la teoría de juegos para desde allí predecir resultados de la interacción, es la *teoría de juegos cooperativos o coalicionales*. Aquí todavía tenemos los mismos agentes egoístas, pero ahora se asume que, si pueden obtener algún beneficio de la cooperación, no dudarán en formar coaliciones que son creíbles. Por supuesto, bajo una estructura como la de juegos no cooperativos, un acuerdo de cooperación puede no ser la "solución", de manera que los agentes deben tener una estructura de información diferente si queremos un comportamiento acorde.

1.2. ¿Qué es una Estrategia?

En teoría de juegos, la **estrategia** de un jugador es un plan de acción completo para cualquier situación que pueda acaecer; determina completamente la conducta del jugador. La estrategia de un jugador determinará la acción que tomará el jugador en cualquier momento del juego, para cualquier secuencia de acontecimientos hasta ese punto. Un **Perfil de Estrategia** es un conjunto de estrategias para cada jugador que especifica completamente todas las acciones en un juego. Un perfil de estrategia debe incluir solamente una estrategia para cada jugador.

1.3. ¿Qué es una Jugada?

Es la escogencia simultánea de una estrategia para cada jugador.

El objetivo de la teoría de juegos es hallar las estrategias óptimas de los jugadores bajo el supuesto de que ellos son "racionales".

1.4. Elementos de un Juego

Para que un juego o situación estratégica esté completamente definido, deben estar definidos los siguientes aspectos:

1. **Jugadores:** Debe haber dos o más jugadores (empresas) para que puedan interactuar. Tipos:
    - Agentes "racionales" con capacidad para la toma de decisiones. (sus preferencias se pueden presentar por una función de utilidad).
    - Naturaleza. El jugador no persigue ninguna meta en particular. (toma decisiones de forma aleatoria).
2. **Acción o movimiento:** Es una decisión o elección del jugador.
3. **Conjunto de información:** Debe especificarse lo que sabe cada jugador. Es el conocimiento de un jugador sobre el juego y sus características. (el conjunto de información cambia con el tiempo).

    a **Información perfecta e imperfecta**
    - **Perfecta:** juegos en los que la historia pasada del juego es de dominio público, y no hay decisiones simultáneas.
    - **Imperfectas:** cuando un jugador no conoce lo que otros jugadores han hecho previamente.

b **Información completa e incompleta**

- **Completa:** juegos en los que los pagos de todos los jugadores son información de dominio público.
- **Incompleta:** cuando un jugador no conoce las características de sus rivales (sus preferencias, sus estrategias ...).

c **Información simétrica o asimétrica**

- **Simétrica:** cuando el conjunto de información contiene los mismos elementos para todos y cada uno de los jugadores.
- **Asimétrica:** Son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambas jugadas.

d **Información con certeza y con incertidumbre**

- **Certeza:** la naturaleza no interviene después de los jugadores.
- **Incertidumbre:** los pagos del jugador son inciertos. Los jugadores tratan de maximizar su utilidad esperada.

4. **Estrategia:** deben estar definidos los movimientos (acciones) posibles de ser realizados por cada jugador y su secuencialidad o simultaneidad. Se trata de la regla que señala que acciones deben adoptarse en cada instante del juego, dado el conjunto de información.

5. **Pagos:** debe existir un pago determinado. Indica la utilidad que alcanza el jugador, una vez que la naturaleza y el resto de los jugadores han seleccionado sus acciones y se ha desarrollado el juego.

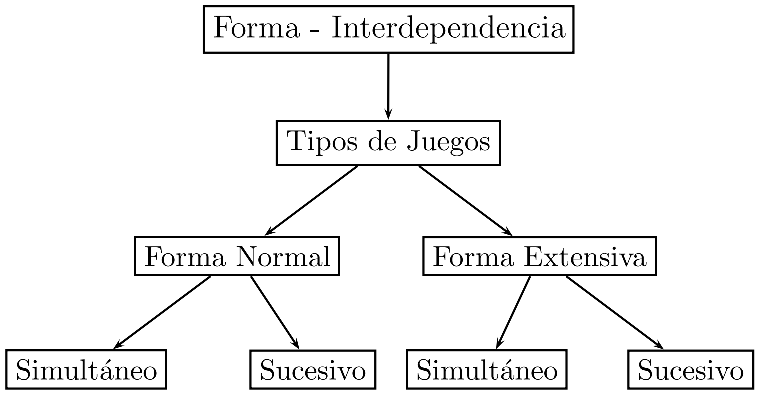
6. **Equilibrio:** propiedad de la solución expresada en términos de las estrategias seguidas por cada jugador. Nociones de equilibrio básicas:

   - Equilibrio de estrategias dominantes
   - Equilibrio de Nash
   - Equilibrio de estrategias dominadas

7. **Resultados:** deben conocerse los resultados que obtendrá cada uno de los jugadores por cada posible conjunto de acciones que se sigan. Es el conjunto

de elementos del juego que el analista selecciona una vez que el juego se ha disputado, para resumirlo o describir lo que ocurrirá.

1.5. Representación de Juegos



1.5.1. Juegos en forma normal o estratégica

El juego expresado en **forma normal** (o forma estratégica) es una matriz de pagos, que muestra los jugadores, las estrategias, y las recompensas. Hay dos tipos de jugadores; uno elige la fila y otro la columna. Cada jugador tiene dos estrategias, que están especificadas por el número de filas y el número de columnas. Las recompensas se especifican en el interior. El primer número es la recompensa recibida por el jugador de las filas y el segundo es la recompensa del jugador de las columnas.

Cuando un juego se presenta en forma normal, se presupone que todos los jugadores actúan simultáneamente o, al menos, sin saber la elección que toma el otro.

Ejemplo

Representación en forma normal de un juego:

		Jugador 2	
		X	Y
Jugador 1	A	$(8,7)$	$(6,12)$
	B	$(9,10)$	$(9,3)$

En este juego hay dos jugadores, del tal forma que se pueden poner sus posibles estrategias en filas las del jugador 1 y en columnas las del jugador 2. Los pagos se muestran en el interior siendo el pago del jugador 1 el que se encuentra mas cerca de él antes de la coma y el del jugador 2 el que se situa tras la coma.

Así las posibles estrategias entre las que se pueda elegir el jugador 1 en la figura son A y B. mientras que el jugador 2 puede optar entre X y Y. Si el jugador 1 elige A el pago que recibe es 8 y si el jugador 2 opta por X el pago que recibe es 7. La lectura de los pagos incluidos en cada una de las otras opciones es análoga a la expuesta anteriormente.

Además de la gráfica anterior otras maneras de representar el juego en forma normal para el ejemplo anterior son:

Jugador 2

$$\text{Jugador 1}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 8,7 & 6,12 \\ 9,10 & 9,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

		Jugador 2	
		X	Y
Jugador 1	A	8, 7	6, 12
	B	9, 10	9, 3

		Jugador 2	
		X	Y
Jugador 1	A	$(8,7)$	$(6,12)$
	B	$(9,10)$	$(9,3)$

1.5.2. Juegos en forma extensiva

El juego expresado en **forma extensiva** centra la atención en la *secuencia temporal*. Se especifica el orden del juego y las alternativas disponibles para cada jugador. Se representa: (1) los jugadores, ($2a$) cuando tiene que jugar cada jugador, ($2b$) lo que cada jugador puede hacer cada vez que tiene la oportunidad de jugar, ($2c$) lo que cada jugador sabe cada vez que tiene la oportunidad de jugar y (3) la ganancia recibida por cada jugador para cada combinación posible de jugadas.

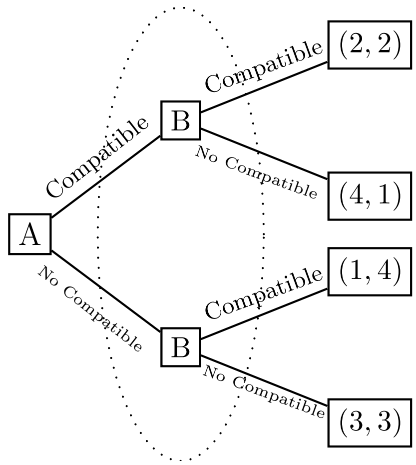
Ejemplo

Dos empresas A y B fabricantes de vídeos deben decidir si fabrican un vídeo compatible o incompatible con la televisión digital. Si las dos empresas toman su decisión simultáneamente los conjuntos o espacio de *estrategias* para ambas serán.

$SA = \{compatible, incompatible\}$ $\qquad$ $SB = \{compatible, incompatible\}$

En cuanto los pagos que obtendrán ambas serán: si las dos fabrican el vídeo compatible ganarán 2 cada una, si fabrican el vídeo incompatible ganarán 3 cada una, si una fabrica compatible y la otra no, la que fabrique el vídeo compatible ganará 4 y la otra 1.

Representación en forma extensiva:



Representación en forma normal:

		Empresa B	
		Compatible	No compatible
Empresa A	Compatible	$(2, 2)$	$(4, 1)$
	No compatible	$(1, 4)$	$(3, 3)$

Capítulo 2

Juego de Suma - Cero

Suma cero describe una situación en la que la ganancia o pérdida de un participante se equilibra con exactitud con las pérdidas o ganancias de los otros participantes.

Se llama así porque si se suma el total de las ganancias de los participantes y se resta las pérdidas totales el resultado es cero. El gol, el ajedrez, y el póker son ejemplos de juegos de suma cero. La suma cero es un caso especial del caso más general de suma constante donde los beneficios y las pérdidas de todos los jugadores suman el mismo valor, porque se gana exactamente la cantidad que pierde el oponente. Cortar una torta es de suma constante o cero porque llevarte un trozo más grande reduce la cantidad de torta que le queda a los demás. Situaciones donde los participantes pueden beneficiarse o perder al mismo tiempo, como el intercambio de productos entre una nación que produce un exceso de naranjas y otra que produce un exceso de manzanas, en la que ambas se benefician de la transacción, se denominan de "suma no nula".

El concepto fue desarrollado en la Teoría de juegos, por lo que a menudo a las situaciones de suma cero se les llama "juegos de suma cero". Esto no implica que el concepto, o la teoría de juegos misma, se aplique únicamente a lo que normalmente se conoce como juegos. Las estrategias óptimas para juegos de suma cero de dos jugadores suelen emplear estrategias que consisten en calcular valores máximos y tomar el minimo de ellos (estrategias minimax).

En 1944 John von Neumann y Oskar Morgenstern probaron que cualquier juego de suma cero que involucre a n jugadores es de hecho una forma generalizada de un juego de suma cero para dos personas, y que cualquier juego de suma no cero para n jugadores puede reducirse a un juego de suma cero para $n+1$ jugadores, donde el jugador $(n+1)$ representa la ganancia o pérdida total. Esto sugiere que los juegos de suma cero para dos jugadores forman el núcleo esencial de la teoría de juegos.

La complejidad y la suma no nula: Algunos autores, como Robert Wright, han teorizado sobre la evolución de la sociedad hacia formas crecientes de suma o aditividad no nula a medida que se va haciendo más compleja, especializada e interdependiente. Bill Clinton, uno de los que apoyan esta teoría sostiene: "Cuanto más complejas se vuelven las sociedades, y más complejas son las redes de interdependencia dentro y fuera de los límites de las comunidades y las naciones, un mayor número de gente estará interesada en encontrar soluciones de suma no nula". Esto es, soluciones ganancia - ganancia en lugar de soluciones ganancia - pérdida ... Porque descubrimos que cuanto más crece nuestra interdependencia, generalmente prosperamos cuando los demás también prosperan.

Ejemplo 2.1

Un juego de suma cero.

		Jugador 2		
		X	Y	Z
Jugador 1	A	$(30,-30)$	$(-10,10)$	$(20,-20)$
	B	$(10,-10)$	$(20,-20)$	$(-20,20)$

La matriz de recompensas de un juego es una forma de representación conveniente. El orden de juego es el siguiente: el primer jugador elige en secreto una de las dos acciones A o B; el segundo jugador; sin conocer la elección del primero, elige en secreto una de las tres acciones X, Y o Z. Entonces se revelan las elecciones de cada jugador y el total de puntos se ve afectado de acuerdo a la recompensa por tales elecciones.

El primer jugador elige B y el segundo elige Y. Cuando se asignan las recompensas, el primer jugador gana 20 puntos y el segundo pierde 20 puntos.

En este ejemplo los dos jugadores conocen la matriz de recompensas y tratan de maximizar sus puntos, ¿Qué deben hacer?.

El jugador 1 puede razonar de la siguiente forma: "con la acción B, puedo perder 20 puntos y ganar sólo 20, mientras que con la A puedo perder sólo 10 pero puedo ganar 30, así que A parece mucho mejor". Con un razonamiento similar,el jugador 2 elegirá Z. Si los dos jugadores toman esas elecciones, el primer jugador ganará 20 puntos. ¿Pero qué pasa si el jugador 2 anticipa el razonamiento del jugador 1, y elige Y, para ganar 10 puntos? ¿o si el primer jugador anticipa este truco y elige B, para ganar 20 puntos?

John von Neumann tuvo la idea fundamental y sorprendente de que la probabilidad proporciona una forma de salir de este enredo. En lugar de decidirse por una acción definitiva, los dos jugadores asignan probabilidades a sus acciones, y entonces usan un dispositivo que, de acuerdo con dichas probabilidades, elige una acción por ellos. Cada jugador calcula las probabilidades para minimizar el máximo valor esperado de las pérdidas independientemente de la estrategia del oponente; esto lleva a un problema de álgebra lineal con una solución única para cada jugador. Este método minimax puede calcular estrategias óptimas para todos los juegos de dos jugadores y suma cero.

Para el ejemplo de arriba, resulta que el primer jugador debe de elegir A con probabilidad 57 %, y la acción B con probabilidad 43 %, mientras que el segundo debería asignar las probabilidades 0 %, 57 % y 43 % a las tres opciones X, Y y Z. El jugador 1 ganará entonces 2,85 puntos de media por juego.

2.1. Juegos de suma cero - dos jugadores

Estos juegos, los más sencillos, consideran sólo dos oponentes (personas, grupos de personas, empresas, entidades, etc.) que se denominarán jugador fila y jugador columna; además se supone que lo ganado por uno es lo perdido por el contrario, de tal forma que la suma de las utilidades netas es cero.

Es el caso de la lucha competitiva de dos empresas (duopolio) por la participación del mercado. Aquí, cada punto de porcentaje ganado por una de las empresas necesariamente es una pérdida para la otra.

2.1.1. Matriz de Juego

La presentación cuantitativa de los resultados de cada par de Estrategias se realiza en una matriz denominada Matriz de juego o matriz de pago.

Las filas y columnas representan las Estrategias que tienen el jugador fila y el jugador columna, respectivamente. Los datos de la matriz se consideran desde el punto de vista del jugador fila.

Por lo tanto, una entrada positiva significa ganancia para dicho jugador, en tanto una entrada negativa le indicará pérdida y representará la ganancia del jugador contrario.

Ejemplo 2.1.1

Dos compañías de autobuses, A y B, explotan la misma ruta entre dos ciudades y están en una lucha por una mayor parte del mercado. Puesto que la parte total del mercado es un 100 por 100 fijo, cada punto porcentual ganado por uno debe ser perdido por el otro. Se dice que tal situación es un juego de suma cero de dos personas por las razones obvias de que el juego es jugado por dos jugadores diametralmente opuesto y que la suma de las ganancias y pérdidas es siempre cero.

Si se supone que la compañía A y la compañía B está considerando las tres mismas estrategias para ganar una mayor parte relativa del mercado como sigue:

1. a_1 o b_1: Sirve refrescos durante el viaje.

2. a_2 o b_2: Introduce autobuses con aire acondicionado.

3. a_3 o b_3: Anuncia diariamente en estaciones de televisión en las dos ciudades.

Por comodidad, se supone que antes de comenzar el juego ambas compañías no están haciendo ningún esfuerzo especial y comparten por igual el mercado -50 por 100 cada uná. Además, si se supone también que cada compañía no puede emplear más de uno de estas actitudes o estrategias al mismo tiempo y que las tres estrategias tienen idénticos costos. Por estos supuestos, hay un total de 3x3 = 9 combinaciones posibles de movimientos, y cada una es capaz de afectar a la parte del mercado en una forma específica. Por ejemplo, si A y B sirvan refrescos durante el viaje, se dice que A perdería 10 por 100 de la parte del mercado a favor de B, lo que puede indicar que los refrescos de B son más para los gustos de los clientes, igualmente, si A anuncia diariamente en estaciones de televisión en las dos ciudades y B, por ejemplo, sirve refrescos, se supone que A ganaría 20 por 100 del mercado en perjuicio de B; evidentemente, la publicidad en televisión parece ser más eficaz que servir refrescos.

Ahora, por cada una de las 9 combinaciones puede determinar ganancias o pérdidas del mercado para A como se indica en la siguiente matriz de pagos.

$$\begin{array}{cc} & \text{Compañia B} \\ & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \text{Compañia A} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} & \begin{pmatrix} -10 & -11 & 1 \\ 9 & -8 & -6 \\ 20 & -10 & -13 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.1.2. Casos

I. Juego de pares e impares

Consiste en que dos jugadores muestran al mismo tiempo uno o dos dedos. Si el número de dedos coincide, el jugador que apuesta a pares gana la apuesta al jugador que apuesta a impares. Si el número de dedos no coincide, el jugador que apuesta a pares paga la apuesta al jugador que apuesta a impares.

Supóngase que Fabián y Óscar apuestan a pares e impares \$1.000, escogiendo Fabián pares y Óscar impares. Halle la Matriz de juegos correspondiente.

Solución

Determinamos primero quién será el jugador fila y quien el jugador columna.

Arbitrariamente sean:

Jugador Fila: **Fabián**

Jugador Columna: **Óscar**

Definimos ahora las Estrategias para cada jugador:

Para **Fabián:**

Estrategia 1: Mostrar un dedo.

Estrategia 2: Mostrar dos dedos.

Para **Oscar:** Iguales Estrategias que las de Fabián.

Matriz de Juego

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Oscar} \\
 & & \begin{array}{cc} \quad 1 & \quad\quad 2 \end{array} \quad \rightarrow \text{Estrategia de Oscar} \\
\text{Fabian} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \downarrow \\ \text{Estrategia} \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La entrada (1, 1) de la Matriz de juego anterior representa el resultado de haber elegido, tanto Fabián como Óscar la estrategia de mostrar un dedo; en esta situación la suma da par, lo cual trae como consecuencia que gane quien apuesta a pares. Gana Fabián a Óscar los \$1.000 (dato positivo 1.000 de la entrada (1, 1). Similarmente se determinan las otras entradas.

II. Campaña Política

La candidatura presidencial de un determinado partido es disputada en estos momentos por dos de los políticos más influyentes, los cuales preparan sus planes de campaña para los dos últimos días antes del cierre oficial de las mismas.

Debido a que se encuentra bastante pareja la división del electorado entre estos dos políticos, estos dos últimos días se consideran decisivos.

Los "votantes indecisos" se encuentran en Medellín y Bucaramanga, por lo cual cada candidato está pensando pasar un día completo en cada ciudad o dos días en una sola de las ciudades.

Los jefes de campaña en cada ciudad han determinado el impacto que tendrán (en términos de votos ganados o perdidos) las distintas combinaciones posibles de los días dedicados a cada ciudad por cada candidato. Esta información (en miles de votos) es dada en la Matriz de juego siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \text{Politico } II \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{Politico } I \quad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -20 & -30 \\ 25 & -10 & 10 \\ 10 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde las Estrategias A, B y C son las mismas para cada jugador, y corresponden a:

A**:** Pasar un día en cada ciudad

B**:** Pasar ambos días en Medellín

C**:** Pasar ambos días en Bucaramanga

La entrada (1, 2) (-20) indica, por ejemplo, que si el político I decide pasar un día en cada ciudad (estrategia A, fila 1), en tanto su contrincante opta por pasar los dos días en Medellín (estrategia B, columna 2), el político II obtendría una ventaja de 20,000 votos sobre su oponente.

III. Mercadeo

El mercado de ciertos productos alimenticios se surte de dos empresas R y S. Debido al incremento de los costos, R quiere aumentar sus precios, pero teme que si lo hace perderá parte de las ventas a favor de S. Por otra parte, si disminuye los precios en tanto que S los aumenta, el incremento en las ventas podría compensar con creces las menores utilidades por artículo. De todas formas R no desea mantener los precios actuales así S lo haga, pero considera la posibilidad de establecer rifas por compras superiores a cierta cantidad.

Un analista de mercados contratado por R ha estimado qué porcentaje del mercado total ganaría o perdería R según las Estrategias escogidas por cada una de las empresas. La información dada por el analista indica que la empresa S considera como alternativas: mantener los precios, aumentarlos o disminuirlos.

Así pues, si ambos deciden aumentar sus precios R ganará un 2 % del mercado, en tanto que si ambos disminuyen sus precios cada cual conservará su participación. En caso de aumentar R sus precios perdería un 5 % si S disminuye los suyos, y un 1 % si S los mantiene. Si R disminuye sus precios y S los aumenta o conserva R ganaría un 1 % y un 2 %, respectivamente. Al escoger R la estrategia de efectuar rifas perdería un 1 % del mercado si su competidor mantiene los precios, pero ganaría un 3 % si los aumenta y un 2 % si los disminuye.

Determine la Matriz de juegos correspondiente.

Solución:

Jugador Fila: *Empresa R*

Jugador Columna: *Empresa S*

Estrategias:

Para R: A: Aumentar los precios
R: Efectuar Rifas
D: Disminuir los precios

Para S: A: Aumentar los precios
M: Mantener los precios.
D: Disminuir los precios.

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Empresa } S \\
 & & \begin{array}{ccc} A & M & D \end{array} \\
\text{Empresa } R & \begin{array}{c} A \\ R \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

IV. Publicidad:

La publicidad desatada por las empresas Knorr y Maggi, las cuales se disputan el mercado de cierto producto alimenticio, ha determinado que los respectivos gerentes de publicidad deben crear estrategias para aumentar su participación o por lo menos contrarrestar las de su competidor.

- Maggi ha considerado como Estrategias posibles las siguientes:

  M_1: Cambiar la presentación de su producto y aumentar su contenido promocionándolo como "Más y mejor que cualquier otro".

  M_2: Contratar los servicios de una figura en el mundo de la farándula y otra en los deportes para realizar comerciales ofreciendo su producto actual.

  M_3: Asociarse con una compañía de artículos para cocina y ofrecer el producto con un "regalo para el hogar" de sus productos Maggi.

- Knorr, por su parte, ha escogido como alternativas:

  K_1: Enviar bonos regalo a una muestra grande de amas de casa de la competencia y de su firma, que les permita adquirir el producto con un 40 % de descuento y realizar una gran publicidad de la "oferta".

  K_2: Hacer una gran "rifa Knorr", consistente en sortear los sobres con respuestas acertadas sobre ciertas características del producto, las cuales son difundidas por radio, TV y prensa durante un tiempo determinado con premios bastante llamativos.

La participación del mercado es aproximadamente igual para las dos empresas; por lo tanto, los analistas y expertos en mercadotecnia de Maggi han determinado, en términos de porcentaje sobre la base actual, la cantidad que conservará Maggi y la cantidad que le ganará a su contendor según cada posible jugada. Esta información es dada en la tabla siguiente:

		Conserva	Gana a Knorr
M_1	K_1	60 %	46 %
	K_2	50 %	42 %
M_2	K_1	45 %	60 %
	K_2	66 %	35 %
M_3	K_1	63 %	27 %
	K_2	81 %	22 %

Determine la Matriz de juegos correspondiente.

Solución:

Jugador Fila: Maggi *Jugador Columna: Knorr*

Estrategias para Maggi: M_1, M_2, M_3 *Estrategias para Knorr:* K_1, K_2

Matriz de Juego:

Se debe determinar el porcentaje neto de clientes en que aumentará y disminuirá el mercado de cada compañía.

Concretamente, si Maggi elige la estrategia M_1 y Knorr escoge K_1, entonces, de acuerdo a los datos dados en la tabla, Maggi conservará el 60 % (es decir, pierde el 40 % de su mercado a favor de Knorr) pero gana un 46 %; por consiguiente, obtiene un incremento neto del 6 % (entrada (1,1) de la Matriz de juegos). Pero si Maggi elige M_1 y Knorr se decide por K_2, Maggi pierde un 50 %, al sólo conservar el 50 %, pero gana un 42 %; en consecuencia, obtiene una pérdida del 8 % ($-50\,\% + 42\,\% = -8\,\%$).

Razonando similarmente llegamos a la Matriz de juegos siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Knorr} \\ & & \begin{array}{cc} K_1 & K_2 \end{array} \\ \text{Maggi} & \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6\,\% & -8\,\% \\ 5\,\% & 1\,\% \\ -10\,\% & 3\,\% \end{pmatrix} \end{array}$$

Capítulo 3

Juegos de Suma Constante

Un juego de suma constante para dos personas es un juego donde participan dos contrincantes en el cual, para cualquier elección de estrategias de ambos jugadores, la recompensa del jugador de las filas y la recompensa del jugador de las columnas suma un valor constante c.
Los juegos de suma constante se caracterizan por lo siguiente:

1. Hay dos jugadores (el jugador de las *filas* y el jugador de las *columnas*)

2. El jugador de las filas debe elegir una de m estrategias. El jugador de las columnas debe elegir, simultáneamente, una de n estrategias.

3. El jugador de las filas elije su *i-enésima* estrategia y el jugador de las columnas elije su *j-enésima* estrategia, entonces el jugador de las filas gana una recompensa de a_{ij} y el jugador de las columnas pierde una recompensa de $c - a_{ij}$. Donde c es un valor constante ($c \geq a_{ij}$). Por lo tanto se podría pensar que la recompensa a_{ij} del jugador de las filas proviene del jugador de las columnas.

Esto se ilustra en la siguiente matriz:

Matriz 1

		Jugador de las columnas			
		Columna 1	Columna 2	$(\dots)$	Columna n
Jugador de las Filas	Fila 1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
	Fila 2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
	$(\dots)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
	Fila n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nn}

El juego de suma constante para dos personas tiene la propiedad de que para cualquier opción de estrategias, la suma de recompensas para los jugadores es una constante, c. En este juego, cada peso que gana un participante proviene del bolsillo del otro; así, ellos siempre tendrán conflictos de intereses. Por lo tanto, nunca habrá cooperación entre los dos jugadores.

Suposición básica de la teoría de juegos de suma constante para dos personas

Cada jugador elige una estrategia que lo posibilita a hacer lo mejor que puede, dado que su oponente conoce la estrategia que está siguiendo. Cada jugador intentará maximizar su ganancia o minimizar su pérdida en función de la estrategia que elija su oponente. Por lo tanto el jugador de las filas elegirá la fila cuyo mínimo valor sea el máximo comparado con las otras filas. Similarmente, el jugador de las columnas elegirá la columna cuyo máximo valor sea el mínimo comparado con las demás columnas.

De esta manera, si bien cada jugador no puede obtener el máximo beneficio de toda la matriz se asegura una cifra mínima.

En particular, hay matrices que cumplen con la siguiente condición:

Condición 1

$\text{máx}_{p/toda\ fila}(\text{mínimo de la fila}) = \text{mín}_{p/toda\ columna}$ (máximo de columna)

Si este es el caso, los jugadores elegirán la fila y columna que satisfaga esta condición dado que es la optima condición que pueden alcanzar según sus posibilidades estratégicas de elección.

Se ilustra la matriz 1 con los agregados de máximos y mínimos de columnas y filas respectivamente.

Matriz 2

		Jugador de las columnas				
		Columna 1	Columna 2	(...)	Columna n	mín de filas
Jugador de las Filas	Fila 1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	mín (a_{1i})
	Fila 2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	mín (a_{2i})
	(...)	...	...	...	...	...
	Fila n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	mín (a_{mi})
	máx Colum.	máx (a_{i1})	máx (a_{i2})	...	máx (a_{in})	

Se dice que las matrices que cumplen con la condición mencionada tienen un **punto silla**. Si un juego de suma constante para dos personas tiene un punto silla, entonces el jugador de las filas debe elegir cualquier estrategia (con las filas) que alcance el máximo en el lado izquierdo de la condición 1. El jugador de las columnas debe aplicar cualquier estrategia (en las columnas) que logre un mínimo en el lado derecho de la condición 1.

Si un juego tiene un punto silla, entonces el valor común de ambos lados de la condición 1 se llama **valor (v)** del juego del jugador de las filas.

Se puede pensar también que un punto silla es un **punto de equilibrio** porque ningún jugador puede beneficiarse con un cambio unilateral en la estrategia.

Si un juego cumple con la siguiente condición no tiene punto silla:

Condición 2

$max_{p/toda\ fila}$(mínimo de la fila)$<$ $\text{mín}_{p/toda\ columna}$(máximo de columna)

Ejemplo 3.1

Las dos cadenas de televisión nacional: TV Colombia y TV Nal se disputan una audición de 20 millones de espectadores en el horario de 8.30 a 9.30 p.m. Ambas cadenas deben anunciar a la misma hora por sus respectivos canales el programa que presentaran en dicho horario. Las alternativas para el tipo de programa en ambas cadenas son:

1. Novela
2. Noticiero
3. Programa de concurso
4. Documental

La matriz de resultados correspondiente (millones de personas que verían la cadena a esta hora, de acuerdo a las alternativas elegidas por cada cadena) ha sido elaborada por varios analistas y presentada como:

$$\begin{array}{cc} & \text{TVColombia} \\ \text{TVNal} & \begin{pmatrix} 8 & 13 & 15 & 6 \\ 16 & 11 & 8 & 10 \\ 7 & 9 & 12 & 5 \\ 12 & 6 & 14 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

En este juego, ambas cadenas se disputan un total de 20 millones de espectadores (valor constante). La entrada $(1, 1)$ de la matriz de resultados nos indican que si ambas cadenas escogen presentar una novela, la audición por la cadena TV Nal será de 8 millones, y en consecuencia $20 - 8 = 12$ millones verán la cadena TV Colombia.

Note que un juego de suma cero es un juego particular de suma constante (el valor constante sería cero). En consecuencia, un juego de suma cero conserva la característica de que ambos jugadores pretenden la máxima ganancia del juego, lo cual hace que el aumento de las ganancias de uno de los jugadores disminuya las ganancias del otro. Así pues, los métodos de Solución para encontrar las Estrategias óptimas de cada jugador son los mismos que los usados para juegos de suma cero; la única diferencia esta en la interpretación de los resultados. Además, puede notarse que la matriz de resultados tiene todas sus entradas positivas o cero; las perdidas son más bien un costo de oportunidad.

Capítulo 4

Estrategias Dominadas

Se dice que una estrategia domina a la otra, si todos los resultados de esta estrategia son preferibles (produce mejores resultados o mayores ganancias) a los resultados de otra estrategia, independientemente de lo que haga el oponente. Si cada jugador tiene una estrategia dominada es posible predecir el resultado del juego. Es decir que dadas dos Estrategias A y B del mismo jugador, se dice que la estrategia B es dominada por la estrategia A (A domina a B) si bajo cualquier elección de estrategia de su oponente A es al menos tan buena como B.

Ejemplo 4.1

Observe la siguiente matriz de resultados:

		Jugador 2	
		X	Y
	A	0 \ 50	0 \ 40
Jugador 1	B	12 \ 45	-5 \ 35
	C	-2 \ 40	-6 \ 38

Como podemos observar en la gráfica si el jugador 1 elige la opción A y el jugador 2 escoge la opción X el primer jugador no gana puntos mientras que el segundo jugador ganara 50 puntos, pero si el jugador 1 elige la opción A y el jugador 2 escoge la opción Y el primer jugador no gana puntos y el segundo jugador ganara 40 puntos. Independientemente de lo que haga el Jugador 1, para el jugador 2 siempre será preferible la estrategia X. Se dice que la estrategia X domina a la estrategia Y. El jugador 2 nunca escogerá la estrategia Y porque con la estrategia X ganaría más puntos que con la estrategia Y.

Ejemplo 4.2

En el caso II de la campaña política, cuya Matriz de juego es.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Politico II} \\ & & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{Politico I} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -20 & -30 \\ 25 & -10 & 10 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Considere las Estrategias A y C del político I. Observe que para este político la estrategia C (pasar ambos días en Bucaramanga) tiene mejores resultados que la A (pasar un día en cada ciudad) en cualquiera de las opciones que pueda escoger su oponente ($10 > 0$; $4 > -20$; $5 > -30$).

Esto no implica necesariamente que la mejor "elección" del político I sea la estrategia C. Sólo nos indica que debemos descartar la estrategia A (estrategia dominada) como posible estrategia óptima.

Sin embargo, en ocasiones es posible llegar a la estrategia "óptima" por exclusión de Estrategias dominadas, como ocurre en este caso.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -20 & -30 \leftarrow \\ 25 & -10 & 10 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Estrategia dominada por C para el Politico I (se descarta A)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} \downarrow 25 & -10 & 10 \\ 10 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Estrategia dominada por B y C para el Politico II (se descarta A)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} -10 & 10 \downarrow \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Estrategia dominada por B para el Politico II (se descarta C)

$$\begin{array}{cc} & B \\ \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Estrategia dominada por C para el Politico I (se descarta B)

$$\begin{array}{cc} & B \\ C & (4) \end{array}$$

Así pues, las Estrategias óptimas para los dos políticos son:

Político I:	*Estrategia C*	Pasar ambos días en Bucaramanga
Político II:	*Estrategia B*	Pasar ambos días en Medellín

Esto llevaría al político I a ganarle 4.000 votos al político II en caso de jugar el político II su mejor estrategia (la B). El político II perdería lo menos posible.

Al no elegir alguno de ellos su estrategia óptima, en tanto el contrario sí lo hiciese, le iría peor. Suponga por ejemplo que el político I no se decide por su mejor alternativa (la C), sino que se decide por la B, y suponga que su oponente sí escoge su mejor estrategia: la B. Esto conduciría a que el político I perdiera 10.000 votos en vez de ganar 4.000.

Ejemplo 4.3

Consideremos el juego de la siguiente figura.

Jugador 2

Jugador 1		a_1	b_2	c_2
	a_1	$2,4$	$3,2$	$3,1$
	b_1	$0,3$	$1,6$	$7,5$

En la primera ronda de eliminación iterada del juego, podemos eliminar la estrategia c_2 del jugador 2 ya que su estrategia b_2 la domina estrictamente. De esta forma, el juego queda reducido a un juego de dos estrategias para cada jugador, como se muestra a continuación.

Jugador 2

Jugador 1		a_2	b_2
	a_1	$2,4$	$3,2$
	b_1	$0,3$	$1,6$

Ahora:como el jugador 1 prevé que el 2 nunca jugará c_2, elimina su estrategia b_1 ya que a_1 la domina estrictamente, con lo que el juego se reduce a la siguiente figura. Eliminamos luego la estrategia b_2 del jugador 2 por estar dominada estrictamente por la estrategia a_2, quedando como solución al juego el par de estrategias (a_1, a_2) con pagos de 2 para el jugador 1 y de 4 para el jugador 2.

Jugador 2

Jugador 1		a_2	b_2
	a_1	$2,4$	$3,2$

Capítulo 5

Estrategias Puras

En caso de que cada jugador pueda escoger una sola de sus Estrategias como óptima y la misma en cualquier jugada, en el sentido de:

- Ser tan buena o mejor que cualquiera de las demás bajo las diferentes opciones del contrario (dominar todas las demás Estrategias factibles), o
- No poder ninguno de los jugadores aprovechar la estrategia del oponente para mejorar la propia.

Entonces se dice que la solución del juego es de *Estrategia Pura*.

Criterios Maximin y Minimax en juegos de estrategia pura: Estos criterios sirven para obtener la solución de un juego y determinar la estrategia óptima de un jugador:

- **Criterio Maximin:** Identifica los mínimos por fila y selecciona el mayor.
- **Criterio Minimax:** Identifica los máximos por columna y selecciona el menor.

Si el valor maximin del primer jugador es igual al minimax del segundo jugador, entonces el juego es de estrategia pura (existe un punto de silla de montar). El valor del juego para el primer jugador es su valor maximin.

Ejemplo 5.1

Dos gasolineras se encuentran una frente a la otra. Los consumidores están pendientes del precio y cada gasolinera debe decidir si cobra un precio alto o uno bajo. La matriz de recompensas es la siguiente:

		Gasolinera 1	
		Alto	*Bajo*
Gasolinera 2	*Alto*	0 \ -2	-2 \ 2
	Bajo	2 \ 0	0 \ 0

Resolviendo y aplicando los criterios maximin y minimax:

		Gasolinera 1		
		Alto	*Bajo*	Mínimos
Gasolinera 2	*Alto*	0 \ 0	-2 \ 2	0→maximin
	Bajo	2 \ -2	0 \ 0	-2
	mínimos	2	0 minimax	

Dado que el valor maximin del primer jugador es igual al minimax del segundo jugador, entonces el juego es de estrategia pura (existe un punto de silla de montar). Ambos jugadores escogen bajar sus precios. El valor del juego para el primer jugador es 0 y para el segundo jugador también.

Ejemplo 5.2

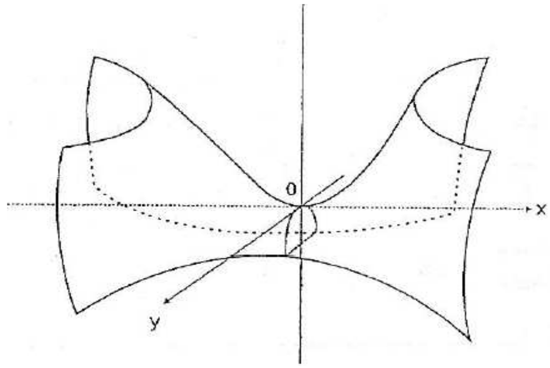
Considere la matriz de juegos siguiente:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} & \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observe que no existen Estrategias dominadas en esta matriz, ni para el jugador fila ni para el jugador columna; pero la Estrategia II y 3 de los jugadores fila y columna respectivamente, hacen que el juego sea estable ya que, por ejemplo, el jugador fila, aún sabiendo que su oponente jugará con la estrategia 3, no puede aprovechar esta situación para mejorar su jugada (con las otras estrategias le iría peor). Igualmente el jugador columna no puede sacar ningún beneficio al saber que su contrario jugará con la estrategia II.

Estas Estrategias puras "óptimas" se pueden determinar si al utilizar el criterio del *maximin/minimax*, el cual se basa en el hecho de escoger cada jugador como estrategia aquella que le dé el resultado "menos malo" de las distintas posibilidades, se logran resultados iguales. En tal caso se estaría en una situación de punto de silla.

Por consiguiente se tomaría lo peor que le puede pasar en cada estrategia a cada jugador y se escogería luego la estrategia que corresponda al mejor de estos valores (lo mejor de lo peor). Este resultado igual para ambos jugadores, determina las Estrategias óptimas de cada jugador y se conoce como *Valor del Juego*. Si este valor es positivo, se dice que el juego es favorable al jugador fila; si es cero, se dice que el juego es justo, y en otro caso que le es desfavorable.



Observe además que, de ser posible determinar las Estrategias óptimas por medio de las Estrategias dominadas, el resultado de estas Estrategias óptimas corresponde a un punto de silla.

Ejemplo 5.3

Determine si las siguientes matrices de juego tienen punto de silla y, si este es el caso, indique sus Estrategias óptimas y el correspondiente valor del juego.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{Caso } a$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \begin{array}{c} \Omega \\ \sum \\ \Psi \end{array} & \begin{bmatrix} 10 & -3 & -7 \\ -7 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{Caso } b$$

$$\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad \textbf{Caso } c$$

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & T & V \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \textbf{Caso } d$$

Solución:

Caso a

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ \text{Máx. columna} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Mínimo fila} \\ 1 \\ -4 \\ 1 \\ \\ \end{array}$$

Puesto que el mejor de los peores valores del jugador fila es 1, el cual es diferente al mejor de los peores valores del jugador columna (2), entonces no existe punto de silla; juego no estable.

Caso b

$$\begin{array}{c} \\ \Omega \\ \sum \\ \Psi \\ \text{Máx. columna} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r & s & t \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & -3 & -7 \\ -7 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 10 & 0 & 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{Mínimo fila} \\ -7 \\ -7 \\ 0 \\ \\ \end{array}$$

El mayor de los menores valores de las filas es (0), el cual coincide con el menor de los mayores valores de las columnas, luego existe punto silla. Estrategias óptimas: Jugador fila: Ψ, jugador columna s, valor del juego: 0; juego estable y justo

Caso c

$$\begin{array}{lcc} & \begin{array}{cccc} I & II & III & IV \end{array} & \text{Mínimo fila} \\ \alpha & & -5 \\ \beta & \left[\begin{array}{cccc} 3 & -5 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & -2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] & -4 \\ \delta & & 2 \\ \text{Máx. columna} & \begin{array}{cccc} 5 & 4 & 2 & 6 \end{array} & \end{array}$$

El mejor de los peores pagos para el jugador fila es (2), que coincide con lo mejor de lo peor para el jugador columna: (2); consecuencia: existente punto silla. Estrategias óptimas: δ para el jugador fila y III para el jugador columna: juego estable. Valor del juego: 2, favorable al jugador fila.

Caso d

$$\begin{array}{lcc} & \begin{array}{ccc} S & T & V \end{array} & \text{Mínimo fila} \\ a & & 1 \\ b & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{array}\right] & -4 \\ c & & -2 \\ \text{Máx. columna} & \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \end{array} & \end{array}$$

Jugador fila : lo mejor de lo peor (1); jugador columna: lo menos malo (1). Estos valores son iguales, por lo tanto existe punto silla. Existen dos puntos silla. Se localizan las entradas (1,1) y (1,3). Estrategias óptimas: para el jugador fila la a y para el columna la S o la V. Valor del juego: 1, favorable al jugador fila.

Observe que en los casos c y d las Estrategias óptimas podían haberse determinado mediante Estrategias dominadas y en consecuencia el valor del juego corresponde al punto de silla. En el caso c inicialmente la estrategia δ domina a β, luego II domina a I, y III domina a IV. Finalmente, δ domina a α. Pero no siempre que existan puntos de silla, estos pueden determinarse con Estrategias dominadas, (considere el caso b).

También observe que una matriz de juego puede tener varios puntos de silla, pero el valor de dicho punto debe ser el mismo.
Nota: otra forma de determinar si existe punto de silla es considerar el menor valor de cada fila y observar si este es a su vez el mayor de la columna respectiva. Si ocurre esto, este seria un punto de silla; de lo contrario no existe punto de silla.

Ejemplo 5.4

Supongamos que la matriz de juego que indica el porcentaje de mercado que ganaría o perdería Icollantas compitiendo con la Good Year (con quien comparte el 100 % del mercado de llantas), de acuerdo a las diferentes combinaciones de Estrategias utilizadas es dada por:

$$\begin{array}{cc} & \text{Good Year} \\ & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \text{Icollantas} \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -15 & 10 & -8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 10 & -7 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se observa que no existen Estrategias dominadas en ninguna de las dos empresas. ¿Cómo jugar?.

Solución:

Decisión "racional"

Se evalúan las Estrategias "puras" de Icollantas: si escoge I_1 se arriesga a perder entre un 8 % y un 15 % de su mercado, aunque la posibilidad de generarle a Good Year un 10 % de sus clientes parece llamativa; posiblemente los gerentes de Good Year (quienes no son ningunos tontos) no escogerán la estrategia B, que sería la que le permitiría a Icollantas ganar tal porcentaje. Cosa similar ocurre si Icollantas escoge I_3 como su estrategia. Ofrece más garantía para Icollantas la estrategia de I_2, puesto que asegura como mínimo una ganancia de un 1 % del mercado de la Good year; parece entonces la decisión más "racional" para Icollantas.

El análisis para la Good Year le llevará a elegir a C como su "mejor" estrategia, puesto lo peor que le podría pasar sería el perder el 1 % de su mercado; además tendría la opción (si su oponente no juega de la mejor manera) de ganarle un 2 % o un 8 % del mercado.

Con A corre mayor riesgo pues podría perder entre un 5 % y un 10 % (ya que Icollantas posiblemente no escogería I_1), e igual ocurre con B (perdería entre un 3 % y un 10 %).

En conclusión, las decisiones racionales que ofrecen más garantía son la estrategia I_2 para Icollantas y la C para la Good Year. Veamos que esta decisión coincide con la decisión del criterio *maximin/minimax*:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \text{Good Year} & \\
 & & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} & \text{Mínimo fila} \\
\text{Icollantas} & \begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -15 & 10 & -8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 10 & -7 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{-15} \\ 1 \\ \text{-7} \end{array} \\
 & \text{Máx. columna} & \begin{array}{ccc} 10 & 10 & 1 \end{array} &
\end{array}
$$

El valor que es a la vez mínimo de la fila (lo peor que le puede ocurrir al jugador fila) y máximo de columna (lo más malo para el jugador columna) es (1), localizando en la entrada (2, 3) de la matriz.

Por consiguiente, las Estrategias óptimas del juego son: la I_2 para Icollantas y la C para la Good Year. Valor del juego: 1, que se interpreta como que estas decisiones ocasionaría una pérdida del 1 % del mercado de la Good Year a favor de Icollantas.

Capítulo 6

Estrategias Mixtas

Una estrategia pura es una estrategia que no involucra el azar. Un jugador que utiliza una estrategia pura es completamente predecible, como el mecanismo de un reloj. Una estrategia Mixta incluye el azar. Un jugador utiliza una estrategia mixta cuando no quiere hacerse completamente predecible. Matemáticamente, una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre estrategias puras. Algunas estrategias puras no pueden ser utilizadas en absoluto, pero al menos dos estrategias puras son utilizadas con probabilidad positiva. Un jugador que utiliza una estrategia mixta se ha reemplazado así mismo por un mecanismo aleatorio y ha fijado las probabilidades que gobiernan ese mecanismo en un intento de maximizar su utilidad esperada.

Si el juego no tiene una estrategia "pura" óptima para cada jugador, es decir, no existe punto de silla, entonces la teoría de juegos aconseja a cada jugador asignar una distribución de probabilidad al conjunto de Estrategias que quedan luego de descartar Estrategias Dominadas.

Sean $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ las n estrategias del jugador fila, y $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ las m estrategias del jugador columna.

p_i: Probabilidad de que el jugador fila use la estrategia $E_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$
q_j: Probabilidad de que el jugador columna use la estrategia $P_j (j = 1, 2, 3, \ldots, m)$.

Entonces el plan de juego $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ donde $0 \leq p_i \leq 1$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, se denomina estrategia mixta del jugador fila, y $(q_1, q, q_3, \ldots, q_m)$, donde $0 \leq q_j \leq 1$ y

$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, se denomina estrategia mixta del jugador columna.

Ejemplo 6.1

El juego mas simple en el que las estrategias mixtas son importantes es muy conocido, el juego de las monedas. La representación en forma normal del juego de las monedas aparece en la siguiente figura.

Jugador 2

Jugador 1	Cara	Cruz
Cara	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Cruz	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Cada jugador juega una cantidad fija de 1000 pesos y como podemos observar en la figura si ambos jugadores eligen cara el jugador 1 gana mil pesos y el jugador 2 pierde mil pesos, pero si el jugador 1 escoge cara y el jugador 2 cruz el primero pierde mil pesos y el segundo gana mil pesos, cuando los dos jugadores escogen cruz el primer jugador gana mil pesos y el segundo pierde mil pesos y si el primer jugador escoge cruz y el segundo escoge cara el primero pierde mil pesos y el segundo gana mil pesos.

Hay dos jugadores, y el juego es de suma cero. Cada jugador tiene dos estrategias puras, cara (C) y cruz ($+$). Cada jugador se juega una cantidad fija de mil pesos. Si ambos jugadores eligen cara o ambos eligen cruz (lo que se llama formar una pareja), el jugador 1 gana la apuesta al jugador 2. Si no hay pareja; es decir si un jugador elige cara y el otro cruz, el jugador 2 gana la apuesta al jugador 1.

Nótese en la figura el juego de monedas no tiene equilibrio en estrategias puras. Tomemos (C, C), el jugador 2 tiene incentivos para jugar cruz ($+$), convirtiendo asi una pérdida de mil pesos en una ganancia de mil pesos. Lo mismo ocurre en cada una de las cuatro combinaciones de estrategias puras. Uno de los jugadores quiere cambiar de estrategia. Por lo tanto, ninguna de las combinaciones de estrategias puras es un punto de silla. El juego de las monedas no puede ser resuelto utilizando estrategias puras.

No obstante, el juego de las monedas tiene una solución, aunque no puede verse en la gráfica. Para encontrar esta solución recurrimos a estrategias mixtas. Esto no debería sorprender del todo. La forma en que la gente normalmente juega al juego de las monedas es lanzando una moneda al aire . El acto de lanzar una moneda al aire es un mecanismo aleatorio para escoger entre cara y cruz. Como vemos la solución del juego de las monedas requiere que cada jugador lance una moneda al aire con una probabilidad de 0,5 de que salga cara. Por lo tanto, la forma en que la gente juega este juego en la vida real tiene sentido desde el punto de vista de la teoría de juegos.

Ejemplo 6.2

Otro ejemplo llamado oportunidad de mercadeo, donde la importancia de las estrategias mixtas no es tan evidente. Hay dos empresas, 1 y 2, y una única oportunidad de mercadeo que cualquiera de ellas podría aprovechar. Si una empresa aprovecha la oportunidad de mercadeo, obtiene un beneficio de 100. Si ambas empresas aprovechan la oportunidad de mercadeo, cada una pierde 50. Si una empresa permanece fuera de este mercadeo, ni gana ni pierde. Las empresas deciden si entrar o no entrar simultáneamente. La siguiente figura normal de oportunidad de mercadeo.

		Empresa 2	
		Entrar	Quedarse Fuera
Empresa 1	Entrar	$(-50,-50)$	$(100,0)$
	Quedarse Fuera	$(0,100)$	$(0,0)$

Como podemos observar en la gráfica si la empresa 1 y la empresa 2 eligen de entrar al mercado ambas empresas pierden -50 pero si la empresa 1 elige entrar y la empresa 2 quedarse fuera, la empresa 1 gana 100 al contrario si la empresa 2 entra al mercado y la empresa 1 decide quedarse por fuera la empresa 2 gana 100; y si ambas deciden quedarsen por fuera del mercado ni ganan ni pierden.

A partir del diagrama de flechas puede verse que la oportunidad de mercadeo tiene dos equilibrios de estrategias puras, (entrar, quedarse fuera) y (quedarse fuera, entrar). En ambos, una empresa aprovecha la oportunidad de mercadeo. La empresa que entra en el mercadeo disfruta de una ganancia mucho mayor que la empresa que se quede fuera. Nótese también que este juego es simétrico: ambas empresas obtienen las mismas ganancias cuando utilizan las mismas estrategias. Cuando se intercambian las estrategias, se intercambian las ganancias. Los dos equilibrios en estrategias puras, donde los jugadores utilizan estrategias diferentes y obtienen ganancias muy diferentes, son asimétricos: las empresas obtienen ganancias muy diferentes. Oportunidad de mercado también es un equilibrio simétrico (donde ambos jugadores utilizan igual estrategia), que no puede verse en el diagrama de flechas. Este equilibrio es una estrategia mixta y en el cada jugador recibe las mismas ganancias.

Ejemplo 6.3

En el caso I de pares e impares, el cual consiste en que dos jugadores muestran al mismo tiempo uno o dos dedos. Si el número de dedos coincide, el jugador que apuesta a pares gana la apuesta al jugador que apuesta a impares. Si el número de dedos no coincide, el jugador que apuesta a pares paga la apuesta al jugador que apuesta a impares.

Teniendo en cuenta que Fabián y Óscar apuestan a pares e impares $1.000, escogiendo Fabián pares y Óscar impares.

Definimos ahora las Estrategias para cada jugador:

Para **Fabián:**

Estrategia 1: Mostrar un dedo.

Estrategia 2: Mostrar dos dedos.

Para **Oscar:** Iguales Estrategias que las de Fabián.

Matriz de Juego

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Oscar} \\
 & & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \quad \rightarrow \text{Estrategia de Oscar} \\
\text{Fabian} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \downarrow \\ \text{Estrategia} \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

En este caso no existen estrategias dominadas ni punto de silla, Fabián y Óscar eligen las Estrategias mixtas $(p_1, p_2) = (1, 0)$ y $(q_1, q_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Esta selección indica que Fabián está descartando por completo la estrategia II (usa solo la estrategia pura 1), en tanto Óscar da igual oportunidad a cada estrategia. Fabián siempre mostrará un dedo y Óscar “aleatoriamente” (lanza una moneda para escoger) mostrará uno o dos dedos.

6.1. Valor Esperado

Puesto que las situaciones aleatorias no dan resultados ciento por ciento satisfactorios, no es posible determinar con exactitud el valor del juego como se hizo en las Estrategias puras; pero la noción de valor esperado, o esperanza matemática de la estadística, es una herramienta útil para estimar este valor.

Por definición, el valor esperado de la variable aleatoria X es:

$$VE(X) = \sum_i p_i X_i$$

Donde p_i es la probabilidad de ocurrencia de X_i (valor de la variable X). En el caso de la Teoría de Juegos el Valor esperado (VE) del juego es:

$$VE(X) = \sum \sum p_i q_i V_{ij}$$

Donde V_{ij} es el resultado del juego en caso de que el jugador fila use la estrategia i, el jugador columna la estrategia j, y p_i, q_j; son las probabilidades correspondientes al utilizar los jugadores fila y columna, respectivamente, las Estrategias i y j:

Matricialmente este valor puede hallarse mediante la fórmula:

$$V(P,Q) = PAQ^t$$

Donde P, Q indican los planes o Estrategias mixtas de los jugadores fila y columna, respectivamente, y A es la Matriz de juego correspondiente. Este valor puede entenderse como el que se espera del juego si este se realiza un “gran número de veces”.

Ejemplo 6.1.1

Suponga que ganamos \$500 si al lanzar un dado sacamos un número mayor de 4 y perderemos \$300 en caso contrario.
Al analizar el juego, con el objeto de ver lo que podríamos obtener de él al realizarlo un gran número de veces, se tendría:
Dos posibilidades de ganar el juego (sacar 5 ó 6) dentro de 6 posibles resultados

y cuatro posibilidades de perder el juego (sacar 1,2,3 y 4) dentro de 6 posibles resultados; en consecuencia, podemos ganar con probabilidad de $\frac{2}{6}(=\frac{1}{3})$, y podemos perder con probabilidad de $\frac{4}{6}(=\frac{2}{3})$.

Se espera entonces, "a la larga", tener: $VE = (ganancia)(probabilidad\ de\ ganancia) - (perdida)(probabilidad\ de\ perdida) = \$500(\frac{1}{3}) - \$300(\frac{2}{3}) = -\frac{100}{3} \approx -\$33,33$ dentro del bolsillo; es decir, estaríamos perdiendo aproximadamente \$33,33, lo que indica que este es un juego desfavorable para nosotros.

Ejemplo 6.1.2

Encuentre el valor esperado del juego para el caso IV: publicidad, si Maggi decide utilizar la estrategia mixta $(p_1, p_2, p_3) = (0{,}3 \quad 0{,}6 \quad 0{,}1)$, y Knorr escoge $(q_1, q_2) = (0{,}2 \quad 0{,}8)$

Por definición, $V(P_1, Q) = PAQ^t$, donde P y Q son las Estrategias mixtas de los jugadores fila y columna, respectivamente, y A es la Matriz de Juego correspondiente. Luego:

$$V(P,Q) = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 6\,\% & -8\,\% \\ 5\,\% & 1\,\% \\ -10\,\% & 3\,\% \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}8\,\% & -1{,}5\,\% \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} = (-0{,}44\,\%)$$

Se espera, a la larga, usando estas Estrategias mixtas, que Maggi pierda un 0,44 % del mercado a favor de Knorr.

Ejemplo 6.1.3

Los jugadores cuentan juntos 1 . . . 2 . . . 3; "Piedra, papel o tijera" y justo al acabar muestran todos al mismo tiempo una de sus manos, de modo que puede verse el arma que cada uno ha elegido:

Piedra: un puño cerrado.
Papel: todos los dedos extendidos, con la palma de la mano mirando hacia abajo, arriba o de lado.
Tijera: dedos índice y corazón extendidos y separados formando una V.

El objetivo es vencer al oponente seleccionando el arma que gana a la que ha elegido él, siguiendo estas reglas:

- La piedra aplasta o rompe la tijera (gana la piedra)
- La tijera corta el papel (gana la tijera)
- El papel envuelve la piedra (gana el papel)
- Si los jugadores eligen la misma arma es un empate y se juega otra vez.

Aquí es una variable de "piedra, papel, tijera" en la que "Papel/Papel" y "Piedra/Piedra" ya no está un empate

$$\begin{array}{l} \\ \text{Pa=Papel} \\ \text{Ti=tijera} \\ \text{Pi=Piedra} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Pa} & \text{Ti} & \text{Pi} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad =\text{P}$$

Suponga que el jugador de la fila usa la estrategia mixta.

$$R = \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

(Juega papel 75 % del tiempo, 0 % del tiempo juega tijeras y piedra 25 % del tiempo) y el jugador columna juega tijeras y piedra 50 % del tiempo cada uno;

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Entonces el valor esperado del juego es:

$$\begin{aligned} V_E &= RPC^t \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \\ &= -0{,}125 \end{aligned}$$

6.2. Valor Inferior y Superior del juego

La determinación de las Estrategias mixtas óptimas se basa en la generalización del criterio mínimax/maximín, en el sentido de elegir la estrategia mixta que maximice el pago esperado mínimo o minimice la máxima pérdida. Este pago esperado para el jugador fila se denomina valor inferior del juego (V_j); y para el jugador columna, valor superior del juego (V_s).

Nuestro problema radica precisamente en que el juego es inestable por no existir punto de silla; es decir, el valor inferior del juego es menor que el valor superior (¿por qué?).

Afortunadamente existe un teorema que afirma la existencia de Estrategias mixtas P_0 y Q_0 para los jugadores fila y columna, respectivamente, y un número V tales que $E(P_0, Q) \geq V$, para cualquier estrategia Q, y $E(P, Q_0) \leq V$, para cualquier estrategia P.

P_0 y Q_0 se denominan Estrategias mixtas óptimas, y $V = E(P_0, Q_0)$: se denominan valor óptimo del juego.

Nota: La interpretación de las Estrategias mixtas óptimas se basa en la idea intuitiva de la probabilidad de "jugar repetidas veces" bajo las mismas circunstancias. En caso de jugar una sola vez, la estrategia mixta indica elegir y usar una estrategia pura en forma aleatoria de acuerdo a la distribución de probabilidad específica de la estrategia mixta óptima.

6.3. Estrategias Mixtas Óptimas.

Existen varios métodos para hallar las Estrategias mixtas óptimas de juegos de suma cero o suma constante. Entre ellos se cuentan fundamentalmente procedimientos gráficos y analíticos basados en la programación lineal; por el momento nos limitamos a determinar las Estrategias mixtas óptimas para el caso de matrices de juego donde uno de los jugadores tiene solamente dos Estrategias puras.

6.3.1. Etrategias Mixtas para matrices de Juego 2x2.

Entre los métodos más comunes par hallar las Estrategias mixtas óptimas en juegos de matrices 2x2 (dos Estrategias puras para cada jugador) están el aritmético, el alegebraico y el de álgebra matricial.
Veremos el aritmético (por su simplicidad) y el algebraico, de donde deduciremos una fórmula general para este caso (que valida el método aritmético).

Método Aritmético:

Para una mayor comprensión ilustraremos este método con el caso III: mercadeo, en donde la matriz de juego correspondiente era:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Donde la estrategia A del jugador fila se descarta ya que es denominada por la estrategia R

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Igualmente descartamos la estrategia A del jugador columna por ser dominada por D:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Llegamos así a una Matriz de juego 2x2 la cual no tiene punto de silla ni Estrategias Dominadas.
El primer paso en el método aritmético consiste en restar el pago menor del mayor en cada fila y columna.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} M & D \end{array} & \\ \begin{array}{c} R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{2-(-1)=3} \\ \text{2-0=2} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \text{2-(-1)} & \text{2-0} \\ \text{=3} & \text{=2} \end{array} & \end{array}$$

En el siguiente paso se intercambia cada uno de los pares de valores obtenidos:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} M & D \end{array} & \\ \begin{array}{c} R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} & \end{array}$$

Súmense los valores obtenidos para las Estrategias del jugador fila (en este caso (2+3=5)) y colóquese cada uno de estos valores sobre este resultado. Repita este procedimiento con el jugador columna $(2 + 3 = 5)$.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} M & D \end{array} & \\ \begin{array}{c} R \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array} & \end{array}$$

Estos valores corresponden a las probabilidades respectivas de las Estrategias mixtas óptimas de cada jugador.
En nuestro ejemplo tenemos entonces que la empresa R debe usar como estrategia óptima $P_0 = (0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ y la empresa competidora S la estrategia Mixta óptima $Q_0 = (0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$. Valor esperado del juego:

$$VE = P_0 A {Q_0}^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \left(\frac{4}{5} \right)$$

Así pues, el juego le es favorable a la empresa R la cual "a la larga" esperaría ganarle un $80\,\%(=\frac{4}{5})$ del mercado a su competidor.

Método Algebráico:

Sean $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ las distribuciones de probabilidad correspondientes a las estrategias mixtas de los jugadores fila y columna, respectivamente. La idea es hallar los valores de los p_i y los q_i de tal forma que los valores esperados (según el criterio del maximin/minimax de Von Newman) de cada jugador sean iguales (punto de silla).

Este enfoque indica que el jugador fila debe distribuir "su tiempo" entre las diferentes alternativas de tal modo que, sin que importe lo que haga su contrario aumentará al máximo sus ganancias.

Sea entonces la matriz de juego

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Y $(p_1, p_2) = (p, 1, -p)$ (recuerde que (p_1, p_2) corresponde a una distribución de probabilidad).

$$\sum p_i = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

Puesto que no debe importar la elección del contrario para la estrategia mixta óptima, se deben igualar las ganancias esperadas del jugador fila cuando su contendor juega la columna 1 con las ganancias esperadas cuando el contendor juega la columna 2:

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}p + a_{21}(1-p) & a_{12}p + a_{22}(1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}p + a_{21}(1-p) & a_{12}p + a_{22}(1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}p + a_{21} - a_{21}p = a_{12}p + a_{22} - a_{22}p \quad \text{Luego} \quad p(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}) = a_{22} - a_{21}$$

$$p = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad \text{y} \quad 1 - p = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Por consiguiente, la estrategia mixta óptima para el jugador fila es dada por:

$$P_0 = \left[\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad ; \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \right]$$

El mismo procedimiento se utiliza para determinar las Estrategias mixtas óptimas del jugador columna, llegando a la fórmula:

$$Q_0 = \left[\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad ; \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \right]$$

Ejemplo 6.3.1.1

Determine las Estrategias mixtas óptimas para el jugador fila y el jugador columna en la matriz de pagos siguiente:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{S} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{W} \\ \text{M} \end{array} & \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -7 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solución: Utilizando las fórmulas dadas (caso de matriz 2x2) se tiene:

$$P_0 = \left[\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \quad ; \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\right] = \left[\frac{10+7}{12+10+8+7} \quad ; \frac{12+8}{12+10+8+7}\right]$$
$$= \left[\frac{17}{37} \quad ; \frac{20}{37}\right]$$

$$Q_0 = \left[\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \quad ; \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\right] = \left[\frac{10+8}{37} \quad ; \frac{12+7}{37}\right]$$
$$= \left[\frac{18}{37} \quad ; \frac{19}{37}\right]$$

Así pues, lo mejor para el jugador fila es usar sus Estrategias W y M en una proporción de 17 a 20, en tanto lo mejor para el jugador columna será usar las Estrategias S, Z en proporciones casi iguales: 18 a 19.

6.3.2. Estrategias Mixtas para matrices de juegos 2XM ó (MX2)

Si se llega a una Matriz de juego en donde a uno de los jugadores (fila o columna) sólo le quedan dos Estrategias puras para su elección, y no existe punto de silla, es posible determinar su estrategia mixta óptima y la de su oponente mediante un procedimiento gráfico.
Las soluciones gráficas son únicamente aplicables a juegos en los cuales uno de los jugadores tiene solamente dos Estrategias puras.
Supongamos que la Matriz de juego final es dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \end{bmatrix}$$

En donde al jugador fila le quedan dos Estrategias puras:
Sea $P = (p_1, p_2) = (p_1, 1-p_1)$ la distribución de probabilidad correspondiente a estas Estrategias puras, y sea $Q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_m)$ la distribución de probabilidad del jugador columna para su m Estrategias puras q_j; $0 \leq q_j \leq 1$, para toda j.

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

El valor esperado del juego, según esta distribución de probabilidades, sería:

$$VE = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}p_1 + (1-p_1)a_{21} & a_{12}p_1 + (1-p_1)a_{22} & a_{13}p_1 + (1-p_1)a_{23} & \dots & a_{1m}p_1 + (1-p_1)a_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - a_{21})p_1 + a_{21} & (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22} & (a_{13} - a_{23})p_1 + a_{23} & \dots & (a_{1m} - a_{2m})p_1 + a_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$$

Para cada estrategia pura del jugador columna, el valor esperado del jugador fila sería cada una de las entradas de la matriz P.A (ya que la K-esima estrategia pura del jugador columna sería $Q = (q_j)_{1xm}$ con $q_k = 1, \quad q_j = 0$ para toda $j \neq k$) y, para cualesquiera valores de p_1 y q_j $1 \leq j \leq m$, el pago esperado será el promedio ponderado de las m rectas: $(a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j};\ 1 \leq j \leq m$; es decir:

$$VE = q_1[(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}]+q_2[(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}]+q_3[(a_{13}-a_{23})p_1+a_{23}]+\ldots+q_m[(a_{1m}-a_{2m})p_1+a_{2m}]$$

Por el criterio maximin, el jugador fila deberá escoger el valor de p_1 que le dé el mayor pago esperado mínimo (valor inferior del juego), luego:

$$V_i = V = \text{máx}\{\text{mín}(a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}\} \quad \text{con} \quad 0 \leq p_1 \leq 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq j \leq m$$

Así pues, graficando las líneas $(a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j}$; $1 \leq j \leq m$ se determina el valor de p_1 como el punto correspondiente al vértice (intersección de líneas) más alto de la región inferior de la gráfica.

Ejemplo 6.3.2.1

Consideremos el caso IV, publicidad, cuya matriz final de juego es:

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} K_1 & \quad K_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6\,\% & -8\,\% \\ 5\,\% & 1\,\% \\ -10\,\% & 3\,\% \end{bmatrix} \end{array}$$

Para ser más consecuentes con la notación de la teoría expuesta anteriormente, consideramos a la compañía Knorr como jugador fila (por tener sólo dos Estrategias); en consecuencia, transponemos la Matriz de juego y cambiamos sus signos (no olvide que la matriz de pago se mira desde el punto de vista del jugador fila):

$$\begin{array}{c} \\ K_1 \\ K_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -6 & -5 & 10 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sean $P_0 = (p_1, 1 - p_1)$ y $Q_0 = (q_1, q_2, q_3)$ las distribuciones de probabilidad correspondientes a las Estrategias de Knorr y Maggi, respectivamente.

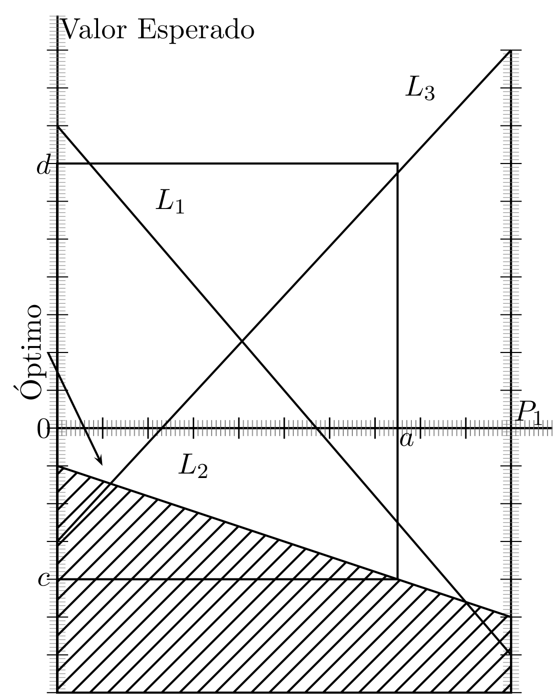
Los valores esperados para Knorr si Maggi escoge una estrategia pura serían:

$$VE = P_A = (p_1, 1 - p_1) \begin{bmatrix} -6 & -5 & 10 \\ 8 & -1 & -3 \end{bmatrix} = (-14p_1 + 8 \quad -4p_1 - 1 \quad 13p_1 - 3)$$

Donde la columna j-ésima corresponde al valor esperado de Knorr al escoger Maggi la estrategia pura j. Y el valor esperado para Knorr bajo cualquier estrategia mixta de Maggi es el *valor promedio ponderado* de estas líneas (donde $q_1+q_2+q_3=1$) $V_E = q_1(-14p_1+8)+q_2(-4p_1-1)+q_3(13p_1-3)$

Knorr debe elegir entonces p_1 tal que haga máximo el mínimo valor de $q_1(-14p_1+8)+q_2(-4p_1-1)+q_3(13p_1-3)$
Si notamos las líneas como $L_1 : -14p_1+8$, $L_2 : -4p_1-1$, y $L_3 : 13p_1-3$, nos interesa el valor de p_1 que haga que min $q_1L_1+q_2L_2+q_3L_3$ sea máximo.

En consecuencia, graficamos estas líneas y determinamos el mayor valor (intesección) de la zona inferior (rayada):



Observe que si $p_1=a$, la ponderación de las líneas L_1, L_2, L_3 con los pesos q_j, $0 \leq q_j \leq 1$ y $\sum q_j = 1$, estaría siempre entre los valores c y d, donde c sería el valor mínimo correspondiente. En consecuencia, para cualquier p_1 con $0 \leq p_1 \leq 1$

los mínimos valores de $q_1L_1 + q_2L_2 + q_3L_3$, se encuentran en los segmentos de la rectas L_i inferiores de la gráfica, y el máximo de estos valores mínimos (el óptimo) es precisamente el punto de intersección de las líneas $L_2 : -4p_1 - 1$ y $L_3 : 13p_1 - 3$

Por consiguiente: $-4p_1 - 1 = 13p_1 - 3$ $17p_1 = 2$, de donde: $p_1 = (\frac{2}{17})$ y $1 - p_1 = (\frac{15}{17})$

La estrategia óptima para Knorr es entonces dada por $P_0 = \left(\frac{2}{17}, \frac{15}{17}\right)$ y el valor esperado del juego lo hallamos reemplazando este valor óptimo en cualquiera de las líneas que lo determinan. $L_2 : -4p_1 - 1 = -4\left(\frac{2}{17}\right) - 1 = (-\frac{25}{17})$, lo cual significa que el juego le es desfavorable a Knorr (espera perder aproximadamente un 1,47 %($\approx \frac{25}{17}$ del mercado).

Para determinar la estrategia óptima de Maggi, recuerde que, según el criterio maximin/minimax, su valor esperado para la estrategia óptima $q_o = (q_1, q_2, q_3)$ (valor superior del juego) debe satisfacer la condición:

(*) $q_1(-14p_1 + 8) + q_2(-4p_1 - 1) + q_3(13p_1 - 3) \leq V_s = V = (-\frac{25}{17})$ $0 \leq p_1 \leq 1$ y para el valor óptimo de $p_1 = (\frac{2}{17})$ se convierte en igualdad; por consiguiente: $(\frac{108}{17})q_1 - (\frac{25}{17})q_2 - (\frac{25}{17})q_3 = (-\frac{25}{17})q_1$ puesto $0 \leq q_j \leq 1$ y $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ se tiene $(\frac{108}{17})q_1 - (\frac{25}{17})(q_1 + q_2) = (\frac{108}{17})q_1 - (\frac{25}{17})(1 - q_1) = (-\frac{25}{17})$ donde $(\frac{108}{17})q_1 - (\frac{25}{17})q_1 = 0$ $q_1 = 0$

Observe en la gráfica que necesariamente el peso dado a cualquier línea que no pase por el punto maximín debe ser cero; de lo contrario el pago esperado para el jugador columna estaría por encima del punto maximín; recuerde que al ponderar (darle peso) un conjunto de n valores X_i, con números p_i, tales que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

El resultado estará limitado por el menor y mayor valor de $X - i$.

Como $q_1 = 0$ la restricción (*) queda $q_2(-4p_1 - 1) + q_3(13p_1 - 3) = (-\frac{25}{17})$, donde q_2 y q_3 son números con $0 \leq q_1 \leq 1$, $\sum q_i = 1$, por lo tanto, la restricción anterior corresponde a una línea recta (peso ponderado de las dos líneas de debajo de la gráfica) cuya ordenada es $(-\frac{25}{17})$ caundo $p_1 = (\frac{2}{17})$ y, puesto que nunca puede exceder este valor, la línea es necesariamente horizontal (esta conclusión siempre es válida, a menos que el valor óptimo de p_1 sea 0 ó 1, en cuyo caso el otro jugador debe también usar una estrategia pura).

Tenemos entonces que: $q_2(-4p_1-1)+q_3(13p_1-3)=(-\frac{25}{17})$ para todo $0 \leq p_1 \leq 1$. Para hallar q_2 y q_3 basta seleccionar dos valores de p_1 (generalmente 0 y 1): se reemplazan en la anterior ecuación y se resuelve el sistema correspondiente. En este caso:

Si $p_1 = 0$, $-q_2 - 3q_3 = (-\frac{25}{17})$, y si $p_1 = 1$, $-5q_2 + 10q_3 = (-\frac{25}{17})$

Al resolver este sistema se encuentra que $q_2 = (\frac{13}{17})$ y $q_3 = (\frac{4}{17})$

La estrategia óptima para Maggi es entonces $Q_0 = (0, \frac{13}{17}, \frac{4}{17})$. En otras palabras, Maggi debe utilizar su estrategia M_2 aproximadamente un 76 % de las veces y la estrategia M_3 un 24 %. Por su parte, Knorr deberá usar su estrategia K_1, 12 de cada 100 veces y un 88 % su estrategia K_2.

Nota: También es posible hallar la estrategia óptima del otro jugador observando las rectas que determinan el punto maximin y hallando los pagos esperados del jugador asociados a estas líneas para las dos posibles Estrategias puras del contrario e igualándolos.

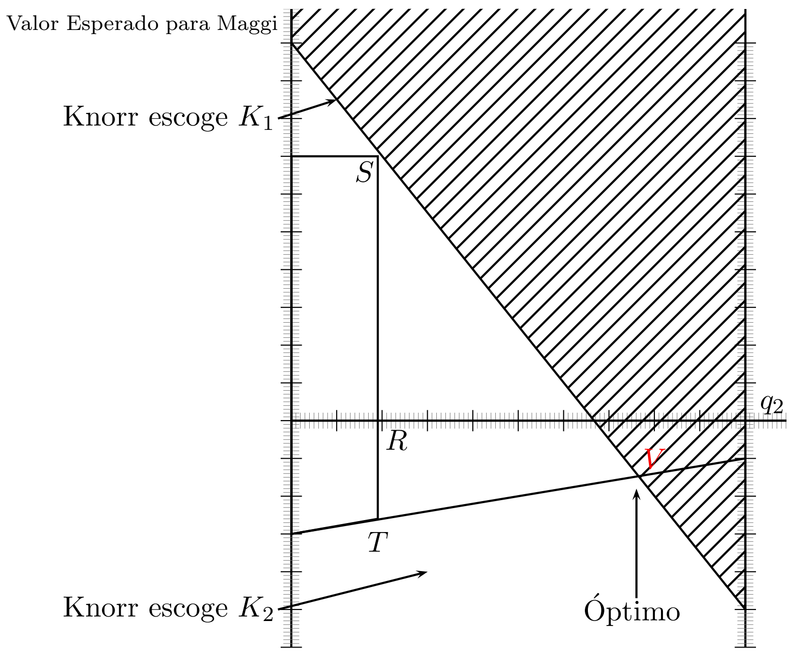
En nuestro caso, por ejemplo, se observa que el maximin lo determinan las líneas L_2 y L_3; por consiguiente, $q_1 = 0$, de donde $q_3 = 1 - q_2$

Los pagos esperados de Maggi correspondientes a las Estrategias puras de Knorr serían: si Knorr escoge $K_1(p_1 = 1)$, $VE = -5q_2+10(1-q_2)$; y si escoge $K_2(p_2 = 1)$, $VE = -q_2 - 3(1 - q_2)$

Por lo tanto, en el punto minimax $-5q_2+10(1-q_2) = -q_2-3(1-q_2) -15q_2+10 = 2q_2 - 3 \quad 17q_2 = 13 \quad q_2 = \frac{13}{17} \quad q_3 = \frac{4}{17}$

Gráficamente, la situación para Maggi sería: Valor esperado para Maggi si Knorr escoge una estrategtia pura (recuerde que $q_1 = 0$):

$$VE = AQ = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5q_2 + 10q_3 \\ -q_2 - 3q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5q_2 + 10(1-q_2) \\ -q_2 - 3(1-q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15q_2 + 10 \\ 2q_2 - 3 \end{bmatrix}$$



En este, el valor esperado (VE), si es negativo, indica ganancias para Maggi, en tanto si es positivo le representa perdidas. Por consiguiente, Maggi debe escoger el valor de q_2 que le haga mínimo el máximo valor ponderado (por p_1 y p_2) de $(-15q_2 + 10, 2q_2 - 3)$, el cual gráficamente corresponde al menor valor de la zona superior (intersección de las líneas).

Observe que si se tiene un valor de q_2 menor al óptimo, por ejemplo $q_2 = 0{,}2$ (punto R), la esperanza del juego para Maggi seria RS (perdería RS el 7 %) si escoge Knorr escoge k_1, aunque ganaría RT (=2.6 %) si Knorr escoge K_2 (o cualquier valor entre estos dos dependiendo de la elección que haga Knorr de sus valores p_1); pero como debe escoger lo mejor de lo peor correría el punto R a la derecha hasta alcanzar el Punto V en donde asegurara una esperanza de VO (ganaría VO= $\frac{25}{17} \approx 1{,}47\,\%$), sin importar como juegue Knorr.

El punto 0 de intersección lo podemos hallar igualando las líneas correspondientes: $15q_2 + 10 = 2q_2 - 3$, $I7q_2 = 13$; por lo tanto, $q_2 = \frac{13}{17}$ y $q_3 = \frac{4}{17}$ Si más de dos rectas determinan el punto maximin, ello indica que se pueden mezclar las Estrategias. Dos rectas cualesquiera que tengan signos opuestos en sus pendientes definen una Solución óptima alternativa. Además cualquier promedio ponderado de las posibles combinaciones óptimas proporciona también una nueva Solución óptima que mezcla las correspondientes Estrategias.

Capítulo 7

Modelos Importantes de Juegos

7.1. El Dilema del Prisionero

Dos delincuentes son detenidos y encerrados en celdas de aislamiento de forma que no pueden comunicarse entre ellos. El alguacil sospecha que han participado en el robo del banco, delito cuya pena es diez años de cárcel, pero no tiene pruebas. Solo tiene pruebas y puede culparles de un delito menor, tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. Promete a cada uno de ellos que reducirá su condena a la mitad si proporciona las pruebas para culpar al otro del robo del banco, pero ellos han prometido no delatarse. Las alternativas para cada prisionero pueden representarse en forma de matriz de juego. La estrategia "lealtad" consiste en permanecer en silencio y no proporcionar pruebas para acusar al compañero. Llamaremos "traición" a la estrategia alternativa.

Los pagos a la izquierda o a la derecha de la barra indican los años de cárcel a los que es condenado el preso X o Y respectivamente según las estrategias que hayan elegido cada uno de ellos.

Dilema del prisionero

Matriz de Pagos

(años de carcel)

		Preso Y	
		lealtad	traición
Preso X	lealtad	$(2, 2)$	$(10, 1)$
	traición	$(1, 10)$	$(5, 5)$

Como podemos observar en la matriz de pagos si ambos prisioneros son leales es decir no confiesan pagaran dos años de cárcel cada uno, y si ambos traicionan o confiesan el robo cada prisionero pagara 5 años de cárcel ; pero si el prisionero X es leal y el prisionero Y traiciona el prisionero X pagara 10 años de cárcel y el prisionero Y solo un año, si ocurre lo contrario el prisionero X pagara 1 año de cárcel y el prisionero Y 10 años.

Para que una matriz de juego represente un "dilema del prisionero" deben concurrir las siguientes circunstancias:

a. Confesar uno sólo debe ser mejor para él que no confesar mutuamente.

b. No confesar mutuamente debe ser a su vez mejor que confesar ambos.

c. Cuando cada uno elige una estrategia diferente, confesar y no confesar, la ganancia media entre estas dos estrategias no puede ser mejor que las estrategias de confesar ambos.

Consideremos al prisionero X. Supongamos que cree que el prisionero Y respeta sus promesas anteriores y no confiesa. Si el prisionero X confiesa, se reduciría su pena a un año, lo que es preferible a la opción de no confesar, que acarrea una condena mayor (dado que el otro prisionero no confiesa). Si por el contrario, cree que el prisionero Y va a confesar, no importando sus promesas anteriores, confesar le da 5 años de cárcel, lo que es mejor que cargar con todas las culpas y 10 años de cárcel al no confesar.

Por lo tanto, no importando lo que haga el prisionero Y, el prisionero X está mejor confesando: es su estrategia dominante. Lo mismo ocurre con el prisionero Y, por lo que el único equilibrio en estrategias dominantes es aquel en que ambos prisioneros confiesan. Es notable que a pesar que cooperando les hubiera ido mejor, ambos confiesan y terminan peor.

El dilema del prisionero es un juego de enorme importancia. Proporciona una explicación para las dificultades para establecer la cooperación entre agentes económicos. El dilema del prisionero también es relevante en la formación de *carteles* (acuerdos entre firmas) para subir los precios, ya que las firmas se ven tentadas a vender mas de lo acordado a los altos precios que resultan de los carteles, lo que reduce los precios. El dilema del prisionero muestra las dificultades para establecer la colaboración en cualquier situación en la que hacer trampa beneficia a las partes.

7.2. Modelo Halcón Paloma:

En el lenguaje ordinario entendemos por "halcón" a los políticos partidarios de estrategias más agresivas mientras que identificamos como "paloma" a los más pacifistas. El modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras.

Dos vehículos se dirigen uno contra otro en la misma línea recta y a gran velocidad. El que frene o se desvié ha perdido. Pero si ninguno de los dos frena o se desvía no pierden. Este sería un modelo halcón paloma.

También se ha utilizado este modelo abundantemente para representar una guerra fría entre dos superpotencias. La estrategia Halcón consiste en este caso en proceder a una escalada armamentística y bélica. Si un jugador mantiene la estrategia Halcón y el otro elige la estrategia Paloma, el Halcón gana y la Paloma pierde. Pero la situación peor para ambos es cuando los dos jugadores se aferran a la estrategia Halcón. El resultado puede modelarse con la siguiente matriz de pagos.

Modelo Halcón Paloma

Matriz de Pagos

		Jugador Y	
		Paloma	Halcón
Jugador X	Paloma	$(2°, 2°)$	$(3°, 1°)$
	Halcón	$(1°, 3°)$	$(4°, 4°)$

Podemos observar las sutiles pero importantes diferencias de este modelo con el Dilema del Prisionero. En principio la matriz es muy parecida, simplemente se han trocado las posiciones de los pagos 3^0 y 4^0, pero la solución y el análisis son ahora muy diferentes.

Aquí hay dos resultados que son equilibrios de Nash: cuando las estrategias elegidas por cada jugador son diferentes; es decir, cuando uno elige halcón y la otra paloma. Por el contrario, en el Dilema del Prisionero el equilibrio de Nash esta en el punto en que ambos jugadores traicionan.

Otra notable diferencia de este juego con otros es la importancia que aquí adquiere el orden en que los jugadores eligen sus estrategias. Como tantas veces en la vida real, el primero que juega, gana. El primero elegirá y manifestara la estrategia Halcón con lo que el segundo en elegir se verá obligado a elegir la estrategia Paloma, la menos mala.

7.3. La Guerra de los Sexos

El modelo de "La guerra de los sexos" es un ejemplo muy sencillo de utilización de la teoría de juegos para analizar un problema frecuente en la vida cotidiana. Hay dos jugadores: "EL'" y "ELLA". Cada uno de ellos puede elegir entre dos posibles estrategias a las que llamaremos "Fútbol" y "Discoteca".

Supongamos que el orden de preferencias de EL es el siguiente:

1. (Lo mas preferido) EL y ELLA eligen Fútbol.

2. EL y ELLA eligen Discoteca.

3. EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.

4. (Lo menos preferido) El elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

Supongamos que el orden de preferencias de ELLA es el siguiente:

1. (Lo mas preferido) EL y ELLA eligen Discoteca.

2. EL y ELLA eligen Fútbol.

3. EL elige Fútbol y ELLA elige Discoteca.

4. (Lo menos preferido) El elige Discoteca y ELLA elige Fútbol.

La matriz de pagos es la siguiente, donde los pagos representan el orden de preferencias:

Guerra de sexos

Matriz de Pagos

		Ella	
		Football	Discoteca
Él	Football	$(1°, 2°)$	$(3°, 4°)$
	Discoteca	$(4°, 4°)$	$(2°, 1°)$

Este juego, tal como lo hemos descrito, es un juego sin repetición y sin transferencia de utilidad. Sin repetición significa que solo se juega una vez por lo que no es posible tomar decisiones en función de la elección que haya hecho el otro jugador en juegos anteriores. Sin transferencia de utilidad significa que no hay comunicación previa por lo que no es posible ponerse de acuerdo, negociar ni acordar pagos secundarios ("Si vienes al fútbol te pago la entrada").

El problema que se plantea es simplemente un problema de coordinación. Se trata de coincidir en la elección. Al no haber comunicación previa, es posible que el resultado no sea óptimo. Si cada uno de los jugadores elige su estrategia maximin el pago que recibirán (3/3) es óptimo. Esa solución, no es un punto de equilibrio de Nash ya que los jugadores están tentados de cambiar su elección: cuando

ELLA llegue a la discoteca y observe que EL se ha ido al fútbol, sentirá el deseo de cambiar de estrategia para obtener un pago mayor.

El modelo que hemos visto es un juego simétrico ya que jugadores o estrategias son intercambiables sin que los resultados varíen. Podemos introducir una interesante modificación en el juego convirtiéndolo en asimétrico (son los juegos donde no hay conjunto de estratégias identicas para ambos jugadas) a la vez que nos aproximamos mas al mundo real. Supongamos que las posiciones 2^a y 3^a en el orden de preferencias de EL se invierten. EL prefiere ir solo al Fútbol más que ir con ELLA a la Discoteca. La matriz de pagos queda como sigue:

Guerra de sexos

Matriz de Pagos

		Ella	
		Fútbol	Discoteca
Él	Fútbol	$(1°, 2°)$	$(2°, 3°)$
	Discoteca	$(4°, 4°)*$	$(3°, 1°)$

Si ELLA conoce la matriz de pagos, es decir, las preferencias de EL, el problema de coordinación desaparece. Está muy claro que EL elegirá siembre la estrategia Fútbol, sea cual sea la elección de ELLA. Sabiendo esto ELLA elegirá siempre la estrategia Fútbol también, ya que prefiere estar con EL aunque sea en el Fútbol que estar sola aunque sea en la Discoteca. La estrategia maximin de ambos jugadores coincide. El resultado, marcado con un asterisco, es un óptimo, un punto de silla, una solución estable, un punto de equilibrio de Nash. Obsérvese que esta solución conduce a una situación estable de dominación social del jugador que podríamos calificar como el mas egoísta.

Bibliografía

1. SABOGAL CARLOS. *Algebra y Programación Lineal*. Universidad Externado de Colombia. Octubre de 2003.

2. HILLIER FREDERICK. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Editorial Mc-Graw-Hill. 1985.

3. SERGIO MONSALVE Y JULIÁN ARÉVALO. *Un curso de teoría de Juegos Clásica*. Universidad Externado de Colombia. Septiembre de 2005.