*Universidad Surcolombiana*

Programa de Licenciatura en Matemáticas

*Facultad de Educación*

# LA CAJA DE POLINOMIOS

Trabajo de grado

*para optar por el título de:*

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

*Por:*

ALDEÍMAR VANEGAS MONTEALEGRE

*Código 2005201410*

*ALEXANDER HERNÁNDEZ RAMÍREZ*

*Código 2005201669*

*Asesor:*

MAGISTER RICARDO CEDEÑO TOVAR

Neiva (Huila) Julio de 2011

*Universidad Surcolombiana*

Programa de Licenciatura en Matemáticas

*Facultad de Educación*

# LA CAJA DE POLINOMIOS

ALDEÍMAR VANEGAS MONTEALEGRE
ALEXANDER HERNÁNDEZ RAMÍREZ

Neiva (Huila) Julio de 2011

***Nota de aceptación***

---

---

---

---

---

***Firma Asesor del Trabajo de Grado***

---

***Firma Segundo Lector***

---

***Firma Jefe de Programa***

*Neiva, Julio de 2011*

Proyecto de

# Trabajo de Grado

LA CAJA DE POLINOMIO

**Por:**
ALDEIMAR VANEGAS MONTEALEGRE
*Código 2005201410*
ALEXANDER HERNANDEZ RAMIREZ
*Código 2005201669*

**Asesor Proyecto:**
RICARDO CEDEÑO TOVAR

**Universidad Surcolombiana**
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva (Huila)
Julio de 2011

# Índice general

# Índice de tablas

Capítulo 1

# Agradecimientos

Al finalizar esta importante etapa de nuestra vida, queremos expresar un profundo agradecimiento a quienes con su ayuda, apoyo y compresión nos alentaron a lograr esta hermosa realidad. Agradecemos en primer lugar a Dios por todo lo que somos, a nuestros padres porque aún sabiendo que no existirá forma alguna de agradecer una vida de sacrificios, esfuerzos y amor, queremos que sientan que la meta alcanzada también es de ellos y que la fuerza que nos ayudo a conseguirla fue su gran apoyo; de igual manera queremos manifestar nuestros sinceros agradecimientos a nuestros maestros, de manera especial a Ricardo Cedeño Tovar, Hernando Gutierrez Hoyos a quienes les debemos la posibilidad de ampliar nuestros conocimientos y brindarnos las herramientas necesarias para desempeñarnos con exito como profesionales.

Por lo que somos y por todo el tiempo que pensaron en nosotros . . .

Gracias
Con amor e infinito respeto.

## Capítulo 2

# Presentación

Este trabajo se desarrollo dentro del semillero Olimpicos $\pi e$ del grupo de investigación Leonard Euler de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Surcolombiana.
La labor como futuros docentes es buscar estrategias metodológicas para la enseñanza de los educandos, donde se logre una mejor ilustración y comprensión por parte de los aprendices en el área de matemáticas. Por esto en este trabajo encontrara una alternativa novedosa y llamativa para enseñar y aprender algunos temas del álgebra desde lo lúdico. La operatoria del álgebra es de gran importancia en varias disciplinas y temáticas de estudio, por esto, se debe abordar con claridad a los estudiantes, de tal manera que incentive el estudio al conocimiento algebraico y su apropiación de una forma fácil y práctica, por tal razón en el trascurso de este, se desarrollaran algunos temas utilizando la caja de polinomios como material didáctico; esta herramienta nos permitirá trabajar los polinomios de una manera distinta a la tradicional, mediante representaciones rectangulares y encuadres múltiples, permitiéndonos desarrollar algunas habilidades y potencialidades intelectuales de los aprendices. La caja de polinomios está conformada por fichas de forma rectangular y cuadrada y un tablero conocido como plano cartesiano donde apoyaremos las fichas, este material nos permite desde su propio sistema, representar polinomios y realizar operaciones algebraicas de manera tangible utilizando las fichas y el plano, las operaciones que se desarrollaran en el trascurso serán la suma, resta, multiplicación, división de polinomios y factorización de expresiones polinómicas; cada una de las operaciones que se desarrollaran en el transcurso encontraran inmerso su propia modelo procedimental o reglas que se necesitan para su respectivo desarrollo. Para realizar la multiplicación de polinomios sólo se trabajaran factores que de cómo resultado polinomios hasta de grado 2 y en la factorización de expresiones polinómicas se trabajaran sólo los trinomios.

Al final del trabajo encontraran los resultados que arrojo la aplicación de esta propuesta en el Colegio Ángel María Paredes de la ciudad de Neiva.

# Capítulo 3

# Justificación

A pesar de que el conocimiento algebraico es esencial por su aporte a la comunicación y expresión de las matemáticas y a la estructuración de formas de razonamientos, es precaria la apropiación de los estudiantes frente a su aprendizaje ya que existen dificultades para interiorizar, bien sean por problemas de enfoque metodológico en su enseñanza o de tipo social. Para tratar de superar estas dificultades, es importante propiciar espacios agradables, estrategias y herramientas de aprendizaje de las matemáticas dando alternativas a los docentes que orientan estos conocimientos con el fin de buscar un mejor entendimiento de las matemáticas por parte de los educandos.

De esta forma lo que se quiere con este trabajo es mostrar una alternativa distinta de enseñar las matemáticas utilizando herramientas pedagógicas que nos generan espacios propicios para el aprendizaje, ya que el proceso de enseñanza aprendizaje con ayudas pedagógicas se construye a través de una gran diversidad de experiencias que estas les ofrece a los estudiantes como la posibilidad de deducir, construir, y abstraer conceptos adecuados, además desarrollar habilidades cognoscitivas a través de objetos que movemos, tocamos, sentimos y visualizamos.

La actividad matemática ha tenido desde siempre una componente lúdica que ha sido la que ha dado lugar a una buena parte de las creaciones más interesantes que en ella han surgido. Con seguridad el mejor camino para despertar y cultivar habilidades a un estudiante consiste en ofrecerle un intrigante juego, puzle, rompecabezas, chistes, paradoja, pareado de naturaleza matemática o cualquiera de entre una veintena de cosas que los profesores aburridos tienden a evitar porque parecen frívolas las matemáticas.

Estos juegos matemáticos conllevan a que los estudiantes logren mejorar su conocimiento y desarrollar su aprendizaje, dando a conocer muchas aptitudes para destacarse en su forma de aprender las matemáticas.

El gran beneficio de este acercamiento lúdico consiste en su potencia para transmitir a nuestros estudiantes de forma correcta el profundo interés y el entusiasmo que las matemáticas pueden generar y proporcionar una primera familiarización con los procesos usuales de la actividad matemática.

También es importante destacar que el objetivo de la educación matemática no es llenar al niño de información todos los años de escolaridad por el contrario es lograr el desarrollo de su pensamiento, su mente y sus potencialidades, para que pueda explorar e interpretar el mundo que lo rodea y así ser útil para la sociedad.

# Capítulo 4

# Objetivos

## 4.1. Objetivo General

- Contribuir de una manera significativa en la enseñanza y aprendizaje de las operaciones suma, resta, multiplicación, división y factorización de polinomios.

## 4.2. Objetivos Específicos

- Resaltar la importancia de los materiales didácticos para la enseñanza de la Matemática, porque a través de las actividades de manipulación de éstos, el estudiante puede acceder en un proceso de abstracción a los conocimientos matemáticos significativos.

- Desarrollar habilidades, destrezas, creatividad, estimulando el trabajo en equipo para realizar las operaciones de polinomios utilizando material didáctico (La Caja de Polinomios).

- Constuir, interpretar y operar los polinomios utilizando figuras geométricas.

Capítulo 5

# Formulación y descripción del problema

A partir de la experiencia que vivimos como practicantes en las diferentes instituciones educativas se pudo observar que es necesario incentivar al estudiante a que se enamore de la matemática, logrando así llegarles de la forma más adecuada y precisa utilizando necesariamente materiales didácticos, debido a que al realizar una clase con estos materiales logramos llegar a cada uno de los estudiantes de una manera lúdica y motivadora, porque se ha observado que tienen muchas dificultades al realizar las operaciones de polinomios.

## 5.1. Principales dificultades detectadas en el manejo de operaciones de polinomios.

A continuación se mencionan algunas de las dificultades que son visibles cuando los estudiantes trabajan en operaciones polinomicas. Estas se revelan en el momento que se debe hacer una operación. Por ejemplo, cuando se quiere sumar dos polinomios algunos de ellos confunden las operaciones, otros tienen dificultades con los términos semejantes, es de alguna forma que ellos no logran comprender con exactitud las diferencias que existen en las operaciones de suma y multiplicación de polinomios. Además cuando realizamos una sustracción se confunden con los signos, en la factorización de trinomios las dificultades se presentan cuando se van a expresar los factores. Teniendo en cuenta las dificultades mencionadas, con la caja de polinomios se quiere reducir estas dificultades.

# Capítulo 6

# Marco teorico

## 6.1. La Caja de Polinomios

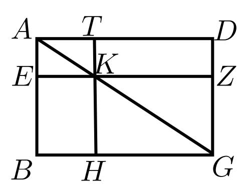
La Caja de Polinomios es una herramienta didáctica que conjuga los aportes de cuatro matemáticos famosos: Euclides, siglo III a.C. quien con su libro de Los Elementos entrega a la humanidad el primer texto científico perfectamente sistematizado; de este libro de extracta la proposición 43 del Libro I que permite la construcción de fichas rectangulares de distintas dimensiones pero de igual área y que se apoya en la proposición 34 del mismo texto en la que demuestra que cualquier diagonal de un paralelogramo lo divide en partes iguales; así mismo se utiliza el tercer axioma o noción común en el cual Euclides asevera: “ Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales”. El segundo matemático es Tabit ben Qurra el Harani, siglo X d.C. matemático dedicado a la contemplación de las cantidades y quien de manera generosa presenta el concepto de homogeneización, concepto que permite tratar a los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y de la altura. Por último, se extiende su aplicación a polinomios con coeficientes negativos con la utilización del plano cartesiano, cuya creación se debe a Pierre de Fermat y a René Descartes, siglo XVII d.C. El plano cartesiano ideado por estos franceses, conjuga sobre una misma representación la posición de un objeto en el tiempo, logrando describir de manera lógica y evidente una trayectoria.

## 6.2. Euclides

Poco se conoce de su biografía. La mayoria de autores ubican su mayoria de edad intelectual hacia el 330 a.C en Alejandría. Escribio el libro más famoso de la historа de la matemática los Elementos, esta obra es una sucesión de teoremas y en él se exponen las bases esenciales de la geometría. La caja de polinomios toma del libro I de los elementos de Euclides la proposición 43 que se conoce como la solución de ecuaciones lineales en el álgebra geométrica o anexión de áreas para la solución de una ecuación lineal.

### 6.2.1. Proposición XLIII del Libro I

En todo paralelogramo, los complementos de los paralelogramos atravesados por la diagonal son equivalentes.
Sea ABGD el paralelogramo, AG su diagonal, ET y ZH los paralelogramos atravesados por AG, y BK y KD los llamados complementarios. Por ser ABGD Y ET paralelogramos de diagonales AG y AK, los triángulos ABG y AGD son equivalentes, así com los ADK y ATK, y por la misma razón lo son también los KZG y KHG, y puesto que el AEK es equivalente al ATK y el ZKG al KHG, los triángulos AEK KHG serán equivalentes a los ATK y KZG.
pero el triángulo entero ABG es equivalente al ADG entero; luego el complementario restante BK será equivalente al otro complementario restante KD.



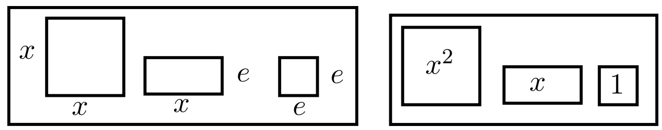

Gráfica 1

## 6.3. Tabit Ben Qurra

Tabit Ben Qurra el-Harrani murió en 901; la fecha de su nacimiento no se conoce con precisión ya que diferentes fuentes la ubican en los años 824, 826 y 836. Este pensador nos es de bastante interés, ya que identifica una pequeña dificultad relacionada con la interacción entre la solución algebraica y la solución geométrica de la ecuación cuadrática que resulta ser de importancia, tanto para identificar los orígenes de ciertos temas del álgebra como para su enseñanza.

Al tratar el caso de la solución de la ecuación "riqueza y raíces igual números"que nosotros representaríamos por la expresión $x^2 + mx = n$, Tabit Ben Qurra se da cuenta que no se puede igualar un área o un segmento de recta con un número. Así las cosas, introduce una unidad de medida ($e$) para traducir lo anterior en la ecuación 'geométrica'

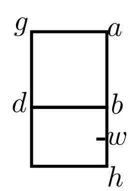
$x^2 + mex = ne^2$.



Gráfica 2

Su descripción del proceso de solución, en la que cita la proposición II.6 de Euclides, es la siguiente.

Hacemos la 'riqueza' igual al cuadrado $abdg$ (Gráfica 3), hacemos $bh$ igual al mismo múltiplo de la unidad con la cual se miden las líneas como el que hay en el número de raíces, y completamos el área $dh$. Ya que la riqueza es $abdg$, la raíz es claramente $ab$, y en el dominio del cálculo y números [cálculo numérico] es igual al producto de $ab$ y la unidad con la cual las líneas se miden.... Ahora bien, un número de estas unidades igual al número dado de raíces está en $bh$, de donde, el producto de $ab$ y $bh$ es igual a las raíces en el dominio del cálculo y número. Pero el producto de $ab$ y $bh$ es el área $dh$, porque $ab$ es igual a $bd$. De esta manera, el área $dh$ es igual a las raíces del problema. Así que el todo $gh$ es igual a la riqueza junto con las raíces.



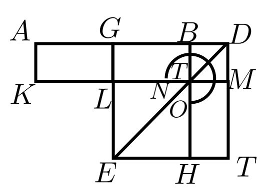
Gráfica 3

Con esta explicación procede Tabet ben Qurra a desarrollar la solución euclidiana al problema como se escribe a continuación.
Ahora la riqueza y las raíces juntas son iguales a un número conocido, de donde el área $gh$ es conocida y es igual al producto de $ah$ y $ab$ porque $ab$ es igual a $ag$. Así el producto de $ha$ y $ab$ es conocido y la línea $bh$ es conocida, porque se conoce su número de unidades. Así todo se reduce a un problema geométrico bien conocido, a saber la línea $bh$ es conocida; a ella se suma una línea $ab$ y el producto de $ha$ y $ab$ es conocido.
Ahora, en la proposición VI del libro II de los Elementos se demuestra que si la línea $bh$ se bisecta en el punto $w$, entonces el producto de $ha$ y $ab$ conjuntamente con el cuadrado de $bw$ se conoce. Se sigue que el cuadrado de $aw$ se conoce, y si se resta el $bw$ conocido,

resulta que *ab* se conoce, y ésta es la raíz. Y si lo multiplicamos por sí mismo, el cuadrado *abdg*, es decir, la riqueza, es conocido, que es lo queríamos demostrar. [1]

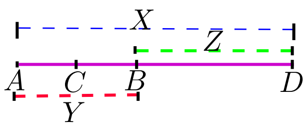
### 6.3.1. Proposición VI del libro II

Si se divide una recta en dos partes iguales y se prolonga, el rectángulo comprendido por la recta entera, más la prolongación, y por la prolongación, junto con el cuadrado de la recta mitad, es equivalente al cuadrado de la recta formada por la recta mitad y la prolongación.
Dividase la recta AB en dos por el punto G y prolónguese hasta D. Digo que el rectángulo comprendido por las rectas AD y BD junto con el cuadrado de la GB es equivalente al cuadrado de la GD.
Constrúyase sobre la recta GD el cuadrado GEZD; trácese la DE; por el punto B la BH paralela a las EG y DZ; por el T la KM paralela a las AB y EZ por el A la paralela a las GL y DM.
Puesto que AG es igual a GB, también será igual el rectángulo AL al GT, y como este es igual al TZ, el AL será igual al TZ.
Si se añade el rectángulo común GM, el AM será equivalente al gnomon NXO; pero el AM esta comprendido por las rectas AD y DB porque DM es igual DB; luego tambien el gnomon NXO será equivalente al rectángulo comprendido por AD y DB y si se añade el rectángulo común LH, que equivale al cuadrado de GB, el rectángulo comprendido por AD y DB más el cuadrado de GB equivale al gnomon NXO y el cuadrado LH; pero este gnomon y este cuadrado forman el cuadrado GEDZ que es el construido sobre GD.[2]



Gráfica 4

[1] Acevedo De M., Myriam y Folk De L., Mary. Redescubriendo el Álgebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta. Universidad Nacional de Colombia. Colciencias. 1997. El álgebra entre los árabes: los enfoques de Al Khwuarizmi, Tabit ben Qurra y Omar Khayyam pagína 56.
[2] Vera Francisco. CIENTIFICOS GRIEGOS; AGUILAR, S.A. DE EDICIONES; Madrid (España) 1970.




$$X.Z + Y^2 = (Z + Y/2)^2$$
$$(Y + Z)Z + (y/4)^2 = Z^2 + 2Z.(Y/2) + Y^2/4$$
$$YZ + Z^2 + Y^2/4 = YZ + Z^2 + Y^2/4$$

Gráfica 5

## 6.4. Pierre Fermat

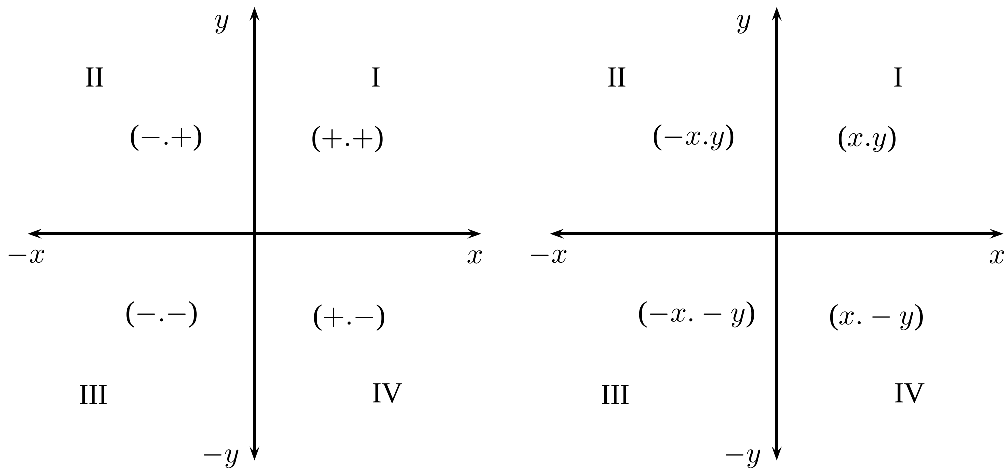
Nació el 17 de agosto de 1601 en Beaumont-de-Lomagne, Francia Murió el 12 de enero de 1665 en Castres, Francia. Pierre de Fermat era un abogado que hacia matemátca por afición. En 1629, escribió unas notas donde hacía uso explícito de las coordenadas para describir puntos y curvas. A principios de 1636 Fermat había concluido isagoge [Introducción a los lugares planos y sólidos], donde mediante el lenguaje algebraico de Vieta estudia las curvas que se pueden expresar mediante ecuaciones de primero y segundo grado y establece que son precisamente la recta y las cónicas. También establece que, en general, una curva tiene una ecuación y que una ecuación algebraica representa siempre una curva. Por esa razón se atribuye a Fermat una cierta prioridad sobre la creación de la Geometría Analítica frente a Descartes que publicó su Geometría en 1637. Fermat junto con Descartes desarrollaron la caracterización del plano cartesiano donde se conjugan los conceptos de espacio y tiempo para los objetos.

## 6.5. René Descartes

René Descartes nació el 31 de Marzo de 1596 en La Haya, una pequeña y atractiva ciudad de Touraine (Francia), situada a orillas del río Creuse, murió en Estocolmo en febrero de 1650. René Descartes en 1637 publicó la geometría, en este libro da a conocer el método que permite asignar ecuaciones algebraicas a las curvas. Descartes junto con Fermat desarrollaron la caracterización del plano cartesiano donde se conjugan los conceptos de espacio y tiempo para los objetos.

## 6.6. Plano Cartesiano

Cimentado en las ideas de los franceses Pierre Fermat y René Descartes. La idea de situar un objeto de acuerdo a un sistema coordenado brinda el contexto adecuado para representar polinomios de una variable de manera tangible, sin importar que algunos o todos los coeficientes sean enteros negativos.




Gráfica 6

Naturalmente en la multiplicación de los signos de sus ejes cartesianos $(x, y)$, podemos observar que al multiplicar dos signos positivos o dos signos negativos el resultado será positivo, si multiplicamos dos signos uno negativo por uno positivo o uno positivo por uno negativo su resultado será negativo, es por esta razón, que los cuadrantes, I y III son positivos y los cuadrantes II y IV son negativos.

## 6.7. Estrategias Metodológicas Para la enseñanza de las Matemáticas

Las estrategias metodológicas para la enseñanza son secuencias integradas de procedimientos y recursos utilizados por el formador con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información; y la utilización de estas en la generación de nuevos conocimientos, su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeñan la vida diaria para, de este modo, promover aprendizajes significativos. Las estrategias deben ser diseñadas de modo que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismos.

## 6.8. Aprendizaje Significativo

El aprendizaje significativo es el resultado de las interacciones de los conocimientos previos y los conocimientos nuevos y de su adaptación al contexto.

## 6.9. Material Didáctico

Los materiales didácticos son todos aquellos medios y recursos que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, dentro de un contexto educativo global y sistemático, y estimulan la función de los sentidos para acceder más fácilmente a la información, adquisición de habilidades y destrezas y a la formación de actitudes y valores.

Capítulo 7

# Representación de un polinomio con fichas

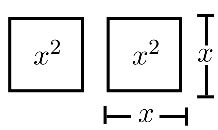
## 7.1. Representación de un polinomio con fichas.

Para representar el polinomio en el plano cartesiano debemos saber las clases de fichas que representaran el polinomio.

**Ejemplo 1**: Representar el siguiente polinomio $2x^2 + 3x + 2$ mediante fichas:

Para representar $2x^2$ debemos tener en cuenta, que el coeficiente que acompaña a $x^2$ es el 2, este es el número de fichas cuadradas de lados $x$ que se van a utilizar, en este caso seria:

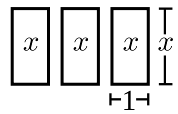
$2x^2$ : Dos cuadrados de área $x^2$ cuyas dimensiones son $x$ por $x$.




Gráfica 7

Para representar $3x$ debemos tener en cuenta, que el coeficiente que acompaña la $x$ es el 3, este es el número de fichas de lados $x$ y 1 que se van a utilizar, en este caso seria:

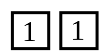
$3x$ : Tres rectángulos de área $x$ cuyas dimensiones son 1 por $x$.



Gráfica 8

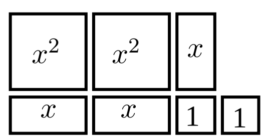
Para representar el 2 debemos tener en cuenta, que las fichas que se van a utilizar, en este caso seria:

2 : Dos cuadrados de área 1 cuyas dimensiones son 1 por 1.



Gráfica 9

Finalmente la representación del polinomio $2x^2 + 3x + 2$ mediante fichas es la siguiente:



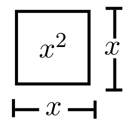
Gráfica 10

**Nota**: Para representar polinomios mediante fichas, cuyos términos son negativos se toma el valor absoluto del coeficiente de cada término, que en este caso sería la cantidad de fichas que representaria este término, luego el signo nos indica la ubicación de las fichas en el plano cartesiano.

**Ejemplo 2**: Representar el siguiente polinomio $-x^2 - 2x - 3$ mediante fichas:

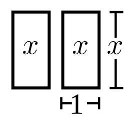
Para representar$-x^2 - 2x - 3$ debemos tener en cuenta, que el coeficiente que acompaña a $-x^2$ es el $-1$, luego su valor absoluto es 1, para el término $-2x$ el coeficiente es el $-2$, luego su valor absoluto es 2, para el término $-3$ el coeficiente es el $-3$, luego su valor absoluto es 3, por lo tanto el número de fichas cuadradas de lados $x$ que se van a utilizar, en este caso seria:

$-x^2$ : Un cuadrado de área $x^2$ cuyas dimensiones son $x$ por $x$.



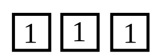

Gráfica 11

$-2x$ : Dos rectángulos de área $x$ cuyas dimensiones son 1 por $x$.



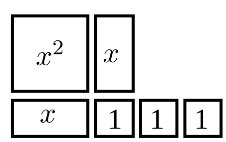

Gráfica 12

$-3$ : Tres cuadrados de área 1 cuyas dimensiones es 1 por 1.




Gráfica 13

Finalmente la representación del polinomio $-x^2 - 2x - 3$ mediante fichas es la siguiente:




Gráfica 14

Capítulo 8

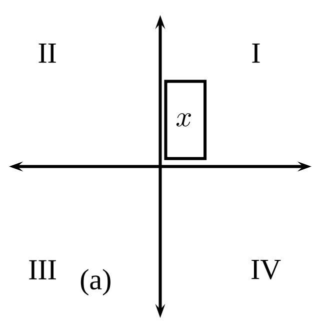
# Ubicación y valor algebraico de las fichas

## 8.1. Ubicación y valor algebraico de las fichas.

En la lectura de las dimensiones de una ficha se conviene en tomar la dimensión de la base en el eje $x$ y luego la dimensión de su altura en el eje $y$. Es de aclarar que haremos referencia a las dimensiones negativas de las fichas (base y altura) respecto a la ubicación de las mismas en los ejes coordenados y no haciendo referencia a la existencia de dimensiones negativas.

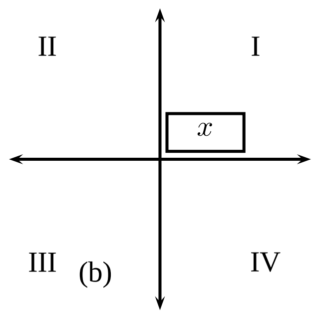
El valor algebraico de las fichas resultara de realizar el producto de los signos de sus dimensiones, es así que las gráficas (a),(b),(c) y (d) corresponden a fichas de valor algebraico $x$ positivo, las cuales se han dispuesto con dimensiones 1 y $x$, $x$ y 1, $-1$ y $-x$, $-x$ y $-1$, respectivamente.

En la siguiente gráfica podemos ver que sus dimensines son 1 y $x$, 1 es su base y $x$ es su altura.



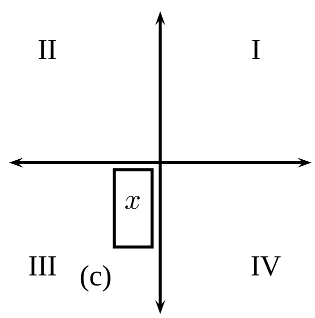

Gráfica 15

En la siguiente gráfica podemos observar que sus dimensiones son $x$ y 1, donde $x$ es su bese y 1 es su altura.



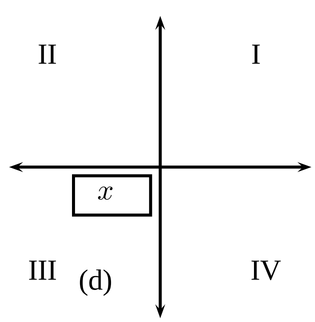

Gráfica 16

En la siguiente gráfica podemos observar que sus dimensiones son $-1$ y $-x$ donde $-1$ es su base y $-x$ es su altura.




Gráfica 17

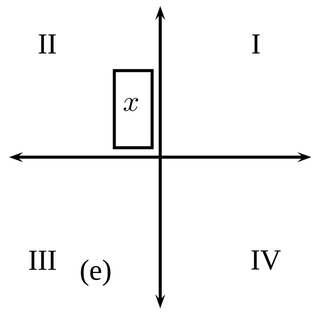
En la siguiente gráfica podemos observar que sus dimensiones son $-x$ y $-1$ donde $-x$ es su base y $-1$ es su altura.




Gráfica 18

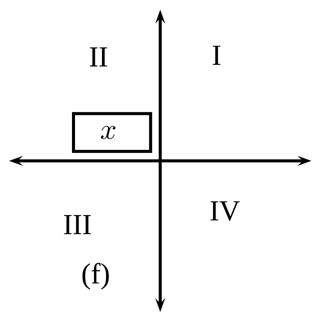
Las gráficas (e),(f),(g) y (h) corresponden a fichas de valor algebraico $-x$ negativo, las cuales se han dispuesto con dimensiones $-1$ y $x$, $-x$ y 1, $x$ y $-1$, 1 y $-x$, respectivamente.

La siguiente gráfica corresponde a las dimensines $-1$ y $x$, donde $-1$ es su base y $x$ es su altura.



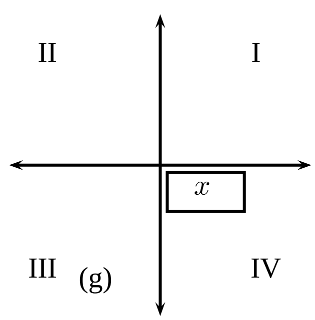

Gráfica 19

La siguiente gráfica corresponde a las dimensiones $-x$ y 1, donde $-x$ es su base y 1 es su altura.



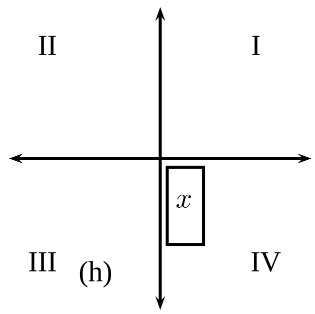

Gráfica 20

La siguiente gráfica corresponde a las dimensiones $x$ y $-1$, donde $x$ es su base y $-1$ es su altura.




Gráfica 21

La siguiente gráfica corresponde a las dimensiones 1 y $-x$ , donde 1 es su base y $-x$ es su altura.




Gráfica 22

Capítulo 9

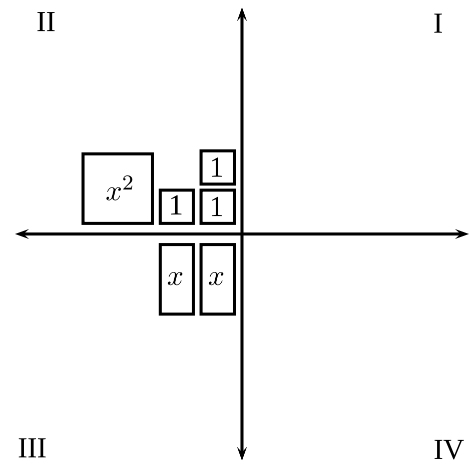
# Ubicación de un Polinomio en el Plano Cartesiano

## 9.1. Ubicación de un Polinomio en el Plano Cartesiano.

Para sumar y restar polinomios se debe representar los polinomios con fichas y posteriormente ubicarlas en el plano cartesiano, para esto se tiene en cuenta los signos de cada término del polinomio, ya que indican el cuadrante de ubicación en el plano cartesiano. Como el plano cartesiano esta conformado por cuatro cuadrantes dos de ellos positivos I y III y dos negativos II y IV, podemos ubicar las fichas que representan el polinomio bien sea en los cuadrantes II y III o en los cuadrantes I y IV.

**Ejemplo 1**: Sea $p(x) = -x^2 + 2x - 3$. Ubicar el polinomio $p(x)$ en el plano cartesiano.

El polinomio $p(x) = -x^2 + 2x - 3$ lo ubicamos en los cuadrantes II y III; las fichas del polinomio $p(x)$ con signos positivos se ubican en el cuadrante III ya que este cuadrante es positivo y las fichas del polinomio $p(x)$ con signos negativos se ubican en el cuadrante II ya que este cuadrante es negativo.
La ubicación del polinomio $p(x)$ se muestra en la siguiente gráfica.

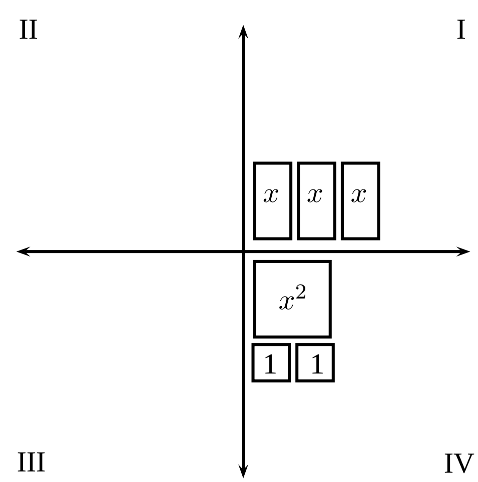



Gráfica 23

**Ejemplo 2**: Sea $q(x) = -x^2 + 3x - 2$. Ubicar el polinomio $q(x)$ en el plano cartesiano.

El polinomio $q(x) = -x^2 + 3x - 2$ lo ubicamos en los cuadrantes I y IV; las fichas del polinomio $q(x)$ con signos positivos se ubican en el cuadrante I ya que este cuadrante es positivo y las fichas del polinomio $q(x)$ con signos negativos se ubican en el cuadrante IV, ya que este cuadrante es negativo.

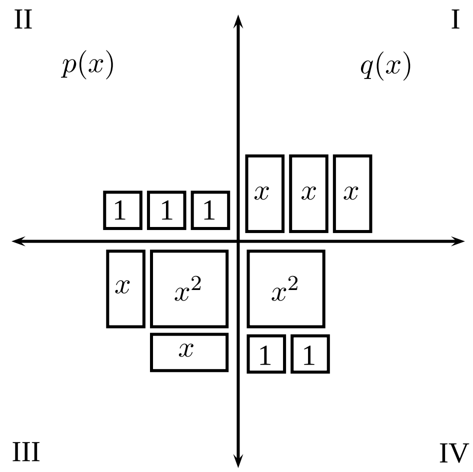
La ubicación del polinomio $q(x)$ se muestra en la siguiente gráfica.




Gráfica 24

**Ejemplo 3**: Sean $p(x) = x^2 + 2x - 3$ y $q(x) = -x^2 + 3x - 2$. Ubicar los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ en el plano cartesiano.

Ubicación del polinomio $p(x) = x^2 + 2x - 3$ y $q(x) = -x^2 + 3x - 2$




Gráfica 25

## Capítulo 10

# Operaciones con la Caja de Polinomios

## 10.1. Adición

**Definición tradicional de la suma de polinomios**

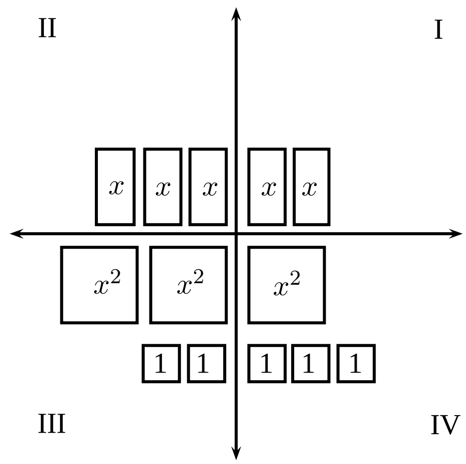
Para sumar dos polinomios se agrupan los términos del mismo grado y se suman sus coeficientes. El resultado es otro polinomio.

**Para sumar polinomios con la caja de polinomios**

Para realizar la suma $p(x) + q(x)$ en la caja de polinomios es necesario representar los sumandos mediante fichas y ubicarlas en el plano cartesiano, las fichas del sumando $p(x)$ se ubican en los cuadrantes II y III; si estas tienen signos positivos se ubican en los cuadrante III y con signos negativos se ubican en el cuadrante II, el sumando $q(x)$ se ubica en los cuadrantes I y IV; si estas tienen signos positivos se ubican en el cuadrante I y con signos negativos se ubican en el cuadrante IV; posteriormente la lectura del resultado se obtiene retirando las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferentes signos que producen ceros.

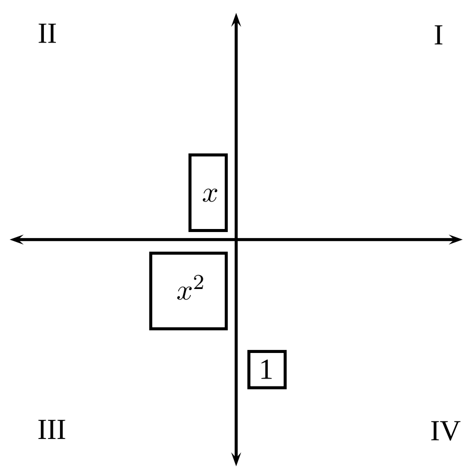
**Ejemplo 1**: Sean $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ y $q(x) = -x^2 + 2x - 3$. Realizar la suma de $p(x) + q(x)$.

De acuerdo con lo anterior, la disposición en el plano cartesiano para realizar la suma de $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ y $q(x) = -x^2 + 2x - 3$ se muestra en la gráfica.




Gráfica 26

Una vez retiradas las parejas de fichas que equivalen a cero, resulta



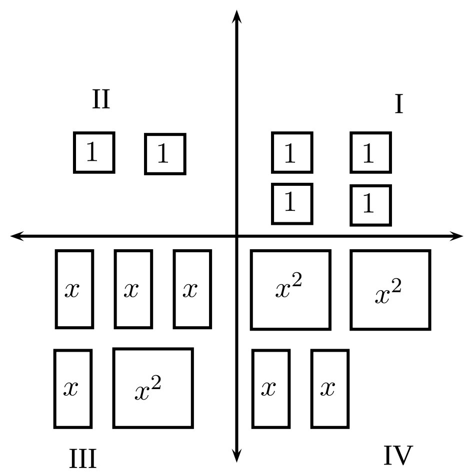

Gráfica 27

En la gráfica anterior se observan unas fichas; estas son el resultado de sumar $p(x)+q(x)$. En el cuadrante II hay una ficha de área $x$ (cuya base es 1 y altura $x$) y es negativa ya que el cuadrante II es negativo, en el cuadrante III hay una ficha de área $x^2$ (cuya base es $x$ y altura $x$) y es positiva ya que el cuadrante III es positivo, en el cuadrante IV hay una ficha de área 1 (cuya base es 1 y altura 1) y es negativa ya que el cuadrante IV es negativo, en el cuadrante I no hay ninguna ficha, de esta manera se realiza la lectura el cual corresponde al polinomio $x^2 - x - 1$, es decir,

$$(2x^2 - 3x + 2) + (-x^2 + 2x - 3) = x^2 - x - 1$$

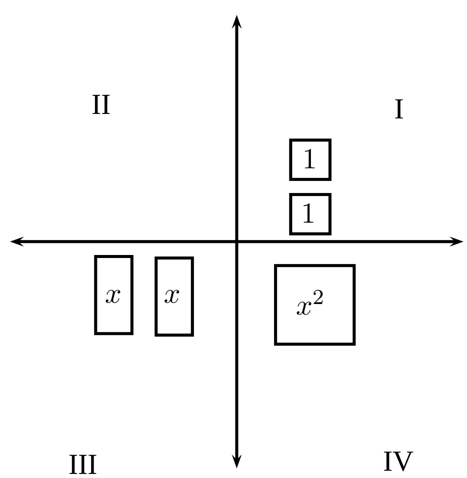
**Ejemplo 2**: Sean $p(x) = x^2 + 4x - 2$ y $q(x) = -2x^2 - 2x + 4$. Realizar la suma de $p(x) + q(x)$.

De acuerdo con lo anterior, la disposición en el plano cartesiano para realizar la suma de $p(x) = x^2 + 4x - 2$ y $q(x) = -2x^2 - 2x + 4$ se muestra en la gráfica.




Gráfica 28

Una vez retiradas las parejas de fichas que equivalen a cero, resulta.




Gráfica 29

En la gráfica anterior se observa unas fichas; estas son el resultado de sumar $p(x)+q(x)$. En el cuadrante I hay dos fichas de área 1 y es positiva ya que el cuadrante I es positivo, en el cuadrante III hay dos fichas de área $x$ y es positiva ya que el cuadrante III es positivo, en el cuadrante IV hay una ficha de área $x^2$ y es negativa ya que el cuadrante IV es negativo, en el cuadrante II no hay ninguna ficha, de esta manera se realiza la lectura el cual corresponde al polinomio $-x^2 + 2x + 2$, es decir,

$$(x^2 + 4x - 2) + (-2x^2 - 2x + 4) = -x^2 + 2x + 2$$

Realmente la suma en la caja de polinomios es de manera similar a la suma tradicional, ya que en esta se organiza los polinomios que se van a sumar, en la caja de polinomios cuando colocamos las fichas en el plano cartesiano estamos representando y organizando cada uno de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ mediante fichas, posteriormente, en la suma tradicional agrupamos los términos semejantes y sumamos sus coeficientes, con la caja de polinomios cuando retiramos las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferente signo estamos agrupando fichas de la misma figura geométrica y sumandolas; ya que al sumarlas estas se cancelan, y las fichas que quedan en el plano cartesiano es la suma de $p(x) + q(x)$.

## 10.2. Sustracción

**Definición tradicional de la sustracción de polinomios**

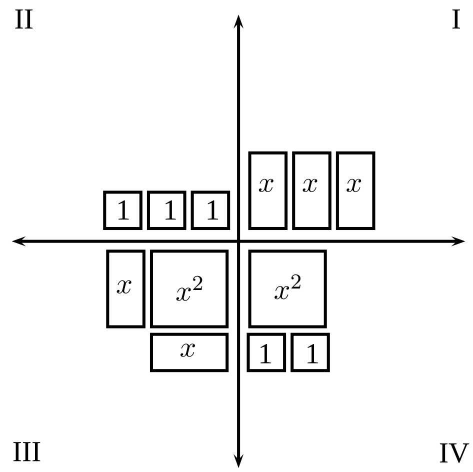
La resta de polinomios consiste en sumar el opuesto del sustraendo. $p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))$.

**Para restar polinomios con la caja de polinomios**

Para realizar la resta $p(x) + (-q(x))$ en la caja de polinomios es necesario representar los sumandos mediante fichas y ubicarlas en el plano cartesiano, las fichas del sumando $p(x)$ *minuendo* se ubican en los cuadrantes II y III; si estas tienen signos positivos se ubican en el cuadrante III y signos negativos se ubican en el cuadrante II, el sumando $q(x)$ *sustraendo* se ubica en los cuadrantes I y IV; si estas tienen signos positivos se ubican en el cuadrante I y signos negativos se ubican en el cuadrante IV; posteriormente se trasladan todas las fichas del *sustraendo* $q(x)$ a los cuadrantes II y III; las fichas que estan en los cuadrantes I pasan al cuadrante II y las que estan en el cuadrante IV pasa al cuadrante III. La lectura del resultado se obtiene retirando las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferentes signos que producen ceros.

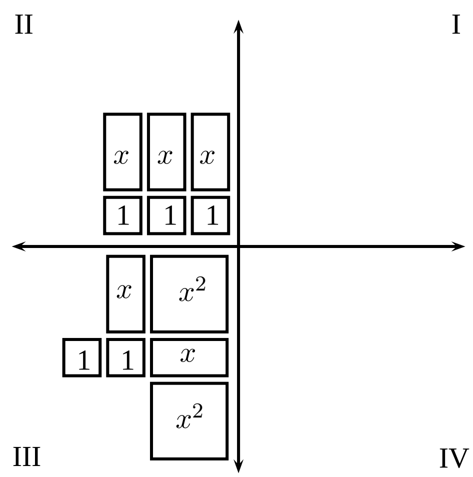
**Ejemplo 1**: Sean $p(x) = x^2 + 2x - 3$ y $q(x) = -x^2 + 3x - 2$. Realizar la resta $p(x) - q(x)$.

De acuerdo con lo anterior, la disposición en el plano cartesiano para realizar la resta de $p(x) = x^2 + 2x - 3$ y $q(x) = -x^2 + 3x - 2$ se muestra en la gráfica.



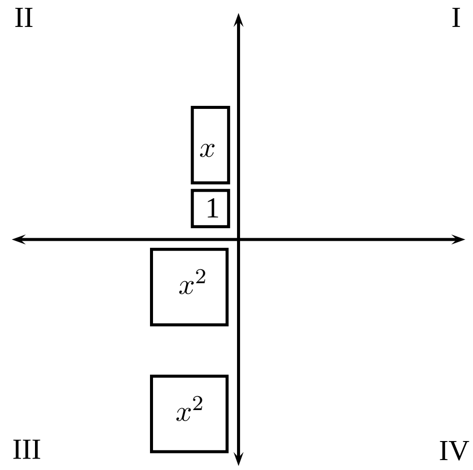

Gráfica 30

Según lo anterior trasladamos todas las fichas del sustraendo $q(x)$ a los cuadrantes del minuendo $p(x)$.




Gráfica 31

Una vez retiradas las parejas de fichas que equivalen a cero, resulta.



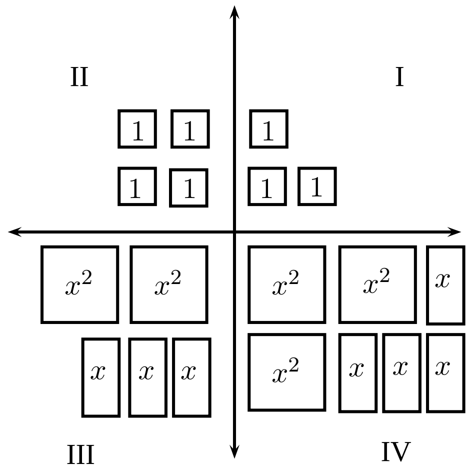

Gráfica 32

En la gráfica anterior se observa unas fichas; estas son el resultado de restar $p(x)-q(x)$. En el cuadrante II hay dos fichas, una de área $x$ y otra de área 1, y son negativas ya que el cuadrante dos es negativo, en el cuadrante III hay dos fichas de área $x^2$ y son positivas ya que el cuadrante III es positivo, en el cuadrante IV y I no hay ninguna ficha, de esta manera se realiza la lectura el cual corresponde al polinomio $2x^2-x-1$, es decir,

$$(x^2+2x-3)+(-(-x^2+3x-2))=2x^2-x-1$$

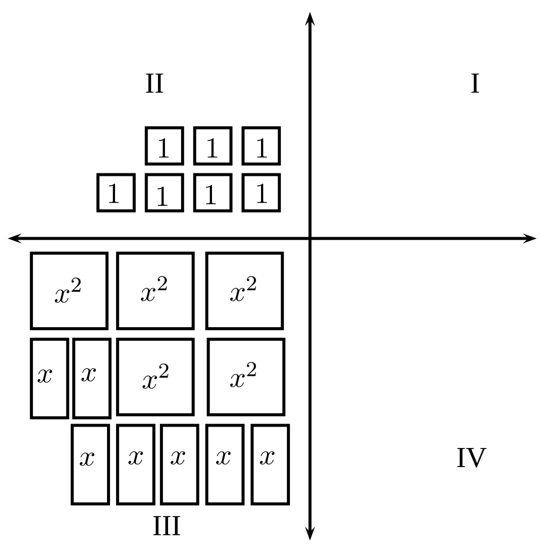
**Ejemplo 2**: Sean $p(x)=2x^2+3x-4$ y $q(x)=3x^2+4x-3$. Realizar la resta $p(x)-q(x)$.

De acuerdo con lo anterior, la disposición en el plano cartesiano para realizar la resta de $p(x)=2x^2+3x-4$ y $q(x)=3x^2+4x-3$ se muestra en la gráfica.




Gráfica 33

Según lo anterior trasladamos todas las fichas del sustraendo $q(x)$ a los cuadrantes del minuendo $p(x)$.




Gráfica 34

En la gráfica anterior se observa unas fichas; estas son el resultado de restar $p(x) - q(x)$. En el cuadrante II hay siete fichas de área 1, y son negativas ya que el cuadrante II es negativo, en el cuadrante III hay cinco fichas de área $x^2$ y siete fichas de área $x$, estas son positivas ya que el cuadrante III es positivo, en el cuadrante IV y I no hay ninguna ficha, de esta manera se realiza la lectura el cual corresponde al polinomio $5x^2+7x-7$, es decir,

$$(2x^2 + 3x - 4) + (-(3x^2 + 4x - 3)) = 5x^2 + 7x - 7$$

Realmente la sustracción en la caja de polinomios es de manera similar a la tradicional, en esta se coloca el polinomio $p(x) - q(x)$ y operamos el signo $-$; al operar este signo con el sustraendo $q(x)$ nos cambia de signo cada uno de los términos de $q(x)$ y posteriormente agrupamos los términos semejantes y los sumamos; de manera similar ocurre en la caja de polinomios, representamos el minuendo $p(x)$ y el sustraendo $q(x)$ mediante fichas y las ubicamos en el plano cartesiano. Una vez ubicadas las fichas trasladomos todas estas al sustraendo $q(x)$ a los cuadrantes donde se encuentra el minuendo $p(x)$, de esta manera todas las fichas del sustraendo $q(x)$ nos cambian de signo, posteriormente, retiramos las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferente signo y las fichas que quedan en el plano cartesiano es la resta de $p(x) - q(x)$.

## 10.3. Multiplicación

**Definición Tradicional de la Multiplicación de Polinomios:**

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

**Multiplicación con la Caja de Polinomios**

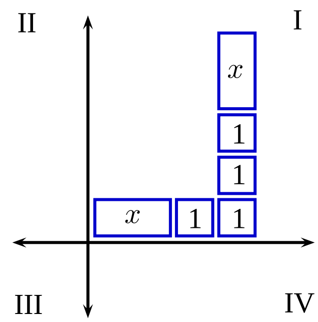
Para multiplicar dos polinomios con la caja de polinomios $p(x)$ *multiplicando* y $q(x)$ *multiplicador* el producto se obtiene construyendo un rectángulo cuyas dimensiones *(base y altura)* es uno de los dos polinomios $p(x)$ o $q(x)$, una vez armado la base y la altura del rectángulo, añadimos tantas fichas se requieran para completarlo, posteriormente eliminamos las fichas con igual figura geométrica pero con diferentes signos que producen ceros.

La regla para armar estos rectángulos en el plano cartesiano es que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común. Con las fichas básicos de dimensión 2 sólo es factible obtener productos de dos factores lineales $p(x) = ax+b$ y $q(x) = cx+d$.

**Nota**: Para realizar la ubicación y lectura correcta de la base y la altura de las fichas (ver capítulo 8).

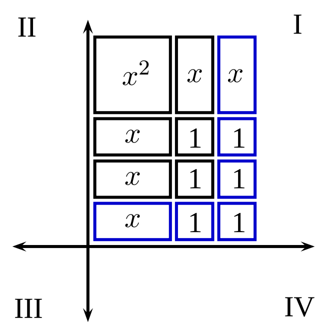
**Ejemplo 1**: Sean $p(x) = (x + 2)$ y $q(x) = (x + 3)$. Realizar $p(x)q(x)$.

Construimos con las fichas las dimensiones de los lados del rectángulo *base y altura*, teniendo en cuenta que la base debe ser paralela a el eje de las $x$, y la altura debe ser paralela al eje de las $y$, en este caso la base será el polinomio $p(x) = (x + 2)$, y su altura será el polinomio $q(x) = (x + 3)$.




Gráfica 35

Una vez armada la base y la altura del rectángulo, añadimos tantas fichas se requieran, por esto, debemos tener en cuenta que las dimensiones de los lados del rectángulo no se deben alterar, y que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.



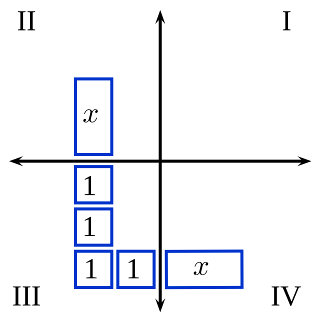

Gráfica 36

Una vez armado el rectángulo esta la multiplicación de $p(x)q(x)$.
Posteriormente eliminamos las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferentes signos que producen ceros. En este caso no eliminamos parejas de fichas ya que todas son positivas sólo procedemos a sumar las fichas y obtenemos como resultado $x^2 + 5x + 6$, es decir,

$$p(x)q(x) = (x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$$

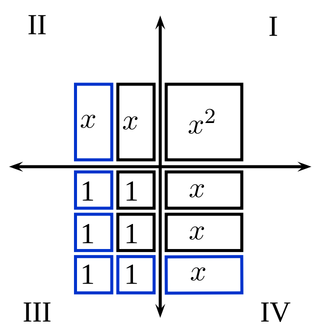
**Ejemplo 2**: Sean $p(x) = (x-2)$ y $q(x) = (x-3)$. Realizar $p(x)q(x)$.

Construimos con las fichas las dimensiones de los lados del rectángulo *base y altura*, teniendo en cuenta que la base debe ser paralela a el eje de las $x$, y la altura debe ser paralela al eje de las $y$, en este caso la base será el polinomio $p(x) = (x-2)$, y su altura será $q(x) = (x-3)$.




Gráfica 37

Una vez armada la base y la altura del rectángulo, añadimos tantas fichas se requieran, por esto se debe tener en cuenta que las dimensiones de los lados del rectángulo no se deben alterar, y que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.



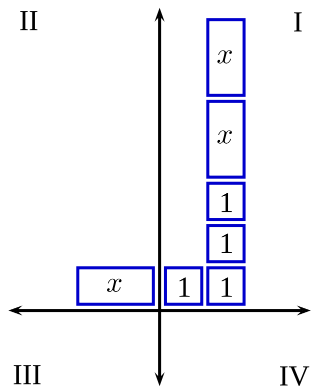

Gráfica 38

Una vez armado el rectángulo esta la multiplicación de $p(x)q(x)$.
Posteriormente eliminamos las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferentes signos que producen ceros, en este caso no hay parejas de fichas que producen ceros, por lo tanto, procedemos a sumar las fichas y obtenemos como resultado $x^2-5x+6$, es decir,

$$p(x)q(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$$

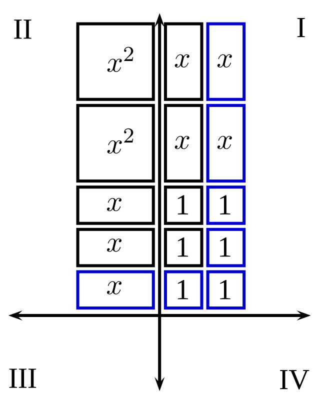
**Ejemplo 3**: Sean $p(x) = (-x + 2)$ y $q(x) = (2x + 3)$. Realizar $p(x)q(x)$.

Construimos con las fichas las dimensiones de los lados del rectángulo *base y altura*, teniendo en cuenta que la base debe ser paralela a el eje de las $x$, y la altura debe ser paralela al eje de las $y$, en este caso la base será el polinomio $p(x) = (-x + 2)$, y su altura será $q(x) = (2x + 3)$.




Gráfica 39

Una vez armada la base y la altura del rectángulo, añadimos tantas fichas se requieran, por lo tanto debemos tener en cuenta que las dimensiones de los lados del rectángulo no se deben alterar y que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.

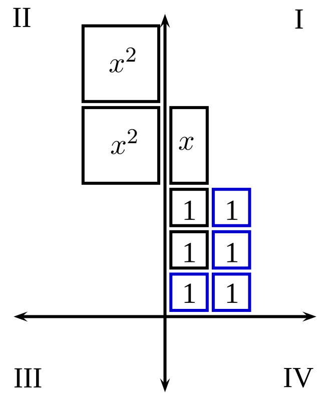



Gráfica 40

Una vez armado el rectángulo esta la multiplicación de $p(x)q(x)$

$$p(x)q(x) = (-x + 2)(2x + 3) = -2x^2 - 3x + 4x + 6 = -2x^2 + x + 6$$

Posteriormente eliminamos las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferentes signos que producen ceros, en el cuadrante I retiramos tres fichas de área $x$ siendo estas positivas, en el cuadrante II retiramos tres fichas de área $x$ siendo estas negativas, por lo tanto procedemos a realizar la lectura del producto.




Gráfica 41

En la gráfica anterior se observa unas fichas; estas son el resultado de multiplicar $p(x)q(x)$. En el cuadrante I hay seis fichas de área 1 y otra de área $x$, y son positivas y en el cuadrante II hay dos fichas de área $x^2$, y son negativas en los cuadrante III y IV no hay fichas, de esta manera se realiza la lectura el cual corresponde al polinomio $-2x^2 + x + 6$, es decir,

$$p(x)q(x) = (-x + 2)(2x + 3) = -2x^2 - 3x + 4x + 6 = -2x^2 + x + 6$$

Realmente la multiplicación en la caja de polinomios es de manera similar a la tradicional, en está se coloca el polinomio $p(x)q(x)$ y operamos todos los términos del *multiplicando* por cada uno de los términos del *multiplicador* teniendo en cunta la ley de los signos, posteriormente agrupamos los términos semejantes y los sumamos, de manera similar ocurre en la caja de polinomios, armamos la base y la altura del rectángulo en el plano cartesiano con el multiplicando $p(x)$ y el multiplicador $q(x)$, consecutivamente completamos el rectángulo agregando fichas; que de cierta forma estamos multiplicando cada uno de las dimensiones de las fichas de la base por cada una de las dimensiones de las fichas de su altura, una vez completado el rectángulo retiramos las parejas de fichas con igual figura geométrica pero con diferente signo y las fichas que quedan en el plano cartesiano es la multiplicación de $p(x)q(x)$.

## 10.4. Factorización

**Definición tradicional de factorización de polinomios**

La factorización de un polinomio consiste en expresar un polinomio como un producto de factores.

**Factorización tradicional del trinomio de la forma** $x^2 + bx + c$

Este tipo de trinomio tiene las siguientes características:

- El coeficiente del primer término es 1.
- El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.
- El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
- El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo término y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

**Reglas prácticas para factorizar un trinomio de esta forma** $x^2 + bx + c$

El trinomio se descompone en dos factores de la forma $(x + \alpha)$ y $(x + \beta)$ donde $x$ es la raíz cuadrada de $x^2$, es decir,

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)(x + \beta)$$

La idea es conseguir dos números $\alpha$ y $\beta$ tales que $\alpha + \beta = b$, y, $\alpha \, . \, \beta = c$

**Ejemplo 1**: Factorizar $x^2 + 5x + 6$.

Comensemos por observar que:

$6 = 6 \times 1,\, 3 \times 2,\, (-6) \times (-1)\, y\, (-3) \times (-2)$ de estas parejas buscamos aquellas cuya suma sea 5.

Es facil verificar que $5 = 3 + 2, \quad 6 = 3 \times 2$ así que los números buscados son 3 y 2. Por lo tanto

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

### Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ con la Caja de Polinomios

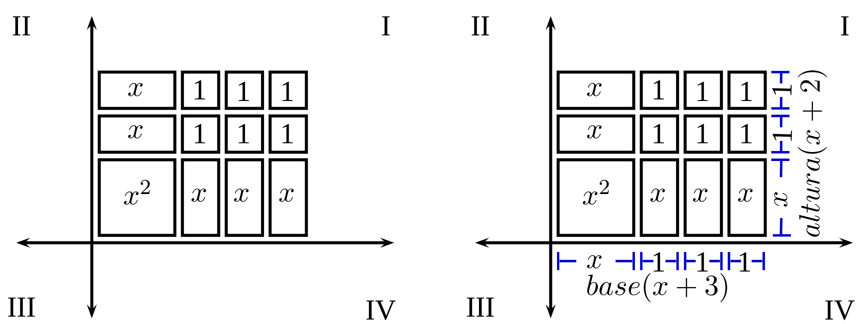
Para realizar la factorización de los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ con la caja de polinomios consiste en ubicar y construir un rectángulo en el plano cartesiano, agregando el mínimo número de parejas de fichas que producen ceros *(encuadre minimal)*, teniendo en cuenta que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común. La factorización corresponde a las dimensiones del rectángulo (*base y altura*).

**Ejemplo 1**: Factorizar: $x^2 + 5x + 6$

Para representar el trinomio se seleccionan las fichas.

- 1 cuadrado de área $x^2$
- 5 rectángulos de área $x$
- 6 cuadrados de área 1

Posteriormente en el plano cartesiano ubicamos y construimos un rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta que los signos de las mismas nos indican el cuadrante de ubicación y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.




Gáfica 42

En este caso el mínimo de parejas de fichas es cero ya que no se agregaron fichas para armar el rectángulo, de esta manera la factorización del trinomio $x^2 + 5x + 6$ son las dimensiones del rectángulo *(base y altura)*, $(x + 3)(x + 2)$, es decir,

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

**Factorización tradicional del trinomio de la forma** $ax^2 + bx + c$

Son trinomios de esta forma:

$2x^2 + 11x + 5$
$3a^2 + 7a - 6$
$10n^2 - n - 2$
$7m^2 - 23m + 6$

Este se diferencia de los trinomios en el caso anterior en que el primer término tiene coeficiente distinto de 1.

**Descomposición en factores de un trinomio de la forma** $ax^2 + bx + c$

**Ejemplo 1**: Factorizar $2x^2 + 5x + 3$

Multipliquemos el trinomio por el coeficiente de $x^2$ que es 2 y dejando indicado el producto de 2 por $5x$ se tiene: $4x^2 + 2(5x) + 6$. Pero $4x^2 = (2x)^2$ y $2(5x) = 5(2x)$ luego podemos escribir: $(2x)^2 + 5(2x) + 6$.

Ahora busquemos dos números cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6, ellos son 3 y 2. Así tendremos que $(2x^2) + 5(2x) + 6 = (2x + 3)(2x + 2)$.
Como al principio multiplicamos el trinomio dado por 2, ahora tenemos que dividir por 2, para no alterar el trinomio, y tendremos que:

$$2x^2 + 5x + 3 = \frac{(2x + 3)(2x + 2)}{2} = (2x + 3)(x + 1)$$

.

**Factorización trinomio de la forma** $ax^2 + bx + c$ **con la caja de polinomios**

Para realizar la factorización del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con la caja de polinomios se realiza de la misma manera como el trinomio $x^2 + bx + c$

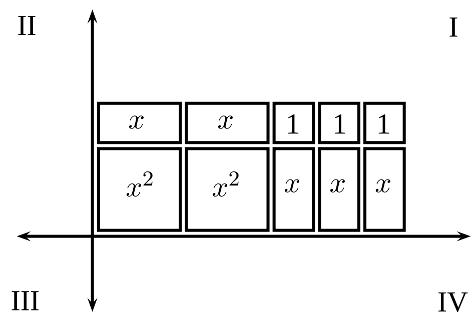
.

**Ejemplo 1**: Factorizar: $2x^2 + 5x + 3$

Para representar el trinomio se seleccionan las fichas

- 2 cuadrados de área $x^2$
- 5 rectángulos de área $x$
- 3 cuadrados de área 1

Posteriormente en el plano cartesiano ubicamos y construimos un rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta que los signos de las mismas nos indican el cuadrante de ubicación y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.




Gráfica 43

En este caso el mínimo número de parejas de fichas es cero (*encuadre minimal*), ya que no se agregaron fichas para armar el rectángulo, de esta manera la factorización del trinomio $2x^2+5x+3$ son las dimensiones del rectángulo *(base y altura)*, $(2x+3)(x+1)$, es decir,

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

**Factorización tradicional de una diferencia de cuadrados perfectos** $a^2 - c^2$

Para identificar cuando un binomio es la diferencia de cuadrados, se debe verificar que cumpla las siguientes condiciones :

- Debe tener dos términos, separados por el signo menos.
- Los dos términos deben estar elevados al cuadrado, es decir, se puede hallar la raíz cuadrada exacta.

**Regla para factorizar una diferencia de cuadrados**

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

**Ejemplo 1:** Factorizar $1 - x^2$

La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de $x^2$ es $x$. Multiplico la suma de estas raíces cuadradas $(1 + x)$ por la diferencia $(1 - x)$ y tendremos:

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$

**Factorización de una diferencia de cuadrados $(ax)^2 - c^2$ con la caja de polinomios**

Para realizar la factorización de una diferencia de cuadrados $(ax)^2 - c^2$ con la caja de polinomios se realiza de la misma manera que los trinomios, ya que podemos considerar la diferencia de cuadrados como un trinomio de la siguiente forma.

$$(ax)^2 + 0(bx) - c^2 = (ax)^2 - c^2$$

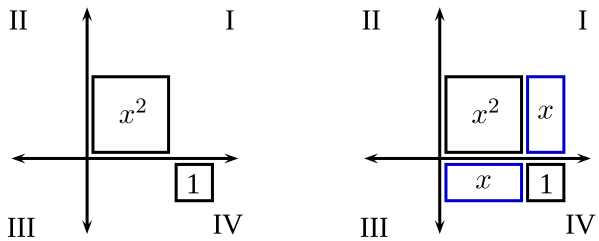
Por esto para realizar la factorización de la diferencia de cuadrados $x^2 - c^2$ con la caja de polinomios consiste en ubicar y construir un rectángulo en el plano cartesiano, agregando el mínimo número de parejas de fichas que producen ceros *(encuadre minimal)*, teniendo en cuenta que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común. La factorización corresponde a las dimensiones de sus lados *(base y altura)* del rectángulo.

**Ejemplo 1**: Factorizar: $x^2 - 1$

Para representar la diferencia de cuadrados se seleccionan las fichas rectangulares.

- 1 cuadrado de área $x^2$
- 1 cuadrado de área 1

Posteriormente en el plano cartesiano ubicamos y construimos un rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta que los signos de las mismas nos indican el cuadrante de ubicación y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.




Gráfica 44

En este caso el mínimo número de parejas de fichas es dos *(encuadre minimal)*, ya que se agregaron 2 fichas para armar el rectángulo, de esta manera la factorización de la diferencia de cuadrados $x^2 - 1$ son las dimensiones del rectángulo *(base y altura)*, $(x+1)(x-1)$, es decir,

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

**Factorización tradicional de un trinomio cuadrado perfecto.**

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales.

Así $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $a + b$.

En efecto:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

**Regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto.**

Un trinomio ordenado con relación a una letra es cuadrado perfecto cuando el primero y el tercer término son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Así, $x^2 - 4x + 4$ es un cuadrado perfecto porque:

- Raíz cuadrada de $\sqrt{x^2} = x$
- Raíz cuadrada de $\sqrt{4} = 2$

Doble producto de estas raíces: $2 \times 2 \times x = 4x$, segundo término.

**Regla para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.**

Se extrae la raíz cuadrada al primer y tercer término del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

**Ejemplo1** : Factorizar $x^2 + 2x + 1$

- Raíz cuadrada de $\sqrt{x^2} = x$
- Raíz cuadrada de $\sqrt{1} = 1$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$$

**Factorización del trinomio cuadrado perfecto utilizando la Caja de Polinomios.**

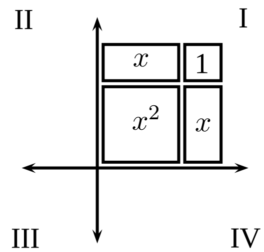
La factorización de un trinomio cuadrado perfecto utilizando la caja de polinomios se realiza de la misma manera como se factorizan los trinomios $ax^2 + bx + c$ y $x^2 + bx + c$. Para saber si un trinomio es cuadrado perfecto utilizando la caja de polinomios, se debe tener en cuenta que el rectángulo armado en el plano cartesiano con las fichas debe tener las dimensiones de sus lados *(base y altura)* iguales; es decir ese rectángulo debe ser un cuadrado.

**Ejemplo 1**: Factorizar: $x^2 + 2x + 1$

Para representar el trinomio se seleccionan las fichas.

- 1 cuadrado de área $x^2$
- 2 rectángulos de área $x$
- 1 cuadrado de área 1

Posteriormente en el plano cartesiano ubicamos y construimos un rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta que los signos de las mismas nos indican el cuadrante de ubicación y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.




Gráfica 45

En este caso el mínimo de parejas de fichas es cero *(encuadre minimal)*, ya que no se agregaron fichas para armar el rectángulo, de esta forma el rectángulo obtenido es un cuadrado y la dimensión de su lado es $(x+1)$ por lo tanto su área es $(x+1)(x+1)$, de esta manera la factorización del trinomio $x^2+2x+1$ son las dimensiones del rectángulo *(base y altura)*, es decir,

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$$

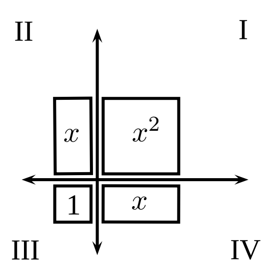
Como el factor $(x+1)$ se repite dos veces, decimos que es un trinomio cuadrado perfecto.

**Ejemplo 2**: Factorizar: $x^2 - 2x + 1$

Para representar el trinomio se seleccionan las fichas.

- 1 cuadrado de área $x^2$
- 2 rectángulos de área $x$
- 1 cuadrado de área 1

Posteriormente en el plano cartesiano ubicamos y construimos un rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta que los signos de las mismas nos indican el cuadrante de ubicación y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.




Gráfica 46

En este caso el mínimo de parejas de fichas es cero (*encuadre minimal*), ya que no se agregaron fichas para armar el rectángulo, de esta forma el rectángulo obtenido es un cuadrado y la dimensión de su lado es $(x-1)$ por lo tanto su área es $(x-1)(x-1)$, de esta manera la factorización del trinomio $x^2-2x+1$ son las dimensiones del rectángulo *(base y altura)*, es decir,

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$$

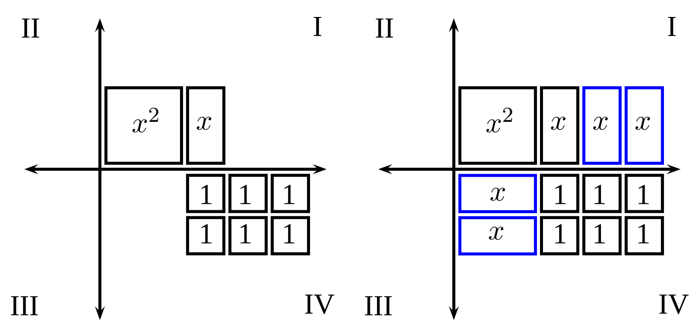
Como el factor $(x-1)$ se repite dos veces, decimos que es un trinomio cuadrado perfecto.

**Ejemplo 3**: Factorizar: $x^2 + x - 6$

Para representar el trinomio se seleccionan las fichas.

- 1 cuadrado de área $x^2$
- 1 rectángulos de área $x$
- 6 cuadrados de área 1

Posteriormente en el plano cartesiano ubicamos y construimos un rectángulo con las fichas, teniendo en cuenta que los signos de las mismas nos indican el cuadrante de ubicación y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.




Gráfica 47

En este caso con las fichas no se pudo armar el rectángulo por esto realizamos un *(encuadre minimal)* que consiste en agregar el mínimo de parejas de fichas que producen ceros para armar el rectángulo.

Las dimensiones de sus lados del rectángulo obtenido *(base y altura)* son $(x+3)$ y $(x-2)$ son la factorización del trinomio $x^2+x-6$, es decir,

$$x^2+x-6 = x^2+3x-2x-6 = (x+3)(x-2)$$

Es de notar que las dimensiones de los lados del rectángulo armado no son iguales por lo tanto consideramos que no es un cuadrado perfecto.

## 10.5. División

**División tradicional de Polinomios.**

Para realizar la división de polinomios se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.
Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.

Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.

**Ejemplo 1**: Dividir $p(x) = x^2+2x-3$ entre $q(x) = x+3$.

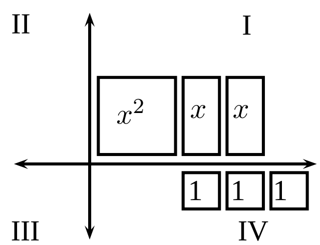
$$
\begin{array}{r|l}
x^2+2x-3 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^2-3x\quad} & x-1 \\
/ \quad -x-3 & \\
\underline{x+3} & \\
/ \;\; / &
\end{array}
$$

**División Utilizando la Caja de Polinomios.**

Dividir un polinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ entre un binomio $dx + e$, análogamente que en la multiplicación y factorización, consiste en armar con las fichas que representan el dividendo, un rectángulo cuya base es el divisor $dx + e$. Para formar el rectángulo, en ocasiones, es necesario, añadir pares de fichas equivalentes algebraicamente a cero *(encuadre minimal).* Una vez armado el rectángulo, el cociente es la altura de este y el residuo es la cantidad de fichas de área 1 que no hacen parte del mismo. Es de aclarar que para armar el rectángulo no se debe alterar la dimensión de su base.

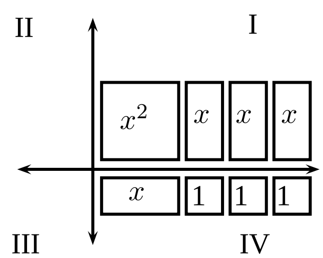
**Ejemplo 1**: Dividir $p(x) = x^2 + 2x - 3$ entre $q(x) = x + 3$.

Para realizar la siguiente división se debe armar con las fichas del dividendo un rectángulo, teniendo en cuenta que la dimensión de su base es el divisor.



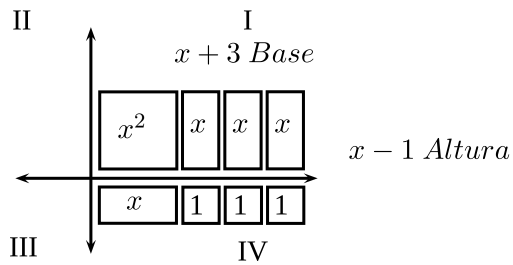

Gráfica 48

Como se puede ver en la gráfica anterior las fichas positivas del dividendo $x^2 + 2x$ se ubican en el cuadrante I y las fichas negativas $-3$ en el cuadrante IV, teniendo en cuenta que la dimensión de su base es el divisor $x + 3$.




Gráfica 49

En este caso es necesario agregar parejas de fichas equivalentes algebraicamente a cero *(encuadre minimal)*, para completar el rectángulo.

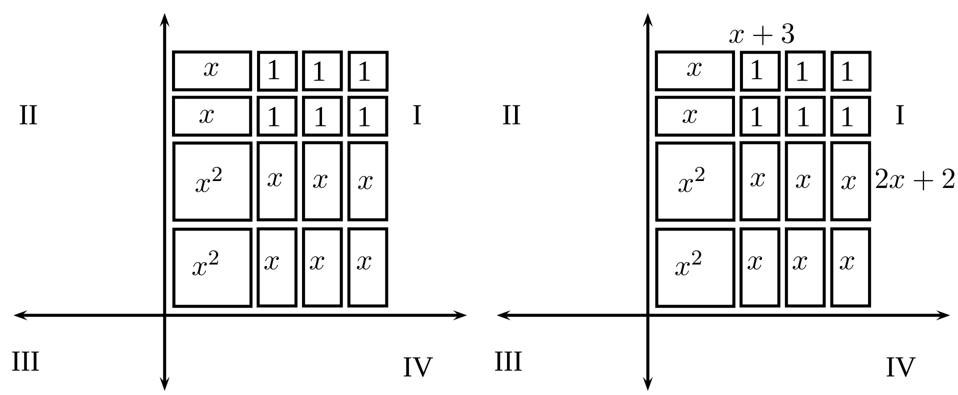



Gráfica 50

Una vez armado el rectángulo encontramos las dimensiones de sus lados *(base y altura)*, donde su base $x+3$ es el divisor y su altura $x-1$ es el cociente.

**Ejemplo 2**: Dividir $p(x) = 2x^2 + 8x + 6$ entre $q(x) = x + 3$.

Para realizar la siguiente división se debe armar con las fichas del dividendo un rectángulo, teniendo en cuenta que la dimensión de su base es el divisor.
Como se puede ver en la gráfica todas las fichas del dividendo son positivas $2x^2+8x+6$ por lo tanto se ubican en el cuadrante I, teniendo en cuenta que la dimensión de su base es el divisor $x+3$.




Gráfica 51

Una vez armado el rectángulo encontramos las dimensiones de sus lados *(base y altura)*, donde su base $x+3$ es el divisor y su altura $2x+2$ es el cociente.

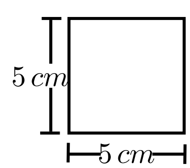
# Capítulo 11

# Aplicación de la Propuesta

## 11.1. Rompecabezas Como Material Didáctico

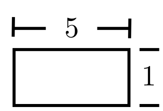
Para desarrollar los temas con la caja de polinomios es necesario utilizar un rompecabezas cuyas piezas representan términos de los polinomios. Este rompecabeza básico consta de piezas cuadradas y rectangulares, con estas fichas sólo es posible realizar operaciones con polinomios cuyo resultado sea hasta de grado dos. Las fichas tienen las siguientes caracteristicas:

Cuadrados de lados $5\,cm$



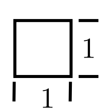

Gráfica 52

Rectángulos de lado $5\,cm$ y $1\,cm$.




Gráfica 53

Cuadrados de lados $1\,cm$.




Gráfica 54

Para resolver los ejercicios que se realizaran a continuacion se debe disponer de estas piezas bien sea en cartulina, o cualquier tipo de material que permita la manipulación.

Para la aplicación de la estrategia metodológica se contó con la colaboración de la Institución Educativa Ángel María Paredes, del municipio de Neiva; donde permitieron compartir la experiencia sobre el proceso enseñanza-aprendizaje de las operaciones; suma, resta, multiplicación, división de polinimios y factorización de expresiones polinómicas utilizando como material didáctico la caja de polinomios, esta actividad contó con la participación de 39 estudiantes del grado octavo de Educación Básica.

El desarrollo de las actividades se llevo a cabo en varias sesiones de trabajo, una de estas estuvo relacionada con la construcción del material y el manejo del mismo (caja de polinomios), trabajando en el cálculo de áreas de las figuras que se manejan y respectivo valor algebraico; en la segunda sesión se trabajaron actividades relacionadas con la representación de polinomios mediante las fichas y su respectiva ubicación en el plano cartesiano; en la tercera sesión se trabajaron las operaciones suma y resta, en la cuarta sesión se trabajaron la operación multiplicación y factorización y en la quinta sesión se trabajó la división.

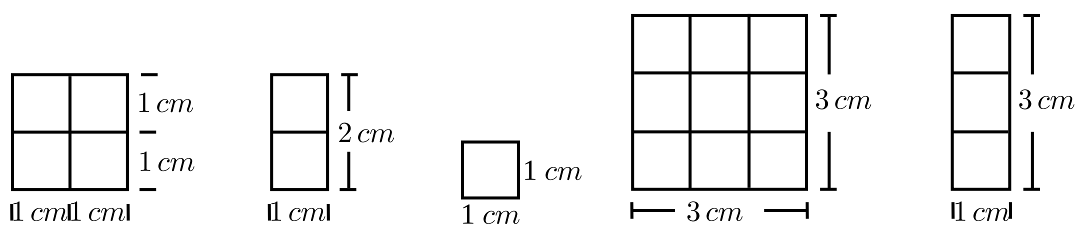
ACTIVIDAD 1

**CÁLCULO DE ÁREA**

1. Utilizando las siguientes fichas del rompecabezas en cada caso armar cuadrados.

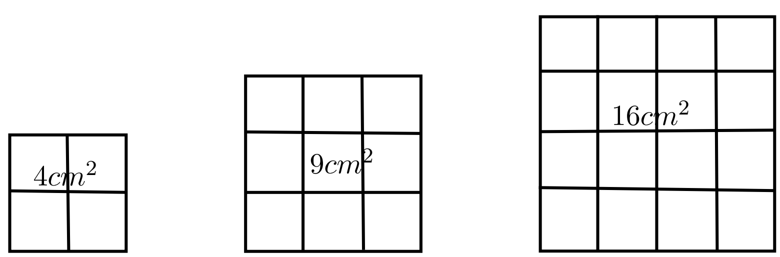
- 1 ficha cuadrada grande, 1 cuadrada pequeña y 2 rectangulares.
- 1 ficha cuadrada grande, 9 cuadradas pequeñas y 6 rectangulares.
- 4 fichas cuadradas grandes, 4 cuadradas pequeñas y 8 rectángulares.
- 4 fichas cuadradas de las grandes, 1 cuadrada de las pequeñas y 4 rectangulares.

2. Calcular el área de las siguientes figuras.



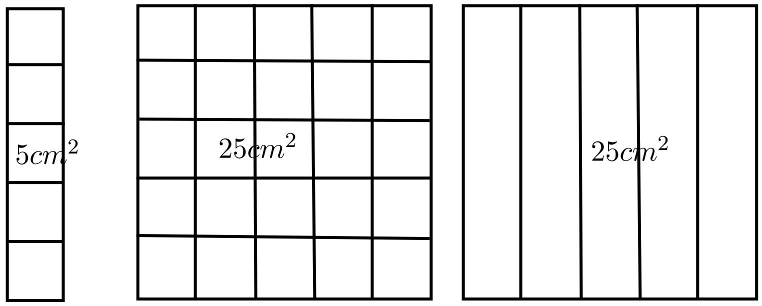

Gráfica 55

3. En cada una de las figuras encontrara el área, calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$).



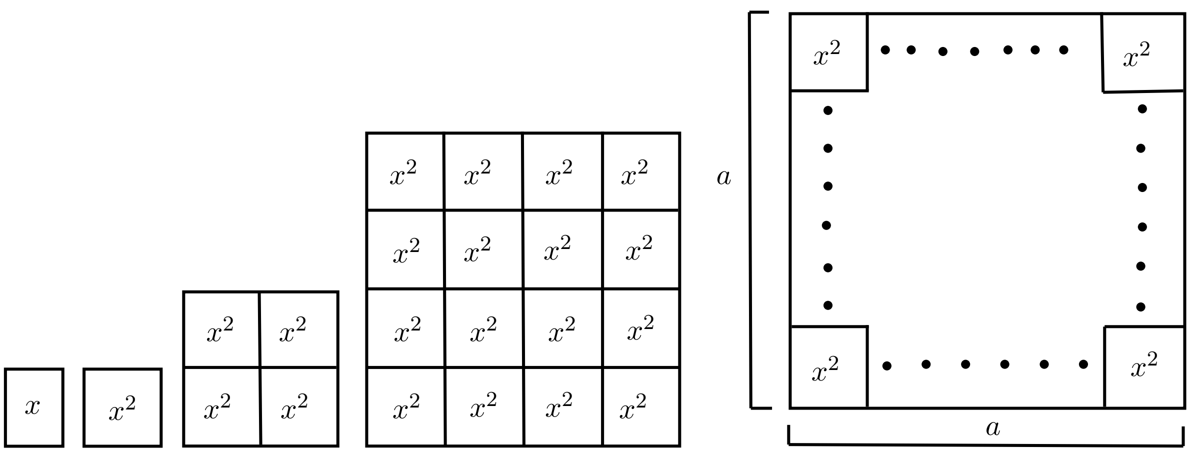

Gráfica 56

4. Utilizando las fichas del rompecabezas armar las siguientes figuras y calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$).



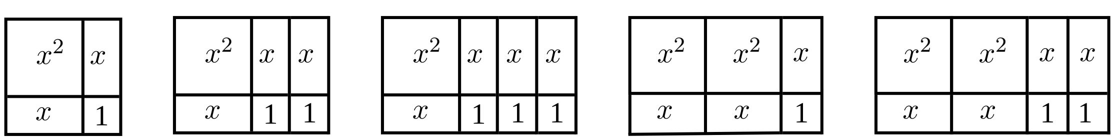

Gráfica 57

5. En cada una de las figuras encontrara el área, calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$).

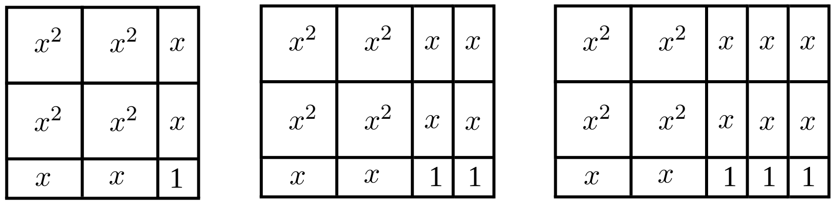



Gráfica 58

6.Utilizando las fichas del rompecabezas arme las siguientes figuras, sume las áreas y encuentra las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$).




Gráfica 59




Gráfica 60

7. Representar gráficamente los siguientes monomios y polinomios.

- $2x^2$
- $7x$
- $4x^2$
- $7x + 8$
- $x^2 + 6x + 9$
- $4x^2 + 2x + 2x + 1$

8. Con las fichas equivalentes a las dadas en los siguientes item arme rectángulos y encuentra las dimenciones de sus lados $base\, y\, altura$ además realizar su respectivo dibujo.

- $x^2 + 4x + 4$
- $x^2 + 4x + 3$
- $x^2 + 8x + 16$
- $x^2 + 6x + 9$
- $12x + 4 + 9x^2$

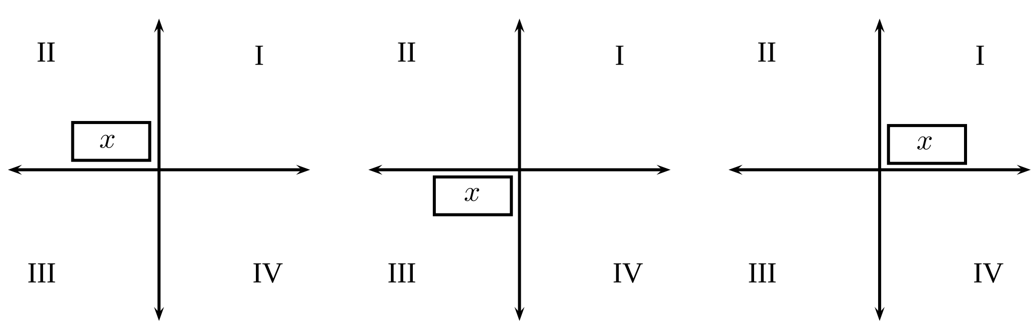
ACTIVIDAD 2

**UBICACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO**

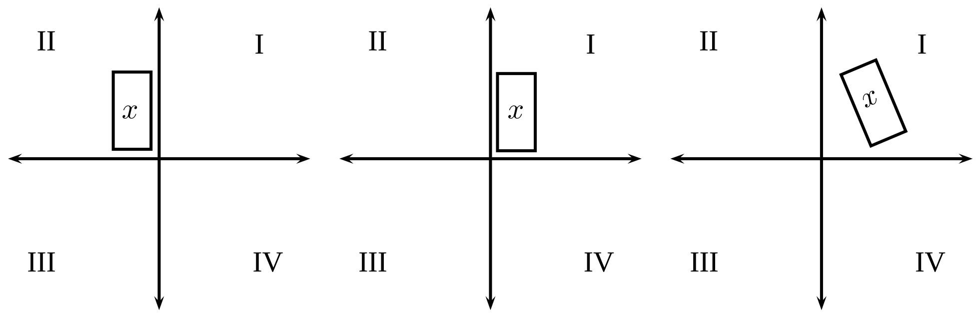
1. Ubica las siguientes fichas en el plano cartesiano de manera que su valor algebraico sea.

- Una $x = x$
- Menos una $x = -x$
- Menos dos veces $x = -2x$
- Dos veces $x = 2x$
- El doble de $x$ al cuadrado $= 2x^2$
- Menos dos veces $x$ al cuadrado $= -2x^2$
- Uno $= 1$
- Menos uno $= -1$
- Tres $= 3$
- Cinco veces $x$ al cuadrado mas tres veces $x = 5x^2 + 3x$

2. Observa la ubicación de las fichas en el plano cartesiano y calcula su valor algebraico.

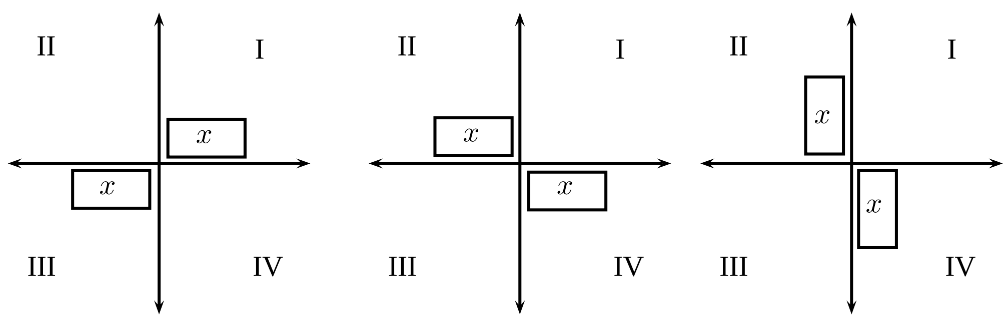



Gráfica 61

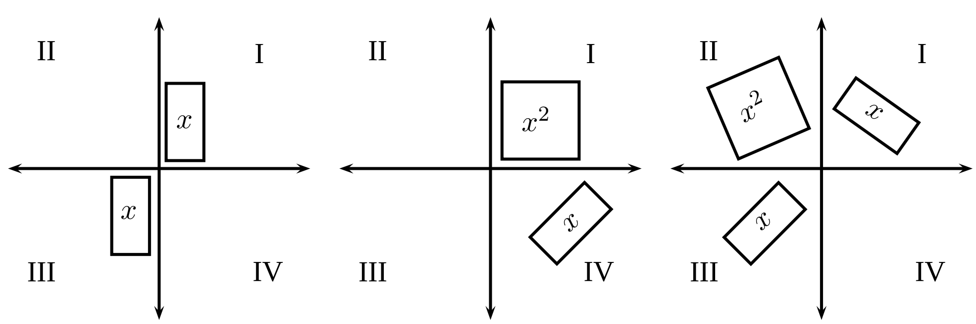



Gráfica 62

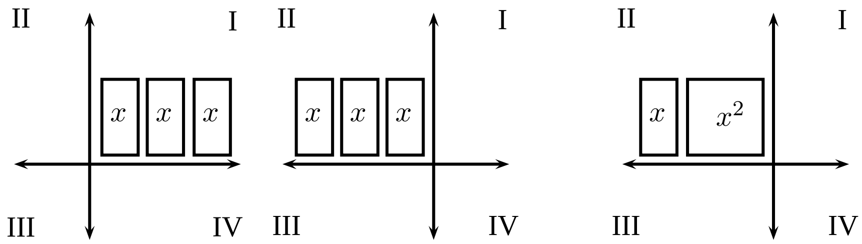
3. Observa la ubicación del grupo de fichas en el plano cartesiano y calcula su valor algebraico.




Gráfica 63

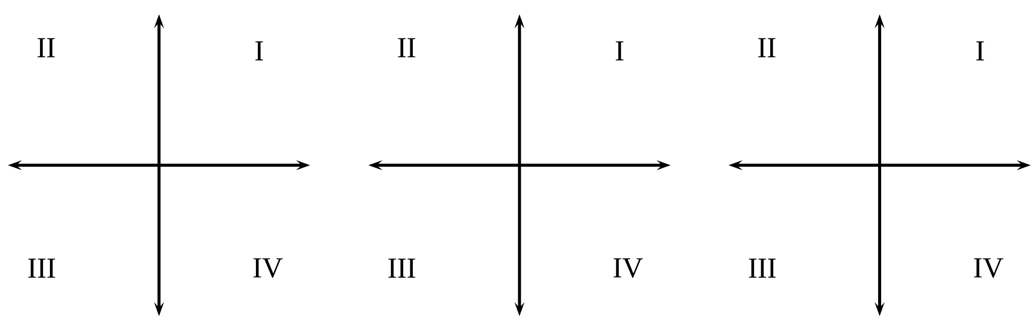



Gráfica 64



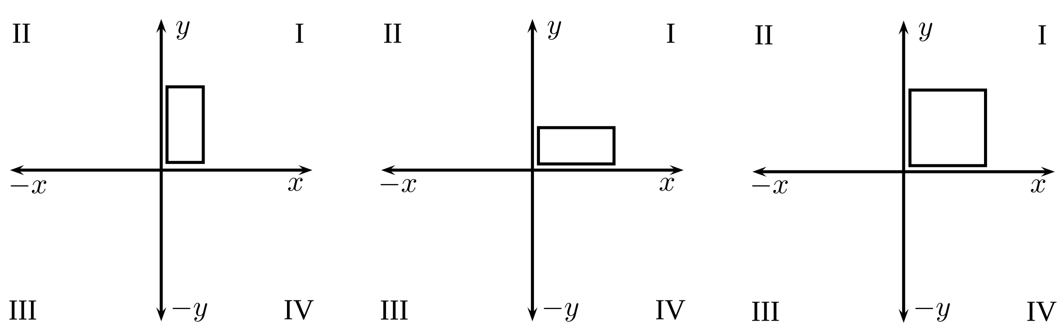

Gráfica 65

4. Realizar tres ejemplos donde ubiques fichas de la forma que quieras en el plano cartesiano y calcular su valor algebraico.

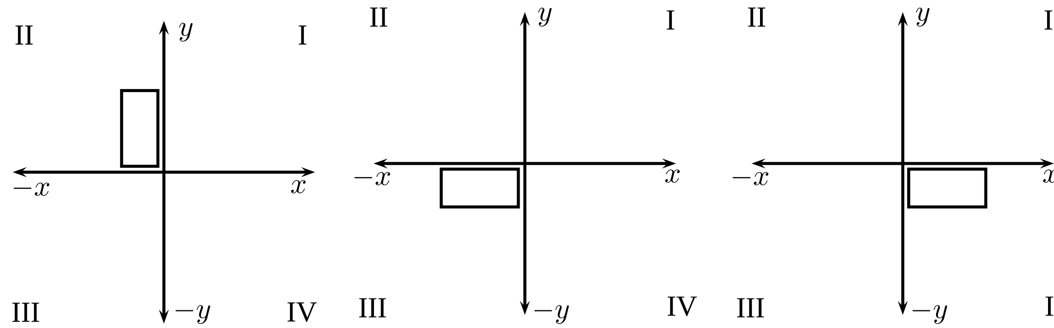



Gráfica 66

5. Observa las gráficas y calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$), y su valor algebraico de las fichas que aparecen en cada plano cartesiano, teniendo en cuenta que la base se toma en el eje $x$ y su altura en el eje $y$.

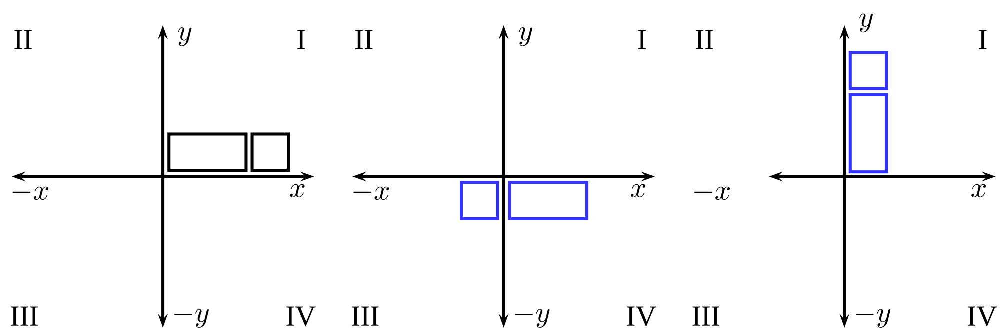



Gráfica 67

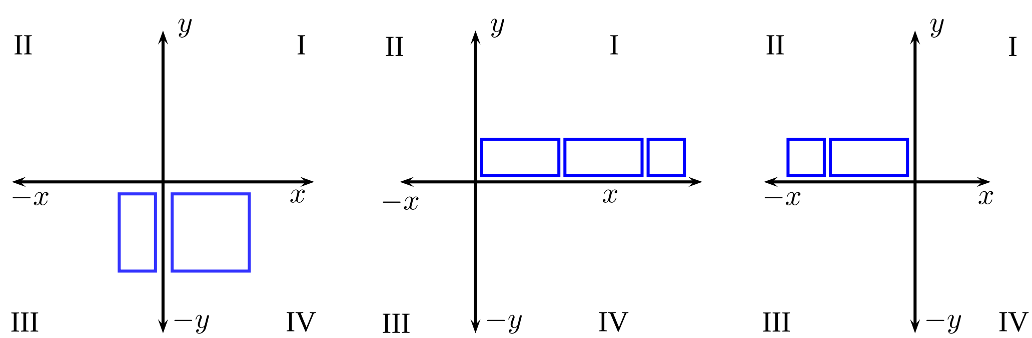



Gráfica 68

6. Observa la gráfica y calcula las dimensiones de sus lados (*base y altura*), de las fichas que conforman el rectángulo total y su valor algebraico.

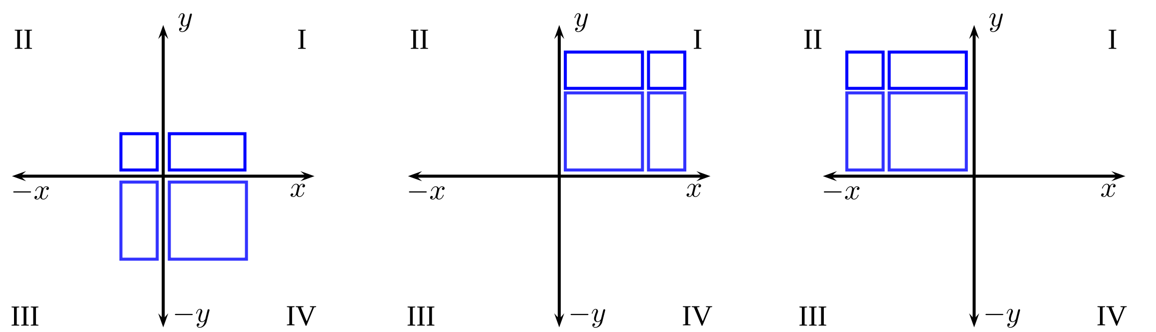



Gráfica 69

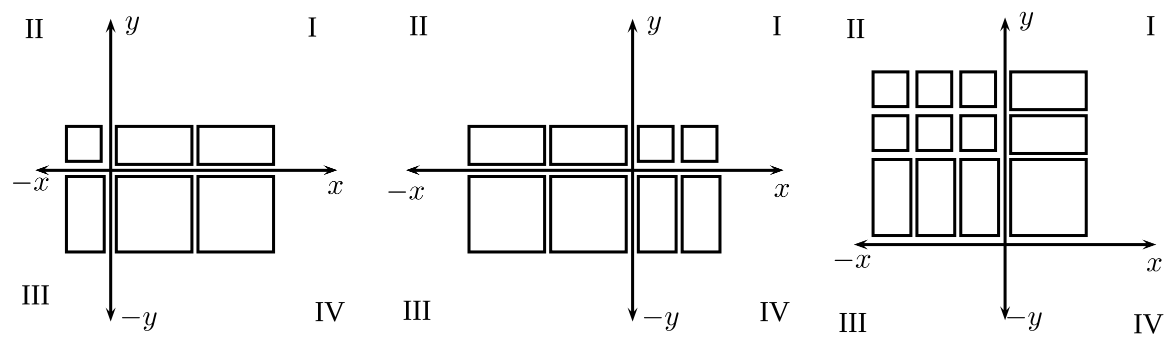



Gráfica 70

7. Observa las gráficas y calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$), de las fichas que conforman el rectángulo total y su respectivo valor algebraico.




Gráfica 71




Gráfica 72

8. Representar gráficamente los monomios y polinomios cuyas dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$), sean las siguientes.

- Base $= -x$ Altura $= 1$
- Base $= 1$ Altura $= -x$
- Base $= 1$ Altura $= -1$
- Base $= -x + 2$ Altura $= 1$
- Base $= 2x + 2$ Altura $= 1$

- Base $= -x + 2$ Altura $= -1$
- Base $= -2x - 1$ Altura $= -1$
- Base $= -2x - 1$ Altura $= 1$
- Base $= -x + 1$ Altura $= x + 1$

9. Utilice las fichas equivalentes para armar las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$), del rectángulo y completar con fichas donde sea necesario.

- Base $= x + 3$ Altura $= 2$
- Base $= x + 3$ Altura $= -2$
- Base $= x + 3$ Altura $= x + 3$
- Base $= x - 2$ Altura $= x - 1$
- Base $= -x - 1$ Altura $= -1 - x$

10. Dibuje gráficamente las figuras anteriores y calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$).

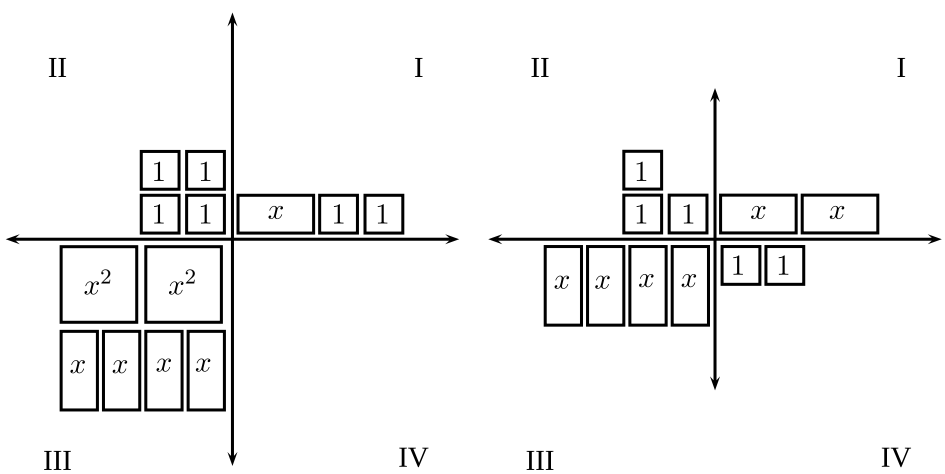
ACTIVIDAD 3

**SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS**

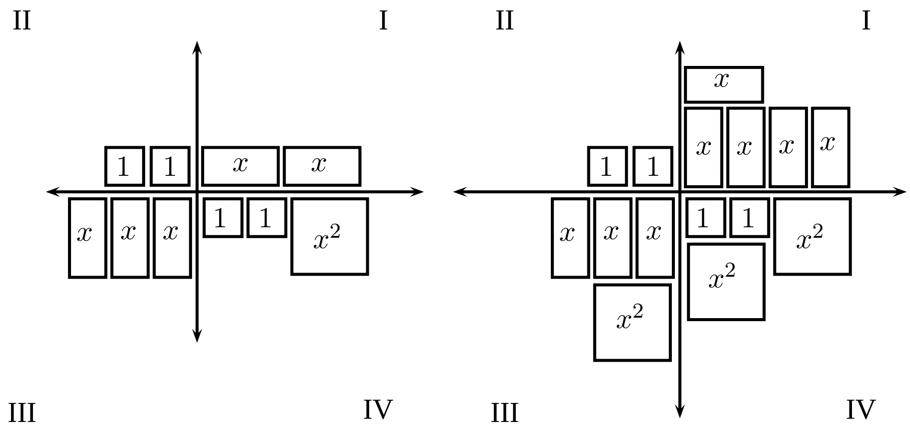
1. Representar los sumandos $p(x)$ y $q(x)$ mediante fichas y ubicarlos en el plano cartesiano, teniendo en cuenta que el sumando $p(x)$ se coloca en los cuadrantes II, III y $q(x)$ I, IV.

- $p(x) = 3x$ y $q(x) = 2x$
- $p(x) = 2$ y $q(x) = x$
- $p(x) = -2 + x$ y $q(x) = 2x + 1$
- $p(x) = 4x + 2$ y $q(x) = 5$
- $p(x) = x^2 + x - 3$ y $q(x) = x^2$
- $p(x) = 2x^2 - x + 2$ y $q(x) = -x + 2$
- $p(x) = x^2 + 7x + 2$ y $q(x) = 3x^2 + 7x + 3$
- $p(x) = -x^2 - 2x + 5$ y $q(x) = -2x^2 - x - 4$

2. Observa la gráfica y encuentra los sumando $p(x)$ y $q(x)$.




Gráfica 73



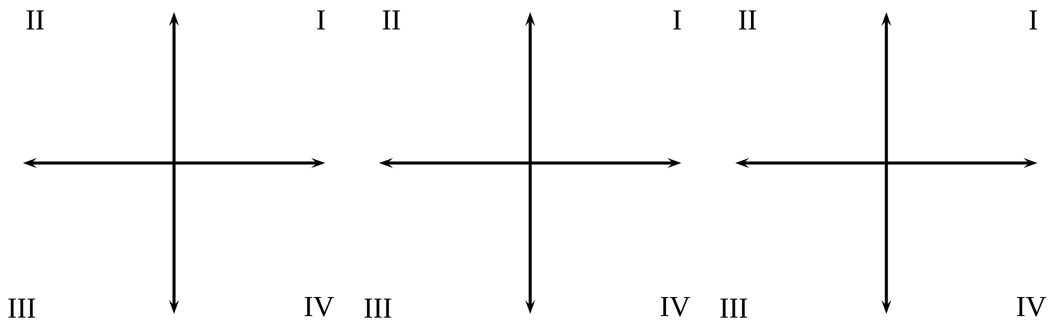

Gráfica 74

3. Utilizando las fichas realizar las siguientes sumas de polinomios.

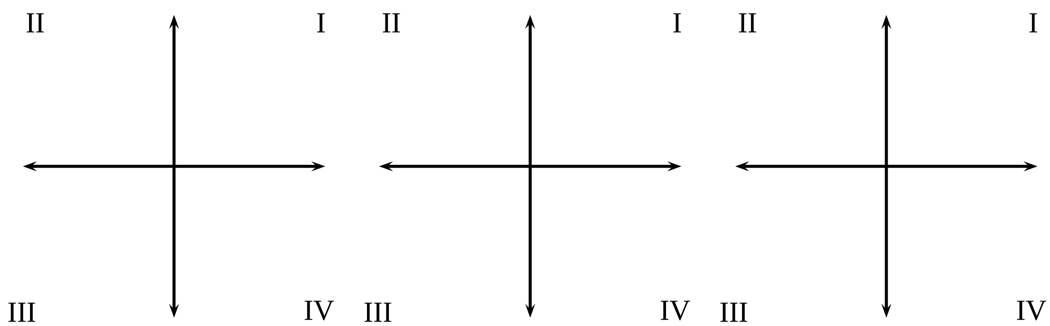
Realizar $p(x) + q(x)$ donde:

- $p(x) = -x$ y $q(x) = -x$
- $p(x) = 3x$ y $q(x) = 2x$
- $p(x) = 2$ y $q(x) = x$
- $p(x) = -2 + x$ y $q(x) = 2x + 1$
- $p(x) = x^2 + 1$ y $q(x) = -2x^2 - 4x + 2$
- $p(x) = x^2 - 3x + 2$ y $q(x) = 7x^2 - 3x - 2$

4. Dibuja en el plano cartesiano las respuestas de cada uno de los ejercicios anteriores.




Gráfica 75




Gráfica 76

5. Utilizando las fichas realizar la siguientes sumas:

- Sea $p(x) = -7x^2 + 3x - 2$ y $q(x) = -2 + 3x + 2x^2$. Realizar $p(x) + q(x)$ y $q(x) + p(x)$
- Observe los resultados obtenidos en el ejercicio anterior y enuncie una conclución

6. Sea $p(x) = 2x^2 + 3x - 2$ y $p(x) + q(x) = -3x^2 + x - 2$ encontrar $q(x)$ utilizando las fichas.

7. Realizar las siguientes restas utilizando las fichas y dibujar su resultado en el plano cartesiano, teniendo en cuenta que el minuendo $p(x)$ se coloca en los cuadrantes II,

III y el sustraendo $q(x)$ en los cuadrantes I, IV.

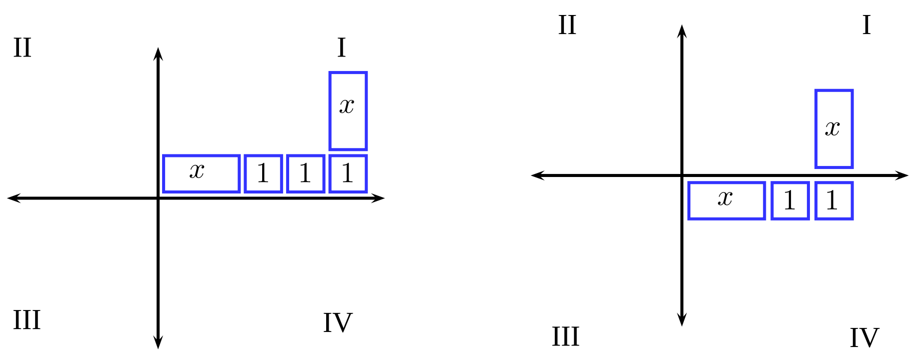
Realizar $p(x) + (-q(x))$ donde:

- $p(x) = 2x^2 + 3x$ y $q(x) = -x^2 + 3$
- $p(x) = 2x^2 + 3$ y $q(x) = 4x + 2$
- $p(x) = 4x - 4$ y $q(x) = 2x^2 + 5x - 3$
- $p(x) = 3x^2 + 4x - 5$ y $q(x) = -2x^2 - x + 1$

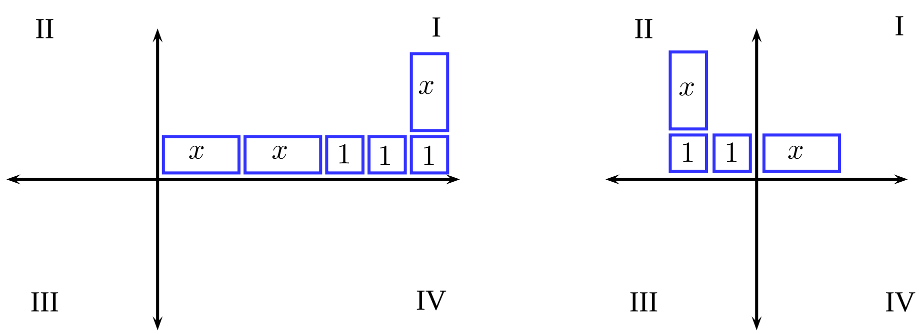
ACTIVIDAD 4

**MULTIPLICACIÓN Y FACTORIZACIÓN**

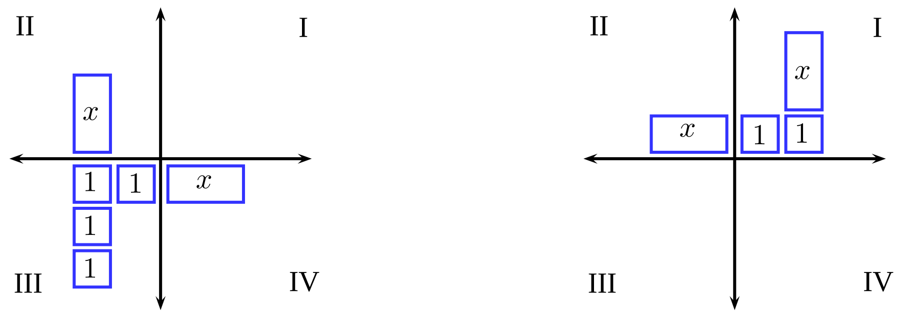
1. Utilizando el rompecabezas completa el renctángulo con la cantidad de fichas necesarias según las gráficas, y calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$), y su respectivo valor algebraico del grupo de fichas.




Gráfica 77



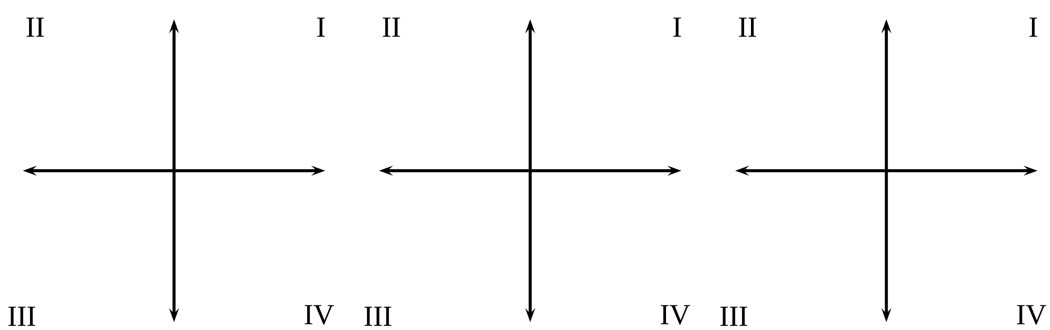

Gráfica 78



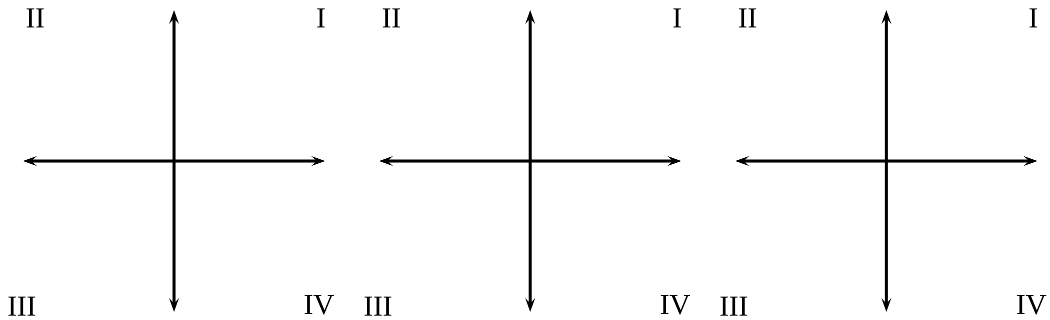

Gráfica 79

2. Construya y complete el rectángulo con fichas en el plano cartesiano, cuyas dimensiones de sus lados ($base\,y\,altura$) sean las siguientes y encuentre su valor algebraico.

- $Base = (x+2)$ y $Altura = (x+3)$
- $Base = (x+1)$ y $Altura = (x+1)$
- $Base = (-x-3)$ y $Altura = (-x-2)$
- $Base = (x-2)$ y $Altura = (x-3)$
- $Base = (x-2)$ y $Altura = (x-4)$
- $Base = (x+2)$ y $Altura = (2x+3)$



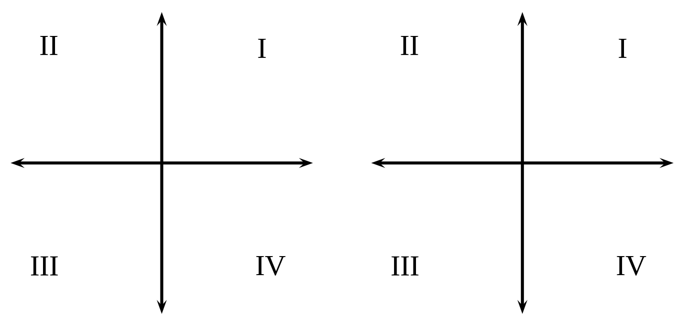

Gráfica 80




Gráfica 81

3. Costruya en el plano cartesiano un rectángulo utilizando las fichas, teniendo en cuenta que las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$) sean las siguientes.

- $Base = (x-2)$ y $Altura = (x-3)$
- $Base = (x-3)$ y $Altura = (x-2)$




Gráfica 82

4. Encuentre el valor algebraico de la gráfica construidas en el punto anterior.

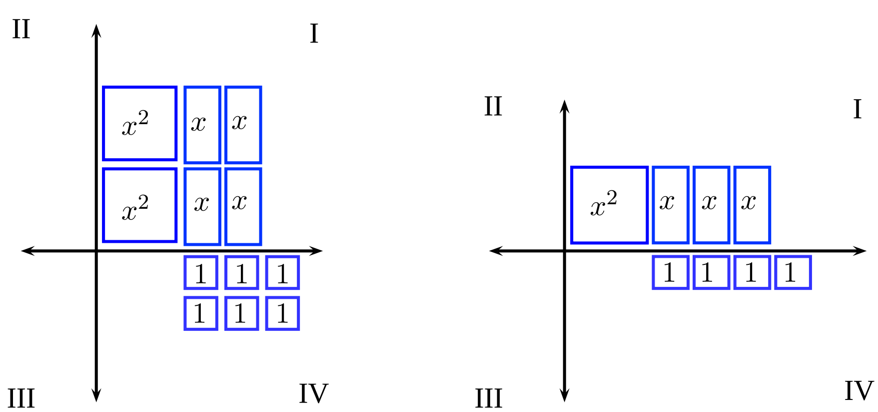
5. Observa las gráficas del punto anterior y enuncie una conclusión.

6. Realizar las siguientes multiplicaciones utilizando las fichas y dibujar su resultado en el plano cartesiano.

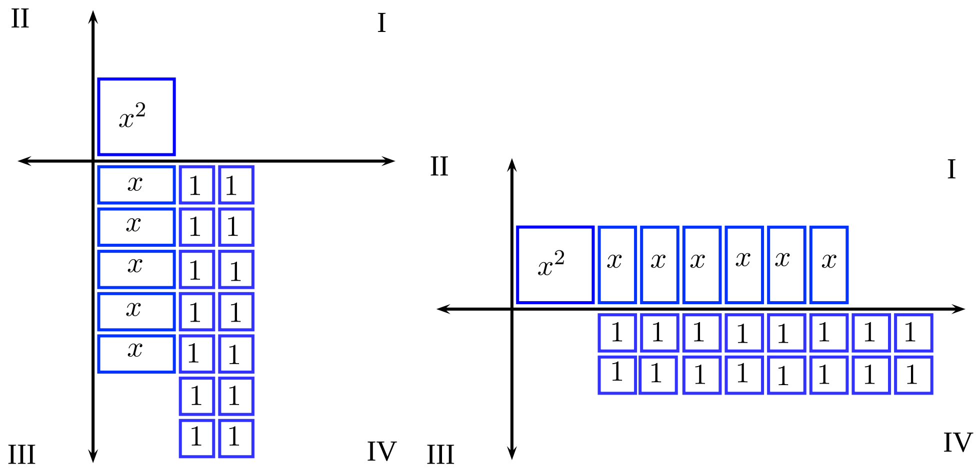
Realizar $p(x)q(x)$ donde:

- $p(x) = (x+1)$ y $q(x) = (x-1)$
- $p(x) = (2x+2)$ y $q(x) = (x-3)$
- $p(x) = (-2x-2)$ y $q(x) = (x+3)$
- $p(x) = (-x-2)$ y $q(x) = (-2x+1)$
- $p(x) = (x-3)$ y $q(x) = (-x-1)$
- $p(x) = (-3+x)$ y $q(x) = (-1-x)$
- $p(x) = (2x+2)$ y $q(x) = (2x+2)$
- $p(x) = (x+2)$ y $q(x) = (-x-1)$
- $p(x) = (2)$ y $q(x) = (x-2)$
- $p(x) = (-3)$ y $q(x) = (7x+2)$

7. Completa el rectángulo agregando el minimo número de parejas de fichas que algebraicamente sumen cero, y calcula las dimensiones de sus lados (*base y altura*).




Gráfica 83

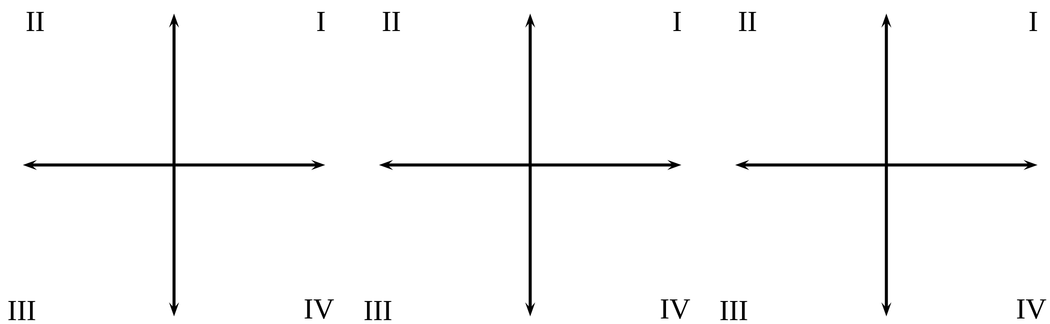



Gráfica 84

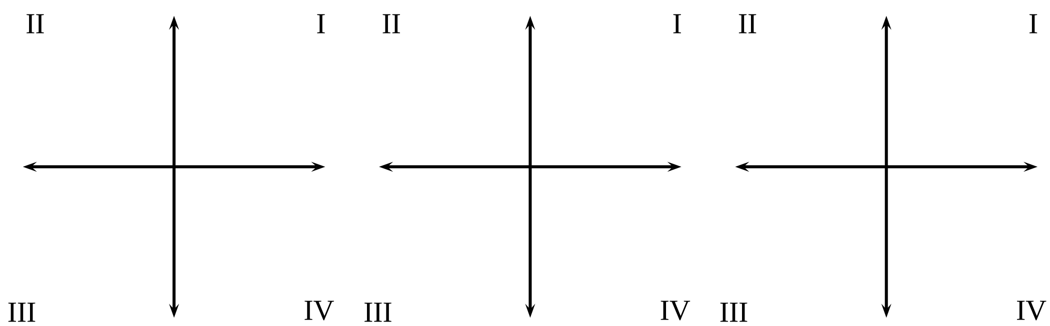
8. Representar los polinomios $p(x)$ mediante fichas equivalentes en el plano cartesiano y calcula las dimensiones de sus lados (*base y altura*), teniendo en cuenta que el rectángulo se debe armar con el mínimo número de parejas de fichas que algebraicamente sumen cero y fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común.

- $p(x) = x^2 - 3x + 2$
- $p(x) = 2x^2 + 4x - 6$
- $p(x) = x^2 + 4x + 4$
- $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$
- $p(x) = 4x^2 + 4x - 3$
- $p(x) = 4x^2 - 4x + 1$
- $p(x) = x^2 - 2x + 0$
- $p(x) = x^2 - 1$
- $p(x) = 4x^2 - 4$
- $p(x) = -6x^2 + 10x - 4$
- $p(x) = 9x^2 - 9$
- $p(x) = x^2 - 4$

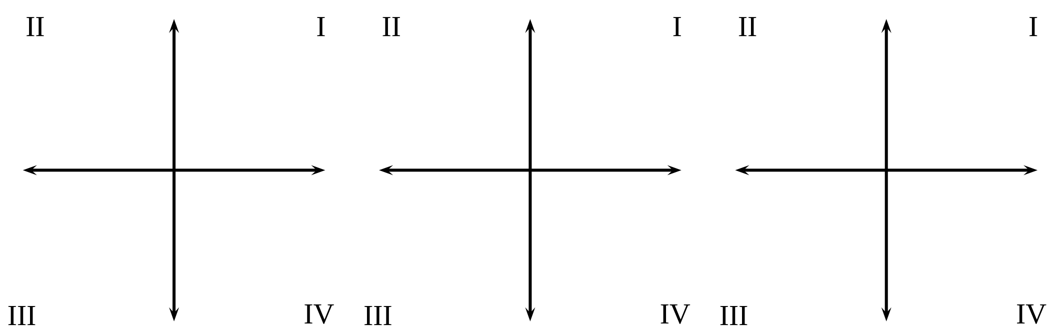
9. Dibuje gráficamente las figuras anteriores y escriba si cada figura es un cuadrado.



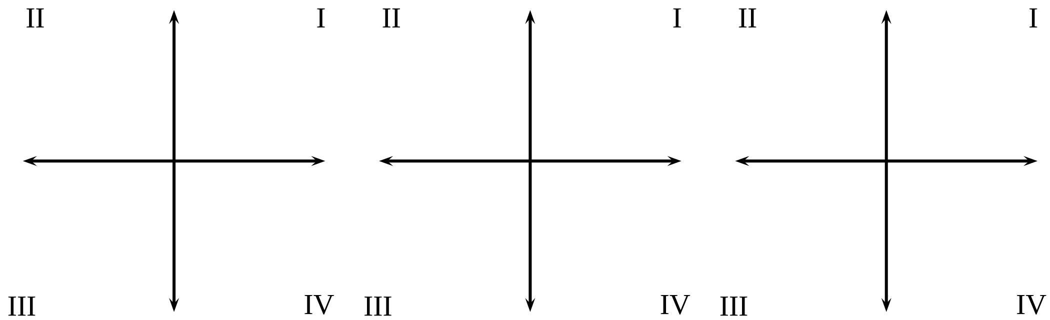
Gráfica 85



Gráfica 86



Gráfica 87

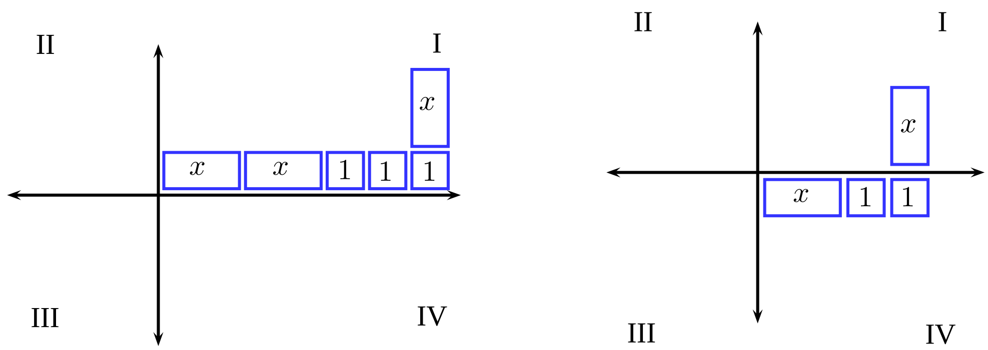



Gráfica 88

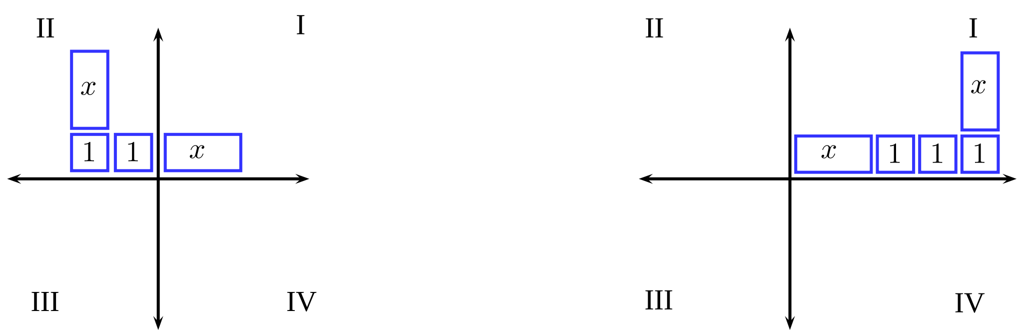
ACTIVIDAD 5

**DIVISIÓN**

1. Utilizando el rompecabezas completa el renctángulo con la cantidad de fichas necesarias según las gráficas, y calcula las dimensiones de sus lados ($base\, y\, altura$), donde la base sera el (Divisor) su altura el (Cociente) y su respectivo valor algebraico el (Dividendo) del grupo de fichas.



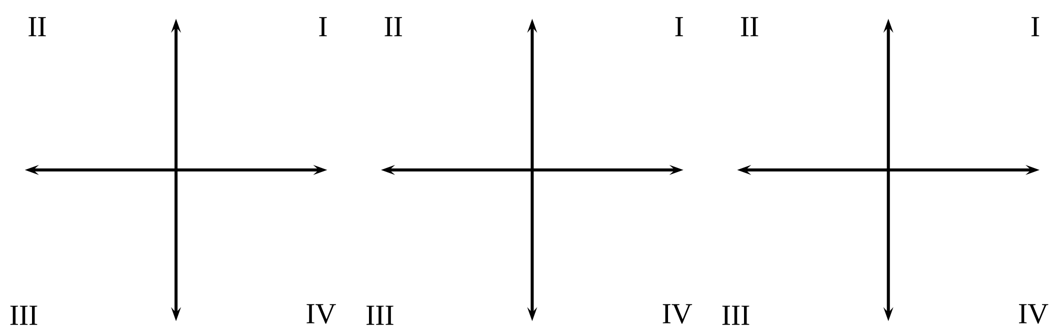

Gráfica 89



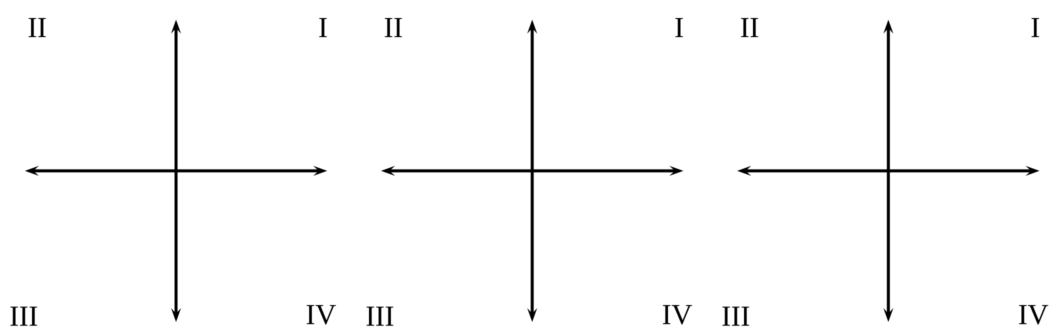

Gráfica 90

2. Construya y complete el rectángulo con fichas rectangulares en el plano cartesiano, cuyo valor algebraico (Dividendo) y su base (Divisor) sean las siguientes.

- $Valor\ algebraico = (x^2 + 4x + 3)$ y $Base = (x + 3)$
- $Valor\ algebraico = (x^2 + x - 2)$ y $Base = (x + 2)$
- $Valor\ algebraico = (2x^2 + 5x + 3)$ y $Base = (2x + 3)$
- $Valor\ algebraico = (x^2 + 4x + 3)$ y $Base = (x + 3)$
- $Valor\ algebraico = (3x^2 + 2x - 8)$ y $Base = (x + 2)$
- $Valor\ algebraico = (x^2 - 2x - 3)$ y $Base = (x + 1)$



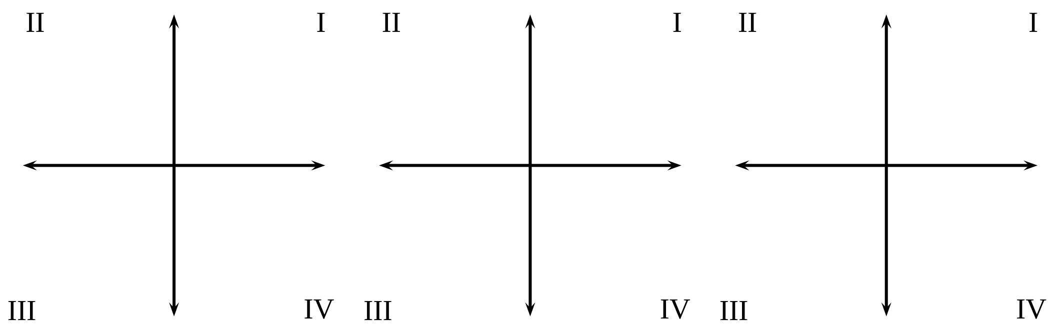
Gráfica 91



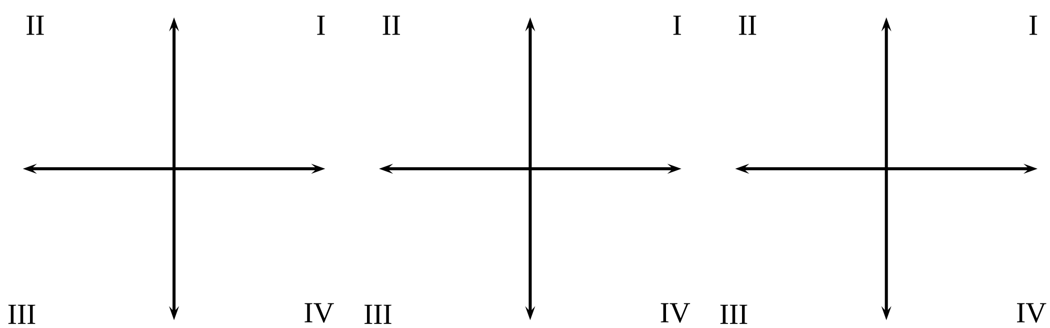
Gráfica 92

3. Realizar las siguientes divisiones utilizando las fichas y dibujar su resultado en el plano cartesiano y eliminar las parejas de fichas que algebraicamente sumen cero.

- *Dividir* $p(x) = (x^2 - 5x + 6)$ entre $(x - 3)$
- *Dividir* $p(x) = (x^2 + 6x + 8)$ entre $(x + 2)$
- *Dividir* $p(x) = (x^2 + x - 2)$ entre $(x + 2)$
- *Dividir* $p(x) = (x^2 - 3x + 2)$ entre $(x - 2)$
- *Dividir* $p(x) = (x^2 + 5x + 6)$ entre $(x + 3)$
- *Dividir* $p(x) = (x^2 + 3x + 2)$ entre $(x + 1)$




Gráfica 93




Gráfica 94

## Capítulo 12

# Presentación y Análisis de Resultados

Al finalizar cada sesión se realizó una evaluación escrita pertinente a los contenidos trabajados en ésta. La evaluacion que se realizó tenia tres ejercicios de cada operacion de polinomios.
A continuación se presentará el análisis de los resultasdos obtenidos en cada una de las pruebas, para su interpretacion se asigno:

- La calificacion **Excelente** sera aquel niño que realizó las tres preguntas bien resueltas.
- La calificacion **Buena** sera aquel niño que realizó dos preguntas bien resueltas.
- La calificacion **Deficiente** sera aquel niño que realizó a lo mas una pregunta bien resuelta.

## Primera Operación: Suma de Polinomios

Gráfica 95

En la anterior gráfica se puede evidenciar que el 31 % de los 33 estudiantes no aprobaron la prueba mientras que el 69 % si la aprobo.

## Segunda Operación: Restas de Polinomios

Gráfica 96

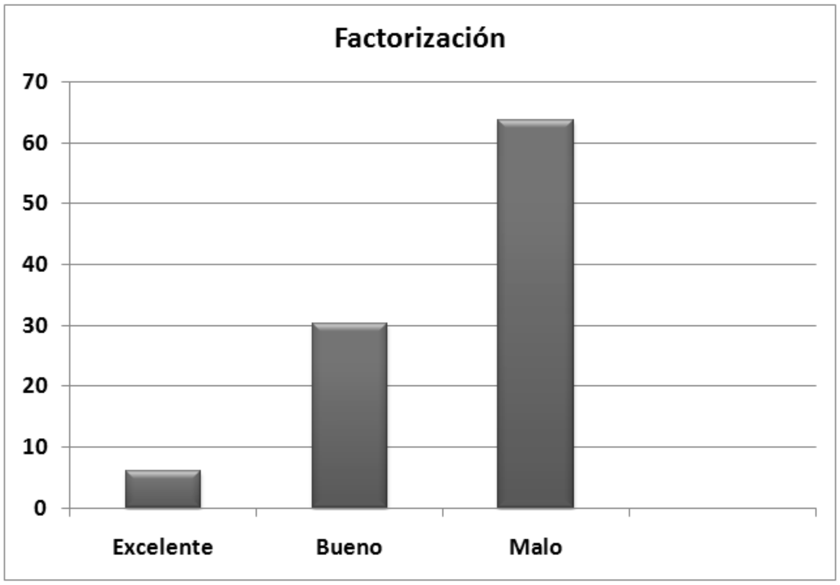
A partir de la gráfica anterior se puede concluir que el 45 % de los 33 estudiantes no aprobaron la prueba mientras que el 55 % si la aprobo.

## Tercera Operación: Multiplicación de Polinomios

Gráfica 97

A partir de la gráfica anterior se puede concluir que el 48 % de los 33 estudiantes no aprobaron la prueba mientras que el 52 % si la aprobo.

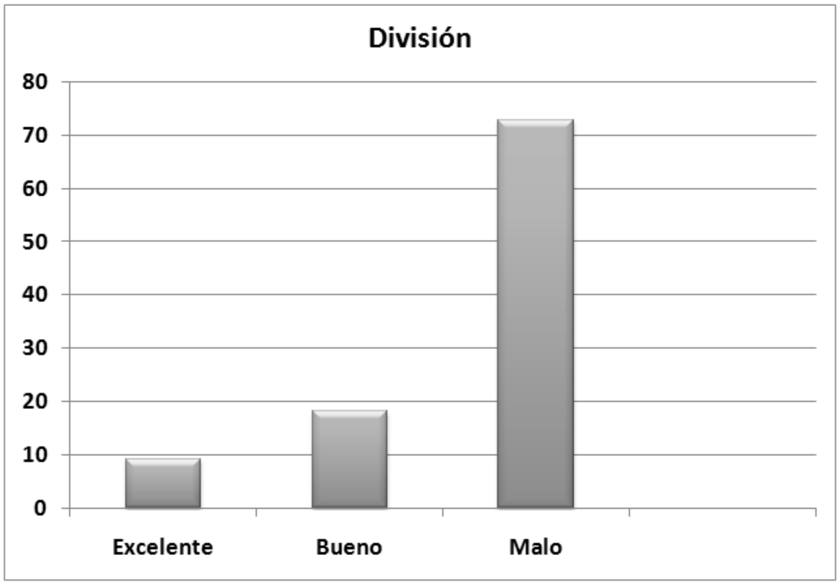
## Cuarta Operación: Factorización de Polinomios




Gráfica 98

A partir de la gráfica anterior se puede concluir que el 63 % de los 33 estudiantes no aprobaron la prueba mientras que el 37 % si la aprobo. No es satisfactorio ver que más del 60 % de los estudiantes no lograron el objetivo buscado en la aplicación de la estrategia metodológica, se pudo haber dado este resultado debido a que falto profundizar en la ubicación de las fichas en el plano cartesiano.

## Quinta Operación: División de Polinomios




Gráfica 99

A partir de la gráfica anterior se puede concluir que el 72 % de los 33 estudiantes no aprobaron la prueba mientras que el 28 % si la aprobo. No es satisfactorio ver que más del 70 % de los estudiantes no lograron el objetivo buscado en la aplicación de la estrategia metodológica, se pudo haber dado este resultado debido a que falto profundizar en la ubicación de las fichas en el plano cartesiano y tener claridad en el proceso de la multiplicación y la factorización.

Capítulo 13

# Conclusiones

- Durante el desarrollo de la aplicación de la estrategia metodológica se evidenció que a los estudiantes les agrada el manejo de material didáctico en las clases de matemáticas.
- Es importante la utilización de materiales concretos ya que es visible el proceso de cada una de las operaciones polinomicas.
- El uso de la Caja de Polinomios perimitió que los estudiantes comprendieran algunos conceptos de las operaciones polinomicas a partir de su interpretación geométrica.
- Es importante buscar estrategias metodológicas que ayuden en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Fue de gran apoyo el uso de material didáctico para iniciar el concepto de operaciones polinomicas en los estudiantes, notando avances favorables en la aprehención de dichos conceptos; pero a la hora de trabajar algunas de las operaciones mediante representaciones con la caja de polinomios no se obtuvieron los resultados esperados, ya sea por el corto tiempo que se dedicó para ésto, sin embargo se noto la apropiación por parte de algunos niños manifestado por el entusiasmo, habilidad y creatividad en sus participaciones constantes.

# Capítulo 14

# Anexos

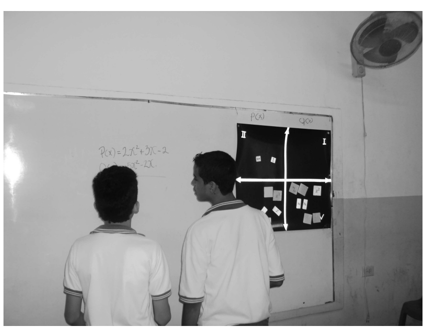
## 14.1. Listado de Estudiantes del Grado 801 de la Institución Educativa Ángel María Paredes

| No | NOMBRE |
|---|---|
| 1 | Agredo Escobar Alisson Andrea |
| 2 | Avendaño Lasso Karen Jissel |
| 3 | Avendaño Lasso Kelly Dayana |
| 4 | Aya Quintero María De Los Angeles |
| 5 | Bahamon Atehortua Cristian José |
| 6 | Bonilla Carrillo Johan Sebastian |
| 7 | Bonilla Perdomo Cesar Camilo |
| 8 | Cano Bustos Jhoan Steeven |
| 9 | Castañeda Quintero Sebastian |
| 10 | Cortes Perez Yina Marcela |
| 11 | Cubillos Moreno Leonardo |
| 11 | Franco Castro Anggy Marcela |
| 13 | Garcia Narvaez Jean Carlos |
| 14 | Gonzalez Ardila Angie Tatiana |
| 15 | Guerrero Mendez María Alejandra |
| 16 | Gutierrez Ordoñez David Esteban |
| 17 | Hernandez Garcia Ricardo Andres |
| 18 | Herrera Vargas Astrid Carolina |
| 19 | Martinez Gomez Jhon Fredy |
| 20 | Martinez Sanchez Laura Natalia |

| | |
|---|---|
| 21 | Medina Polania Ana Maria |
| 22 | Mora Ninco Juan Jose |
| 23 | Ninco Motta Juan Esteban |
| 24 | Ortiz Pineda María Fernanda |
| 25 | Paredes Cordoba Karen Lorena |
| 26 | Pascuas Rivera Willian David |
| 27 | Pastrana Ortiz Camila |
| 28 | Perdomo Tovar María Del Mar |
| 29 | Perez Cuenca Cristian Daniel |
| 30 | Rojas Bello Josue David |
| 31 | Romero Capera Michell Camila |
| 32 | Salas Valderrama Harles Fabian |
| 33 | Salazar Barreto Handerson Felipe |
| 34 | Salcedo Torres Carlos Esteban |
| 35 | Tierradentro Trujillo Angie Natalia |
| 36 | Trujillo Escobar Juan Sebastian |
| 37 | Trujillo Sosa Sebastian Camilo |
| 38 | Vega Macana Lisbed Maryuri |
| 39 | Yaime Narvaez Juan Pablo |

Tabla 14.1: Listado de niños, 801

## 14.2. Fotos de Estudiantes



## Capítulo 15

# Bibliografía


- Acevedo de M., Myriam y Folk de L., Mary; *Redescubriendo el Álgebra: De la Solución de Ecuaciones de Álgebra Abstracta*; Universidad Nacional de Colombia; Colciencias.1997.
- Vera Francisco. CIENTIFICOS GRIEGOS; AGUILAR, S.A. DE EDICIONES; Madrid (España) 1970.
- Boyer, Carl, *Historia de la Matemática*; (Alianza Editorial. Madrid 1996).
- Camacho Álvarez María Marta; Material Didáctico para la Educación Especial; Editorial Universidad Estatal a Distancia (EUNED); San José Costa Rica 2004.
- La caja de polinomios; *http://revistaerm.univalle.edu.co/menun/?revista=si&ano=2005&num=1&idioma=PT&resumen=siart=5*; 6/06/2011.
- $1^a$ Reunión Nacional de Análisis, La Actividad Experimental en el Aprendizaje de las Ciencias Naturales y Exactas (2005, Culican Rosales, Sinaloa, México) Álgebra y Funciones Trigonométricas con Material Didáctico.
- Baldor Aurelio; Álgebra Elemental, ed. Cultural Colombiana, Ltda., Bogota(colombia) S.A.
- *http://es.scribd.com/doc/9070053/Matematica-Ludica.*