

**TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO VECTORIAL Y
VISUALIZACIÓN DE APLICACIONES EN MATLAB**

Por:

AURA ELISA QUESADA SEPÚLVEDA

Código 2006262290

EDITH JOHANA MORALES LIBERATO

Código 2006134734

**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA - HUILA
2012**

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO VECTORIAL Y
VISUALIZACIÓN DE APLICACIONES EN MATLAB

Por:

AURA ELISA QUESADA SEPÚLVEDA

Código 2006262290

EDITH JOHANA MORALES LIBERATO

Código 2006134734

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE
LICENCIADAS EN MATEMÁTICAS

Magister

GUSTAVO LONDOÑO BETANCOURT

Asesor

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
NEIVA - HUILA

2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado.

Jurado.

Jurado.

Neiva, Enero de 2012

AGRADECIMIENTOS

Dedicamos primeramente nuestro trabajo a Dios, pues ha sido nuestro guía e iluminación en nuestros pasos por el sendero de nuestras vidas, dándonos fortaleza para lograr cada peldaño de nuestras metas propuestas.

Gracias a nuestros padres, hermanos y de más familiares por su apoyo inmenso y su amor, al dedicarnos gran parte de sus vidas y darnos aliento para la ardua tarea de caminar hacia la perspectiva de un nuevo día.

*Los sabios consejos de **Gustavo Londoño Betancourt**, asesor, y **Mauricio Penagos**, segundo lector del Trabajo de Grado, quienes han venido guiando nuestra formación tanto académica, como personal, dejando como resultado un aprendizaje satisfactorio en el campo teórico y profesional.*

*De igual manera, agradecemos al maestro **Ricardo Cedeño Tovar**, por todos sus consejos, sus formidables clases, su paciencia, su amistad como persona y sin duda al resto de maestros del programa, que contribuyeron a nuestra formación.*

Índice general

INTRODUCCIÓN	7
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	8
JUSTIFICACIÓN	9
OBJETIVOS	10
1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES	12
1.1. Preliminares	13
1.1.1. Campos Escalares	13
1.2. Campos Vectoriales	20
1.2.1. Campo Gradiente	21
1.3. Integrales de Línea y Aplicaciones	23
1.3.1. Independencia de la Trayectoria	32
1.3.2. Teorema Fundamental de las Integrales de Línea	32
1.4. Teorema de Green	41

ÍNDICE GENERAL

1.5. Rotacional y Divergencia	52
1.5.1. Rotacional en un Campo Vectorial	53
1.5.2. Divergencia de un Campo Vectorial	54
1.6. Integrales de Superficie	55
1.6.1. Superficies Paramétricas	55
1.6.2. Superficies Orientadas	60
1.6.3. Integrales de Superficie en Campos Vectoriales	62
1.7. Teorema de Stokes	65
1.7.1. El teorema de Stokes para superficies con agujeros	69
1.7.2. Campos conservativos y el teorema de Stokes	70
1.8. Teorema de la Divergencia	71
1.8.1. Teorema de la divergencia para regiones especiales	72
1.8.2. Teorema de la Divergencia para otras regiones	76
1.9. Ley de Gauss	80
1.10. Unificación de los teoremas integrales	84
1.11. Teorema de Green y su generalización a tres dimensiones	84
2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB	86
2.1. Introducción a MATLAB	86
2.2. Ejemplos sencillos utilizando MATLAB	88
2.3. Guardado de una Sesión y sus Variables	90
2.4. Ayudas en MATLAB	91

ÍNDICE GENERAL

2.5. Variables y Funciones	91
2.6. Álgebra Lineal	94
2.7. Cálculo	102
2.8. Gráficas	109
3. APLICACIONES	121
CONCLUSIONES	140
ANEXOS	141
BIBLIOGRAFÍA	145

INTRODUCCIÓN

Los campos vectoriales son empleados por los ingenieros y físicos para describir el flujo de fluidos, el diseño de cables de transmisión submarinos y explicar el flujo de calor en las estrellas, entre otros.

En el presente trabajo de grado presentaremos distintas aplicaciones a los temas fundamentales del cálculo vectorial. En particular se plantearan conceptos y resultados claves del Teorema de Green, el Teorema de Stokes y el Teorema de Divergencia. Para dar mejor claridad y profundizar aun más, utilizaremos como herramienta el programa MATLAB.

En la actualidad la actividad docente debe estar acompañada de herramientas tecnológicas que faciliten el aprendizaje, de los conceptos matemáticos. Existen variedad de programas especializados en matemáticas los cuales ofrecen los recursos para realizar cálculos rutinarios; entre ellos el MATLAB, programa que además de facilitar los cálculos, ofrece un lenguaje de programación propio y sencillo, por lo que permite visualizar una variedad de gráficos en dos y tres dimensiones, lo cual permite resaltar y clasificar los procesos analíticos y algebraicos que usualmente se hacen utilizando papel y lápiz.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las nuevas tecnologías permiten que la enseñanza de la matemática se vea enriquecida mediante la utilización de softwares, que permiten agilizar los cálculos, elaborar gráficas complejas y demás, de este modo se logra comprender el análisis vectorial en sus diferentes perspectivas.

Para mostrar la importancia del presente trabajo de grado, se requiere el conocimiento y la explicación del Teorema de Green, el Teorema de Stokes y el Teorema de Divergencia, ya que estos son resultados fundamentales que permiten explicar la variedad de aplicaciones del cálculo vectorial en situaciones reales. Con el fin de hacer un aporte significativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje proponemos la implementación del software MATLAB como una herramienta matemática. Esto nos permitirá agilizar los cálculos y presentar gráficas de alta calidad que dejen observar los resultados de cada ejercicio.

JUSTIFICACIÓN

MATLAB nombre abreviado de “Matrix Laboratory” es un entorno de trabajo computacional que posibilita la ejecución del cálculo numérico y simbólico en forma rápida y precisa acompañada de gráficas (plots) y de visualizaciones para el trabajo científico y la ingeniería. Los teoremas del análisis vectorial pueden ser examinados con este programa y representan una gran ayuda para el desarrollo de las clases de matemáticas. De hecho, es una herramienta que permite resolver situaciones complicadas en áreas como la Física, en el momento de dar soluciones a los distintos problemas o ejercicios propuestos.

El desarrollo de este trabajo permite aplicar los conocimientos teóricos aprendidos en el cálculo en varias variables empleando los Teoremas Fundamentales del Cálculo Vectorial, a través del programa MATLAB como un mecanismo novedoso mediante el cual es posible implementar la tecnología para resolver de manera ágil problemas complejos del análisis vectorial.

OBJETIVOS

OBJETIVOS GENERALES

- Formular y demostrar los Teoremas Fundamentales del Análisis Vectorial para poner en evidencia sus aplicaciones en otras ramas del conocimiento.
- Facilitar la enseñanza del Análisis Vectorial y sus aplicaciones a través de la utilización del programa MATLAB.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Establecer los conceptos básicos requeridos para el desarrollo de los Teoremas Fundamentales del Análisis Vectorial.
- Presentar los aspectos relevantes del uso del programa MATLAB en la enseñanza y aprendizaje de los mencionados teoremas.
- Motivar a los estudiantes y docentes a la utilización del MATLAB como una herramienta que permita dinamizar la enseñanza del Análisis Vectorial.

INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

En este capítulo estudiaremos el cálculo en campos vectoriales, los cuales son funciones que asignan vectores a puntos en el espacio. En seguida se dará la definición de integrales de línea las cuales se pueden usar para hallar el trabajo realizado por un campo de fuerza al mover un objeto a lo largo de una curva y algunas aplicaciones de estas integrales. Luego hablaremos de las integrales de línea independientes de la trayectoria acompañado de campos conservativos y funciones potenciales. Por último revisaremos las integrales de superficie que se pueden usar para hallar la velocidad de la circulación de un fluido alrededor de una superficie. Las relaciones entre estos tipos de integrales con las integrales simples, dobles y triples, están dadas por las versiones del Teorema Fundamental del Cálculo para dimensiones de orden superior: Teorema de Green, Teorema de Stokes y Teorema de la Divergencia.

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

1.1. Preliminares

1.1.1. Campos Escalares

Consideramos funciones con el dominio en el espacio n -dimensional R^n y con el recorrido en el espacio m -dimensional R^m . Cuando los dos números m y n son iguales a 1, una función se llama función real de una variable real. Si suponemos $n > 1$ y $m \geq 1$, cuando $m = 1$ la función se llama función real de una variable vectorial o simplemente campo escalar, cuando $m > 1$ se llama función vectorial de una variable vectorial o simplemente campo vectorial.

Una *función vectorial*, es una función cuyo dominio es un subconjunto de los números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son las componentes del vector $\vec{r}(t)$ podemos escribir:

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

El límite de una función vectorial \vec{r} se define tomando los límites de sus funciones componentes como sigue:

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \langle \lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \rangle$$

En caso de que exista el límite de las funciones componentes

La derivada $\vec{r}'(t)$ de una función vectorial $\vec{r}(t)$ se define de manera similar que en las funciones reales:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \vec{u}$$

Si el límite existe.

La integral definida de una función vectorial continua $\vec{r}(t)$ puede definirse como en las funciones reales, excepto que la integral es un vector. Expresando la integral

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

en términos de las integrales de sus funciones componentes \vec{f} , \vec{g} y \vec{h} así:

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b \vec{f}(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b \vec{g}(t) dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b \vec{h}(t) dt \right) \mathbf{k}$$

Así pues, la integral de una función vectorial se evalúa integrando cada una de las funciones componentes.

Por otra parte en el estudio del cálculo en varias variables, cabe mencionar que en el mundo real es usual que encontremos una cantidad que dependa de dos o más variables independientes, por lo cual, debemos ampliar las ideas básicas del cálculo de funciones de una variable a funciones de varias variables. Aunque las reglas del cálculo son las mismas, las derivadas de las funciones de varias variables tienen mayor variedad y sus integrales conducen a más aplicaciones.

Las funciones de varias variables se definen de una forma que puede deducirse fácilmente del caso de una variable. Los dominios son conjuntos de parejas, ternas, cuartetos, n -tuplas de números reales y las imágenes o rangos son conjuntos de números reales.

El límite de una función de varias variables, cuyo dominio es un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ y cuyo rango es algún subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ se define

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para todo (x,y) en el dominio de f , (ver Figura 1.1)

$$|\mathbf{F}(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

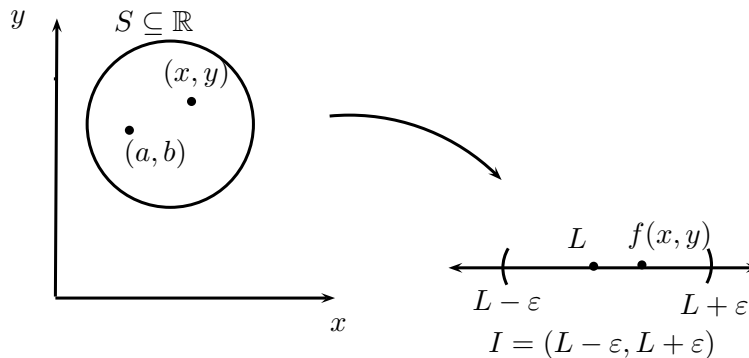


Figura 1.1

La función $f(x, y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) que pertenece a su dominio si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1. f está definida en (x_0, y_0) ,
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ existe
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Cuando en una función de varias variables se mantienen constantes todas las variables independientes excepto una y se deriva con respecto a ésta, obtenemos una “derivada parcial”. Por ejemplo, la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si el límite existe.

Además, es de considerar a las integrales múltiples, conocidas como la integral de una función de dos variables $f(x, y)$ sobre una región en el plano y la integral de una función de tres variables $f(x, y, z)$ sobre una región en el espacio. Las anteriores, se definen como el límite de las sumas de Riemann en dos o tres dimensiones respectivamente. Éstas a su vez, se pueden utilizar en el cálculo de cantidades que

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

varían sobre dos o tres dimensiones, tales como la masa de un cuerpo o el momento angular de un objeto de densidad variable, así como el volumen de sólidos con fronteras curvas.

Si $f(x, y)$ es una función positiva sobre una región rectangular R del plano xy , se puede interpretar la integral doble de f sobre R como el volumen de la región sólida tridimensional sobre el plano xy acotada abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x, y)$ (Figura 1.2). Cada término $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ de la suma $S_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$ es el volumen de una caja rectangular vertical que se aproxima al volumen de la porción del sólido que esta directamente sobre la base ΔA_k . Así, la suma S_n se aproxima a lo que se puede llamar el volumen total del sólido. De lo anterior, se puede definir este volumen como:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint f(x, y) dA, \quad \text{donde } \Delta A_k \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

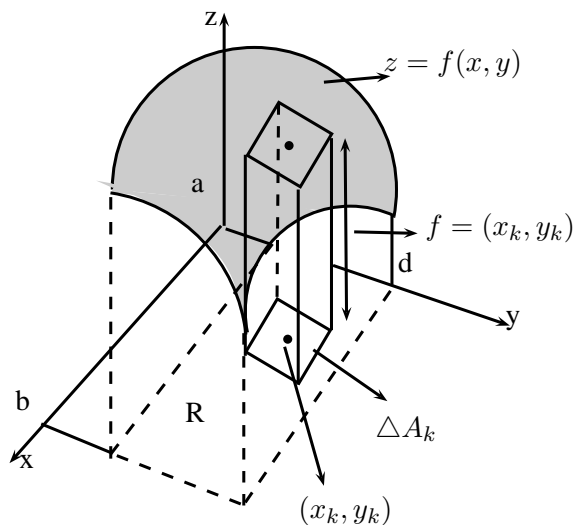


Figura 1.2

Un método ágil para evaluar integrales múltiples consiste en emplear el *jacobiano*

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

de la transformación T dada por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ el cual es:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Paralelo a esto, las integrales triples suelen ser usadas para calcular el volumen de formas tridimensionales, como la masa y los momentos de inercia de sólidos con densidad variable, y el valor promedio de una función sobre una región tridimensional. Las integrales triples permiten resolver problemas generales, a la vez que estas también surgen en el estudio de los campos vectoriales y el flujo de fluidos en tres dimensiones. Por ejemplo, el volumen de una región cerrada y acotada en el espacio es:

$$\mathbf{V} = \iiint_E dV$$

Donde E es la región o dominio y dV depende de la simetría de la región.

Se dice que una región sólida E es de Tipo I si se halla entre las gráficas de dos funciones continuas $\phi_1(x, y)$ y $\phi_2(x, y)$; es decir,

$$E = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

Donde D es la proyección de E sobre en plano xy (Figura 1.3), entonces

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Una región sólida E es de Tipo II, si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, \phi_1(y, z) \leq x \leq \phi_2(y, z)\}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

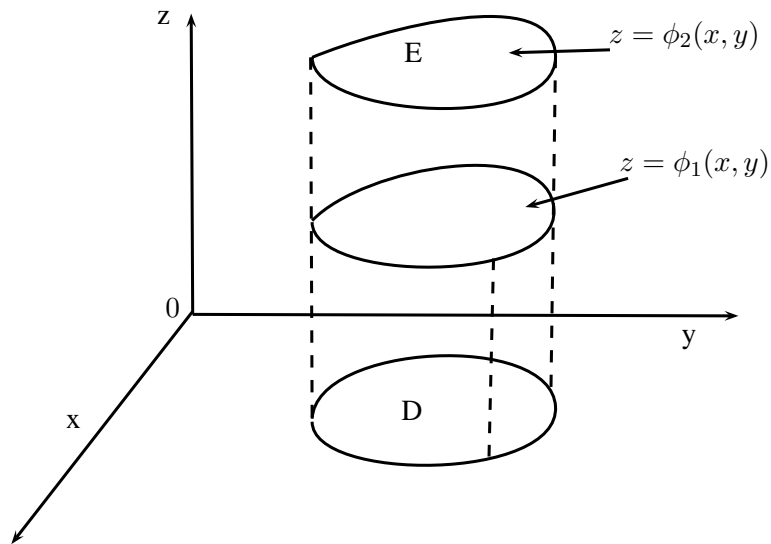


Figura 1.3

donde, en esta ocasión, D es la proyección de E sobre el plano yz (Figura 1.4), así que tenemos

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(y, z)}^{\phi_2(y, z)} f(x, y, z) \, dy \right] \, dA$$

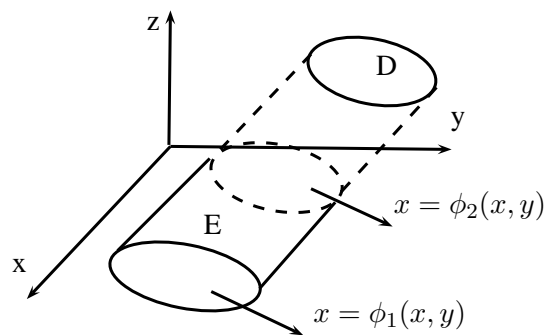


Figura 1.4

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Por último, una región de Tipo III es de la forma

$$E = \{(x, y, z) | (x, z) \in D, \phi_1(x, z) \leq y \leq \phi_2(x, z)\}$$

donde, en esta ocasión, D es la proyección de E sobre el plano xz (Figura 1.5).

Para esta región tenemos

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{\phi_1(x, z)}^{\phi_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \right] \, dA$$

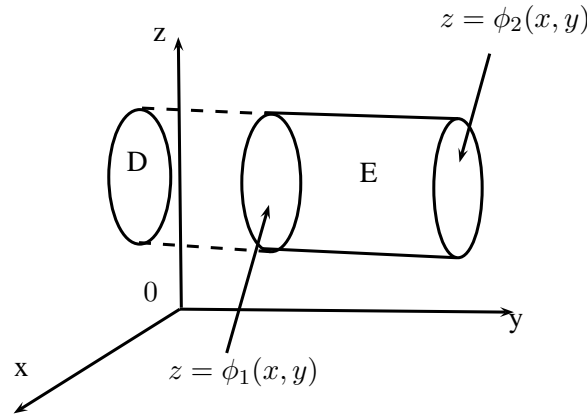


Figura 1.5

Dependiendo de la simetría de la región de integración las integrales triples también se pueden evaluar utilizando coordenadas cilíndricas, obteniendo

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{\phi_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{\phi_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta$$

O utilizando coordenadas esféricas

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_c^d \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

1.2. Campos Vectoriales

Suponga que una región en el plano o en el espacio está ocupada por un fluido en movimiento, como agua o aire. Imaginemos que éste fluido está formado por un número muy grande de partículas y que en cualquier instante dichas partículas llevan una velocidad \vec{v} . Como dichas velocidades varían de una posición a otra, el vector de velocidad varia también en cada uno de los puntos de fluido.

Se define un campo vectorial en un dominio en el plano o el espacio, como una función que asigna un vector a cada punto del dominio. Un campo de vectores bidimensionales tiene la forma

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

Si el campo tridimensional, tiene la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

el campo es continuo si las funciones componentes M , N y P son continuas, y diferenciables si M , N y P lo son.

Ejemplos:

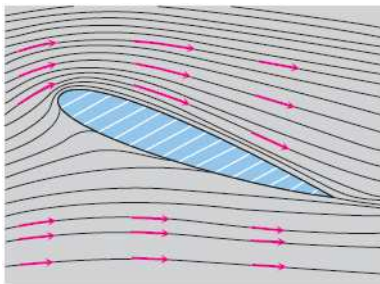


Figura 1.6

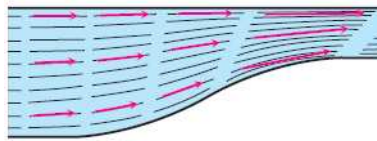


Figura 1.7

La Figura 1.6 representa los vectores velocidad de un flujo alrededor de un ala de un avión en un tunel de aire, las líneas de flujo poden ser vistas gracias al humo de

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

kerosene. La Figura 1.7 ilustra las líneas de flujo dentro de un túnel que se contrae. La velocidad del agua aumenta cuando el canal se hace angosto y los vectores de velocidad aumentan su longitud.

1.2.1. Campo Gradiente

Si f es una función escalar de dos variables, su gradiente está definido por

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{F}_x(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{F}_y(x, y)\mathbf{j}$$

Donde $\mathbf{F}_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $\mathbf{F}_y = \frac{\partial f}{\partial y}$

Es decir,

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

∇f es un campo vectorial sobre \mathbb{R}^2 y se conoce como campo vectorial gradiente.

Así mismo, si f es una función escalar de tres variables, su gradiente es un campo vectorial sobre \mathbb{R}^3 dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}_x(x, y, z)\mathbf{i} + \mathbf{F}_y(x, y, z)\mathbf{j} + \mathbf{F}_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

Nuevamente $\mathbf{F}_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ $\mathbf{F}_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\mathbf{F}_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

Criterio de las Componentes

Si \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_y son funciones de las variables x e y definidas en R^2 siendo \mathbf{F}_{xy} , \mathbf{F}_{yx} continuas, entonces el vector $\mathbf{F}_x(x, y)\mathbf{i} + \mathbf{F}_y(x, y)\mathbf{j}$, es un gradiente si y solo si $\mathbf{F}_{xy} = \mathbf{F}_{yx}$.

Al igual si \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y y \mathbf{F}_z están definidas en R^3 son funciones. Al igual si \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y y \mathbf{F}_z están definidas en R^3 son funciones de las variables x, y, z en R^3 y \mathbf{F}_{xy} , \mathbf{F}_{xz} , \mathbf{F}_{yx} , \mathbf{F}_{yz} , \mathbf{F}_{zx} , \mathbf{F}_{zy} son continuas, entonces el vector $\mathbf{F}_x(x, y, z)\mathbf{i} + \mathbf{F}_y(x, y, z)\mathbf{j} +$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$\mathbf{F}_z(x, y, z)\mathbf{k}$ es un gradiente si y solo si $\mathbf{F}_{xy} = \mathbf{F}_{yx}$, $\mathbf{F}_{xz} = \mathbf{F}_{zx}$, $\mathbf{F}_{yz} = \mathbf{F}_{zy}$

Ejemplo 1: El campo vectorial gradiente asociado a la función $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{2}y^2$ esta dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \text{ es } \nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} \quad (\text{ver Figura 1.8})$$

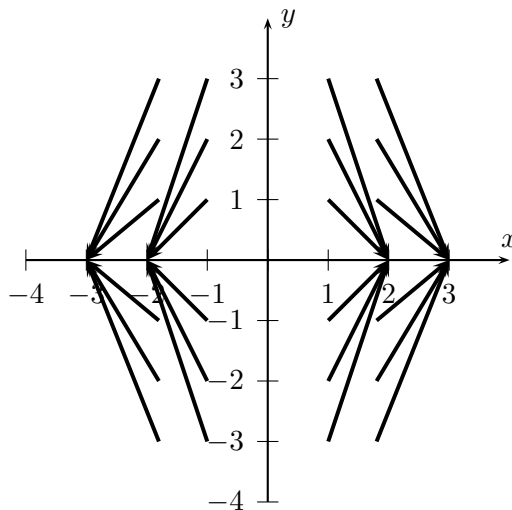


Figura 1.8

Un campo vectorial \mathbf{F} se denomina campo vectorial conservativo, si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función escalar (campo escalar) f , de modo que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función escalar, f es llamada una función potencial para \mathbf{F} , también llamado el potencial escalar.

Cabe resaltar que no todos los campos vectoriales son conservativos.

Ejemplo 2: El campo gravitacional $\mathbf{F} = -\left(\frac{mMG}{r^3}\right)$ es conservativo. En efecto, si $f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Entonces

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{i} + \frac{-mMGy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{j} + \frac{-mMGz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \mathbf{k} \\ &= F(x, y, z)\end{aligned}$$

Ejemplo 3: El campo vectorial $\mathbf{F} = (2x - 3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$, no es conservativo, ya que al aplicar el criterio de las componentes se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{xy} = 0 &= \mathbf{F}_{yx} \\ \mathbf{F}_{xz} = 0 &= \mathbf{F}_{zx} \\ \mathbf{F}_{yz} = -1, & \quad \mathbf{F}_{zy} = 0\end{aligned}$$

Como $\mathbf{F}_{yz} \neq \mathbf{F}_{zy}$, \mathbf{F} no es conservativo.

1.3. Integrales de Línea y Aplicaciones

Sea C una curva suave dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b \quad (1.1)$$

de manera equivalente por la función vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

De esta manera \vec{r} es continua y además $\vec{r}'(t) \neq 0$. Si se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ que tienen la misma medida de ancho y si $x_i = x(t_i)$ y $y_i = y(t_i)$, entonces los puntos correspondientes $P_i(x_i, y_i)$ dividen a C en subarcos con una longitud de $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ (Figura 1.9). Se elige cualquier punto t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$. Ahora, si f es cualquier función escalar de dos variables cuyo dominio

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

incluye la curva C , se evalúa f en el punto (x_i^*, y_i^*) multiplicando la longitud ΔS_i del subarco y se da la siguiente suma:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

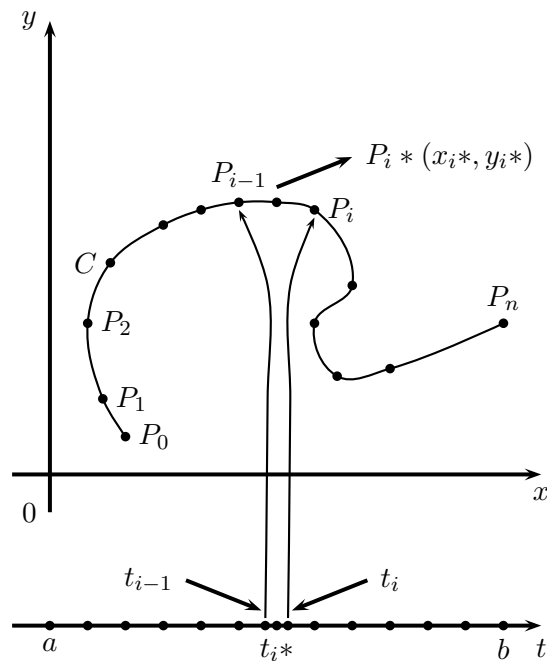


Figura 1.9

Al evaluar el límite de esas sumas podemos plantear la definición de la siguiente manera:

Si f está definida sobre una curva suave C , dadas por las ecuaciones paramétricas (1.1), la integral a lo largo de la curva C es

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i \quad (1.2)$$

Si el límite existe.

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

La longitud de arco de una función vectorial continua y diferenciable para cada $x \in (a, b)$ se define por:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Si f es continua, entonces el límite de la definición (1.2), siempre existe, por lo que la siguiente fórmula permite evaluar la integral de línea cuando $f(x, y)$ está definida en forma paramétrica:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (1.3)$$

Luego, el valor de la integral no depende de la parametrización de la curva, mostrando que cruza exactamente una vez la curva conforme t se incrementa de a a b .

Si $s(t)$ es la longitud de C entre $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(t)$, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Luego

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Ejemplo 4: Evaluar $\int_C (2 + x^2y) ds$, donde C es la mitad superior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ (ver Figura 1.10)

Solución:

Las ecuaciones paramétricas del círculo unitario son

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi$$

como $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ y $\frac{dy}{dt} = \cos t$, entonces

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

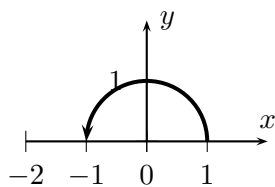


Figura 1.10

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2 y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2 \left(\pi + \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Si C es una curva suave a trozos, C es la unión de un número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n , el punto inicial de $C_{(i+1)}$ es el punto final de C_i (ver Figura 1.11). Así se define la integral a lo largo de C como la suma de las integrales de f a lo largo de cada uno de los pedazos suaves de C

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

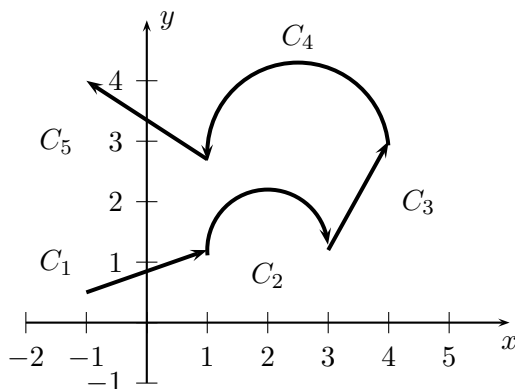


Figura 1.11

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Ejemplo 5: Evaluar $\int_C 2x \, ds$ donde C consiste en el arco C_1 de la parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$, seguido por el segmento de recta vertical C_2 de $(1, 1)$ a $(1, 2)$. Figura 1.12

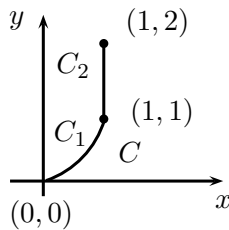


Figura 1.12

Solución: En la curva C , C_1 es la gráfica de una función de x , por lo que se elige a x como el parámetro, así que las ecuaciones para C_1 se convierten en

$$x = x \quad y = x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

como $\frac{dx}{dx} = 1$ y $\frac{dy}{dx} = 2x$, entonces

$$\int_{C_1} 2x \, ds = \int_0^1 2x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

En C_2 se elige a y como parámetro, por lo que las ecuaciones de C_2 se convierten en

$$x = 1 \quad y = y \quad 1 \leq y \leq 2$$

como $\frac{dx}{dy} = 0$ y $\frac{dy}{dy} = 1$, entonces

$$\int_{C_2} 2x \, ds = \int_1^2 2 \, dy = 2$$

Así pues

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\int_C 2x \, ds = \int_{C_1} 2x \, ds + \int_{C_2} 2x \, ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2$$

Integrales de Línea en el Espacio

Sea C una curva suave en el espacio dadas por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad a \leq t \leq b$$

o equivalente por la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Si f es una función de tres variables continua en alguna región que contiene a C , definimos la integral de línea de f a lo largo de C , de la siguiente manera.

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta S_i$$

o bien

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (1.4)$$

Luego, las formas (1.3) y (1.4) se pueden escribir con una notación mas compacta

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (1.5)$$

Ejemplo 6: Evaluar $\int_C y \sin z \, ds$, donde C es la hélice circular dada por las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (Figura 1.13)

Solución

$$\begin{aligned} \int_C y \sin z \, ds &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

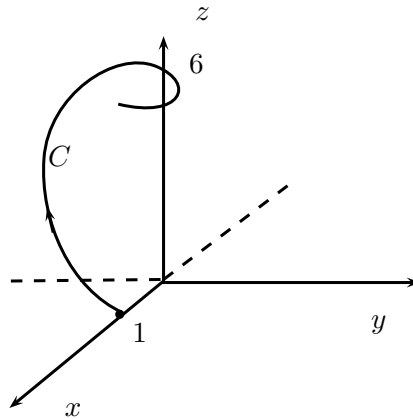


Figura 1.13

Aplicaciones de las Integrales de Línea

Cálculo de Masa

Si consideramos los resortes y alambres como masas distribuidas a lo largo de curvas suaves en el espacio, dicha distribución pueden describirse mediante una función de densidad continua $\delta(x, y, z)$ que llamaremos *densidad lineal de masa por unidad de longitud*. Si C es una curva suave en el espacio tenemos que:

$$M = \int_C \delta(x, y, z) ds$$

Ejemplo 7: Calcular la masa de un alambre colocada a lo largo de la curva

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

si la densidad es $\delta = \frac{3}{2}t$

Solución:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(2t)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{t^2 + 1}$$

$$M = \int_C \delta(x, y, z) ds = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t\right) (2\sqrt{t^2 + 1}) dt = 2\sqrt{2} + 1$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Trabajo

Sea $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial que representa una fuerza a través de una región en el espacio como la fuerza de gravedad o la fuerza electromagnética. Si además $\vec{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ donde $a \leq t \leq b$

Es una curva suave en la misma región, entonces la integral de $\int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{T} dt$, es decir del componente escalar \mathbf{F} en la dirección del vector tangente unitario a la curva, es el trabajo realizado por \mathbf{F} sobre la curva desde a hasta b (Figura 1.14).

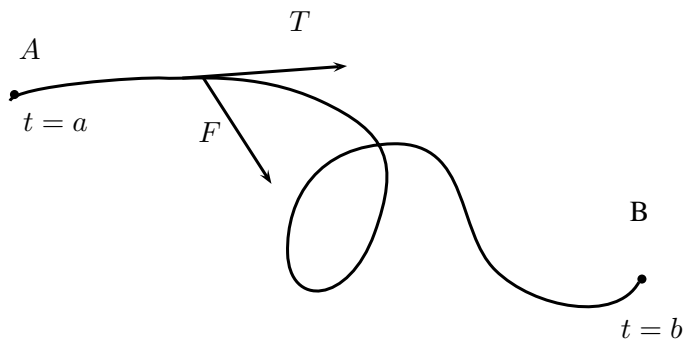


Figura 1.14

Así pues el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ sobre una curva suave $\vec{r}(t)$ desde $t = a$ hasta $t = b$ es

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot T dt \quad (1.6)$$

El signo, del número calculado mediante esta integral depende de la dirección en que se recorra la curva conforme crece t . Si invertimos la dirección del movimiento, también invertimos la dirección T , lo que cambia el signo de $\mathbf{F} \cdot T$ y por lo tanto el de la integral.

Ejemplo 8: El trabajo hecho por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$ al mover una partícula a lo largo de una cuarta parte de un círculo cuya ecuación es $\vec{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ donde $0 \leq t \leq \pi/2$ se calcula de la siguiente manera

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\mathbf{F}(\vec{r}(t)) = \cos^2 t \mathbf{i} - \cos t \sin t \mathbf{j} ; \vec{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

luego

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) dt = 2 \cdot \left. \frac{\cos^3 t}{3} \right|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

Observe que aún cuando $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot T ds$ y las integrales respecto a la longitud de arco no cambian cuando se invierte la orientación se tiene que:

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ya que el vector tangente unitario T se sustituye con su valor negativo, cuando $-C$ reemplaza a C

Flujo y Circulación

Si en lugar de un campo de fuerzas, \mathbf{F} representa un campo de velocidad de un fluido en una región en el espacio, entonces la integral de $\mathbf{F} \cdot T$ a lo largo de una curva en la región permite calcular el flujo del fluido a lo largo de la curva.

Así pues, si $\vec{r}(t)$ es una curva suave en el dominio de un campo continuo de velocidades \mathbf{F} , el flujo a lo largo de la curva desde $t = a$ hasta $t = b$ es

$$\phi = \int_a^b \mathbf{F} \cdot T ds$$

En este caso, ϕ es la integral es de flujo. Si la curva es un lazo cerrado, entonces el flujo es la circulación a lo largo de la curva.

Ejemplo 9: Calcular la circulación del campo $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ a lo largo de la circunferencia $\vec{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

Dado que $\mathbf{F}(\vec{r}(t)) = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$ y $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$ entonces

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= -\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt = \left[t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

1.3.1. Independencia de la Trayectoria, Funciones Potenciales y Campos Conservativos

1.3.2. Teorema Fundamental de las Integrales de Línea

Teorema 1.1 Sea C , una curva suave dada por la función vectorial $\vec{r}(t)$, donde $a \leq t \leq b$. Sea f una función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo sobre C , entonces

$$\int_C \nabla f dr = f(\vec{r}(a)) - f(\vec{r}(b))$$

Este teorema permite evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservativo con sólo conocer el valor de f en los extremos del intervalo donde está definida f . De hecho, este teorema expresa que la integral de línea ∇f es el cambio total o razón de cambio en f . Si f es una curva plana, con puntos iniciales $A(x_1, y_1)$ y punto final $B(x_2, y_2)$ (Figura 1.15), entonces el teorema toma la forma

$$\int_C \nabla f dr = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Solamente si f es una función de tres variables y C es una curva en el espacio que une $A(x_1, y_1, z_1)$ con $B(x_2, y_2, z_2)$, (Figura 1.16) tenemos

$$\int_C \nabla f dr = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Demostración: Para el caso donde la función es de tres variables y a la ecuación (1.5) (pág 28), se tiene que

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) dt \\ &= f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))\end{aligned}$$

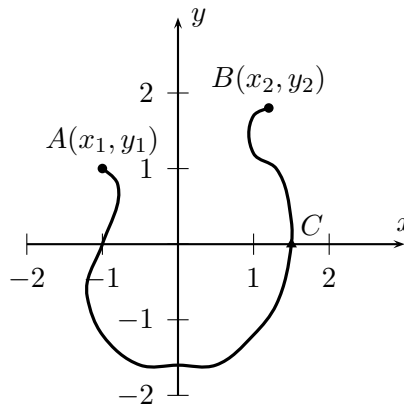


Figura 1.15

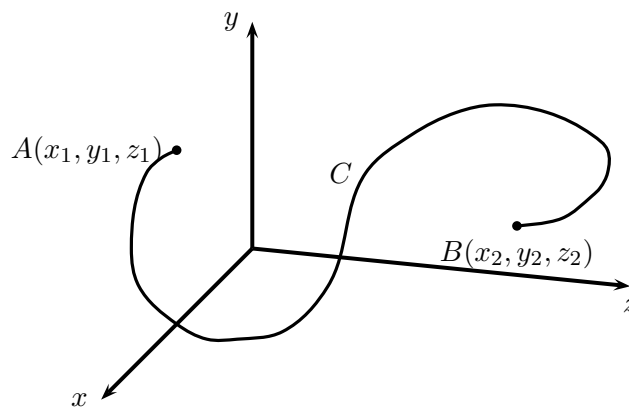


Figura 1.16

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

El teorema 1.1 también se cumple para curvas que sean suaves a trozos, esto se presenta al subdividirse C en un número finito de curvas suaves y se suman las integrales resultantes.

Si \mathbf{F} es un campo vectorial continuo con un dominio D , se dice que la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es *independiente de la trayectoria* si

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

para cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 en D que tengan los mismos puntos inicial y final. Con esto se puede concluir que las integrales de línea para campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria.

Definición 1.1: Una curva es *cerrada* si su punto terminal coincide con su punto inicial, es decir, $\vec{r}(b) = \vec{r}(a)$ (ver Figura 1.17).

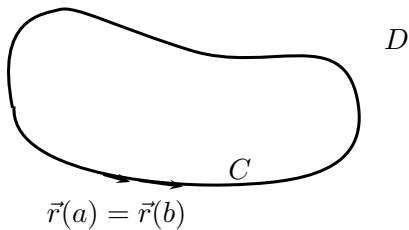


Figura 1.17

Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en el dominio D y C es cualquier trayectoria cerrada en D , entonces se puede escoger cualesquiera dos puntos A y B sobre C y considerar que C está compuesta por la trayectoria C_1 de A hasta B y después por la trayectoria C_2 , de B hasta A (ver Figura 1.18).

Así pues

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

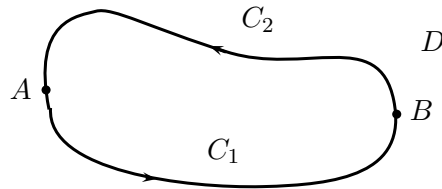


Figura 1.18

dado que C_1 y $-C_2$ tienen los mismos puntos iniciales y finales. De esta manera inversa, si se cumple que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ siempre que C sea una trayectoria cerrada en D .

Teorema 1.2:

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria D si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \vec{0}$ para toda trayectoria cerrada C en D .

Demostración:

Se toman cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 desde A hasta B en D y se define a C como la curva que consiste en C_1 , seguida por $-C_2$. Por lo tanto,

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

así que

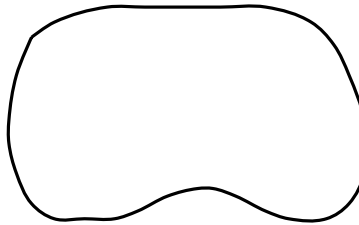
$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como ya se sabe, la integral de línea de cualquier campo conservativo \mathbf{F} es independiente de la trayectoria. Luego, de esto se desprende $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para trayectorias cerradas.

Su interpretación física es que el trabajo que lleva a cabo un campo de fuerza conservativo (como el campo gravitacional o el campo eléctrico) al mover un objeto alrededor de una trayectoria cerrada es igual a cero.

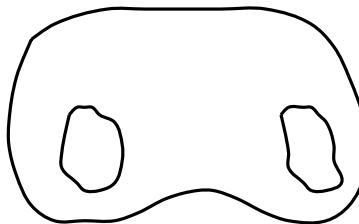
1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Definición 1.2: Una región simplemente conexa en el plano, es una región conexa D , tal que toda curva, simple cerrada en D encierra puntos que solo están al interior de D (ver Figura 1.19) . Un bosquejo intuitivo, sería una región simplemente conexa que no contiene hoyo alguno, ni puede consistir en partes separadas (ver Figura 1.20).



región simplemente conexa

Figura 1.19



región no conexa

Figura 1.20

Teorema 1.3: Suponga que \mathbf{F} , es un campo continuo sobre una región abierta conexa D . Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D , entonces \mathbf{F} es un campo vectorial conservativo sobre D ; es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Este teorema establece que los únicos campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son los conservativos. Se enuncia tanto para curvas planas como para curvas en el espacio de una forma similar.

Del teorema 1.3 se tiene que bajo condiciones de diferenciabilidad usuales, un campo \mathbf{F} es conservativo si, y sólo si, es el campo gradiente de una función escalar f , es decir, si, y sólo si, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f .

Definición 1.3: Función Potencial

Si \mathbf{F} es un campo vectorial definido en $D \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f . Entonces f recibe el nombre de función potencial de \mathbf{F} .

Por ejemplo, un potencial eléctrico es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo eléctrico, un potencial gravitacional es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo gravitacional, etc.

Demostración Teorema 1.3:

Sea $A(a, b)$ un punto fijo en D . Podemos construir la función potencial f , definiendo

$$f(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Para cualquier punto (x, y) en D . Esto es cierto, puesto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C , que una los puntos (a, b) y (x, y) , se utilice para evaluar $f(x, y)$.

Ya que \mathbf{D} es abierto, existe un disco contenido en \mathbf{D} con centro en (x, y) . Se elige cualquier punto (x_1, y) en el disco con $x_1 \leq x$ y sea C una curva que consiste en la trayectoria C_1 , que va desde (a, b) hacia (x_1, y) , seguida por el segmento de recta horizontal C_2 , que va desde (x_1, y) hasta (x, y) (ver Figura 1.21).

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

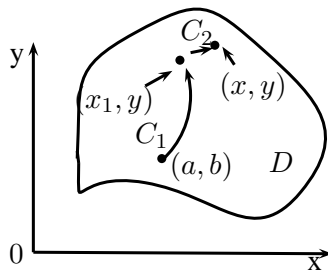


Figura 1.21

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + f(x, y) = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Como la primera de estas integrales no depende de x , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si $\mathbf{F} = Pi + Qj$, entonces

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

en C_2 y es constante, por lo que $dy = 0$. Se utiliza t como parámetro, donde $x_1 \leq t \leq x$, en virtud del teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx + Q dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y) dt = P(x, y) \end{aligned}$$

Un argumento similar, usando un segmento de recta vertical (ver Figura 1.22), demuestra que

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

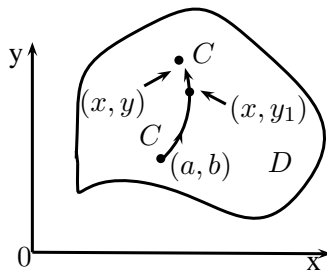


Figura 1.22

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P dx + Q dy \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^y Q(x, t) dt = Q(x, y)\end{aligned}$$

Así que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = \nabla f$

Lo cual quiere decir que \mathbf{F} es conservativo.

Para determinar si un campo vectorial \mathbf{F} es conservativo, suponga que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Entonces, existe una función f , tal que $F = \nabla f$, es decir

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Teorema de Clairaut: *Supongamos que f se define en un disco D que contiene el punto (a, b) . Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D , entonces*

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Por consiguiente tenemos que,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

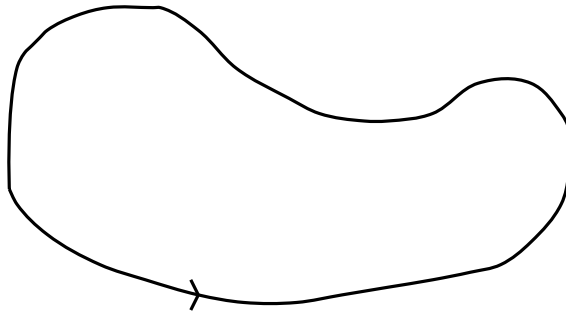
Teorema 1.4: *Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales de primer orden continuas sobre un*

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

dominio D , entonces en todo D tenemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

El inverso del teorema 1.4, se cumple sólo para una clase especial de región abierta simplemente conexa. Primero, se entiende que una curva simple, es una curva que no se cruza en parte alguna entre sus puntos extremos; $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ para una curva simple cerrada, pero $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ cuando $a < t_1 < t_2 < b$ (ver Figura 1.23).



curva simple cerrada

Figura 1.23

Teorema 1.5: Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial sobre una región abierta simplemente conexa D . Suponga que P y Q tienen derivadas de primer orden continuas y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en toda D . Entonces \mathbf{F} es conservativo.

Ejemplo 10: El campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$$

no es conservativo

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

En efecto, poniendo $P(x, y) = x - y$ y $Q(x, y) = x - 2$ entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

puesto que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ se sigue que \mathbf{F} no es conservativo.

Ejemplos 11: El campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$$

es conservativo. En efecto, llamando

$P(x, y) = 3 + 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$ entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

puesto que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, \mathbf{F} es conservativo.

1.4. Teorema de Green

El teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial sobre una curva plana con una integral doble sobre el recinto que encierra la curva. Este teorema resulta muy útil porque, dados un campo vectorial y una curva cerrada simple sobre la cual hay que integrarlo, podemos elegir la posibilidad más simple entre integrar el campo directamente sobre la curva, o bien integrar la diferencia de sus derivadas parciales cruzadas sobre el recinto que delimita la curva. Por otro lado, la relación así establecida entre la integral de línea sobre una curva y la integral doble sobre la región interior a ésta permite a veces obtener información sobre una función o su integral en un recinto a partir del comportamiento de la función sobre la frontera de dicho recinto.

Antes de enunciar el teorema de Green, indicaremos que la *orientación positiva* de una curva cerrada sencilla C se refiere a una curva transversal de C en sentido

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

antihorario. Por lo tanto, si la función vectorial $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, proporciona C entonces la región D siempre esta a la izquierda, conforme al punto $\vec{r}(t)$ atraviesa C (ver Figura 1.24).

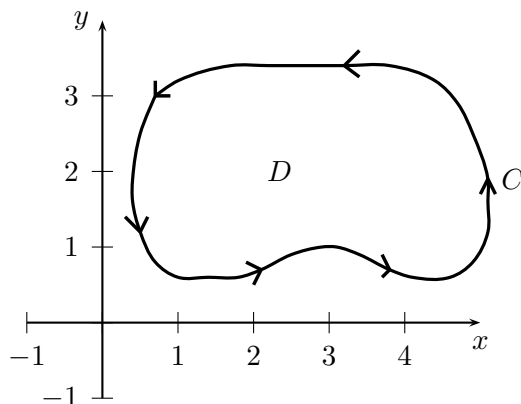


Figura 1.24

En caso contrario diremos que la orientación es negativo (ver Figura 1.25).

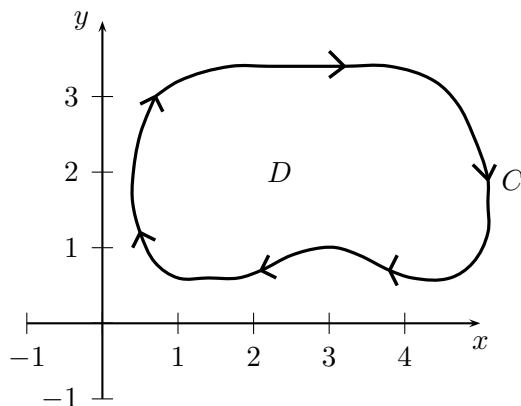


Figura 1.25

Teorema de Green: Sea C una curva del plano cerrada y suave a segmentos y orientada positivamente, y sea D la región acotada por C . Si P y Q tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a D , entonces

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

La notación

$$\oint_C Pdx + Qdy$$

se usa para indicar que la integral de línea se calcula utilizando la orientación positiva de la curva cerrada C . Otra notación para la curva frontera positivamente orientada de D es ∂D , así que el teorema de Green puede escribirse como

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{\partial D} Pdx + Qdy \quad (1.7)$$

Se considera el teorema de Green, análogo del teorema fundamental del cálculo para las integrales dobles. Comparando la ecuación (1.7) con el enunciado de la segunda parte de este último teorema, en la ecuación siguiente

$$\int_a^b \mathbf{F}'(x) = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

En ambos casos, existe una integral que comprende las derivadas \mathbf{F}' , $\partial Q/\partial x$ y $\partial P/\partial y$ en el primer miembro izquierdo de la ecuación. Así mismo, en ambos casos el segundo miembro abarca los valores de las funciones originales (\mathbf{F} , Q y P), sólo sobre la *frontera* del dominio.

Para demostrar el teorema de Green debemos probar que:

$$\text{i) } \oint_C Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Con D definida como tipo I

$$\text{ii) } \oint_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Con D definida como tipo II

Luego al sumar las expresiones (i) y (ii), se tendrá como resultado

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Prueba de (i):

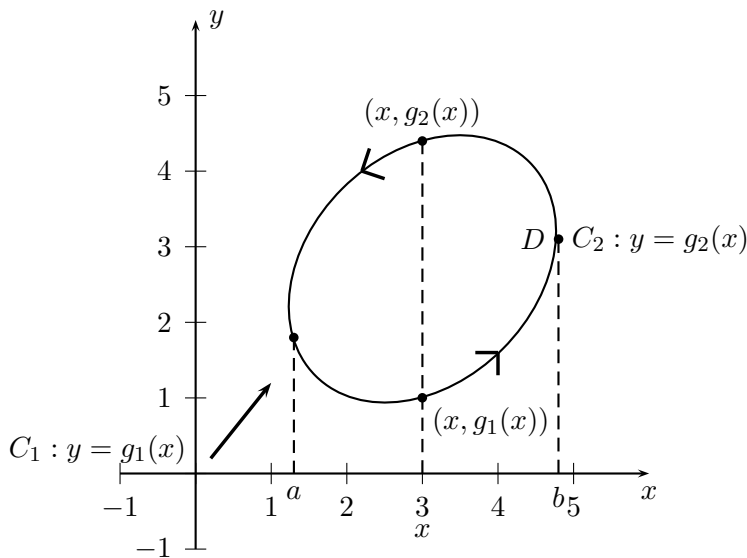


Figura 1.26

Como es una región tipo I, g_1 y g_2 son funciones continuas (ver Figura 1.26). Esto permite calcular la integral doble del segundo miembro de la ecuación (i), de esta manera:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \quad (1.8)$$

Donde el último paso se deduce el teorema fundamental del cálculo. De otro lado,

$$\oint_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx$$

si parametrizamos C_1 de la siguiente manera:

$$x = x, \quad y = g_1(x); \quad a \leq x \leq b$$

y $-C_2$ en la forma

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$x = x, \quad y = g_2(x); \quad a \leq x \leq b$$

se obtiene

$$\oint_C P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \quad (1.9)$$

De (1.8) y (1.9) podemos concluir

$$\oint_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

Con D definida como tipo I

Para demostrar (ii) consideramos la Figura 1.27:

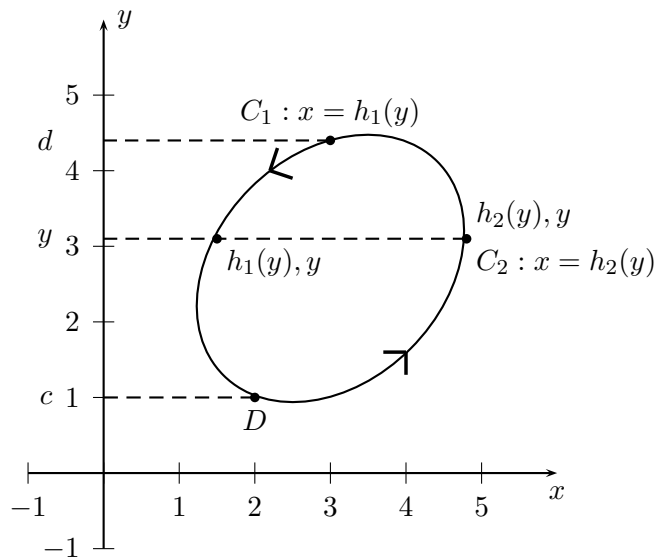


Figura 1.27

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy$$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que:

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\int_c^d [Q(x, y)]_{h_1(y)}^{h_2(y)} dy = \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)] dy \quad (1.10)$$

De otro lado,

$$\oint_C Q(x, y) dy = \int_{C_1} Q(x, y) dy + \int_{C_2} Q(x, y) dy$$

parametrizando $-C_1$ se tiene que

$$y = y, \quad x = h_1(y); \quad c \leq y \leq d$$

y C_2 en la forma

$$y = y, \quad x = h_2(y); \quad c \leq y \leq d$$

Luego,

$$\begin{aligned} \oint_C Q(x, y) dx &= - \int_c^d Q(h_1(y), y) + \int_c^d Q(h_2(y), y) dy \\ &\quad \int_c^d Q(h_2(y), y) - \int_c^d Q(h_1(y), y) dy \end{aligned} \quad (1.11)$$

De (1.10) y (1.11) podemos concluir

$$\oint_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Con D definida como tipo II

En conclusión, sumando (i) y (ii) se obtiene

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Ejemplo 12: Evaluar $\oint_C x^4 dx + xy dy$, donde C es la curva triangular que consiste en los segmentos de recta que van de $(0, 0)$ a $(1, 0)$, de $(1, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(0, 0)$ (ver Figura 1.28).

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

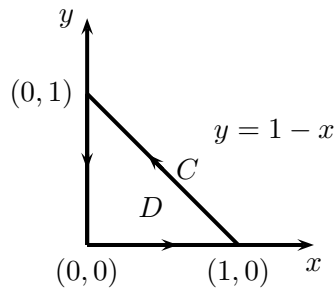


Figura 1.28

Solución:

Para resolver este problema, es posible formular tres integrales distintas a lo largo de los tres lados del triángulo, pero también es posible evaluarlo por medio del teorema de Green. Al observar la figura 1.28 vemos que la región D está acotada por C , es una región simple y con orientación positiva. Si $P(x, y) = x^4$, $Q(x, y) = xy$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint_C Pdx + Qdy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Con esto, se puede evaluar más fácilmente un integral doble que una integral de línea, aunque en algunos casos es más útil la integral de línea, por lo que el teorema de Green se utiliza en la dirección contraria. Si se conoce que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ sobre la curva C , entonces por el teorema de Green se tiene que

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C Pdx + Qdy = 0$$

sin importar los valores que P y Q tengan en la región D .

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Otra forma de utilizar el teorema de Green es en el cálculo de áreas. Como el área de D es $\iint_D 1dA$, se deben escoger P y Q de manera que

$$A = \oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \quad (1.12)$$

Ejemplo 13: Encuentre el área encerrada por la elipse de ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$ y $y = b \sen t$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

De acuerdo a (1.12) tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t)dt - (b \sen t)(-a \sen t)dt \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

El teorema de Green también se puede extender al caso de que D es una unión finita de regiones simples (ver Figura 1.29).

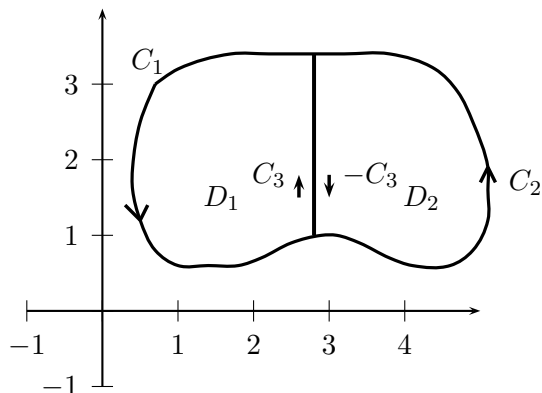


Figura 1.29

Note que $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son simples. La frontera de D_1 es $C_1 \cup C_3$, mientras que la frontera de D_2 es $C_2 \cup (-C_3)$, aplicando el teorema de Green a D_1 y

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

D_2 por separado se obtiene:

$$\int_{C_1 \cup C_3} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (1.13)$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (1.14)$$

Sumando las ecuaciones (1.13) y (1.14), las integrales de línea a lo largo de C_3 y $-C_3$ se cancelan, luego:

$$\int_{C_1 \cup C_2} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

que es el teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, ya que su frontera es $C = C_1 \cup C_2$

Ejemplo 14: Evaluar $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, donde C es la frontera de la región semianular D de la parte superior del plano que está entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (ver Figura 1.30).

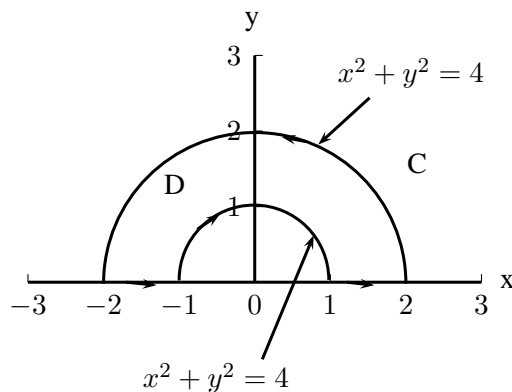


Figura 1.30

Solución:

A pesar de que D no es simple, el eje y lo divide en dos regiones simples. En coordenadas polares se puede escribir:

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

aplicando el teorema de Green se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\ &= \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \operatorname{sen}\theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta \int_1^2 r^2 dr = \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

El teorema de Green, también se puede extender a regiones con hoyos o regiones que no son simplemente conexas. La frontera C de la región D de la figura, consiste en dos curvas simples cerradas C_1 y C_2 . Además, estas curvas frontera están orientadas y que la región D siempre queda a la izquierda, conforme se cruza la curva C . Por lo tanto, la dirección positiva es en sentido antihorario para la curva externa C_1 , pero en el sentido del reloj para la curva C_2 . Si dividimos D en dos regiones D' y D'' mediante las rectas que se ven en la Figura 1.31 y aplicando el teorema de Green, tenemos que:

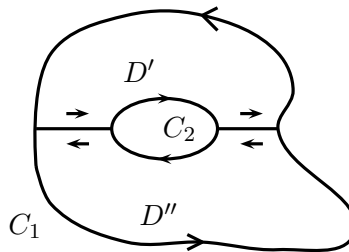


Figura 1.31

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_{\partial D'} P dx + Q dy + \int_{\partial D''} P dx + Q dy\end{aligned}$$

Ya que las integrales de línea a lo largo de la frontera común tienen direcciones opuestas, se cancelan y se obtiene:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy$$

Que es el resultado del teorema de Green para la región D .

Ejemplo 15: Si $\mathbf{F}(x, y) = \frac{(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})}{x^2 + y^2}$, verificar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para cada trayectoria cerrada simple que incluye el origen.

Solución:

Puesto que C es una trayectoria cerrada arbitraria que incluye el origen, es difícil calcular la integral dada en forma directa. Así que consideramos un círculo C' orientado en sentido antihorario, con centro en el origen y radio a , donde a se escoge de manera que sea lo suficientemente pequeña para C' esté dentro de C . Sea D la región acotada por C y C' (ver Figura 1.32). Entonces, su frontera positivamente orientada es $C \cup (-C')$, por lo que la versión general del teorema de Green nos da

$$\begin{aligned}\int_C P dx + Q dy + \int_{-C'} P dx + Q dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dA \\ &= 0\end{aligned}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

así que

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_{C'} Pdx + Qdy$$

es decir,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

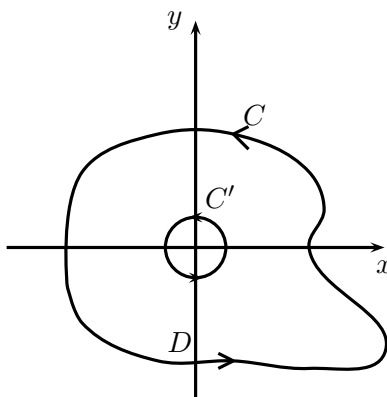


Figura 1.32

Ahora se puede calcular con facilidad esta última integral utilizando la parametrización dada por $\vec{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Así pues,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

1.5. Rotacional y Divergencia

Existen dos operaciones que pueden realizarse sobre campos vectoriales y que desempeñan un papel importante en las aplicaciones del cálculo vectorial para el

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

cálculo del flujo, en la electricidad y en el magnetismo. Cada operación se relaciona con las derivadas parciales aplicadas sobre campos vectoriales, con la diferencia de que una da como resultado un campo vectorial (rotacional), mientras que la otra produce un campo escalar (divergencia).

1.5.1. Rotacional en un Campo Vectorial

Sea \mathbf{F} un campo vectorial sobre \mathbb{R}^3 tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

El Rotacional de \mathbf{F} , denotado por $\nabla \times \mathbf{F}$ se define por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Si estas derivadas parciales existen.

Una forma para calcular el $\nabla \times \mathbf{F}$ es desarrollando el producto cruz utilizando el determinante

$$\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

Ejemplo 16: Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathbf{F}} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= (-2y - xy)\mathbf{i} - (0 - x)\mathbf{j} + (yz - 0)\mathbf{k} = -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \end{aligned}$$

Teorema 1.5: Si f es una función de tres variables con derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\nabla \times (\nabla \mathbf{F}) = \vec{\mathbf{0}}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Como un campo vectorial es conservativo siempre que $\mathbf{F} = \nabla f$, el teorema 1.5 puede enumerarse de la siguiente manera:

$$\text{Si } \mathbf{F} \text{ es conservativo, entonces } \nabla \times \mathbf{F} = \vec{0}$$

Siendo lo anterior, otra forma de comprobar que un campo vectorial no es conservativo.

Ejemplo 17: El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ no es conservativo, pues

$$\nabla \times \mathbf{F} = -y(2+x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \neq \vec{0}$$

1.5.2. Divergencia de un Campo Vectorial

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial sobre \mathbb{R}^3

La divergencia de \mathbf{F} , denotada como $\nabla \cdot \mathbf{F}$, esta definida como

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Si estas derivadas parciales existen.

Para calcular el $\nabla \cdot \mathbf{F}$, emplearemos el producto punto de dos vectores

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

Ejemplo 19: Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz = z(1+x)$$

Si \mathbf{F} es un campo vectorial sobre \mathbb{R}^3 , entonces $\nabla \times \mathbf{F}$ también es un campo vectorial sobre \mathbb{R}^3 . Como tal podemos calcular su divergencia, enunciado en el siguiente teorema.

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Teorema 1.6: Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre \mathbb{R}^3 , y P, Q y R tienen derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

1.6. Integrales de Superficie

La relación entre las integrales de superficie y el área es similar a la relación entre las integrales de línea y la longitud de arco. Suponiendo que f es una función de tres variables cuyo dominio incluye una superficie S , definiremos la integral de superficie de f sobre S de tal forma que, en el caso en que $f(x, y, z) = 1$, el valor de la integral de superficie es igual al área de S .

1.6.1. Superficies Paramétricas

Suponiendo que una superficie S tiene una ecuación vectorial

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

Primero suponemos que el dominio del parámetro D es un rectángulo y lo dividimos en subrectángulos R_{ij} con dimensiones Δu y Δv . Entonces la superficie S se divide en las correspondientes cuadrículas S_{ij} , como la Figura 1.33. Evaluamos f en el punto P_{ij}^* , en cada cuadrícula, multiplicando el área ΔS_{ij} de la cuadrícula, formando la suma de Riemman.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij}$$

Al tomar el límite como el número de incrementos de cuadrículas, definimos la *integral de superficie de f sobre la superficie S* como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}^*) \Delta S_{ij} \quad (1.16)$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

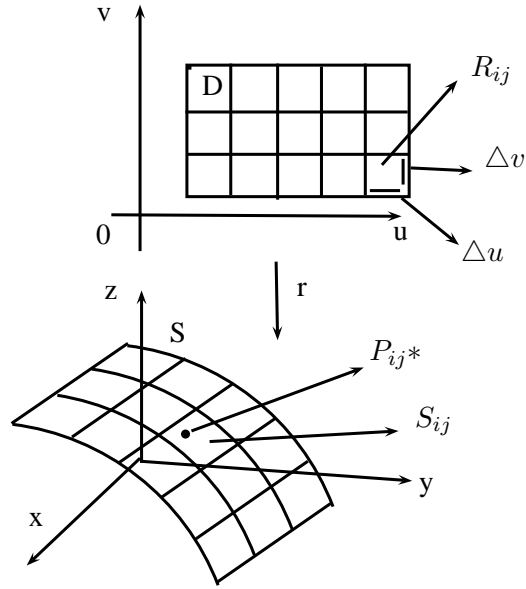


Figura 1.33

Para evaluar la integral de superficie en la ecuación (1.16), aproximamos el área de la cuadrícula ΔS_{ij} , mediante el área de un paralelogramo que se aproxima en el plano tangente. Así pues, requerimos de la definición de área superficial que se define de la siguiente manera:

Si la ecuación

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (u, v) \in D$$

Proporciona una superficie paramétrica suave S y ésta se cubre sólo una vez conforme (u, v) recorren el dominio del parámetro, D , entonces el área superficial de S es:

$$A(S) = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$$

donde $\vec{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ $\vec{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Siendo estos vectores tangentes en una esquina de S_{ij} . Si las componentes son continuas y \vec{r}_u y \vec{r}_v no son cero ni son paralelas en el interior de D , a partir de la ecuación (1.16) se tiene que

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA \quad (1.17)$$

aún cuando D no sea rectángulo.

Esto al compararse con la fórmula de la integral de línea se tiene que:

$$\int_C f(x, y, z) dS = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

Se observa que también que:

$$\iint_S 1 dS = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA = A(S)$$

La ecuación (1.17) permite calcular una integral de superficie al convertirla en un integral doble sobre el dominio del parámetro D . Cuando se utiliza esta fórmula, $f(\vec{r}(u, v))$ se evalúa escribiendo $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ en la fórmula para $f(x, y, z)$.

Ejemplo 20: Calcular: la integral de superficie $\iint_S x^2 dS$, donde S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solución:

Para este ejercicio se utilizará la representación paramétrica en coordenadas esféricas ρ, ϕ, θ

$$x = \text{sen } \phi \cos \theta \quad y = \text{sen } \phi \text{sen } \theta \quad z = \cos \phi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es decir,

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \text{sen } \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \phi \text{sen } \theta \mathbf{j} + \cos \phi \mathbf{k}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

luego se calcula $|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta|$ así:

$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \text{sen}^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen}^2 \theta \text{sen} \phi \mathbf{j} + \text{sen} \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

$$|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta| = \sqrt{\text{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + \text{sen}^4 \theta \text{sen}^2 \phi + \text{sen}^2 \phi \cos^2 \phi} = \text{sen} \phi$$

De acuerdo (1.17) se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dS &= \iint_D (\text{sen} \phi \cos \theta)^2 |\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}^2 \phi \cos^2 \theta \text{sen} \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\pi \text{sen}^3 \phi d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta \int_0^\pi (\text{sen} \phi - \text{sen} \phi \cos^2 \phi) d\phi \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \text{sen} 2\theta \right]_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Las integrales de superficie tienen aplicaciones parecidas a las de las integrales que se han considerado antes. Por ejemplo, si una hoja delgada o una lámina de aluminio tiene forma de una superficie S y la densidad (masa por unidad de área) en el punto (x, y, z) es igual a $\rho(x, y, z)$ entonces la *masa* total de la lámina es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dS$$

y el *centro de la masa* es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x \rho(x, y, z) dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y \rho(x, y, z) dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \rho(x, y, z) dS$$

Cualquier superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ puede considerarse como una superficie paramétrica, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = x \quad y = y \quad z = g(x, y)$$

así que tenemos

$$\vec{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \mathbf{k} \quad \vec{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

por lo tanto

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (1.18)$$

y

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

En este caso la ecuación (1.17) se convierte en

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA \quad (1.19)$$

Se aplican fórmulas similares cuando resulta más conveniente proyectar S sobre los planos yz o xz . Por ejemplo, si S es una superficie con ecuaciones $y = h(x, z)$ y D es la proyección sobre el plano xz , entonces

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, h(x, z), z) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dA$$

Ejemplo 21: Evaluar la integral $\iint_S y dS$, donde S es la superficie $z = x + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ (ver Figura 1.34)

Como $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

La ecuación (1.19) da como resultado

$$\begin{aligned} \iint_S y dS &= \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA \\ &= \int_0^1 \int_0^2 y \sqrt{1 + 1 + 4y^2} dy dx \\ &= \int_0^1 dx \sqrt{2} \int_0^2 y \sqrt{1 + 2y^2} dy \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} (1 + 2y^2)^{3/2} \right) \right]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

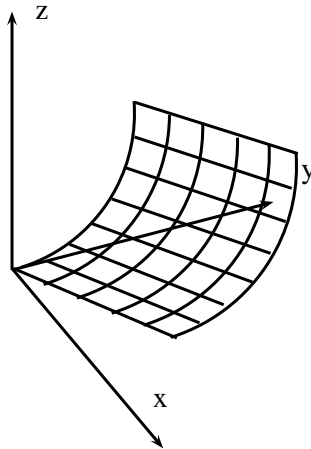


Figura 1.34

Si f es una superficie suave a segmentos; es decir, una unión finita de superficies suaves $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ que cruzan sólo una vez a lo largo de sus fronteras, entonces la integral de superficie de f sobre S se define mediante

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) \, dS + \dots + \iint_{S_n} f(x, y, z) \, dS$$

1.6.2. Superficies Orientadas

Sea S una superficie que tiene un plano tangente en cada punto (x, y, z) sobre S (excepto en cualquiera de sus puntos frontera). Existen dos vectores normales unitarios n_1 y n_2 en (x, y, z) . (ver Figura 1.35)

Si fuera posible elegir un vector unitario normal n en cada uno de dichos puntos (x, y, z) de manera que n varía de manera continua sobre S , entonces S se llama *Superficie Orientada* y la elección dada de n proporcionaría una orientación a S .

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

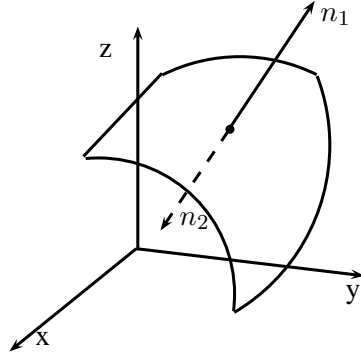


Figura 1.35

Para una superficie $z = g(x, y)$, se utiliza la ecuación (1.18) para asociar a la superficie una orientación natural dada por el vector normal unitario

$$\vec{n} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \quad (1.20)$$

Puesto que la componente k es positiva, esto produce una orientación de la superficie hacia arriba.

Si S es una superficie suave orientable, expresada en términos paramétricos por una función vectorial $\vec{r}(u, v)$, entonces automáticamente se le da la orientación del vector unitario normal

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \quad (1.21)$$

y la orientación opuesta está dada por $-\vec{n}$.

Para una superficie cerrada (superficie que es frontera de una región sólida E), la convención es que la *orientación positiva* es aquella en la que los vectores normales señalan hacia afuera de E y las normales que apuntan hacia adentro indican la orientación negativa. (ver Figura 1.36)

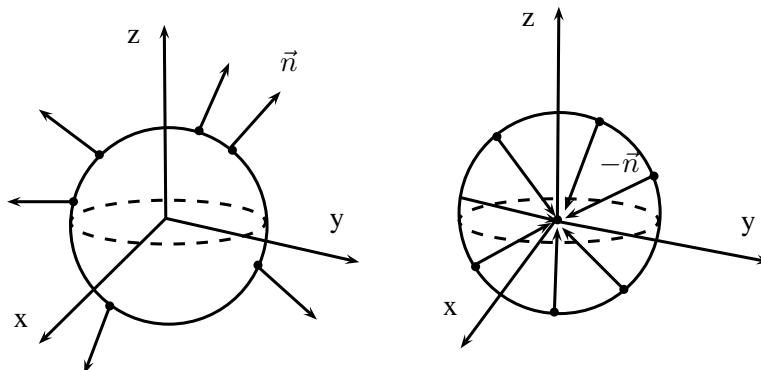


Figura 1.36

1.6.3. Integrales de Superficie en Campos Vectoriales

Sea S una superficie orientada con un vector normal unitario n . Podemos imaginar un fluido con densidad $\rho(x, y, z)$ y un campo de velocidad $v(x, y, z)$ que fluye a través de S . De modo que la razón de fluido por unidad de área es ρv . Si se divide S en pequeñas cuadrículas S_{ij} , entonces S_{ij} es casi plana, por lo que podemos aproximar la masa del fluido que la atraviesa en la dirección del vector normal \vec{n} por unidad de tiempo, así

$$(\rho v \cdot \vec{n}) A (S_{ij})$$

Donde ρ, v, \vec{n} se evalúan en algún punto sobre S_{ij} . Al sumar estas cantidades y al calcular el límite, obtenemos de acuerdo a la ecuación (1.16) la integral de superficie de la función $(\rho v \cdot \vec{n})$ sobre S

$$\iint_S (\rho v \cdot \vec{n}) dS = \iint_S \rho(x, y, z) v(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z) dS \quad (1.22)$$

Esto se interpreta físicamente como la razón de fluido a través de S .

Si \mathbf{F} es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector normal unitario \vec{n} , entonces la integral de superficie de \mathbf{F} sobre S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} dS \quad (1.23)$$

Esta integral se denomina también flujo de \mathbf{F} a través de S .

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Si una función vectorial $\vec{r}(u, v)$ da S , entonces la ecuación (1.21) proporciona \vec{n} y a partir de la definición de integral de superficie sobre un campo vectorial y la ecuación (1.17) se tiene que

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot dS &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}}{|\vec{r} \times \vec{r}|} dS \\ &= \iint_D \left[\mathbf{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{|\vec{r} \times \vec{r}|} \right] |\vec{r} \times \vec{r}| dA\end{aligned}$$

donde D es el dominio del parámetro. Por lo tanto, resulta

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D F \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) dA \quad (1.24)$$

Ejemplo 22: Determine el flujo de $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ hacia afuera (flujo exterior), a través de la superficie cortada del cilindro parabólico $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$

Solución:

En la superficie se tiene que $x = x$, $y = x^2$ y $z = z$, así que podemos usar la parametrización $\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$. (ver Figura 1.37)

Además,

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

y

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_z}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_z|} = \frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

Como $y = x^2$, el campo vectorial queda

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} = x^2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

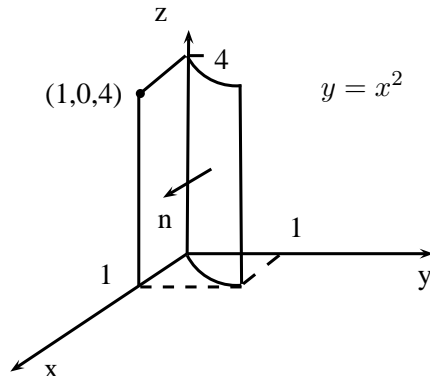


Figura 1.37

Así, que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} ((x^2 z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)) \\ &= \frac{2x^3 z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \end{aligned}$$

El flujo \mathbf{F} hacia afuera a través de la superficie es por lo tanto

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^4 \int_0^1 \frac{2x^3 z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 1} \, dx \, dz \\ &= \int_0^4 \int_0^1 (2x^3 z - x) \, dx \, dz = \int_0^4 \left[\frac{1}{2} x^4 z - \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} dz = 2 \end{aligned}$$

Otra forma de presentar la integral de superficie, es en situaciones físicas. Por ejemplo si E es un campo eléctrico, entonces la integral de superficie es

$$\iint_S E \cdot dS$$

se conoce como flujo eléctrico de E a través de la superficie S . Una de las leyes importantes de la electrostática es la Ley de Gauss, que establece que la carga neta encerrada en una superficie cerrada S es

$$Q = \varepsilon_0 \iint_S E \cdot dS$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

donde ε_0 es una constante (llamada la permitividad del espacio libre), la cual depende de las unidades utilizadas. (En el sistema internacional, $\varepsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$).

Otra aplicación de las integrales de superficie tiene que ver con el estudio del flujo de calor. Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) de un cuerpo es $u(x, y, z)$. Entonces, el flujo de calor está definido como el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -K\nabla u$$

donde K es una constante experimental llamada conductividad térmica de la sustancia. La razón de calor a lo largo de la superficie S en el cuerpo está dada, por la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS = -K \iint_S \nabla u \cdot dS$$

1.7. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes indica que, la circulación de un campo vectorial alrededor de la frontera de una superficie orientada en el espacio, en el sentido contrario al de las manecillas con respecto al vector unitario \vec{n} normal a la superficie, (ver Figura 1.38) es igual a la integral del componente normal del rotacional del campo sobre la superficie.

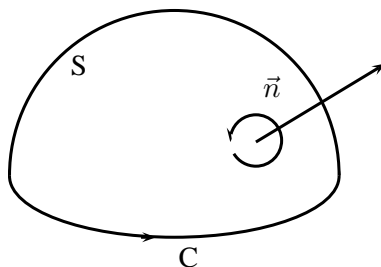


Figura 1.38

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Teorema 1.7

(Teorema de Stokes) La circulación de un campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ alrededor de la frontera C de una superficie orientada S , en el sentido contrario al de las manecillas de un reloj con respecto al vector unitario \vec{n} normal a la superficie, es igual a la integral de $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n}$ sobre S

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

En la ecuación anterior, si dos superficies orientadas diferentes, S_1 y S_2 , tienen la misma frontera C , las integrales de los rotacionales son iguales. Esto es,

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n}_2 \, d\sigma$$

Las integrales rotacionales son iguales a la integral de circulación en sentido contrario al de las manecillas, del lado izquierdo de la ecuación anterior, siempre que los vectores unitarios normales \vec{n}_1 y \vec{n}_2 orienten correctamente las superficies.

Matemáticamente se debe restringir en \mathbf{F} , C y S permitiendo garantizar la existencia de las integrales en la ecuación de Stokes. Las restricciones usuales son que todas las funciones, campo vectorial y sus derivadas, sean continuas.

Si C es una curva en el plano xy , orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y R es la región en el plano xy acotada por C , entonces $d\sigma = dx dy$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Bajo estas condiciones, El Teorema de Stokes se expresa como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

la cual es la forma circular rotacional de la ecuación en el teorema de Green. Recíprocamente, al invertir los pasos se puede reescribir la forma circulación rotacional del teorema de Green para campos de dos dimensiones con la notación como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{k} \, dA$$

ver Figura 1.39

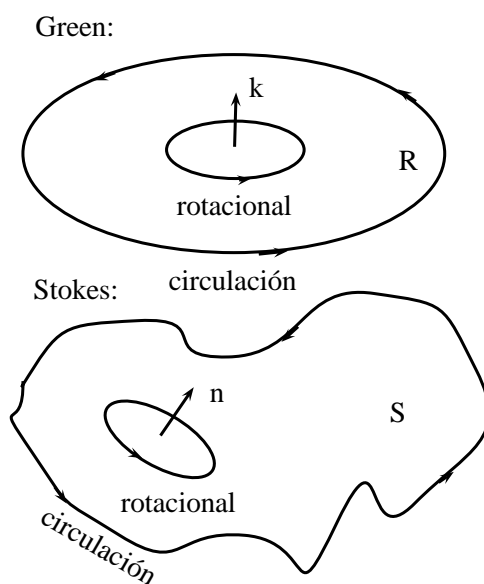


Figura 1.39

Ejemplo 23: Verificar la ecuación de Stokes para el hemisferio $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, y su circunferencia frontera $C : x^2 + y^2 = 9, z = 0$, y el campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

Solución:

Calculamos la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de C ver Figura 1.40, empleando la parametrización $\vec{r}(\beta) = (3 \cos \beta)\mathbf{i} + (3 \sin \beta)\mathbf{j}, 0 \leq \beta \leq 2\pi$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

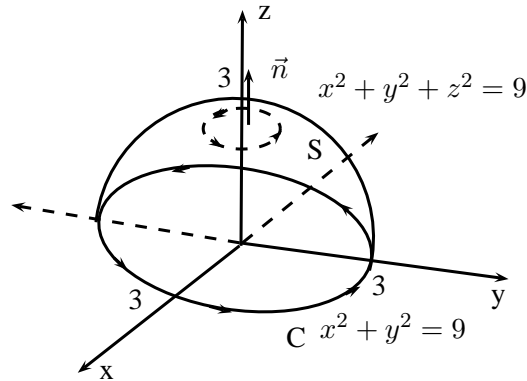


Figura 1.40

$$d\mathbf{r} = (-3 \operatorname{sen}\beta \, d\beta)\mathbf{j} + (3 \operatorname{cos}\beta \, d\beta)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3 \operatorname{sen}\beta)\mathbf{i} - (3 \operatorname{cos}\beta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -9 \operatorname{sen}^2\beta \, d\beta - 9 \operatorname{cos}^2\beta \, d\beta = -9 \, d\beta$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9 \, d\beta = -18\pi$$

Para la integral del rotacional de \mathbf{F} , tenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k}$$

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$$

$$d\sigma = \frac{3}{z} \, dA$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\frac{2z}{3} \frac{3}{z} \, dA = -2 \, dA$$

y

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} -2 \, dA = -18 \pi$$

Con lo cual podemos observar que la circulación alrededor del círculo es igual a la integral del rotacional sobre el hemisferio.

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

1.7.1. El teorema de Stokes para superficies con agujeros

La integral de superficie sobre S , del componente normal $\nabla \times \mathbf{F}$, es igual a la suma de las integrales de líneas alrededor de todas las curvas frontales del componente tangencial de \mathbf{F} , donde las curvas se trazan en las dirección inducida por la orientación de S (ver Figura 1.44).

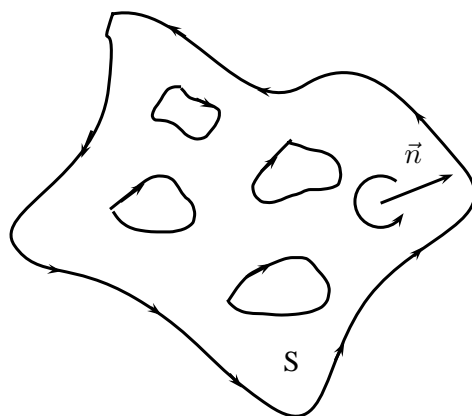


Figura 1.44

El teorema de Stokes también se cumple para superficies orientadas con agujeros.

Una propiedad que debemos tener en cuenta es la siguiente:

$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{F}) = 0$ o $\nabla \times \nabla \mathbf{F} = 0$ donde \mathbf{F} es un campo escalar diferenciable.

Esta identidad se cumple para cualquier función $f(x, y, z)$, cuyas segundas derivadas parciales son continuas.

Demostración

$$\nabla \times \nabla \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k} = \vec{0}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Si las segundas derivadas parciales son continuas, pues las segundas derivadas cruzadas que aparecen entre paréntesis son iguales, y el vector es igual a el vector nulo.

1.7.2. Campos conservativos y el teorema de Stokes

Si un campo \mathbf{F} es conservativo en una región abierta D en el espacio es equivalente a la integral de \mathbf{F} se anula a lo largo de cualquier trayectoria cerrada en D . Esto, a su vez, en regiones abiertas *simplemente conexas*, equivale a $\nabla \times \mathbf{F} = \vec{0}$

Teorema 1.8 Si $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en cualquier punto de una región abierta simplemente conexa D en el espacio, por lo tanto para cualquier trayectoria cerrada y suave por partes C en D .

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

A continuación presentaremos un bosquejo de la demostración:

Caso 1: Curvas cerradas simples: Un teorema de topología, establece que toda curva cerrada simple diferenciable C en una región abierta simplemente conexa D , es la frontera de una superficie suave con dos lados, S , que también está en D . De este modo el Teorema de Stokes, queda:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Caso 2: Curvas que se cruzan: Como se muestra en la Figura 1.45. Se descomponen en lazos simples generados por superficies orientables, se aplica el Teorema de Stokes a un lazo a la vez y se suman los resultados.

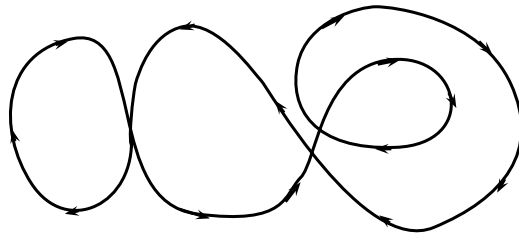


Figura 1.45

1.8. Teorema de la Divergencia

El teorema de Divergencia indica que bajo cierto contexto, el flujo exterior de un campo vectorial a través de una superficie cerrada (orientada hacia afuera) es igual a la integral triple de la divergencia del campo sobre la región encerrada por la superficie.

Teorema 1.9 *El flujo de un campo vectorial \mathbf{F} a través de una superficie cerrada S en la dirección del vector normal unitario exterior \vec{n} , es igual a la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre la región D encerrada por la superficie.*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Ejemplo 24: Comprobar el teorema de la divergencia, para el campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

Solución:

El vector unitario exterior normal a S , calculado a partir del gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ es

$$\vec{n} = \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Por lo tanto,

$$\mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, d\sigma = \frac{a^2}{a} \, d\sigma = a \, d\sigma$$

Por lo que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en la superficie. Luego

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S a \, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3$$

De otro lado,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

Así, que

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \iiint_D 3 \, dV = 3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^3$$

1.8.1. Teorema de la divergencia para regiones especiales

El teorema de divergencia se ilustra suponiendo que los componentes de \mathbf{F} tiene primeras derivadas parciales continuas. Por otro lado que si D es una región convexa sin agujeros o burbujas, como una esfera sólida, un cubo o elipsoide, y S es una superficie suave por partes; además, si R_{xy} es la proyección de D en el plano xy , se supone que cualquier recta perpendicular al plano xy , la cual pasa por un punto interior de la región R_{xy} corta a la superficie S en exactamente dos puntos, formando las superficies

$$\begin{aligned} S_1 : \quad z &= f_1(x, y), & (x, y) \text{ en } R_{xy} \\ S_2 : \quad z &= f_2(x, y), & (x, y) \text{ en } R_{xy}, \end{aligned}$$

con $f_1 \leq f_2$. Hacemos suposiciones similares acerca de la proyección de D sobre los otros planos coordenados. Vea la Figura 1.46

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Demostremos primero el Teorema de la Divergencia para el tipo de regiones tridimensionales aquí mostrado, después consideramos otro tipo de regiones.

Dado que las componentes del vector unitario normal $\vec{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ son los cosenos de los ángulos α, β y γ que \vec{n} forma con los vectores con coordenadas unitarias $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, (ver Figura 1.47)

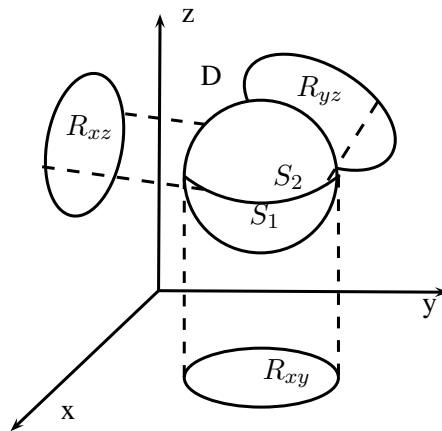


Figura 1.46

Esto es,

$$\vec{n}_1 : \vec{n} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{n}||\mathbf{i}|\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\vec{n}_2 : \vec{n} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{n}||\mathbf{j}|\cos\beta = \cos\beta$$

$$\vec{n}_3 : \vec{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{n}||\mathbf{k}|\cos\gamma = \cos\gamma$$

O bien,

$$\vec{n} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

De esta manera,

$$\mathbf{F} \cdot \vec{n} = M \cos\alpha + N \cos\beta + P \cos\gamma$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

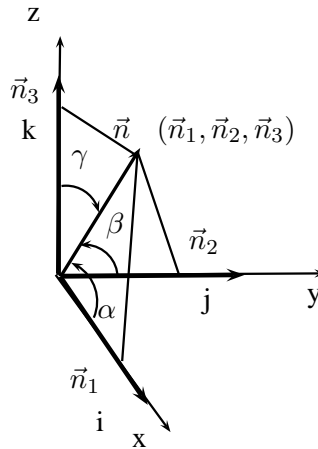


Figura 1.47

y como

$$\iint_S (M \cos\alpha + N \cos\beta + P \cos\gamma) d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Resulta que

$$\iint_S M \cos\alpha \, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x} \, dx dy dz \quad (1)$$

$$\iint_S N \cos\beta \, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y} \, dx dy dz \quad (2)$$

$$\iint_S P \cos\gamma \, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} \, dx dy dz \quad (3)$$

Vamos a demostrar (3). Al convertir la integral de superficie (la de la izquierda) en la integral doble sobre la proyección R_{xy} de D en el plano xy como se observa en la Figura 1.48

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

La región tridimensional D encerrada por las superficies S_1 y S_2 anteriormente proyectadas por medio del vertical sobre una región bidimensional R_{xy} del plano xy , la superficie S consta de una parte superior S_2 cuya ecuación es $z = f_2(x, y)$ y una parte inferior S_1 cuya ecuación $z = f_1(x, y)$. En S_2 , el vector normal exterior \vec{n} tiene un componente \mathbf{k} positivo y

$$\cos\gamma \, d\sigma = dxdy$$

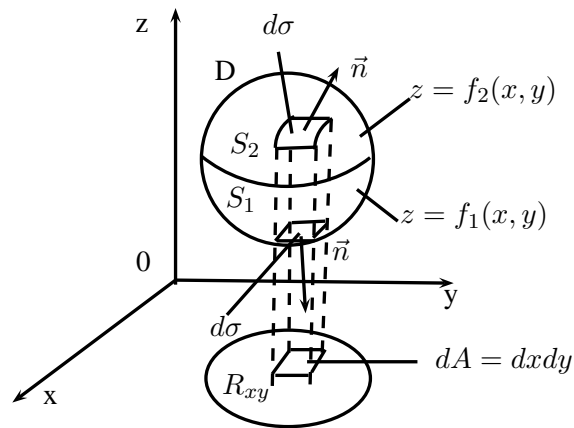


Figura 1.48

pues

$$d\sigma = \frac{dA}{|\cos\gamma|} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

Ampliando la figura anterior de las regiones. La relación $d\sigma = \pm dxdy/\cos\gamma$ (ver Figura 1.49)

En S_1 , el vector normal exterior tiene un componente \mathbf{k} negativo por lo tanto

$$\cos\gamma \, d\sigma = -dxdy$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

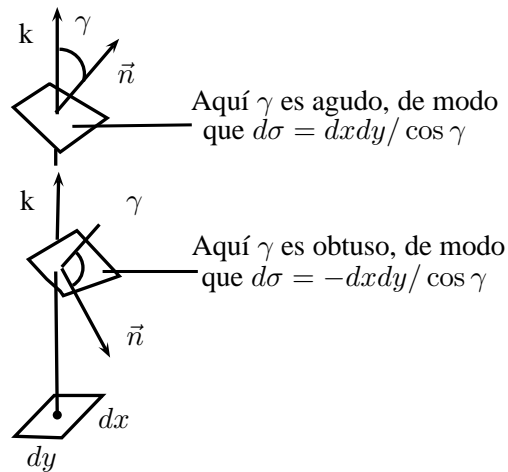


Figura 1.49

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \iint_S P \cos\gamma \, d\sigma &= \iint_{S_2} P \cos\gamma \, d\sigma + \iint_{S_1} P \cos\gamma \, d\sigma \\
 &= \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_2(x, y)) \, dxdy - \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_1(x, y)) \, dxdy \\
 &= \iint_{R_{xy}} \left[P(x, y, f_2(x, y)) \, dxdy - P(x, y, f_1(x, y)) \, dxdy \right] \\
 &= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_2(x, y)}^{f_1(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \right] \, dxdy = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} \, dz \, dxdy
 \end{aligned}$$

Como se quería demostrar

1.8.2. Teorema de la Divergencia para otras regiones

Podemos extender el teorema de la divergencia a regiones que pueden dividirse en un número finito de regiones simples como las estudiadas anteriormente o en regiones que pueden definirse como límites de regiones más simples.

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Por ejemplo Si D es la región entre dos esferas concéntricas donde \mathbf{F} tiene componentes continuos diferenciables en D y en las superficies frontera. Se divide a D en dos partes mediante un plano ecuatorial y se aplica el teorema de la divergencia a cada mitad por separado. Ver Figura 1.50. La superficie S_1 la cual acota D_1 consta de un hemisferio exterior, una base plana en forma de corona y un hemisferio interior. De acuerdo al Teorema de la Divergencia.

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_1$$

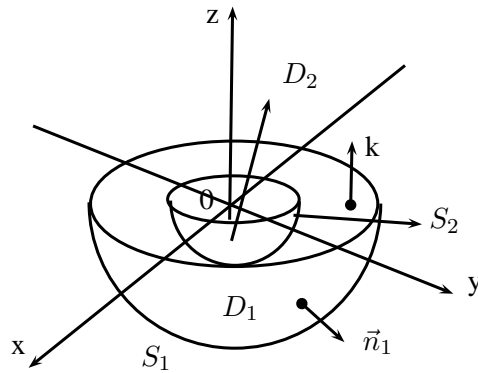


Figura 1.50

El vector unitario normal \vec{n}_1 que apunta hacia afuera desde D_1 y se aleja del origen a lo largo de la superficie exterior, es igual a \mathbf{k} a lo largo de base plana, y apunta hacia el origen a lo largo de la superficie interior.

Ahora aplicando el teorema de la divergencia a D_2 , y su superficie S_2 (ver Figura 1.51).

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_2 \, d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_2$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

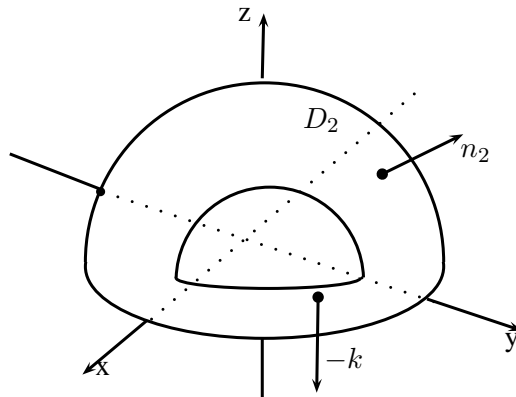


Figura 1.51

Si se sigue a \vec{n}_2 sobre S_2 , que apunta hacia afuera de D_2 , se observa que \vec{n}_2 es igual a $-\mathbf{k}$ a lo largo de la base en forma de corona en el plano xy , apunta alejándose del origen en la esfera exterior y apunta hacia el origen en la esfera interior. Al sumar las ecuaciones

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_1$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \vec{n}_2 \, d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_2$$

las integrales sobre la superficie plana se cancelan ya que los signos de \vec{n}_1 y \vec{n}_2 son opuestos. Así se llega al resultado

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma_2 = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

con D la región entre las esferas, S la frontera de D que consta de dos esferas y \vec{n} el vector unitario normal a S dirigido de D .

Ejemplo 25: Determinar el flujo neto del campo vectorial $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}$,
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

hacia afuera, a través de la frontera de la región $D : 0 < a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$

Solución El flujo se puede calcular integrando $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre D . Dado que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (2x) = \frac{x}{\rho}$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

De otro lado,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5} \quad y \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

Por tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = \vec{0}$$

y

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0$$

Por tanto la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre D es igual al cero y el flujo neto exterior a través de la frontera de la región también es cero. Pero hay más que aprender de este ejemplo. El flujo que sale de D a través de la esfera interior S_a es el negativo del flujo que sale de D a través de la esfera exterior S_b (ya que la suma de estos flujos es cero). Así, el flujo de \mathbf{F} a través de S_a alejándose del origen es igual al flujo de \mathbf{F} a través de S_b alejándose del origen. Entonces, el flujo de \mathbf{F} a través de una esfera con centro en el origen es independiente del radio de la esfera.

Para determinar el valor de este flujo, calculamos la integral del flujo de manera directa. El vector unitario normal hacia afuera a la esfera de radio a es

$$\vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

De aquí que, en la esfera

$$\mathbf{F} \cdot \vec{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a^3} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

y

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\sigma = \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi$$

El flujo de \mathbf{F} hacia afuera a través de cualquier esfera con centro en el origen es 4π .

1.9. Ley de Gauss

En la teoría electromagnética, el campo eléctrico debido a la carga q de un punto localizado en el origen es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}$$

donde ϵ_0 es una constante física, \mathbf{r} es el vector de posición del punto (x, y, z) , y $\rho = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Del anterior ejemplo su notación sería:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F}$$

Los cálculos del ejemplo anterior muestran que el flujo de \mathbf{E} hacia afuera a través de cualquier esfera con centro en el origen es $\frac{q}{\epsilon_0}$, pero este resultado no sólo es válido para esferas. El flujo de \mathbf{E} hacia afuera a través de cualquier superficie cerrada S que encierra al origen (donde se aplica el teorema de la divergencia) es también $\frac{q}{\epsilon_0}$. ¿Por qué sucede esto? basta con imaginar una esfera grande S_a con centro en el origen y que encierre a la superficie S . Como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

donde $\rho > 0$, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ sobre la región D entre S y A_a es el vector cero. Por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\text{Frontera de } D} \mathbf{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma = 0,$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

y el flujo de \mathbf{E} a través de S alejándose del origen debe ser igual a flujo de \mathbf{E} a través de S_a alejándose del origen, que es $\frac{q}{\varepsilon_0}$. Esta afirmación, llamada *ley de Gauss*, también se aplica a distribuciones de carga más generales.

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo 26: Ecuación de continuidad de la hidrodinámica

Sea D una región en el espacio, acotada por una superficie cerrada y orientada S . Suponga que $\vec{v}(x, y, z)$ es el campo de velocidad de un fluido que pasa suavemente a través de d sea además, $\delta = \delta(x, y, z)$ la densidad del fluido en el punto (x, y, z) y en el instante t de esta manera, si $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$, entonces la **ecuación de continuidad** de la hidrodinámica establece que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = \vec{0}$$

Si las funciones en cuestión tienen primeras derivadas parciales continuas, la ecuación surge de manera natural del teorema de la divergencia. En efecto,

La integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma$$

es la tasa con la que la masa de D a través de S (se aleja, ya que \vec{n} es el vector normal exterior). ¿Por qué sucede esto?, basta considerar un elemento de área $\nabla\sigma$ en la superficie como se observa en la Figura 1.52

El fluido que sube a través de la región $\nabla\sigma$ en un periodo corto de tiempo ∇t el cual, llena un “cilindro” cuyo volumen es aproximadamente

$$V = \text{area de la base} \times \text{altura} = \vec{v} \cdot \vec{n} \, \nabla\sigma \, \nabla t$$

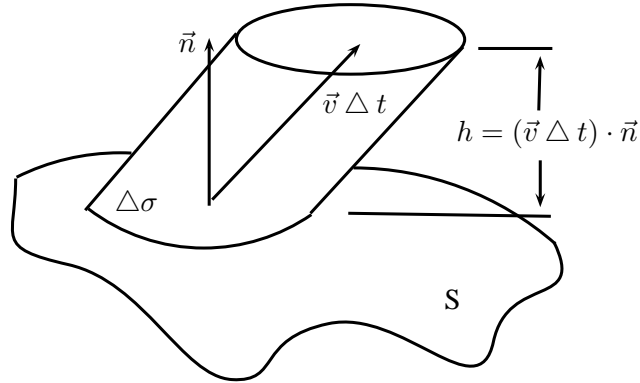


Figura 1.52

En un intervalo corto del tiempo Δt , el volumen ΔV del fluido que pasa por la región es aproximadamente igual al volumen de un cilindro con área de la base igual $\Delta\sigma$ y altura $(\vec{v}\Delta t) \cdot \vec{n}$, donde \vec{v} es un vector de velocidad anclado en un punto de la región:

$$\Delta V \approx \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta\sigma \Delta t$$

La masa de este volumen de fluido es aproximadamente

$$\Delta m \approx \delta\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta\sigma \Delta t$$

de modo que la razón con que la masa sale de D a través del elemento de área superficial es aproximadamente

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta\sigma$$

Llegando a la aproximación

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta\sigma$$

como una estimación de la tasa promedio con que la masa sale de S . Por último, se hace $\Delta\sigma \rightarrow \vec{0}$ y $\Delta t \rightarrow \vec{0}$ se obtiene la tasa instantánea con la masa sale de D a través de S como

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta\vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

el flujo particular es

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Ahora, si B es una esfera sólida con centro en el punto Q del flujo. El valor promedio de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre B es

$$\frac{1}{\text{volumen de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Una consecuencia de la continuidad de la divergencia que, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ asume este valor en algún punto P en B . Así

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{F})_P &= \frac{1}{\text{volumen de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma}{\text{volumen de } B} \\ &= \frac{\text{razón con que la masa sale de } B \text{ a través de su superficie } S}{\text{volumen de } B} \end{aligned}$$

Ahora se hace tender a cero el radio de B manteniendo fijo el centro Q . El lado izquierdo de la anterior ecuación converge a $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$, y el lado derecho a $(-\partial\delta/\partial t)_Q$. La igualdad de estos dos límites es la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial\delta}{\partial t}$$

La ecuación de continuidad “explica” que la divergencia de \mathbf{F} en un punto es la razón con que la densidad del fluido disminuye en este punto.

En consecuencia el Teorema de Divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

Expresa que la disminución neta en la densidad del fluido en la región D se considera cuantitativamente como la masa transportada a través de la superficie S . Por ello, el teorema es una afirmación acerca de la conservación de la masa.

1.10. Unificación de los teoremas integrales

Se considera un campo bidimensional $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ como un campo de tres dimensiones cuyo componentes \mathbf{k} es el vector nulo, por tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

lo que hace que el teorema de Green pueda escribirse como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA$$

De manera similar, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}$, de modo que la forma tangencial del teorema de Green puede escribirse como.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) dx \, dy = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{k} \, dA$$

Ya que se tiene las ecuaciones del teorema de Green escritas en la notación, se puede ver la relación con las ecuaciones del teorema de Stokes y del teorema de la divergencia.

1.11. Teorema de Green y su generalización a tres dimensiones

Forma normal del teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dA$$

Teorema de la divergencia:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$$

1. INTEGRACIÓN EN CAMPOS VECTORIALES

Forma tangencial del Teorema de Green:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A}$$

Teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Note que, el teorema de Stokes generaliza la forma tangencial (rotacional) del teorema de Green, de una superficie plana a una superficie en el espacio tridimensional. En cada caso, la integral del componente normal del rotacional de \mathbf{F} sobre el interior de la superficie es igual a la circulación de \mathbf{F} alrededor de la frontera. De manera similar, el teorema de la divergencia generaliza la forma normal del teorema de Green, de una región bidimensional a una región tridimensional en el espacio. En cada caso, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre el interior de la región es igual al flujo total del campo a través de la frontera.

En este capítulo podemos observar los contenidos necesarios del cálculo vectorial y sus aplicaciones en áreas como física o ingeniería, con el fin de explicar el comportamiento de fenómenos como fluidos, circulación, trabajo, entre otros.

Una forma para resolver problemas de estos tipos, es con la ayuda de algún software diseñado para ejecutar cálculos numéricos y simbólicos que permiten visualizar gráficas en dos y tres dimensiones. Uno de los más conocidos es MATLAB, pero antes de desarrollar algunas aplicaciones del cálculo vectorial, explicaremos en el siguiente capítulo el manejo básico del programa.

ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

2.1. Introducción a MATLAB

MATLAB es un lenguaje de alto nivel diseñado para cómputo técnico que integra el cálculo, visualización de gráficos y programación. Además MATLAB es el nombre abreviado de **MAT**rix **LAB**oratory (*laboratorio de matrices*) y originalmente fue creado para realizar operaciones con matrices; actualmente es un sistema de cálculo de operaciones matemáticas y programación interactivo que integra un sistema de gráfica. El lenguaje de este programa es más riguroso que otros, tales como FORTRAN, C, Basic, VisualBasic o Pascal, por mencionar algunos. En este software los problemas y sus soluciones pueden expresarse en notación matemática acequibles al conocimiento. Los usos más comunes son:

- Cálculos matemáticos
- Desarrollo de algoritmos
- Modelado y simulación
- Obtención de gráficas
- Desarrollo de interfaces gráficas

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

- Análisis de datos

Se han desarrollado una colección de herramientas que programadas al lenguaje de MATLAB pueden realizar un conjunto de actividades en cierta áreas de la ingeniería, las ciencias, las finanzas y la economía, entre otras.

Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos dimensiones. Además de que MATLAB tiene también un lenguaje de programación propio. Igualmente dispone de un código básico y de varias librerías especializadas (*toolboxes*).

La parte más importante de la ventana inicial es **command window**, que aparece en la parte central. En esta sub-ventana es donde se ejecutan los comandos de MATLAB, también aparece el **prompt** (aviso) (`>>`), que indican que el programa está preparado para recibir instrucciones.

En la parte superior izquierda de la pantalla aparecen dos ventanas muy útiles: la ventana de **current directory** junto con el **workspace**. La ventana **current directory** muestra los ficheros del directorio activo o actual. El directorio activo se puede cambiar desde el **command window** o desde la propia ventana en la barra de herramientas con los métodos de navegación de directorios propios de windows. Los ficheros ***.m** del directorio activo se abre desde el editor de ficheros que se encuentran en el menú de herramientas en **desktop tools**, herramienta fundamental en MATLAB para la programación. El **workspace** contiene información sobre todas las variables que se hayan definido en la sesión, permite ver y modificar las matrices con las que se estén trabajando.

En la parte inferior izquierda de la pantalla aparece un botón **star** con una función análoga a la del botón inicio de windows. Este botón da acceso inmediato a ciertas capacidades del programa como el menú de **desktop tools**, **toolboxes**, **simulink**, etc.

En la barra de menú, encontramos los botones que permiten abrir documentos nuevos o ya guardados en el programa en **file**, el botón **edit** edita las ventanas que deseamos que aparezcan en el espacio de trabajo, los botones de **desktop**

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

tools y **windows** se modifican las ventanas de trabajo y el botón **help**, el cual contiene ayudas para trabajar en MATLAB.(Figura 2.1)

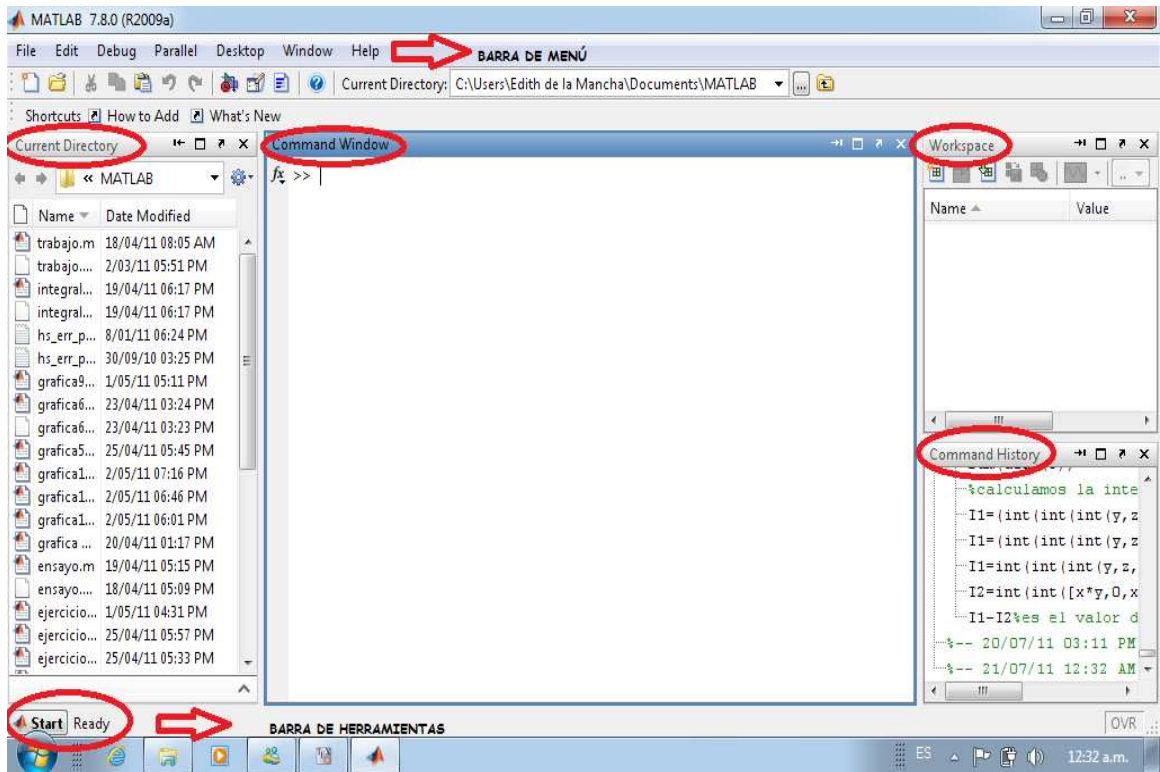


Figura 2.1

2.2. Ejemplos sencillos utilizando MATLAB

MATLAB puede realizar cálculos simples tal como si se tratara de una calculadora. Por ejemplo si se desea sumar $3 + 7$, simplemente se escribe después de `EDU >>` la operación requerida.

```
EDU >> 3 + 7
```

y presione la tecla ENTER (Se empleara negrilla para lo que se escribe y normal para lo que escribe MATLAB.) MATLAB da este resultado

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

ans =
10

La precedencia significa el nivel de prioridad que aplica MATLAB para realizar las operaciones. La potenciación tiene asignada la mayor prioridad, la multiplicación y la división la siguiente y finalmente la suma y la resta tienen la menor prioridad.

Algunas Funciones en MATLAB

Función	Notación en MATLAB
$\text{sen } x$	$\text{sin } (x)$
$\text{cos } x$	$\text{cos } (x)$
$\text{tan } x$	$\text{tan } (x)$
\sqrt{x}	$\text{sqrt } (x)$
$\log(x)$	$\text{log } 10(x)$
$\ln(x)$	$\text{log } (x)$
$ x $	$\text{abs } (x)$
e^x	$\text{exp}(x)$

Tabla 2.1: Algunas funciones en MATLAB

Por ejemplo

EDU >> **sin (3)**

ans =
0,1411

cada vez que MATLAB ejecuta alguna acción, el resultado se escribe en la pantalla. Para suprimir la escritura del resultado, es necesario escribir punto y coma después de escribir la operación que se desea realizar, por ejemplo

EDU >> **3 + 7 < ENTER >**

ans =
10

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

EDU >> **3 + 7;** < ENTER >

Para borrar variables se emplea la instrucción *clear*

EDU >> **clear a**

borra solamente la a, mientras que,

EDU >> **clear**

borra todas las variables que se hayan definido desde que se empezó la sesión actual de MATLAB

2.3. Guardado de una Sesión y sus Variables

Las variables de la sesión están disponibles mientras no se cierre MATLAB o al no ejecutarse la instrucción *clear*. Para seguir empleando las variables en otra sesión de MATLAB es conveniente guardar la sesión anterior; esto es posible con la instrucción *diary* la cual guarda una copia de la sesión de MATLAB en un archivo (incluye todas las instrucciones que se hayan escrito, así como las respuestas que haya obtenido).

Para ilustrar el uso de *diary* se consideran necesarias las siguientes sesiones de trabajo:

```
>> a = 1
```

```
a =
```

```
1
```

```
>> b = 2
```

```
b =
```

```
2
```

```
>> c = [0.5:0.5:2];
```

```
>> x = a + b. / c
```

```
x =
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

5.0000 3.0000 2.3333 2.0000

si ahora se desea guardar la sesión de trabajo en un archivo por ejemplo (*sesion.txt*) se usa:

```
>> diary ('sesion.txt')
```

2.4. Ayudas en MATLAB

Las ayudas en MATLAB se pueden acceder con el comando *help* con lo que se obtiene la lista de todos los tópicos para los que se pueden obtener ayuda.

```
>> help
```

Para acceder a la ayuda de un tópico específico podemos escribir también el nombre del tópico. Por ejemplo, para obtener ayuda de los demos se usa `help demos` que se da en la lista todos los demos de MATLAB.

```
>> help elfun
```

2.5. Variables y Funciones

En MATLAB las funciones se definen conforme se plantean por primera vez, no importa si se trata de variables de una dimensión o multidimensionales, matrices o cualquier otro elemento numérico o simbólico.

Variables

Las variables se definen al momento que se usan por primera vez. Por ejemplo, si en un problema es necesario especificar el valor inicial de una variable Y_0 , esta variable se crea al escribir su valor

```
>> Y0 = 1
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

```
Y0 =  
1
```

Esta variable tendrá este valor hasta que el usuario lo cambie por otro.

Los nombres de las variables pueden tener un tamaño de hasta 63 caracteres de largo y el primer carácter no debe ser un número. Si un nombre de variable tiene más de 63 caracteres, sólo se conservan los primeros 63. Por ejemplo, si escribimos

```
>> El_nombre_de_esta_variable_tiene_mas_de_sesenta_y_tres_ caracteres_ = 13  
El_nombre_de_esta_variable_tiene_mas_de_sesenta_y_tres_caracteres= 13
```

MATLAB solamente conserva los primeros 63 caracteres en el nombre. Los números y variables como $Y0$ se conoce también como real.

Se pueden definir números complejos usando el número imaginario

$$i = j = \sqrt{-1}$$

```
>> Z = 3 + 2* j  
Z =  
3,0000 + 2,0000 i
```

Funciones

existen dos tipos de funciones en MATLAB. Las predefinidas por éste y las definidas por el usuario. A las funciones predefinidas en dicho programa se les llama funciones elementales.

Es posible definir expresiones dentro de MATLAB. Por ejemplo, la ecuación para calcular el área de un círculo de radio r es

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

$$A = \pi r^2$$

Si $r = 4$, el área se calcula con

```
>> A = pi * 4 ^ 2
```

```
A =
```

```
50,2655
```

Por ejemplo, si se quiere trabajar con una función

$$f = x^3 + ax + b$$

ésta se puede crear definiendo primero las variables a, b y x como simbólicas para poder definir luego la función f . Así

```
syms a b x
```

Solución de Ecuaciones

Para resolver ecuaciones MATLAB usa el comando *solve*. El argumento de este comando puede ser una ecuación como

$$ax + b = 0$$

o puede ser una expresión. En el segundo caso MATLAB iguala a cero la expresión.

Por ejemplo.

```
>> solve('a * x + b = 0')
```

```
ans =
```

```
-b/a
```

```
>> solve('a * x + b','x')
```

```
ans =
```

```
-b/a
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

En el primer *solve*, MATLAB supone que la incógnita es x . En el segundo explícitamente se elige a x como la incógnita. si se desea resolver para a entonces se cambia a.

```
>> solve('a * x + b','a')
ans =
-b/x
```

2.6. Álgebra Lineal

Vectores

Un vector es una matriz con un solo renglón llamado vector renglón, o con una sola columna, llamado vector columna. Los vectores siguen las reglas de las matrices. Como ejemplo, el vector renglón dado por:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

es un vector renglón de dimensión 4, mientras que

$$y = \begin{bmatrix} 9; & 18; & -5; & 6; & -7; & 2; & 4; & 3; & 11; & 17 \end{bmatrix}$$

es un vector columna de dimensión 10.

Si sólo se desea desplegar algunos elementos de un vector se usa $y(a : b)$ donde sólo se van a desplegar los elementos del a - ésimo al b - ésimo. Por ejemplo

```
>> y(2:4)
ans =
18
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

-5

6

mientras que $y(i : j : k)$ da los elementos desde el i -ésimo hasta el k -ésimo, pero separados j unidades. Entonces,

```
>> y(2 : 3 : 10)
```

```
ans =
```

```
18
```

```
-7
```

```
3
```

El índice j puede ser también negativo. Por ejemplo:

```
>> y(9 : -3 : 3)
```

```
ans =
```

```
11
```

```
2
```

```
-5
```

Algunas operaciones con vectores, a continuación se ilustran algunas

Operaciones con Vectores. a y b son vectores de dimensión n y c es un escalar

Si los vectores a , b y el escalar c están dados por

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c = 12$$

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Operación	Resultado
$a + c$	$[a_1 + ca_2 + c \dots a_n + c]$
$a * c$	$[a_1 * ca_2 * c \dots a_n * c]$
$a + b$	$[a_1 + b_1a_2 + b_2 \dots a_n + b_n]$
$a * b$	$[a_1 * b_1a_2 * b_2 \dots a_n * b_n]$
$a./b$	$[a_1/b_1a_2/b_2 \dots a_n/b_n]$
$a. b$	$[b_1/a_1b_2/a_2 \dots b_n/a_n]$
a^c	$[a_1^c a_2^c \dots a_n^c]$
a^c	$[c^a_1 c^a_2 \dots c^a_n]$
a^b	$[a_1^b b_1 a_2^b b_2 \dots a_n^b b_n]$

Tabla 2.2: Operaciones con vectores.

entonces se puede realizar las siguientes operaciones:

```
>> a + b
```

```
ans =
```

```
14
```

```
15
```

```
18
```

```
>> a * c
```

```
ans =
```

```
24
```

```
36
```

```
72
```

```
>> c. ^ a
```

```
ans =
```

```
144
```

```
1728
```

```
2985984
```


2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

La multiplicación de vectores sólo es posible si se respetan las reglas de multiplicación de matrices. De esta, manera, es posible multiplicar dos vectores si el primero es un vector renglón de m columnas y el segundo es un vector columna de m filas, o si se trata de multiplicar un vector columna de n filas por un vector renglón de n columnas. Por ejemplo se tiene los vectores

$$t = [a \quad b \quad c] \quad r = [w \quad x \quad y \quad z] \quad s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Se puede realizar solamente las siguientes operaciones

```
>> syms a b c w x y z
```

```
>> t = [a b c];
```

```
>> r = [w x y z];
```

```
>> s = [1; 2; 3; 4; 5];
```

```
>> u = [10; 20; 30];
```

```
>> t * u
```

```
ans =
```

```
10*a + 20*b + 30*c
```

```
>> u*t
```

```
ans =
```

```
[10 * a, 10 * b, 10 * c]
```

```
[20 * a, 20 * b, 20 * c]
```

```
[30 * a, 30 * b, 30 * c]
```

Cualquier otra operación que se quiera realizar marcará un error porque las dimensiones de los vectores no lo permiten.

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Producto Escalar y Vectorial

El producto escalar también llamado producto punto de dos vectores a y b dados por

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

es un escalar y está definido por

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

y MATLAB lo calcula con

```
>> dot (a, b)
```

Para los vectores a y b dados por

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

se tiene

```
>> a = [2; 3; -2; 1];
```

```
>> b = [3; -8; 7; 4];
```

```
>> c = dot (a, b)
```

```
c =
```

```
-28
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

El producto punto también se puede calcular si el primer vector columna lo transponemos para que sea vector renglón y luego lo multiplicamos por el segundo vector columna, es decir, se hace

$$a' * b$$

Para los vectores definidos anteriormente tenemos

```
>> a'*b
ans =
-28
```

El producto cruz $a \times b$ de dos vectores de tres dimensiones es otro vector y se obtiene con

```
>> cross (a, b)
```

Para los vectores a_1 y b_1 dados por

$$a_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 23 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} -27 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

se obtiene

```
>> a1 = [9; 6; 23];
>> b1 = [-27; 11; 12];
>> cross (a1, b1)
ans =
-181
-729
261
```

Funciones de Vectores

Es posible calcular funciones de vectores.

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Por ejemplo, si $x = [2 \quad 3 \quad -7]$, se puede obtener el $\sin(x)$ que es otro vector dado por el vector cuyas componentes son las funciones seno de cada componente, así por ejemplo

```
>> y = sin(x)
y =
0.90929742682568    0.14112000805987   -0.65698659871879
```

que es un vector donde cada componente es el seno de cada una de las componentes del vector x .

Las funciones definidas en MATLAB y aquellas definidas por el usuario se pueden usar con vectores así:

$$f(v) = [f(v_1)f(v_2) \dots f(v_n)]$$

donde v puede ser vector renglón o vector columna.

Por ejemplo para un polinomio definido por

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 17$$

donde x puede ser un escalar, un vector o una matriz. Si D es una matriz dada por

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces

```
>> D = [2 5; -4 9];
>> D ^3 + 2 * D ^2 - 7 * D + 17
ans =
-281    507
-375    405
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Un tipo especial de vector es el que formamos para evaluar una función en un intervalo dado, por ejemplo evaluar una función $f(x)$ en un intervalo $[x_i, x_f]$. Si el espaciamiento deseado entre los puntos es lineal, se puede usar:

$$x = \text{linspace} (a, b, n)$$

Esta instrucción genera n valores igualmente espaciados entre a y b . Por ejemplo,

```
>> x = linspace (1, 10, 10)
```

```
x =
```

```
1    2    3    4    5    6    7    8    9   10
```

Para crear un vector similar se puede usar

$$x = a : \text{incremento} : b$$

donde a es el vector inicial y los siguientes puntos son $a + \text{incremento}$, $a + 2 * \text{incremento}$, ... hasta llegar a b que es el valor final. Dependiendo del valor del *incremento*, el valor final puede ser distinto de b . Por ejemplo

```
>> x = 3 : 0.7 : 6
```

```
x =
```

```
3.0000    3.7000    4.4000    5.1000    5.8000
```

Para crear un espaciamiento logarítmico usamos

$$x = \text{logspace} (a, b, n)$$

donde el primer punto es 10^a , el último punto es 10^b y hay n puntos en el intervalo. Para $a = 2$, $b = 5$ y $n = 4$ se tiene.

```
>> x = logspace (2, 5, 4)
```

```
x =
```

```
100    1000    10000    100000
```

2.7. Cálculo

MATLAB permite realizar las operaciones de cálculo matemático más comunes, tales como la evaluación de límites, derivadas, integrales, resolución de ecuaciones diferenciales, series, entre otras. Este capítulo expondrá estas y otras operaciones las cuales se pueden realizar en forma numérica como en forma simbólica.

Límites

MATLAB proporciona el comando *limit* para este fin. La sintaxis para calcular el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es

$$\text{limit}(f, x, x_0)$$

el cual indica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Por ejemplo para $f(x) = x^2$, el límite cuando x tiende a 3 se obtiene realizando:

```
>> syms x
>> limit(x ^2, x, 3)
ans =
9
```

El límite de $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ cuando x tiende a ∞ se calcula con

```
>> syms x
>> limit((sqrt(x ^2 + 1), x, inf)
ans =
inf
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Para calcular un límite lateral se usa $\text{limit}(f, x, a, 'left')$ para el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a por la izquierda. Se emplea $\text{limit}(f, x, a, 'right')$ para calcular el límite por la derecha. De cálculo se sabe que una función $f(x)$ es continua en un punto a si los límites laterales son iguales. Ejemplo, se considera $f(x) = \tan x$ en $x = \pi/2$. Al evaluar los límites laterales se sabe si esta función es continua en $x = \pi/2$. Por lo tanto se calcula los dos límites como

```
>> syms x
>> limit (tan (x), x, pi/2, 'left')
ans =
inf

>> limit (tan (x), x, pi/2, 'right')
ans =
- inf
```

Como los límites laterales no son iguales, se concluye que la función $\tan x$ es discontinua en $x = \pi/2$.

Se pueden calcular el límite de un límite (anidar). Por ejemplo, en la función $f(x, y) = 3x^2 + 7xy$, para evaluar

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} 3x^2 + 7xy$$

se emplea

```
>> syms x y
>> limit (limit ((3 * x ^2 + 7 * x * y), y, 2), x, 3)
ans =
69
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Continuidad

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Si lo anterior no se cumple se dice que la función es discontinua. Si el límite existe pero es distinto de $f(a)$ entonces se dice que $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = a$. Se considera las funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas por

$$f(x) = \frac{\text{sen}x}{x} \quad , \quad g(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a un punto a se obtiene con

```
>> syms x a
>> limit (sin (x) / x, x, a)
ans =
sin (a) /a
```

Pero cuando se desea obtener el límite cuando x tienda a 0 se obtiene

```
>> limit (sin (x) / x, x, 0)
ans =
1
```

$f(x)$ es discontinua en $x = 0$, pero que la discontinuidad es evitable definiendo $f(0) = 1$

Para $g(x)$ se tiene cuando $x = a$

```
>> limit (sin (1/x), x, a)
ans =
sin(1/a)
```


2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Pero en $x = 0$

```
>> limit (sin (1/x), x, 0)
ans =
-1 ... 1
```

Lo cual indica que el límite está en el intervalo $[-1, 1]$. Si se calcula ahora los límites laterales se obtiene

```
limit (sin (1/x), x, 0, 'left')
ans =
-1 ... 1
```

```
>> limit (sin (1/x), x, 0, 'right')
ans =
-1 ... 1
```

Lo que prueba que la función no es continua en $x = 0$

0

Derivadas

Si se desea evaluar la derivada de $f(x) = 2x^2$, se sabe que el resultado es $f'(x) = 4x$. Para realizar lo anterior en MATLAB es necesario definir la x como una variable simbólica. Para esto se escribe $x = \text{sym}('x')$ o también se puede escribir $\text{syms } x$ con lo que MATLAB considera desde ahora x como una variable simbólica y no la evalúa numéricamente. Ahora ya se puede definir la función $f(x) = 2x^2$ como

```
>> syms x
>> f = 2* x ^2;
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Para derivar $f(x)$ se usa el operador $\text{diff}(f)$

```
>> syms x
>> f = 2* x ^2;
>> diff (f)
ans =
4*x
```

Para calcular la segunda derivada de $f(x)$:

```
>> diff (f, 2)
ans =
4
```

En el caso de la función $g(x, y) = 2x^3y$ se desea derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y . Para esto se tiene que definir las variables x, y como simbólicas

```
>> syms x y
>> g = 2* x ^3 * y;
>> g1 = diff (g, x)
g1 =
6* x ^2 * y =
> g2 = diff (g1, y)
2 =
6* x ^2
```

Nótese que si la función a derivar es función de dos o más variables, entonces la derivada que se realiza con diff es la derivada parcial con respecto a la variable indicada. Así, en la función $f(x, y)$

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

$$\text{diff}(f, x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad \text{diff}(f, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si se desea derivar la función *Bessel* de primera clase $B_j(v, z)$, predefinida en MATLAB y representada por *besselj*(*nu*, *z*)

```
>> syms nu z
>> b = besselj(nu, z);
>> db = diff (b)
db =
-besselj(nu + 1,z) + nu/z*besselj(nu, z)
```

Integración

La operación de integración indefinida está definida para una función $f(x)$ por

$$F = \text{int}(f) \longrightarrow \int f(x)dx$$

donde la nueva función F satisface

$$\text{diff}(F) = f$$

F se conoce también como la antiderivada de f y MATLAB la encontrará siempre que exista. Para una función de dos variables $f(x, y)$ se debe explícitamente indicar con respecto a qué variable se va a integrar, es decir

$$\text{int}(f, y)$$

indica que la variable de integración es y

Para las integrales definidas

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

$$\int_a^b f(x)dx \quad , \quad \int_a^b f(v)dv$$

se emplea

$$\text{int}(f, a, b), \quad \text{int}(f, v, a, b)$$

Por ejemplo, para evaluar

$$\int \text{sen}(x)dx$$

se emplea

```
>> syms x
>> int (sin (x))
ans
-cos (x)
```

y para evaluar,

$$\int_0^1 2x dx$$

se tiene

```
>> syms x
>> f = 2*x;
>> int (f, 0, 1)
ans
1
```

MATLAB permite evaluar integrales impropias, si es que éstas convergen. Por ejemplo, la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x \text{sen}x}{x} dx$$

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

se puede calcular con

```
>> syms x
>> f = (exp (-x) * sin (x))/x;
>> int (f, 0, inf)
ans
1/4* pi
```

lo que indica que la integral converge.

2.8. Gráficas

Este capítulo examina el potencial de MATLAB para graficar funciones y datos. Las características y opciones de graficado son muy variadas en MATLAB. Generan gráficas en dos y tres dimensiones hasta la posibilidad de cambiar las propiedades de ellas. Por otro lado, se identifican las gráficas y cómo se realiza cambios en ésta.

Gráfica una función en MATLAB es muy simple. Por ejemplo, para graficar $\sin(x)$ en el rango de 0 a 2π , se usa la instrucción:

```
EDU >> x = 0: pi/100 : 2*pi;
EDU >> y = sin (x);
EDU >> plot(x,y)
```

El primer renglón tiene el formato

$x =$ punto inicial: Incremento: valor final

El segundo renglón define la función que queremos graficar y el tercer renglón es la instrucción para graficar (Figura 2.9).

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

A esta figura le puede añadir título y texto en los ejes. (El símbolo π se escribe como `\pi` en MATLAB).

```
EDU >> xlabel('De 0 a 2\pi')
```

```
EDU >> ylabel('sino de x')
```

```
EDU >> title('Gráfica de la función seno','FontSize',12)
```

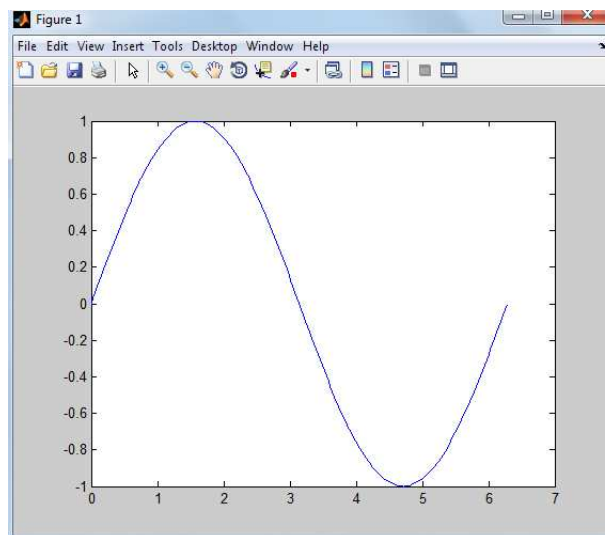


Figura 2.9

Si se desea graficar más de una curva, simplemente se define antes de la instrucción *plot*. Por ejemplo para obtener la figura 1.2 se usa

```
x = 0: pi/100:2*pi;
```

```
Y1 = sin(x);
```

```
Y2 = cos(x);
```

```
plot(x,Y1 ,x,Y2)
```

```
legend ('sin (x)' , 'cos (x)')
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

(En esta instrucción se suprime el EDU >>). El comando **legend** sirve para identificar cada curva(Figura 2.10).

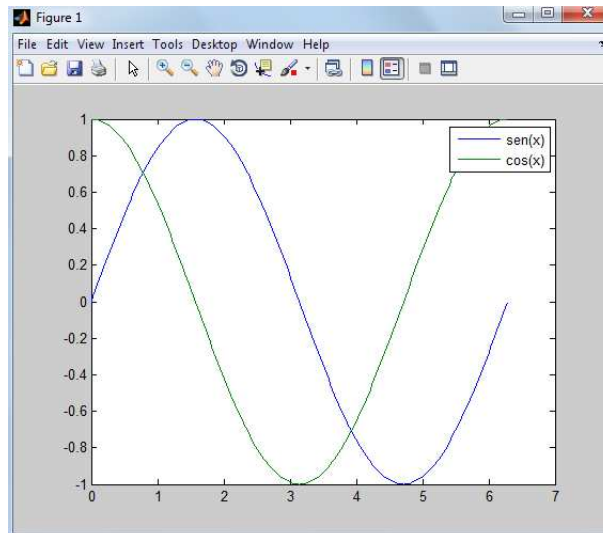


Figura 2.10

Gráficas en 2 Dimensiones

La instrucción básica para graficar es *plot (X, Y)* donde *X* es un vector de puntos y *Y* es un vector de datos y es de la misma dimensión del vector *X*. Con el uso de *plot* se abre una nueva ventana con la gráfica. El vector de puntos *X* se puede generar con la instrucción.

$$x = \text{linspace} (x1, x2, n)$$

la cual indica que se genera un vector de *n* puntos igualmente espaciados. El valor del primer punto es *x1* y el valor del último punto es *x2*. El incremento en cada punto es $(x2 - x1)/(n - 1)$. Por ejemplo,

```
>> x = linspace (0, 5, 6)
```

```
x =
```

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

```
0 1 2 3 4 5
```

Del resultado de MATLAB entrega se observa que el primer punto es 0, el último punto es 5 y existe un total de seis puntos. Estos valores de x están almacenados en un vector renglón de 6 dimensiones. Como otro ejemplo,

```
>> x = linspace (10, 15, 11)
```

```
x =
```

```
Columns 1 through 4  
10.0000 10.5000 11.0000 11.5000
```

```
Columns 5 through 8  
12.0000 12.5000 13.0000 13.5000
```

```
Columns 9 through 11  
14.0000 14.5000 15.0000
```

Ahora se observa un vector renglón de dimensión 11 cuyo valor inicial es 10 y con valor final de 15. El incremento es $(15 - 10)/(11 - 1) = 0.5$. Si se desea graficar $\sin(x)$ de 0 a 2π con una partición de 200 puntos (Figura 2.11), se usa luego

```
>> x = linspace (0, 2 * pi, 200);  
>> y = sin (x);  
>> plot (x, y)
```

con lo cual se obtiene la Figura 2.11

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

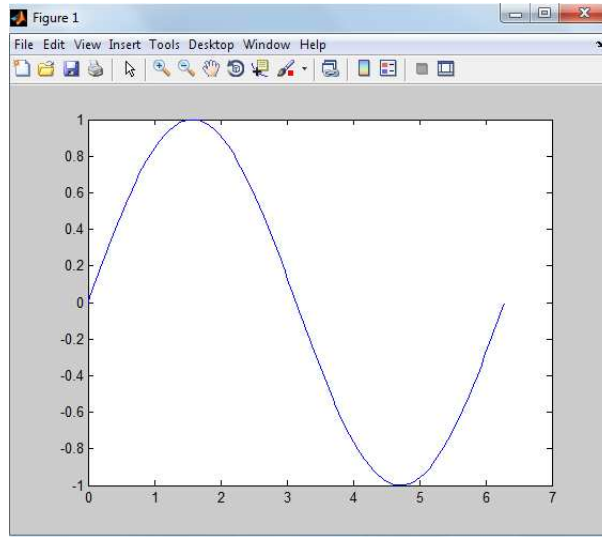


Figura 2.11

Ahora se considera la gráfica de

$$y = |x| \operatorname{sen}(x)$$

Si se define y como $y = \operatorname{abs}(x) * \sin(x)$, ya que se está tratando con vectores, se emplea

$$y = \operatorname{abs}(x) * \sin(x)$$

donde $*$ indica multiplicación de vectores término a término. Luego

```
>> x = linspace (-50, 50, 400);  
>> y = abs(x). * sin(x);  
>> plot (x, y)
```

con lo cual se obtiene

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

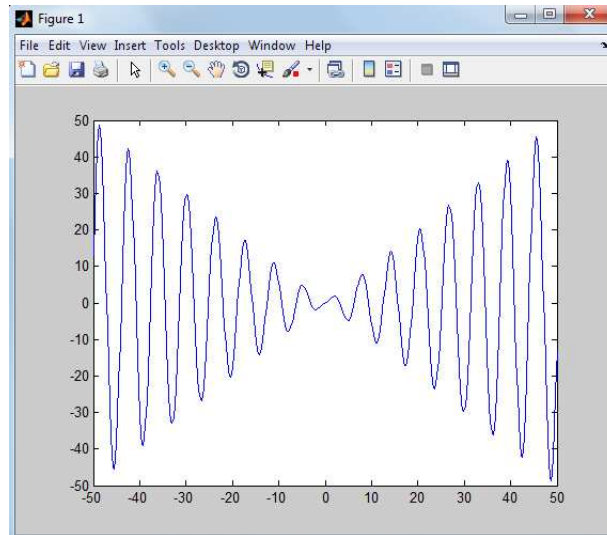


Figura 2.12

Se gráfica ahora la función $\sin x$ de 0 a 2π . Si se gráfica luego $y = \cos x$, se obtiene una nueva figura con la función $\cos x$. Si se desea obtener las dos curvas en la figura se emplea el comando *hold on*, como se ilustra a continuación

```
>> x = linspace (0, 2*pi, 100);  
>> y = sin(x);  
>> plot (x, y);  
>> hold on  
>> plot (x, cos (x))
```

con lo cual se obtiene las dos funciones en la misma Figura 2.13

Para cancelar el *hold on* se usa *hold off* (cualquier otra curva que se grafique se añadirá sobre la misma figura hasta cancelar el *hold on*)

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

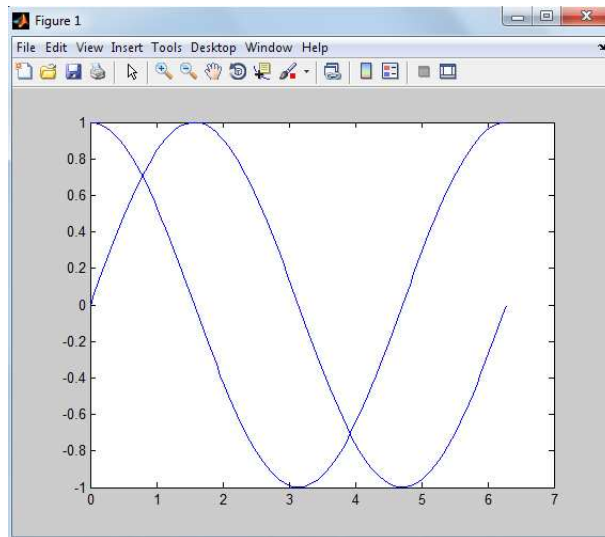


Figura 2.13

Gráficas en 3 Dimensiones

Las gráficas de 3 dimensiones en ocasiones aparece de ser más vistosa, aportan mayor información al usuario. Existen varios tipos de gráficas de este estilo, algunas de las cuales se mencionan en esta sección. Las dimensiones se definen como x, y, z . El comando para graficar una función $z = f(x, y)$ en tres (3) dimensiones depende del tipo de gráfica que se desee obtener.

El comando `plot3`

La sintaxis para este comando es

$$\text{plot3}(x, y, z, s)$$

donde x, y, z son las coordenadas de la función y s son las opciones para la gráfica. Por ejemplo, la gráfica de la espiral (Figura 2.14) dado por

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

$$x = \text{sen } t$$

$$y = \text{cos } t$$

$$z = t$$

se puede obtener con

```
>> t = linspace (0, 10 *pi, 500);  
>> plot3 (sin(t), cos(t), t),  
>> title ('Espiral tridimensional')  
>> text (0, 0, 0, 'Origen')  
>> grid
```

generando la figura.

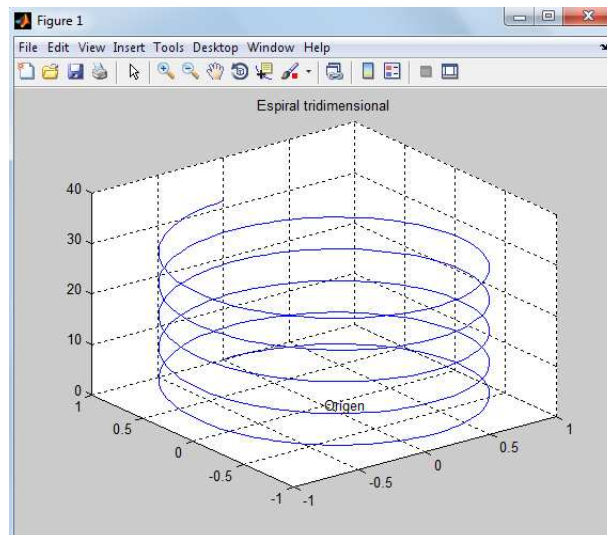


Figura 2.14

Gráficas de malla (mesh)

Las funciones que se pueden graficar son de la forma

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

$$z = f(x, y)$$

y el comando es

$$\text{mesh}(x, y, z)$$

donde se debe primero definir una rejilla (*meshgrid*) la cual genera las matrices x, y . Esto se logra con

$$[x, y] = \text{meshgrid}(x_i, y_i : \text{inc} : x_f, y_f)$$

donde (x_i, y_i) y (x_f, y_f) son los valores iniciales y finales de x, y y la variable *inc* es el incremento de x, y . Por ejemplo,

```
>> [X,Y] = meshgrid (-10:0.5:10);  
>> R = sqrt(X.^2 + Y.^2) + eps;  
>> Z = sin(R)./R;  
>> mesh (X,Y,Z)
```

generando la Figura 2.15

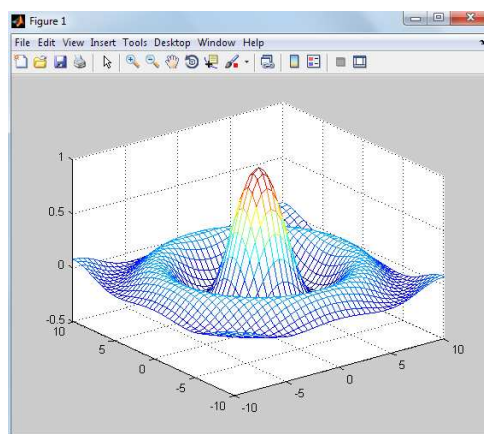


Figura 2.15

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

Gráficas de superficie (surf)

La gráfica de superficie *surf* es similar a la de malla, excepto que los rectángulos de la superficie están colorados. Los colores de los rectángulos están determinados por los valores de Z y por el mapa de colores. Por ejemplo, la figura *sphere* está definida en MATLAB. Si se desea obtener una gráfica superficial de ella, se puede graficar con

```
>> [x, y, z] = sphere (12);  
>> surf (x,y,z)  
>> title('Gráfica de la esfera')  
>> grid, xlabel('Eje x'), ylabel('Eje y'), zlabel('Eje z')
```

generando la figura 2.16.

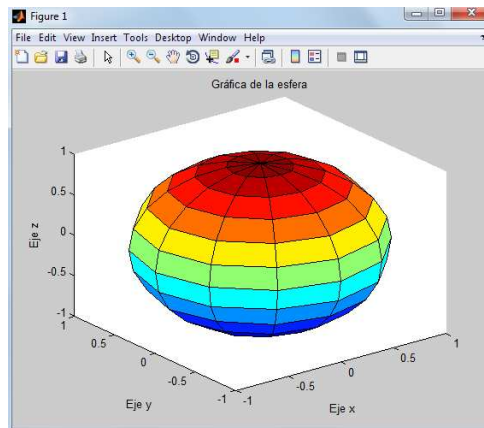


Figura 2.16

En esta gráfica se pueden quitar las líneas negras añadiendo el comando *shading flat*, generando la figura 2.17.

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

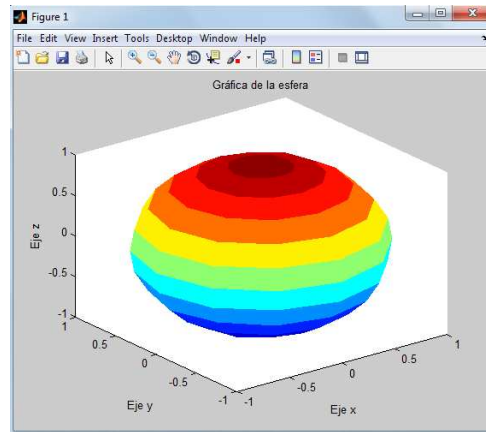


Figura 2.17

Si en lugar de *shading flat* se añade *shading interp*, se obtiene una gráfica en la que los colores se suavizan, como se muestra en la figura 2.18.

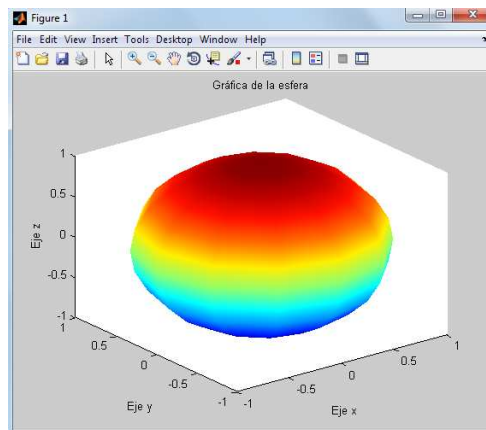


Figura 2.18

Gráficas de contorno (Contour)

Contour da una gráfica en dos dimensiones de los contornos de la gráfica. Por ejemplo si se emplea ahora la función *peaks*, predefinida en MATLAB. Por ejemplo, la función *quiver* le da líneas direccionales a una gráfica de contorno (Figura 2.19)

2. ELEMENTOS BÁSICOS DE MATLAB

```
>> [X,Y,Z] = peaks (30);  
>> [DX,DY] = gradient (Z,0.5,0.5);  
>> contour (X,Y,Z,20)  
>> hold on  
>> quiver (X, Y, DX, DY)  
>> hold off
```

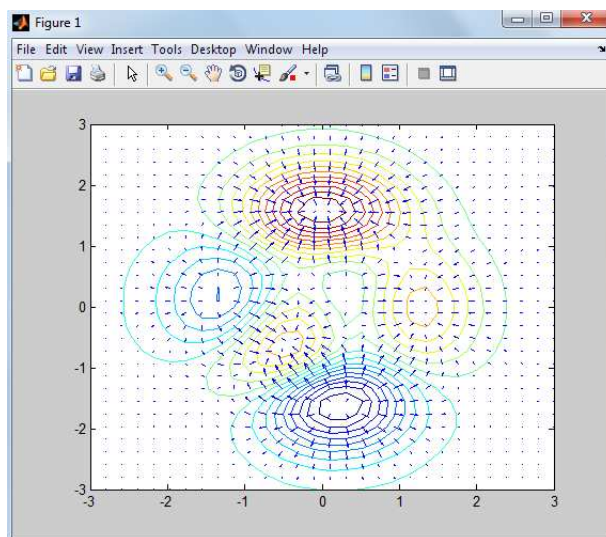


Figura 2.19

APLICACIONES

1. Evaluar la siguiente integral de línea, empleando el software MATLAB,

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y} \quad ; \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Solución

Recordemos que para evaluar una integral de línea en una función continua, sobre una curva C, se debe determinar la parametrización y luego integrar a partir de la definición (1.5) pág 28. En MATLAB se puede ver la Figura 3.1 así:

```
[X,Y,Z] = meshgrid (0:0.5:1);
U = sqrt(1);
V = sqrt (30.*X.^2);
W = sqrt (10.*Y);
quiver 3 (X,Y,Z,U,V,W,'r')
hold on
t = linspace (0 , 2 , 10);
plot 3 (t, t.^2, 3.*t.^2)
hold off
```

3. APLICACIONES

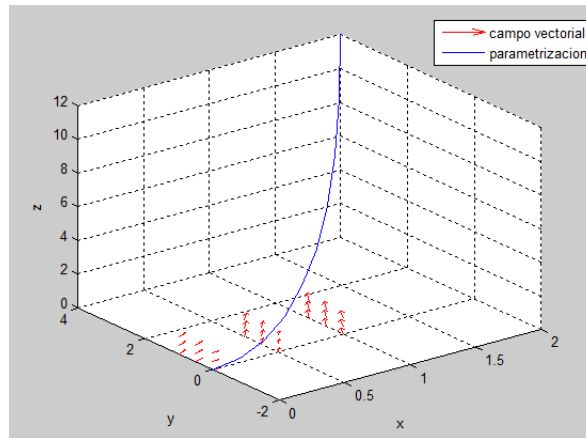


Figura 3.1

Se escoge la parametrización $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$ $0 \leq t \leq 2$, luego las derivadas de las componentes son:

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (6t)^2} = \sqrt{1 + 40t^2}$$

la integral de f sobre C es en MATLAB:

```
syms x y z t
F = [sqrt(1), sqrt(30.*x.^2), sqrt(10.*y)]; R = [t,t.^2,3.*t.^2] R = [ t, t ^2,
3 * t^2]
xt = 't'; yt = 't^2'; zt = '3*t^2';
dxt = diff(xt); dyt = diff(yt); dzt = diff(zt);
integrado = (dxt ^2 + dyt ^2 + dzt ^2) ^(1/2)
integrado =
(40*t^2 + 1)^(1/2)
longitud = int (integrado, 't', 0,2)
longitud =
161^(1/2) + (10 ^ (1/2) * asinh (4*10^(1/2)))/40
a = 161 ^ (1/2); b = 10 ^ (1/2); c = asinh (4*10^(1/2)); d = 40;
r = ( a + b * c)/d
r = 0.5727
```

3. APLICACIONES

```
% hallamos la composicion de f = F o C
f = subs (F, (x, y, z), {R(1), R(2), R(3)})
f = [1, 30^(1/2)*(t^2)^(1/2), 10^(1/2)*(t^2)^(1/2)]
p = simplify (f*jacobian(R,t)) %calculamos el integrado
p = 6*10^(1/2)*t*(t^2)^(1/2) + 2*30^(1/2)*t*(t^2)^(1/2) + 1
I = int(p,t,0,2) %calculamos la integral
I = 16*10^(1/2) + (16*30^(1/2))/3 + 2
```

Respuesta

```
r * I ans =
(644858757642815 * 10^(1/2))/70368744177664 + (644858757642815 * 30^(1/2))
/211106232532992 + 644858757642815/562949953421312)
longitud * I ans =
sqrt(161) + ( (sqrt(10) a sinh (4*sqrt(10))) / 40 ) ( (16*sqrt(10) + 16*sqrt(30)) / 5 )
```

2. Una partícula recorre la cúbica alabeada

$$r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Calcular el trabajo total efectuado si el movimiento es causado por el campo de fuerza.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x \operatorname{sen}(\pi y^2)\mathbf{k}$$

Solución

Para calcular el trabajo de la partícula elaboramos primero la Figura 3.2 en MATLAB, de esta forma obtendremos una mejor vista de la función vectorial, como del campo de fuerza.

```
[X,Y,Z] = meshgrid (0:0.3:1);
U = exp(X);
V = X.*exp (Z);
W = X.sin (pi.*Y.^2);
```

3. APLICACIONES

```
quiver 3 (X,Y,Z,U,V,W,'r')  
hold on  
t = linspace (0 , 1 , 10);  
plot 3 (t, t.^2, t.^3)  
hold off
```

Al editar en MATLAB los anteriores pasos, se tiene como resultado la siguiente Figura 3.2:

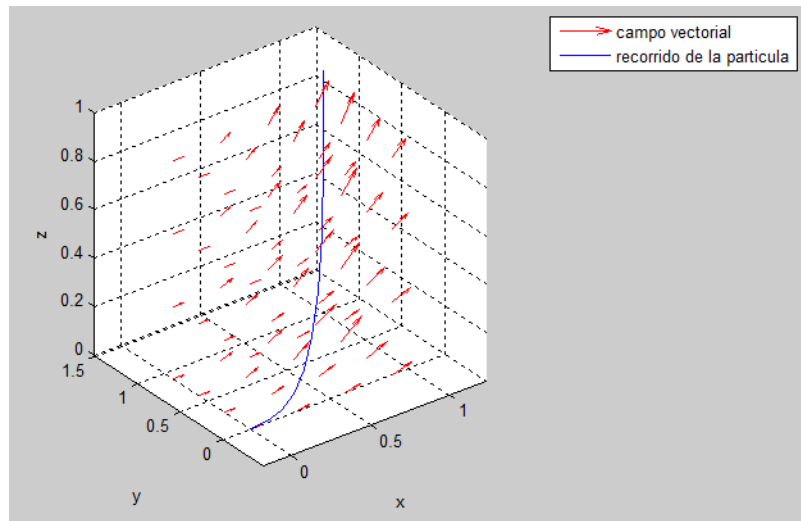


Figura 3.2

La figura ilustra, la cúbica alabeada a partir de $t = 0$ hasta $t = 1$. Como $r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, entonces

$$r'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

ya que $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, xe^z, x \text{ sen } \pi y^2 \rangle$, luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(r(t)) &= \mathbf{F}(t, t^2, t^3) \\ &= \langle e^t, te^{t^3}, t \text{ sen } \pi t^4 \rangle \end{aligned}$$

3. APLICACIONES

Como se desea encontrar el trabajo realizado por la partícula, la notación vectorial para la integral de línea, de la definición (1.6) pág 30 se tiene:

$$\begin{aligned} W &= \int_c \mathbf{F} \cdot dR \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(R(t)) \cdot R'(t) dt \end{aligned}$$

Esta Integral se edita en MATLAB, de la siguiente manera:

```
syms x y z t
F = [exp(x), x.*exp(z), x.*sin(pi.*y.^2)]; R = [t,t.^2, t.^3] R = [ t, t. ^2,
t.^3]
% hallamos la composición f = (f o R)
f = subs (F, (x, y, z), {R(1), R(2), R(3)})
f = [exp(t), t * exp(t^3), t*sin(pi*t^4)]
p = simplify(f * jacobian(R, t)) %calculamos el integrando
p = exp(t) + 3 * t^3 * sin(pi*t^4) + 2*t^2*exp(t^3)
I = int(p,t,0,1) %calculamos la integral
I =  $\frac{5}{3} e^1 + \frac{3}{2\pi} - \frac{5}{3}$ 
```

3. Integrar $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre el segmento de recta C que une el origen con el punto $(1, 1, 1)$

Solución

Recordemos que para evaluar una integral de línea en una función continua, sobre una curva C , se debe determinar la parametrización y luego integrar a partir de la definición (1.5) pág 28. En MATLAB se puede ver la Figura 3.3 así:

```
[X,Y,Z] = meshgrid (0:0.3:1);
U = X;
V = -3.*Y. ^2;
```

3. APLICACIONES

```
W = Z;  
quiver 3 (X,Y,Z,U,V,W,'r')  
hold on  
t = linspace (0 , 1 , 10);  
plot 3 (t, t, t)  
hold off
```

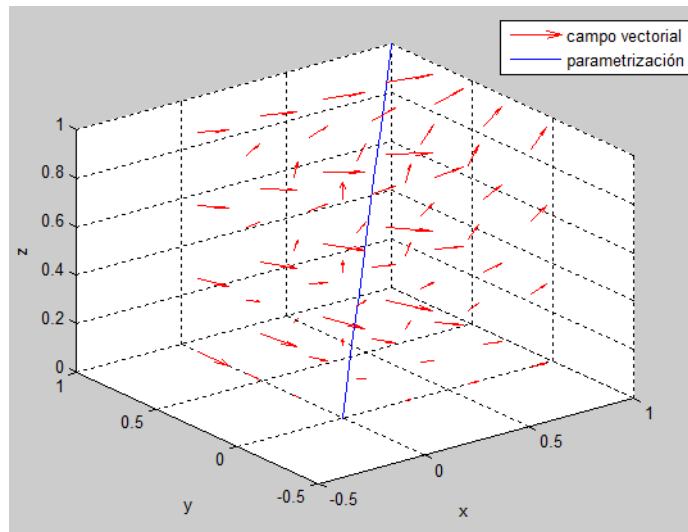


Figura 3.3

Se escoge la parametrización más sencilla: $\vec{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ $0 \leq t \leq 1$,
como las componentes tienen primera derivada continua y

$$|\vec{v}(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

nunca se anula, de modo que la parametrización es suave.

la integral de f sobre C es en MATLAB:

```
syms x y z t  
F = [x, -3*y.^2, z]; R = [ t, t, t]  
xt = 't'; yt = 't'; zt = 't';  
dxt = diff(xt); dyt = diff(yt); dzt = diff(zt);
```

3. APLICACIONES

```
integrado = (dxt ^2 + dyt ^2 + dzt ^2) ^(1/2)
integrado =
3^(1/2)
% hallamos la composición f = (f o integrado)
f = subs (F, (x, y, z), {R(1), R(2), R(3)})
f = [t, (-3) * t^2, t]
p = simplify(f * jacobian(R, t)) %calculamoselintegrado
p = -t * (3 * t - 2)
I = int(p, t, 0, 1) %calculamoslaintegral
I = 0
integrado * I
ans = 0
```

4. Demostrar que el campo $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \operatorname{sen} y - y, e^x \operatorname{cos} y - x - 2)$ es conservativo y hallar un potencial escalar.

Solución Recordemos que el Teorema (1.3) Pág 36, expresa: si las derivadas parciales de primer orden de una función $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ son iguales, la función es conservativa. En MATLAB se desarrolla de la siguiente manera:

```
syms x y
U = exp(x) * sin(y) - y;
V = exp(x) * cos(y) - x - 2;
diff(U,y) - diff(V,x)
ans = 0
% como la respuesta es nula, el campo es conservativo, ahora calculamos la función
potencial
Ix = int(U,x)
Ix = exp(x) * sin(y) - x * y
g = int(V - diff(Ix, y), y)
g = -2y
```

Por tanto $\varphi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y - xy - 2y$.

3. APLICACIONES

5. Calcular la circulación del campo $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, al rededor de la curva simple, $x^2 + 4y^2 = 4$

Solución

```
[X,Y,Z] = meshgrid (-2:0.7:2);  
U = 2 * X - Y;  
V = X + 3 * Y;  
W = 0;  
quiver 3 (X,Y,Z,U,V,W,'r')  
hold on  
x = -2: .01:2;  
y1 = sqrt (1-((x.^2)./4));  
y2 = -sqrt (1-((x.^2)./4));  
plot (x, y1)  
hold on  
plot (x,y2)  
axis equal  
hold off
```

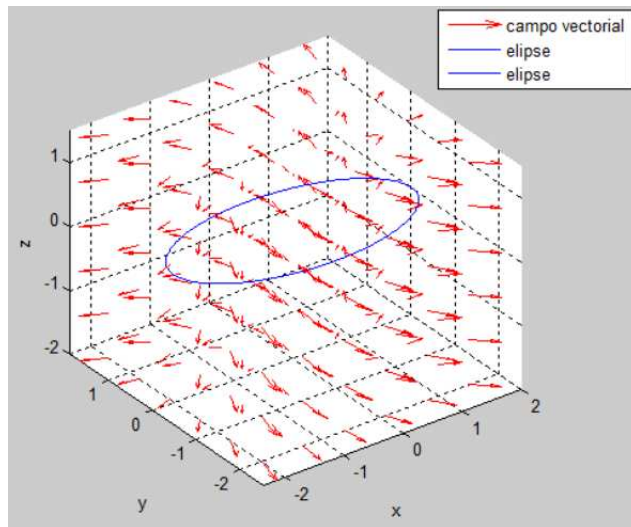


Figura 3.4

syms x y

3. APLICACIONES

```
u = 2.*x - y;
v = x + 3. * y;
diff(v,x) - diff (u,y) % calculamos el integrando
f = 2
% integrando se tiene
W = int (int(2,x,-2,2),y,-1,1)
W = 0
```

6. Hallar el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerza $\mathbf{F} = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$, que corre la circunferencia unidad C en sentido contrario a las agujas del reloj

Solución: El trabajo W , es $W = \oint (e^x - y^3)dx + (\cos y + x^3)dy$. Aplicando el Teorema de Green ecuación (1.7) pág 43.

$$W = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} (\cos y + x^3) + \frac{\partial}{\partial y} (e^x - y^3) \right) dx dy$$

```
[X,Y,Z] = meshgrid (-1:0.7:1);
U = exp(X) - Y.^3;
V = cos(Y) + X.^3 ;
W = 0;
quiver 3 (X,Y,Z,U,V,W,'r')
hold on
x = -1: .01:1;
y1 = sqrt (1-((x.^2)));
y2 = -sqrt (1-((x.^2)));
plot (x, y1)
hold on
plot (x,y2)
axis equal
hold off
```

3. APLICACIONES

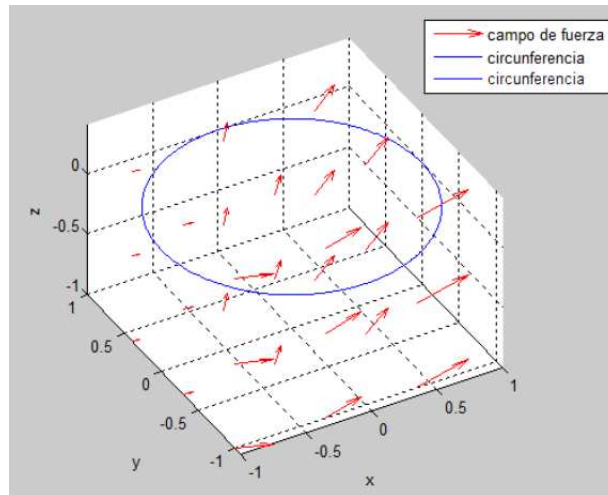


Figura 3.5

```

syms x y
u = exp(x) - y.^3;
v = cos(y) + x.^3;
diff(v,x) - diff(u,y) % calculamos el integrado
f = 3*x^2 + 3*y^2
% cambio de coordenadas polares para resolver la integral
syms r t
simplify(subs(f,(x,y),(r*cos(t),r*sin(t))))
ans = 3*r^2
W = int (int(3*r^2*r,r,0,1),t,0,2*pi)
W = 3*pi/2

```

7. Hallar la divergencia del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

```

syms x y z
F = [y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2]; J = jacobian(F)

```

3. APLICACIONES

```
J =  
[0, 2*y, 2*z]  
[2*x, 0, 2*z]  
[2*x, 2*y, 0]  
sum(diag(J))  
ans = 0  
% Como la divergencia es nula, el campo se dice solenoidal
```

8. Calcular el rotacional del siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$$

```
syms x y z  
u = x^2*y*z;  
v = x*y^2*z;  
w = x*y*z^2;  
r1 = diff(w,y) - diff(v,z) % primera componente del rotacional  
r1 = x*z^2 - x*y^2  
r2 = diff(u,z) - diff(w,x) % segunda componente del rotacional  
r2 = x^2*y - y*z^2  
r3 = diff(v,x) - diff(u,y) % tercera componente del rotacional  
r3 = y^2*z - x^2*z  
rot = [r1, r2, r3]  
rot [x*z^2 - x*y^2, x^2*y - y*z^2, y^2*z - x^2*z]  
pretty(rot)  
(xz^2 - xy^2, x^2y - yz^2, y^2z - x^2z)
```

9. Calcular

$$\int_C \left(\frac{1}{2}y^2 dx + z dy + x dz \right)$$

donde C es la curva intersección del plano $x + z = 1$ y elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, orientación en el sentido de las agujas del reloj, tal como se ve desde origen.

3. APLICACIONES

```
ellipsoid (0,0,0,1,sqrt(2)/2,1,30), hold on  
[x,y] = meshgrid(-1.5:1:1.5);  
z = 1 - x; mesh (x,y,z)  
colormap (red (6)), view ([20,20]) hold off
```

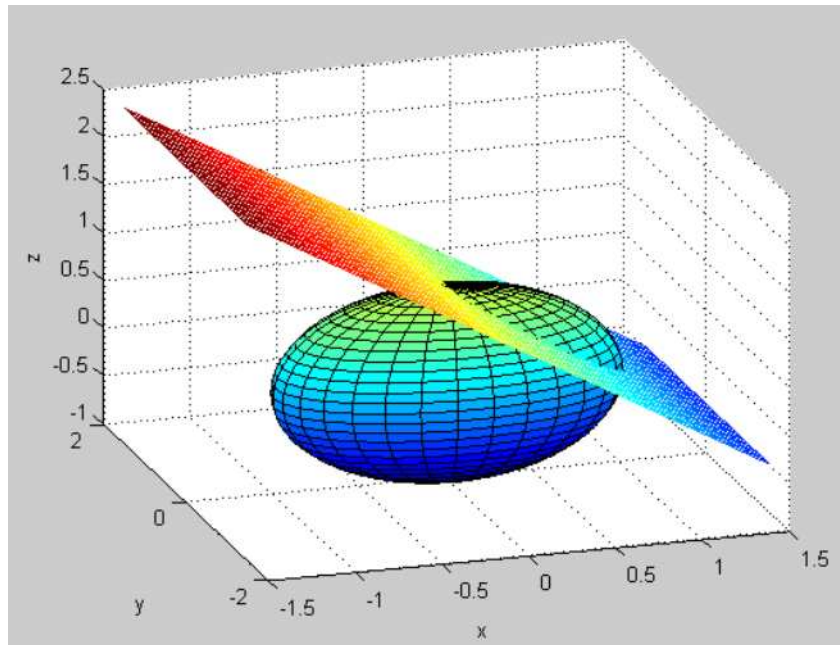


Figura 3.6

```
syms x y z  
F = [1/2*y^2,z,x];  
f = (1-x);  
u = 1/2*y^2;  
v = z;  
w = x;  
r1 = diff(w,y) - diff (v,z) % primera componente del rotacional  
r1 = -1  
r2 = diff(u,z) - diff (w,x) % segunda componente del rotacional  
r2 = -1  
r3 = diff(v,x) - diff (u,y) % tercera componente del rotacional  
r3 = -y
```

3. APLICACIONES

```
rot = [r1, r2, r3]
rot [-1, -1, -y]
% calculamos el vector normal
normN = sqrt (diff(f,x)^2 + diff(f,y)^2 + 1);
N = [-diff(f,x),-diff(f,y),1]/normN
N = [2^(1/2)/2, 0, 2^(1/2)/2]
% G es el producto escalar de rot F y N
G = simplify(rot*N'); pretty(G)
-21/2(y + 1)
2
ds = sqrt(diff(f,x)^2 + diff(f,y)^2 + 2)
ds = 2^(1/2)
% calculamos la proyección de C sobre XoY
ELIP = x^2 + 2*y^2 + z^2;
rec = simplify(subs(ELIP,{x,y,z},{x,y,1-x})) - 1
rec = (x - 1)^2 + x^2 + 2*y^2 - 1
- int(int(1 + y, y, - sqrt (x - x^2), sqrt (x - x^2), sqrt(x - x^2)), x, 0, 1)
=  $\frac{\pi}{4}$ 
```

10. Un líquido está girando en un depósito cilíndrico de radio 2, y su movimiento viene descrito por el campo de velocidades

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

Calcular la circulación de \mathbf{F} , a través del borde superior del depósito cilíndrico recorriendo en el sentido contrario a las agujas del reloj

```
cylinder (2), colormap ([0.8,0.8,0.8]), hold on
[x,y] = meshgrid (-1:.6:1); z = ones (size(x));
U = -y.*sqrt(x.^2 +y.^2);
V = x.*sqrt(x.^2 + y.^2);
W = zeros(size(x));
quiver3 (x,y,z,U,V,W), hold off
```

3. APLICACIONES

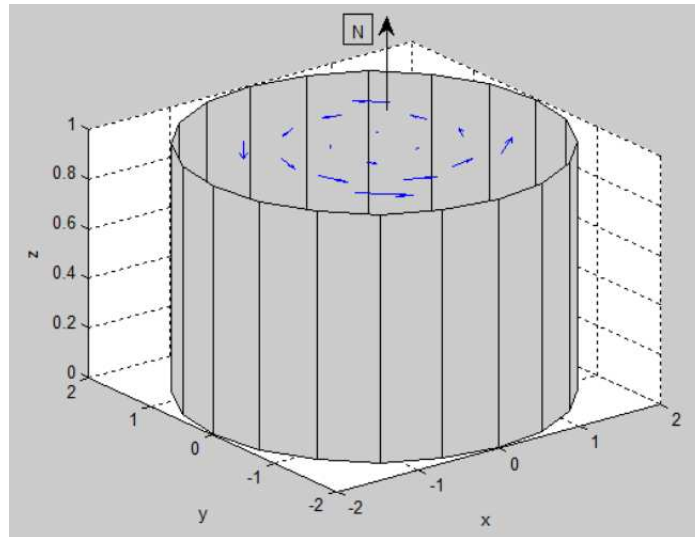


Figura 3.7

```
syms x y z
F = [-y*sqrt(x^2 + y^2), x*sqrt(x^2 + y^2), 0];
u = -y*sqrt(x^2 + y^2);
v = x*sqrt(x^2 + y^2);
w = 0;
r1 = diff(w,y) - diff(v,z) % primera componente del rotacional
r1 = 0
r2 = diff(u,z) - diff(w,x) % segunda componente del rotacional
r2 = 0
r3 = diff(v,x) - diff(u,y) % tercera componente del rotacional
r3 = 2*(x^2 + y^2)^(1/2) + x^2/(x^2 + y^2)^(1/2) + y^2/(x^2 + y^2)^(1/2)
rot = [r1, r2, r3]
rot 0, 0, 2*(x^2 + y^2)^(1/2) + x^2/(x^2 + y^2)^(1/2) + y^2/(x^2 + y^2)^(1/2)
simplify (rot)
ans = [0, 0, 3*(x^2 + y^2)^(1/2)]

syms r t
% pasamos a coordenadas polares
```

3. APLICACIONES

```
subs(rot(3),(x,y),{r*cos(t),r*sin(t)})
simplify(ans)ans = 3*(r^2)^(1/2)
int(int(3*r^2,r,0,2),t,0,2*pi)
= 16*pi
```

La solución del rotacional es $3k$. Como $k > 0$, el integrando es $3k^2$ por que hay que multiplicar por el Jacobiano. Como $N = \mathbf{k}$, se obtuvo $16 * \pi$

11. Mediante el Teorema de la divergencia, calcular el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xyz)$$

a través del cubo de vértices

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$$

Solución: Para visualizar el cubo, basta graficar tres caras de este:

```
% cara sobre XOZ
fill3 ([1 0 0 1], [0 0 0 0], [0 0 1 1], 'g'), hold on
% cara sobre YOZ
fill3 ([0 0 0 0], [0 1 1 0], [0 0 1 1], 'g')
% cara superior
fill3 ([1 1 0 0], [0 1 1 0], [1 1 1 1], 'g')
axis square, hold off
```

3. APLICACIONES

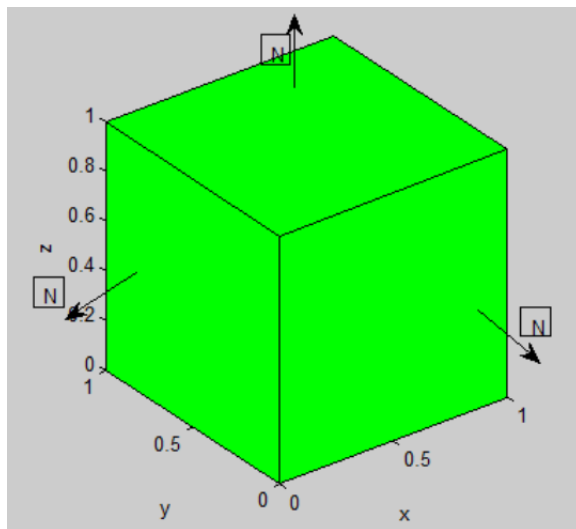


Figura 3.9

```

syms x y z
F = [x,x*y,x*y*z];
J = jacobian (F)
J =
[ 1, 0, 0]
[ y, x, 0]
[ y*z, x*z, x*y]
sum(diag(J))
ans = x + x*y + 1
int(int(int(ans,z,0,1),y,0,1),x,0,1)
= 7/4

```

12. Calcular el flujo de $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, z, x)$ a través del conjunto del primer octante cuyas caras tienen de ecuaciones $z = xy, x + y = 1$

Solución: La superficie dada (representada por S) no es cerrada, pero se puede formar con ella una superficie cerrada, si se unen con su proyección en el plano XOY (representada por S_1), esto es, al triángulo de vértices, $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$: y

3. APLICACIONES

se puede aplicar la siguiente ecuación:

$$\int \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dS = \int \int \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV - \int \int_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) dS_1$$

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in S_1, 0 \leq z \leq xy\}$$

```
[x,y] = meshgrid (0:.1:1);  
z = x.*y;  
surf (x,y,z)  
colormap ([0.4,0.4,0.4]), hold on  
t = 0:.1:1;  
patch (t, 1 - t, t.*(1 - t), 'w')  
view ([70, 14]), hold off
```

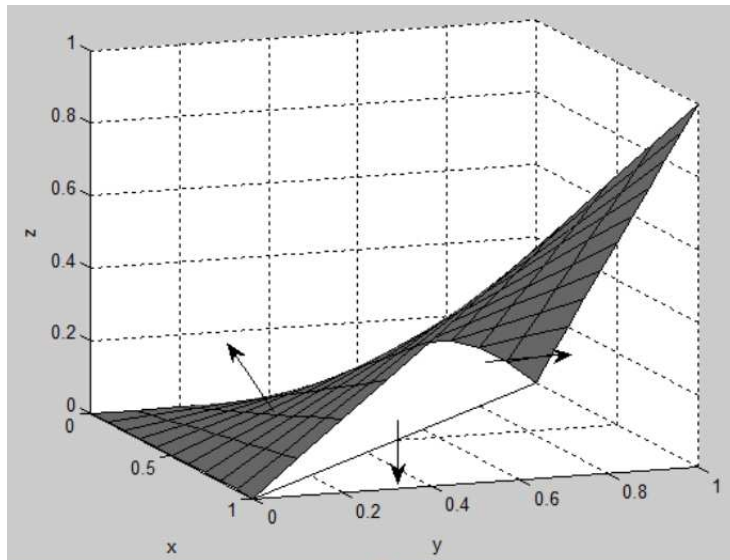


Figura 3.10

```
syms x y z  
 $\mathbf{F} = [x*y, z, x];$   
J = jacobian ( $\mathbf{F}$ )
```

3. APLICACIONES

```
J =  
[ y, x, 0]  
[ 0, 0, 1]  
[ 1, 0, 0]  
sum(diag(J))  
ans = y  
% calculamos la integral triple I1 = int(int(int(y,z,0,x*y),y,0,1-x),x,0,1)  
I1 = 1/60
```

La cara añadida está definida por $z = 0$ y $(x, y) \in S_1$; la normal en esta cara de la superficie cerrada, por ser dirigida hacia el exterior, debe ser el vector $-k$, es decir:

```
I2 = int(int(int([x*y,0,x]*[0,0,-1]',y,0,1-x),x,0,1)  
I2 = -1/6  
I1 - I2 % es el valor de la integral pedida  
=  $\frac{11}{6}$ 
```

3. APLICACIONES

Ejercicios Propuestos

Evaluación Numérica de Integrales de Línea

En los ejercicios del 1 al 2, use el software MATLAB para realizar los siguientes pasos y evaluar las integrales de línea.

- Encuentre $ds = |v(\vec{t})|dt$ para la trayectoria $r(\vec{t}) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$.
 - Expresar el integrando $f(g(t), h(t), k(t))|v(\vec{t})|$ como una función del parámetro t .
 - Evalúe $\int_C f ds$ usando la definición pag. 26.
- $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$; $r(\vec{t}) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$
 - $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$; $r(\vec{t}) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Cálculo Numérico del Trabajo

En los ejercicios del 3 y 4, use el software MATLAB para calcular el trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} sobre la trayectoria dada:

- Encuentre dr para la trayectoria $r(\vec{t}) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$.
 - Evalúe la fuerza \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria.
 - Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot dr$.
- $\mathbf{F} = xy^6\mathbf{i} + 3x(xy^5 + 2)\mathbf{j}$; $r(\vec{t}) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 - $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$; $r(\vec{t}) = -t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Cálculo de la Circulación

En los ejercicios 5 y 6, use el software MATLAB y el Teorema De Green para calcular la circulación del campo \mathbf{F} en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor de una curva cerrada simple C . Ayudese elaborando la gráfica de C .

- $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, C : la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$
- $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + 4x^2 \ln y\mathbf{j}$, C : El triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 4)$

3. APLICACIONES

En los ejercicios 7 y 8, use el software MATLAB y el Teorema de Stokes para calcular la circulación del campo \mathbf{F} alrededor de la curva C en el plano xy , sentido contrario a las manecillas del reloj, vistas desde arriba

7. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, C : la elipse $4x^2 + y^2 = 4$

8. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$, C : la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

Cálculo de Flujo

En los ejercicios 9 y 10, use el software MATLAB y el Teorema de la Divergencia para encontrar el flujo hacia afuera de \mathbf{F} alrededor de la región D

9. $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$, D : el cubo acotado por los planos $x = \pm 1$,
 $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$

10. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, D : la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

CONCLUSIONES

1. Al realizar el presente trabajo, podemos evidenciar la importancia del cálculo vectorial en áreas como la física y la ingeniería, ya que explican el comportamiento de fenómenos como circulación, fluido, trabajo de un objeto sobre una trayectoria, masa, momentos y resolver problemas de éstos tipos.
2. El programa MATLAB, como herramienta matemática, permite la solución de problemas del cálculo vectorial suministrando ayuda en los cálculos rutinarios.
3. Esperamos que el presente trabajo se convierta en un material de apoyo a los docentes y estudiantes a utilizar eficazmente el software MATLAB como una herramienta para mejorar la calidad de enseñanza en las áreas mencionadas.

ANEXOS

Demostración del Teorema de Stokes para superficies poliédricas

Consideremos S una superficie poliédrica que consta de un número finito de regiones planas como se muestra en la Figura 1.43:

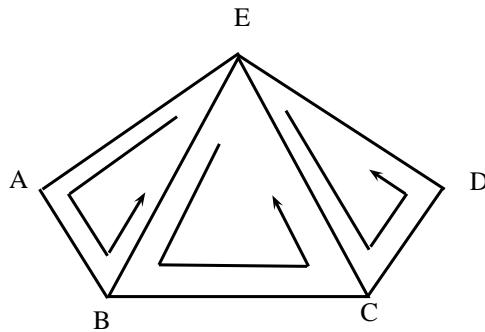


Figura 1.43

Si aplicamos el Teorema de Green a cada parte de S . Notamos que existen dos tipos de partes: Aquellas rodeadas en todos sus lados por otras partes y Aquellas que tienen una o más aristas no adyacentes a otras partes.

La frontera Δ de S consta de aquellas aristas que no son adyacentes a otras partes. Los triángulos EAB , BCE y CDE representan una parte de S , con $ABCD$ como parte de la frontera Δ . Aplicando el teorema de Green a los tres triángulos sumar los resultados para obtener

3. APLICACIONES

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE} \right) \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

Las tres integrales de línea (lado izquierdo) se combinan en una sola integral de línea alrededor del perímetro $ABCDE$, por que las integrales a lo largo de los segmentos interiores se cancelan por pares. Es decir, la integral a lo largo del segmento BE del triángulo ABE tiene signo opuesto a la integral a lo largo del mismo segmento del triángulo EBC . Lo anterior también se cumple en el segmento CE . De lo anterior se deduce o se reduce a

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Aplicando el teorema de Green a todas las partes y al sumar los resultados, se obtienen

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Interpretación de $\nabla \times \mathbf{F}$ mediante la rueda con paletas

Si $\vec{v}(x, y, z)$ es la velocidad de un fluido en movimiento cuya densidad en el punto $P(x, y, z)$ es $\delta(x, y, z)$, y sea $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$. Entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Representa la circulación del fluido alrededor de la curva cerrada C . Por el teorema de Stokes, la circulación es igual al flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de una superficie S bordeado por C :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Si fijamos un punto Q en el dominio de \mathbf{F} y una dirección \vec{u} en Q . Si existe C un círculo de radio ρ , con centro en Q , cuyo plano es normal a \vec{u} . Suponga que $\nabla \times \mathbf{F}$ es continuo en Q , el valor promedio de la componente en \vec{u} de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre el disco circular S acotado por C , se aproxima a la componente en \vec{u} de $\nabla \times \mathbf{F}$ en Q cuando $\rho \rightarrow 0$:

$$((\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{u} \, d\sigma$$

3. APLICACIONES

Reemplazando la integral de superficie por la circulación, se obtiene

$$((\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

En la ecuación anterior (el lado izquierdo) tiene su valor máximo cuando \vec{u} está en la dirección de $\nabla \times \mathbf{F}$. Cuando ρ es pequeño, el límite del lado derecho de la ecuación anterior está dado aproximadamente por

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

la cual es la circulación alrededor de C dividida entre el área del disco (densidad de circulación). Si una rueda pequeña con paletas de radio ρ se introduce en el fluido en Q , con su eje dirigido a lo largo de \vec{u} . La circulación del fluido alrededor de C afectará la tasa de giro de la rueda con paletas. La rueda girará más rápidamente cuando la integral de circulación se maximice, y por lo tanto, girará más rápidamente cuando el eje de la rueda con paletas apunte en la dirección $\nabla \times \mathbf{F}$. (Ver Figura 1.41)

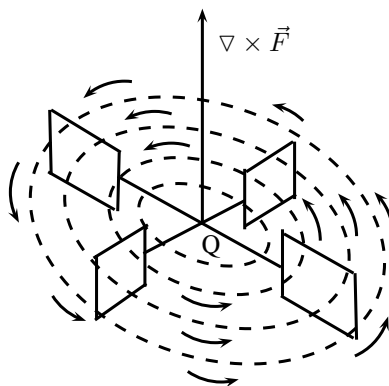


Figura 1.41

Interpretación del rotacional de \mathbf{F} mediante una rueda con paletas.

Ejemplo 18: (Relación de $\nabla \times \mathbf{F}$ con la densidad de circulación). Un fluido de densidad constante gira alrededor del eje z con velocidad $\vec{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, donde ω es una constante positiva llamada *velocidad angular* de rotación como se muestra en la Figura 1.42.

Si $\mathbf{F} = \vec{v}$, determine $\nabla \times \mathbf{F}$ y relaciónelo con la densidad de circulación.

Solución: Puesto que $\mathbf{F} = \vec{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, entonces

3. APLICACIONES

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (0 - 0) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (\omega - (-\omega)) \mathbf{k} = 2\omega \mathbf{k}\end{aligned}$$

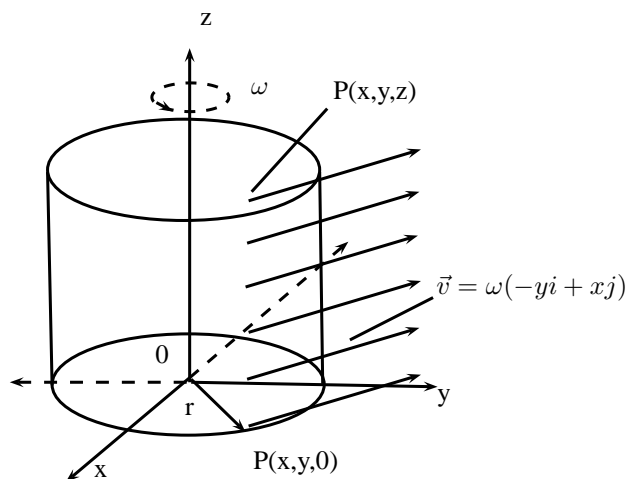


Figura 1.42

Por el teorema de Stokes, la circulación de \mathbf{F} alrededor de círculo C de radio ρ que acota a un disco S en un plano normal a $\nabla \times \mathbf{F}$, digamos el plano xy , es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S 2\omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = (2\omega)(\pi\rho^2)$$

Así, que

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. APÓSTOL, Tom M. Calculus vol. II. Editorial Reverté S.A. 1996.
2. BAEZ, David. MATLAB con aplicaciones a la ingeniería, física y finanzas, Editorial Alfaomega. 2006
3. LEITHOLD, Louis. Cálculo Con Geometría Analítica. Editorial Harla, 1992.
4. STEWART, James. Conceptos y Contextos. International Thomson Editores. 1999.
5. SUÁREZ RODRÍGUEZ, María del Carmen y VIEITES RODRÍGUEZ, Ana María. Cálculo Integral y Aplicaciones con MATLAB. Editorial Pearson Educación S.A. 2004
6. THOMAS, George B. Cálculo En Varias Variables. Editorial Person, 2006.
7. Cristian Alberto Cuellar Villanueva. Algunos Tópicos De La Matemática Para Grado 11 A Través De Matlab. Trabajo de grado (2006).