Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Solución de Problemas Aritméticos

Cindy Dahyana González Trujillo
Densi Nieto Calderón

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Solución de Problemas Aritméticos

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

Cindy Dahyana González Trujillo
2006136810
Densi Nieto Calderón
2006262901

Asesor:
Augusto Silva Silva

Neiva, Huila
2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Enero de 2012

AGRADECIMIENTOS

Finalizando esta etapa tan importante en nuestras vidas, queremos expresar un profundo agradecimiento a todos aquellos que con su ayuda, apoyo y compresión nos alentaron a lograr esta hermosa realidad. En primer lugar agradecemos a Dios por darnos el privilegio de crecer como personas. A nuestros padres, porque no existe forma alguna de retribuirles todos sus sacrificios, esfuerzos y amor, queremos que sientan que la meta alcanzada también es de ellos y que la fuerza que nos ayudó a conseguirla fue su gran apoyo. De igual manera queremos manifestar nuestros sinceros agradecimientos a los docentes de la Universidad Surcolombiana por los conocimientos compartidos y enseñados para nuestro desarrollo profesional y en especial a Augusto Silva Silva y a Ricardo Cedeño Tovar por su especial disposición y ayuda brindada.

A todos ellos infinitas gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una de las ciencias más antiguas y con muchos campos de aplicación. Sin duda durante su existencia ha experimentado un crecimiento vertiginoso planteando nuevos retos para su enseñanza y aprendizaje. Es admirable y de gran interés la formación de conceptos, la aplicación de las herramientas informáticas, el desarrollo del pensamiento en sus múltiples facetas, la solución de problemas y muchos otros aspectos que han aportado al avance de numerosas ciencias para el beneficio de la humanidad, aunque no siempre se han utilizado de la forma más adecuada.

Como se registra en el marco teórico, a lo largo de la historia desde que se ha enseñado la Matemática, se ha hecho uso de la resolución de problemas como una herramienta didáctica, teniendo en cuenta que cuando hablamos de problema hacemos referencia a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarla; la vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida, tiene que ser desconocida, sin embargo eso no quiere decir que lo que sea un problema para una persona lo tiene que ser precisamente para otra. Por esta razón este concepto es tan fundamental para la didáctica.

Una actividad de gran importancia en la enseñanza es la capacitación del hombre para la solución de problemas; ésta determina una de las conductas más inteligentes del ser humano y que más utilidad práctica tiene, ya que la propia vida obliga a resolver problemas continuamente, al enseñarla no se trata de depositar contenidos en los estudiantes como si se tratase de recipientes, sino de desarrollar capacidades por medio de algunas técnicas que les ayude en éste proceso.

Cuando se le plantea un problema a un estudiante, lo primero que hace es tratar de buscar palabras claves en el enunciado para poder identificar qué tipo de operación debe utilizar, pero de lo que no siempre se da cuenta es que, por estar concentrado en ésta búsqueda, deja de lado datos importantes que le ayudarían a encontrar la solución adecuada; es por esta causa que en el primer capítulo de éste trabajo, se da el significado de operaciones aritméticas, esencialmente de las cuatro operaciones aritméticas elementales, estableciendo relaciones entre la parte y el todo para su mejor manipulación.

En el proceso de desarrollo de habilidades para solucionar problemas es importante que los estudiantes tengan en cuenta técnicas que le faciliten dicho proceso, como:

- La técnica de la modelación.
- Las técnicas de la lectura analítica y la reformulación.
- La técnica de la determinación de problemas auxiliares.

- La técnica del tanteo inteligente.
- La técnica de la comprobación.

Todas son de gran importancia en el momento de solucionar problemas, sin embargo en este trabajo se estudiarán más detenidamente las técnicas de la lectura analítica y la reformulación y la técnica del tanteo inteligente.

Las técnicas de la lectura analítica y la reformulación son fundamentales en la solución de problemas, ya que por medio de ellas se estudia el enunciado distinguiendo claramente sus partes y componentes y además, se le puede dar un aspecto más acorde al entendimiento de la persona que se esté enfrentando al problema. En el segundo capítulo se presentan éstas técnicas y algunas formas de aplicarlas.

En el tercer capítulo se verá cómo se pueden solucionar algunos problemas por medio de un tanteo inteligente y se darán a conocer algunos requerimientos para el desarrollo de ésta habilidad tan importante.

Cabe resaltar que, aunque en cada uno de los capítulos se presentan ejemplos en los que se aplican y desarrollan las habilidades mencionadas, en el cuarto se expone un compendio de problemas aritméticos que muestran la ejercitación de las técnicas y el procedimiento generalizado.

JUSTIFICACIÓN

Las matemáticas juegan un papel importante en el curriculum escolar, al proporcionar instrumentos que permiten analizar diversas situaciones que ocurren en el mundo real. Esta utilidad queda reflejada en la solución de situaciones problemáticas, puesto que permite desarrollar en los estudiantes las habilidades sobre cuándo y cómo aplicar sus conocimientos y desarrollar su pensamiento lógico.

La enseñanza a partir de éstas situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento y toma los contenidos matemáticos, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaz; además, desarrollan en los estudiantes una actividad crítica y flexible ante el uso de las Matemáticas, despiertan la creatividad, fomentan la capacidad de análisis y de organización de la información, sin olvidar que son un puente que contribuye a la mejor comprensión de las Matemáticas abstractas y facilita la creación de modelos.

Una de las grandes dificultades que se presentan a la hora de solucionar problemas aritméticos, es que no se trabaja de modo adecuado con el significado de las operaciones aritméticas y, en consecuencia, se abusa de la búsqueda de palabras claves en los textos, logrando con esto que los estudiantes traten mediante ellas de “adivinar"qué operación u operaciones deben realizar y cometan muchos errores, unido al poco desarrollo que ésta práctica provoca.

Para aprender a solucionar problemas es necesario proporcionar a los estudiantes instrumentos, técnicas específicas y pautas generales de solución de problemas que les permitan enfrentarse a los enunciados sin miedo y con ciertas garantías de éxito.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Presentar algunas técnicas que puedan ser explicadas a los estudiantes para que aprendan a resolver problemas aritméticos, atendiendo a varios grados de dificultad.

Objetivos Específicos

- Hacer un recorrido por la historia de la Matemática para hacer ver como la solución de problemas ha hecho siempre presencia.
- Interpretar los significados prácticos de las cuatro operaciones básicas con números naturales, fundamentando matemáticamente las diferentes estructuras semánticas que pueden asumir los problemas aritméticos.
- Desarrollar las habilidades de la lectura analítica y la reformulación de problemas que enfrente el pensamiento humano a la solución de situaciones problemáticas de la vida real.
- Mostrar que la técnica del tanteo inteligente es una vía legítima y a veces la única para resolver un problema.
- Presentar algunos problemas resueltos.

MARCO TEÓRICO

A través de la historia, la Resolución de Problemas ha sido fundamental en la enseñanza de la Matemática, teniendo en cuenta que cuando se habla de problema, se hace referencia, no precisamente a los ejercicios con enunciado sino a situaciones complejas capaces de potenciar el desarrollo del pensamiento lógico, logrando gran capacidad de enfretar los retos de la ciencia y de la vida misma.

Haciendo un recorrido desde civilizaciones como la egipcia, la babilonia y la china, en la forma en que se enseñaba Matemática, se ha visto en ésta el uso de problemas matemáticos, tanto en las tablillas de barro, como en los papiros más antiguos, en los que comúnmente pueden encontrarse problemas totalmente "idealizados". Se trata de pretextos, concebidos con el ánimo de enseñar los rudimentos aritméticos elementales. Por ejemplo, en un papiro egipcio de mediados del segundo milenio antes de Cristo aparecen varios problemas destinados a la enseñanza de los jóvenes escribas. Uno de los problemas es el siguiente: "En una pirámide. El lado tiene 140 codos y la inclinación es de 5 palmos y 1 dedo por codo. ¿Cuál es la altura?. [1]

Al parecer, con éstos textos se pretendía preparar al estudiante para resolver cualquier otro problema del mismo tipo que se le presentara, pues en las soluciones, cada nuevo paso esta muy ligado a uno anterior o a algún dato del enunciado y no se justifica el procedimiento ni se da explicación alguna de la fórmula utilizada, además los datos del enunciado se presentan como cifras concretas y no como variables abstractas.

En el siglo V antes de Cristo, resolver problemas, desde el idealismo socrático, era una cuestión de "recordar". En el diálogo "Menón o de la Virtud", obra de su discípulo Platón, Sócrates ocupa un esclavo de Menón en la solución de un problema geométrico. Allí se puede observar la sutileza de Sócrates al realizarle las preguntas al esclavo induciendolo a una única respuesta y a la vez sin darle

[1] Se trata de un papiro de 34 siglos que decían había sido hallado en las ruinas de Tebas. Fue adquirido en 1858 por el anticuario escocés H.Rhind, en la ciudad egipcia de Luxor. El documento en un principio había sido un rollo de unos 5.5 metros de largo por 33 cm de ancho, pero estaba roto en dos pedazos y le faltaban algunos fragmentos, algunos de éstos aparecieron medio siglo más tarde, en los archivos de la Historic Society, de Nueva York. Habían sido obtenidos por el coleccionista Edwin Smith. El papiro de Rhind fue adquirido, luego de su muerte, por el Bristish Museum, donde se conserva en la actualidad. El rollo consiste en un manual práctico de la matemática egipcia, escrito hacia el año 1700 antes de Cristo y constituye actualmente la principal fuente de conocimientos acerca de como contaban, calculaban y median los egipcios. Fué compuesto por un escriba llamado A'h-Mosê en tiempos del rey Hicso Ekenenre Apopi, que reinó aproximadamente entre 1788 y 1580 antes de Cristo, quien lo copió "fielmente" Según se lee al comienzo del texto. El papiro de Rhind no es un tratado sino una colección de ejercicios matemáticos y ejemplos prácticos. Está escrito en Hirático, forma cursiva del jeroglífico, y contiene unos 85 problemas. Muestra el uso de fracciones, la resolución de ecuaciones simples y progresiones, la medición de áreas de triángulos, trapezoides y rectángulos, el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas, y la superficie del círculo.

opción de expresar sus ideas.

A diferencia de su maestro, Platón suponía que no es posible obtener conocimiento de las cosas ni de los fenómenos sensoriales, sino tan sólo crearse una "opinión"probable; la fuente del conocimiento está en los recuerdos del alma inmortal del hombre antes de estar en el cuerpo mortal, por esta razón resalta la forma en que Sócrates "extrae"de la mente del esclavo un conocimiento eterno e inmutable. Muchos de los logros alcanzados en esa época se reflejan hoy en día, como es el caso de la creación de la primera academia de Platón en la que se requerían ciertos conocimientos para el ingreso, lo mismo que sucede ahora con las universidades, no se pueden matricular si no cumplen algunos requisitos.

Posterior a éstos destacados matemáticos y filósofos de la antiguedad, apareció Pappus, un matemático griego del siglo III antes de Cristo, que en el séptimo libro de sus colecciones trata un tema que llama "analyomenos" que, según Polya, puede traducirse como "tesoros del análisis" o "arte de resolver problemas". Allí describe implícitamente los métodos de varios problemas geométricos, y se refiere a formas regresivas y progresivas de razonar. También afirma que Pappus reconoció en las obras de Euclides, Apolonio y Aristaeus un uso sistemático de los métodos de análisis y síntesis; y de forma particular, destaca dos tipos de análisis. Básicamente, en la metodología de resolución subyace la influencia del método analítico de Platón, la aportación de Pappus fue aplicar este último a la resolución de problemas concretos, tanto matemáticos como relacionados con la vida real.

Todos los esfuerzos de éstos grandes matemáticos por dar a conocer sus pensamientos e ideas no ha sido en vano, ya que cada uno de sus aportes fueron tenidos en cuenta como base para otros grandes descubrimientos. Es el caso del matemático siracuso Arquímides que consignó por escrito sus tratados más importantes durante los últimos años de su vida. En su obra El Método de los Teoremas Mecánicos, reveló como había obtenido varios de sus resultados, incluyendo la determinación del área de un segmento parabólico, el área y volumen de una esfera, y el volumen de un elipsoide.

La lectura del "Método" en este palimpsesto [2] revela dos características esenciales del pensamiento arquimediano:

a) La combinación de consideraciones provenientes de la Matemática y de la Física. Colocando segmentos y secciones de objetos geométricos sobre una balanza, Arquímides se las ingenió para medir áreas y volúmenes. En otras palabras, sus descubrimientos geométricos fueron hechos bajo un razonamiento físico-experimental.

b) La capacidad de ejecutar sumas infinitas. Como el tomar una esfera y calcular su volumen como la suma infinita de los círculos que la componen y obtener un valor finito. Con ésto Arquímedes se anticipó a lo que sería el concepto de límite y el Cálculo Infinitesimal dos milenios más adelante.

[2] Del griego *palin*, "otra vez" y *psao* "raspar", es un manuscrito antiguo que ha sido raspado para escribir nuevamente sobre él, lo cual fue una práctica común antes de la invención del papel; este pequeño libro de 18 x 15cm contiene 174 páginas de piel de oveja, encuadernadas con tapas de madera. Es un compendio de obras de Arquímedes, escrito en el bizancio del siglo X. Tres siglos después, algún monje raspó esta "obra pagana" para escribir textos litúrgicos, pero afortunadamente quedaron huellas de la antigua escritura en griego. Así pasó desapercibido durante unos 600 años, hasta que en 1906 el filósofo danés J. L. Heiberg, de la Universidad de Copenhague, lo encontró por referencias en la biblioteca de la iglesia del Santo Sepulcro en Constantinopla. Fotografió varias de sus páginas y luego, haciendo uso de una lupa, publicó su hallazgo en 1913. Después de la guerra turco-griega de 1922, el libro fue a parar a manos de una familia francesa, hasta que reapareció en una subasta, donde fué adquirido por un coleccionista privado en alrededor de 1.2 millones de dólares. El coleccionista se lo prestó al Walters Art Museum, con sede en Baltimore, para que ahí se realizaran las tareas de conservación y análisis necesarias, a fin de ofrecer al mundo el contenido del documento.

Arquímedes dedujo que el área de la superficie de una esfera, equivale al cuádruplo de la de su mayor círculo. Además, partiendo del hecho de que un círculo tiene la misma área que un triángulo, cuya base y altura equivalen en longitud al perímetro y al radio, respectivamente, dedujo que una esfera tiene el mismo volumen que un cono, cuya base y altura equivalen a la superficie y el radio, respectivamente.

El "Método" pone de relieve la forma en que a Arquímedes se le ocurrían sus ideas; como la mayoría de los matemáticos, obtenía primero una serie de resultados utilizando procedimientos totalmente faltos de rigor, y luego los pulía mediante una demostración adecuada.

En el Medioevo se resalta al filósofo, matemático y físico francés René Descartes, fundador del "Racionalismo". Para obtener el conocimiento él creía necesario ponerlo todo en duda, menos la cognoscibilidad, manifiesta éste principio en su máxima *"cogito, ergo sum"*, que se traduce *"pienso, luego existo"*. En lo que respecta a la resolución de problemas, la repercución más especial se centra en dos de sus tratados: *"Discours de la Méthode"* , que se traduce *"Discurso del Método"*; obra en la que explica como otras personas, siguiendo su método, podrían pensar y resolver problemas tal como él lo hizo. Y *"Regulae ad Directionem Ingenii"*, que se traduce *"Reglas para la Dirección del Espíritu"*, obra que dejó incompleta por su muerte.

En ésta última obra presenta cómo la utopía de su gran proyecto descansaba sobre un plan muy sencillo, conformado por tres fases:

I Reducir cualquier problema algebraico a la resolución de una ecuación simple.

II Reducir cualquier problema matemático a un problema algebraico.

III Reducir cualquier problema a un problema matemático.

Cada fase se discutiría de manera detallada, respectivamente, cada una en un tomo. Como puede apreciarse Descartes intentaba matemizar cualquier problema, reduciendolo paulatinamente a una expresión algebraica. Como ejemplos concretos de la segunda fase, figuran el estudio de problemas geométricos en el dominio del algebra, la Geometría Analítica creada por él, la reducción de una ecuación diferencial mediante el uso de la transformada de Laplace, entre otros.

En el primer tomo enfatiza en la necesidad de profundizar en las cuestiones más simples, en la importancia de la ejercitación, en la búsqueda de relaciones entre proposiciones simples, y en el empleo óptimo de cuatro facultades: la inteligencia, la imaginación, los sentidos y la memoria. Respecto a las facultades empleadas en el conocimiento, Descartes destaca que sólo la inteligencia puede percibir la verdad, pero no debe dejar de ayudarse por el resto de facultades señaladas.

En los tres tomos presenta reglas muy adecuadas para emprender la solución de un problema. En el primero se invita a descomponer el problema en otros más sencillos, en el segundo sugiere la construcción de una figura que sirva de ayuda para el análisis del problema y en el último hace referencia al trabajo algebraico.

Durante muchos siglos, después de la caída del Imperio Romano, la enseñanza de las ciencias no fué tan importante, ya que todo giraba alrededor de la Iglesia Católica y de sus necesidades, por tanto, la educación que se impartía en las pocas escuelas que habían, se basaba principalmente en la lectura y análisis de los textos sagrados, donde se suponía se encontraba la verdad y el conocimiento; los métodos empíricos o experimentales eran considerados estériles y hasta herejes. Sin embargo, el curriculum escolar estaba formado por lo que se llama el *cuadrivium* y el *trivium*. El primero estaba integrado por Aritmética, Música, Geometría y Astronomía; el segundo estaba conformado por Retórica, Gramática y Dialéctica. En el *cuadrivium* se hace evidente la influencia de Pitágoras y la escuela pitagórica, los cuales distinguían cuatro ramas: dos discretas que son la Aritmética (absoluta) y la Música (relativa); y dos contínuas, que son la Geometría (estática) y la Astronomía (dinámica).

Cerca del siglo XII empezó a dar un giro el mundo medieval, se emprendieron viajes en los que descubrieron los grandes aportes de la antigua Grecia en lo que respecta a la ciencia, la literatura y el arte; aunque principalmente pusieron su mayor atención a los aspectos más metafísicos como en la lógica y en las premisas cosmológicas que menos contradecían los dogmas establecidos. Ya para finales de la Edad Media y comienzos del Renacimiento empezó a deslumbrar el interés por el estudio de la Matemática y los clásicos. En las universidades europeas enseñaron a partir de entonces lo que se conoce como “matemática comercial”, el conocimiento práctico además del teórico que desde siglos antes ya se enseñaba. Italia se reconoció como uno de los mejores lugares para aprender la “matemática comercial” por ser los primeros en publicar diversos libros y tratados de Aritmética, fundamentales para el desarrollo del comercio y proporcionando herramientas importantes para los mercaderes y comerciantes de la época. En estos libros se podía aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir; además se explicaban problemas aplicando la regla de tres y ecuaciones de primer grado.

En éste fulgor del siglo XVII el matemático y filósofo G. W Leibniz creador junto con Newton del “Cálculo Infinitesimal”, que desde sus primeros trabajos demostró interés por la Matemática y sus aplicaciones en su primera obra “Dissertatio de Arte Combinatoria” presenta buena parte de sus ideas fundamentales sobre combinatoria y algunas de sus reglas básicas o método de investigación científica, que él llamó el “Arte de Inventar”. Allí propuso el desarrollo de un método sugerido por algunos matemáticos y filósofos modernos, pensando que ese sería el proceso para formar una lógica deductiva del descubrimiento, que serviría no sólo para demostrar verdades ya conocidas, sino también para descubrir nuevas.

En el siglo XVIII el tracendental matemático suizo-ruso L. Euler eminente científico, no llegó a plantear explícitamente, como Descartes, un conjunto de reglas para abordar problemas; ni siquiera, como Leibniz, se propuso hacerlo. El mérito fundamental radica en la educación heurística manifiesta en su praxis pedagógica; él prefería instruir a sus estudiantes con la pequeña satisfacción de sorprenderlos, nunca creyó haber hecho suficiente por la ciencia si no hubiese añadido a los descubrimientos la íntegra exposición de la simplicidad de la idea que lo llevó a ellos.

Otro gran matemático que no aportó ningún procedimiento ni regla heurística en particular, pero que sí se propuso recopilar y divulgar los modos de actuación de los “hombres de talento” fué B. Bolzano. En su libro Wissenschaftslebre expresa sus intenciones de asentar las reglas y los caminos seguidos por los matemáticos tras cada descubrimiento. Por su parte, N. I. Lobachevski reflejó su marcada tendencia progresista en el libro *Instrucciones para los Maestros de Matemática de los Gimnasios*, en esta obra destaca la necesidad de “ayudas visuales” en la educación, así como la importancia de tomar en consideración las peculiaridades de la edad de los estudiantes.

Algunos matemáticos no dejaron registro de cómo llegaron a sus ideas; es el ejemplo de K. F. Gauss que decía que cuando se ha terminado de construir un edificio, no se debe dejar a la vista el andamiaje, algo similar ocurrió con Newton años atrás, no dejó prueba alguna en la que mostrara como hizo para llegar a sus resultados.

En una época más cercana del siglo XX, un grupo de matemáticos influyó notablemente en la Didáctica de la Matemática, y muy especialmente en los métodos para enseñar a resolver problemas. Se trata del grupo Bourbaki, conformado por A. Weil, J. Delsarte, S. Mandelbrojt, P. Dubreil, J. Diedonné, R. de Possel, H. Cartan, C. Chevalley y J. Leray. Ellos elaboraron el lema “Abajo

Euclides” en el sentido de formalizar la Matemática. La obra enciclopédica que llevaron a cabo se introdujo profundamente en los currículos de mediados del siglo pasado.

En 1945 el insigne matemático y educador húngaro George Polya publicó un libro que rápidamente se convirtiría en un clásico: *How to solve it*. En el mismo propone una metodología en cuatro fases para resolver problemas. A cada fase le asocia una serie de preguntas y sugerencias que aplicadas adecuadamente ayudarán a resolver el problema. Las cuatro fases y las preguntas asociadas son:

Fase I: **Comprensión del problema**

- ¿Cuál es la incógnita?. ¿Cuáles son los datos?. ¿Cuál es la condición?. ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?. ¿Es insuficiente?. ¿Redundante?. ¿Contradictoria?.

Fase II: **Concepción de un plan**

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?. ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?.
- ¿Conoce un problema relacionado con éste?. ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?. Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo?. ¿Podría emplear su resultado?. ¿Podría utilizar su método?. ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar?.
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?. ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?. Refiérase a las definiciones.
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible?. ¿Un problema más general?. ¿Un problema más particular?. ¿Un problema análogo?. ¿Puede resolver una parte del problema?. Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada?. ¿En qué forma puede variar?. ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos?. ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita?. ¿Puede cambiar la incógnita?. ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?.
- ¿Ha empleado todos los datos?. ¿Ha empleado toda la condición?. ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?.

Fase III: **Ejecución del plan**

- Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?. ¿Puede demostrarlo?

Fase IV: **Visión retrospectiva**

- ¿Puede usted verificar el resultado?. ¿Puede verificar el razonamiento?.
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?. ¿Puede verlo de golpe?.
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?.

La primera fase es muy necesaria, ya que es imposible resolver un problema sin comprender el enunciado. Sin embargo, existen muchos estudiantes que se aventuran a realizar operaciones y aplicar fórmulas sin reflexionar acerca de las exigencias del planteamiento del problema, situación que implica un reto para el profesor, quien tiene que luchar contra estos vicios.

La segunda fase es un poco más profunda y delicada, ya que implica conocimientos adquiridos con enterioridad y requiere de una gran creatividad en caso tal de que no se relacione el problema con situaciones anteriores.

La tercera fase es de carácter más técnico. Si el plan está bien elaborado, si su realización es acertada y se poseen los conocimientos y la preparación necesarios, debería ser posible llevarlo a cabo sin inconvenientes. Sin embargo, se encuentran difcultades que obligan a regresar a la fase anterior para realizar cambios al plan o incluso para modificarlo por completo. Este proceso puede repetirse varias veces.

La cuarta fase es muchas veces omitida, pero Polya insiste mucho en su importancia, no solamente porque comprobar los pasos realizados y verificar su corrección puede ahorrar muchas sorpresas desagradables, sino porque esta visión puede conducir a nuevos resultados que generalicen, amplíen o fortalezcan el que se acaba de hallar.

Aún después de que se tomara en cuenta su obra en el curriculum escolar, en 1962 y 1965 Polya publica, respectivamente, los dos tomos de su obra cumbre: *Mathematical Discovery*. En éste trabajo realiza un análisis profundo sobre dos temas fundamentales: la estructura de la matemática y la naturaleza del descubrimiento matemático. Allí incluye un compendio de diversos problemas que proporcionan algunas técnicas importantes y conducen al estudiante hacia una nueva concepción de la Matemática. Además, también ofrece una descripción teórica del proceso de resolución de problemas, complementado con ejercicios que hacen que el estudiante viva la matemática, más que su lectura.

Si bien la mayoría de los matemáticos reconocen en las estrategias heurísticas de Polya los métodos que ellos mismos utilizan habitualmente, no es tan fácil para el que no tiene experiencia aplicarlas exitosamente. En otras palabras, dichas estrategias son más descriptivas que prescriptivas. Alan Schoenfeld es uno de los que más ha estudiado esta problemática. En su análisis identifica los siguientes cuatro factores relevantes para la resolución de problemas:

- **Recursos cognitivos:** Son los conocimientos matemáticos generales, tanto de conceptos y resultados como de procedimientos (algoritmos).
- **Heurística:** Es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que se está en capacidad de aplicar.
- **Control o metacognición:** Es la capacidad de utilizar lo que se sabe para lograr un objetivo.
- **Creencias:** Se refiere a aquellas creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas y que pueden afectarla favorable o desfavorablemente.

El último factor puede influir también de manera importante en el proceso de resolución de problemas. Algunas creencias comunes, sobre todo entre estudiantes de enseñanza media, son las siguientes: “todo problema se resuelve mediante alguna fórmula”, “lo importante es el resultado y no el procedimiento”, “la respuesta del libro no puede estar equivocada”. Este tipo de creencias es un obstáculo para el desempeño de cualquier persona como solucionista.

Schoenfeld elaboró también una lista de las estrategias más utilizadas:

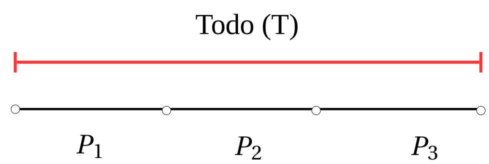
- **Análisis.**
  - Dibuje un diagrama siempre que sea posible.
  - Examine casos especiales.
    - Seleccione algunos valores especiales para ejemplificar el problema e irse familiarizando con él.
    - Examine casos límite para explorar el rango de posibilidades.
    - Si hay un parámetro entero, dele sucesivamente los valores $1, 2, \ldots, m$ y vea si emerge algún patrón inductivo.
  - Trate de simplificar el problema.
    - Explotando la existencia de simetría.
    - Usando argumentos del tipo “sin pérdida de generalidad”.
- **Exploración.**
  - Considere problemas esencialmente equivalentes.
    - Reemplazando condiciones por otras equivalentes.
    - Recombinando los elementos del problema de maneras diferentes.
    - Introduciendo elementos auxiliares.
    - Reformulando el problema:
      - Mediante un cambio de perspectiva o notación.
      - Mediante argumentos por contradicción o contraposición.
      - Asumiendo que se tiene una solución y determinando sus propiedades.
  - Considere un problema ligeramente modificado.
    - Escoja submetas (tratando de satisfacer parcialmente las condiciones).
    - Relaje una condición y luego trate de reimponerla.
    - Descomponga el dominio del problema y trabaje caso por caso.
  - Considere problemas substancialmente modificados.
    - Construya un problema análogo con menos variables.
    - Deje todas las variables fijas excepto una, para determinar su impacto.
    - Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.
- **Verificación de la solución.**
  - ¿Pasa su solución estas pruebas específicas?
    - ¿Usa todos los datos pertinentes?
    - ¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?
    - ¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?
  - ¿Pasa estas pruebas generales?
    - ¿Puede ser obtenida de manera diferente?
    - ¿Puede ser substanciada por casos especiales?
    - ¿Puede ser reducida a resultados conocidos?
    - ¿Puede utilizarse para generar algún resultado conocido?

Como hemos visto, a lo largo de la historia se ha hecho uso de la resolución de problemas como medio para la enseñanza de las Matemáticas y cada día se hace más énfasis en la necesidad de que el estudiante aprenda a solucionar problemas desde temprana edad, primordialmente para ayudar al desarrollo de su pensamiento lógico y de su creatividad.

CAPÍTULO 1

SIGNIFICADO DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Para comprender el significado de las operaciones aritméticas es necesario utilizar la relación parte – todo. Esta es una relación muy elemental, ya que reúne al conjunto completo o todo con sus subconjuntos o partes; además, si se ubica entre números o cantidades, tiene algunas propiedades como son:



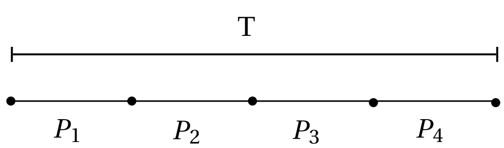
Al descomponer el todo da lugar a dos o más partes.
Al unir todas las partes obtenemos como resultado el todo.
Cada parte es menor que el todo.

Ahora bien, cuando manejemos fraccionarios es posible que suceda que la parte sea mayor que el todo, pero esto se verá más adelante. Por ahora es importante tener en cuenta que los conceptos parte y todo pueden variar, de tal forma que en una situación determinada las partes pueden operar a su vez como todo y viceversa.

Como se planteó anteriormente, el significado de las cuatro operaciones aritméticas elementales se pueden construir a partir de esta relación, la cual admite modelos lineales simples que son un excelente apoyo para la solución de problemas aritméticos.

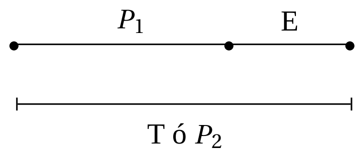
Significados de la Adición

1. Dadas las partes hallar el todo



$$T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

2. Dada una parte y el exceso de otra sobre ella, hallar la otra parte.

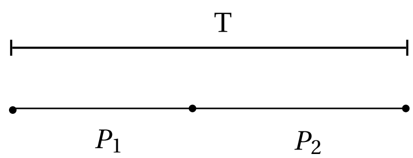


$P_2 = P_1 + \mathrm{E}$

En este caso es importante aclarar que la otra parte, es decir P_2, es igual al todo.

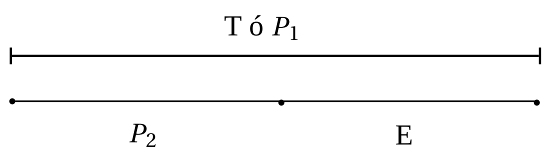
Significados de la Sustracción

1. Dado el todo y una parte, hallar la otra parte.



$\mathrm{T} - P_1 = P_2$

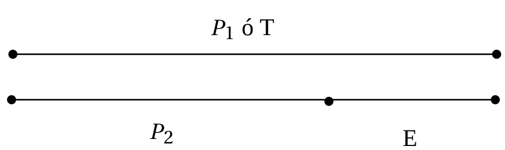
2. Hallar el exceso de una parte sobre otra.



$\mathrm{E} = P_1 - P_2$

Como en casos anteriores P_1 es igual al todo.

3. Dada una parte y su exceso sobre otra, hallar la otra.



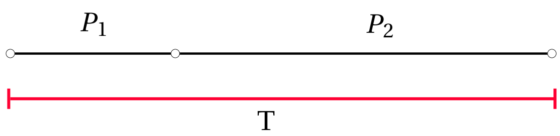
$P_2 = P_1 - \mathrm{E}$

Dada una parte P_2 y su exceso se halla P_1, que es igual al todo.
Cuando vamos a resolver problemas utilizamos la misma modelación, lo que cambia es lo que se quiere hallar.

Ejemplos:

1. Cuando Luis salió de su casa no se fijó del dinero que llevaba en su cartera, se sabe que solamente gastó $5.000 y regresó a su hogar con $12.000 . ¿Podrías decirme con cuánto dinero salió de su casa?
   Utilizando la modelación lineal se puede comprender mejor la situación planteada y apreciar la relación parte-todo que se pone de manifiesto en esta oportunidad:

Se trata del siguiente problema: Dadas las partes, hallar el todo.



T = P_1 + P_2

P_1 : Dinero gastado

P_2 : Dinero que le queda

T : Dinero que tenía antes de salir

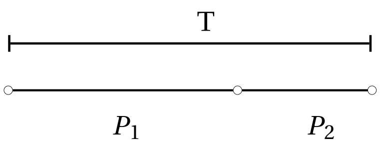
T = 5.000 + 12.000

T = 17.000

Efectivamente, Luis antes de salir de su casa tenía $17.000.

2. Margarita compró en el mercado 25 naranjas. Cuando llegó a su casa solamente tenía 18. ¿Cuántas naranjas perdió en el camino?

   Modelo: Dado el todo y una parte, hallar la otra parte.



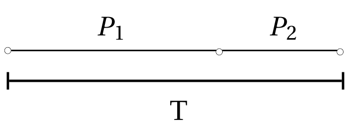
   T : Naranjas compradas
   P_1 : Naranjas que llevo a la casa
   P_2 : Naranjas que perdió en el camino?

   P_2 = T - P_1 = $25 - 18 = 7$

   Margarita compró 25 naranjas y llegó a su casa con 18, por tanto en el camino perdió 7 naranjas.

3. Mercedes tiene en su álbum 60 sellos y su prima le regala 30 sellos. ¿Cuántos sellos tiene Mercedes ahora?

   Modelo: Dadas las partes hallar el todo.



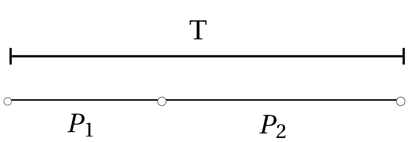
   P_1 : Sellos que tiene en el álbum
   P_2 : Sellos que le regala la prima
   T : Número de sellos que tiene Mercedes?

   T = P_1 + P_2 = $60 + 30 = 90$

   Inicialmente Mercedes tiene 60 sellos en su álbum y aumentando los 30 que le regaló la prima, tiene un total 90 sellos.

4. Leonardo tiene 90 naranjas. Si le da 30 a Lorena, ¿Cuántas le quedan a Leonardo?

   Modelo: Dado el todo y una parte, hallar la otra parte.



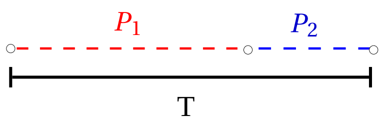
   T : Naranjas que tiene Leonardo
   P_1 : Naranjas que le regala a Lorena
   P_2 : Naranjas que le quedan a Leonardo

P_2 = T - P_1 = 90 - 30 = 60

Leonardo tiene 90 naranjas, pero le regaló 30 a Lorena, se queda con 60.

5. ¿Cuál es la longitud de una carretera si ya se han recorrido 17.862 m y aún faltan 138 m por recorrer?

   Modelo: Dadas las partes hallar el todo.



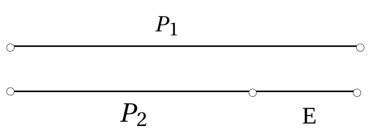
   P1 : 17.862 m recorridos
   P2 : 138 m que faltan por recorrer
   T : La longitud de la carretera

   T = P_1 + P_2 = 17.862 m + 138 m = 18.000 m

   Como ya se recorrieron 17.862 m y para llegar a su destino faltan por recorrer 138 m, lo que se concluye es que la carretera en total tiene 18.000 m.

6. En una empresa envasadora de tomates se envasaron 16.000 kg que representan 2.000 kg más que lo planificado. ¿Cuántos kilogramos se planificaron?

   Modelo: Dada una parte y su exceso sobre otra, hallar la otra.



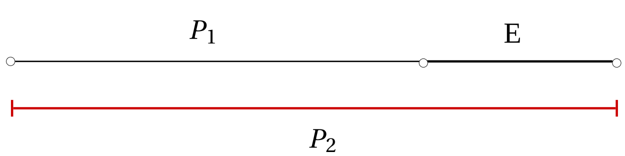
   P_1 : Tomates envasados
   E : 2.000 kg más de lo planificado
   P_2 : Toneladas planificadas ?

   P_2 = P_1 - E = 16.000 kg - 2.000 kg = 14.000 kg

   Como en la envasadora de tomates se envasaron 16.000 kg, hay un exceso de 2.000 kg, lo cual quiere decir que la cantidad planificada es de 14.000 kg.

7. Augusto tiene 5 canicas. A él le faltan 3 canicas para tener la misma cantidad que Felipe.¿Cuántas canicas tiene Felipe?

   Modelo: Dada una parte y el exceso de otra sobre ella, hallar la otra parte.



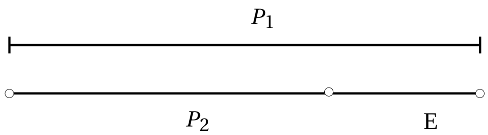
   P_1 : Canicas que tiene Augusto
   P_2 : Canicas que tiene Felipe?
   E : Canicas que le faltan a Augusto.

   P_2 = P_1 + E = 5 + 3 = 8

   Como el número de canicas que tiene Augusto es de 5 y le faltan 3 para tener la misma cantidad de Félipe, entonces Félipe cuenta con 8 canicas.

8. En un aula de quinto grado hay 12 pupitres ocupados por hombres, 15 ocupados por mujeres y 3 vacíos.¿Cuántas mujeres más que hombres hay?

   Modelo: Dadas dos partes; hallar el exceso de una sobre la otra.

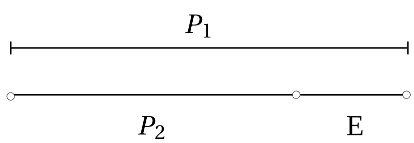
   P_1 : Pupitres ocupados por mujeres
   P_2 : Pupitres ocupados por hombres
   E : Hombres más que mujeres?

   E = P_1 - P_2 = 15 - 12 = 3

   Como se puede observar hay un exceso de 3 mujeres sobre los hombres, es decir hay 3 mujeres más que hombres.

9. En una pequeña plaza de mercado existen varias frutas en venta. En una caja hay 73 peras. A esta vasija le sobran 8 peras para tener la misma cantidad que los que contiene una cesta. ¿Cuántas peras se encuentran en la cesta?

   Modelo: Dada una parte y su exceso sobre la otra; hallar la otra parte

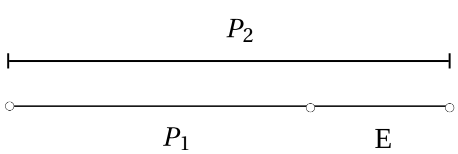
   P_1 : Peras que hay en la caja
   E : Cantidad de peras que sobran
   P_2 : Peras que se encuentran en la cesta?

   P_2 = P_1 - E = 73 - 8 = 65

   Como en la caja hay un total de 73 peras, entonces se le resta el exceso, que son 8 peras, para conocer el número que hay en la cesta, que finalmente es de 65 peras.

10. En un bus amarillo viajan 18 trabajadores. En otro bus azul viajan 2 trabajadores más que en el primero. ¿Cuántos trabajadores viajan en este último bus?

    Modelo: Dada una parte y el exceso de otra sobre ella, hallar la otra parte.

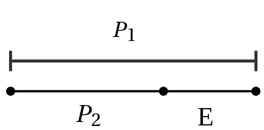
    P_1 : Trabajadores que viajan en el bus amarillo
    E : 2 más que en el bus amarillo
    P_2 : Trabajadores que viajan en el bus azul

    P_2 = P_1 + E = 18 + 2 = 20

    En el bus azul van 2 trabajadores más que en el amarillo, por tanto van 20 trabajadores.

11. Jacinto y Eduardo realizan una competencia. Jacinto camina 50 m y Eduardo 40 m. ¿Cuántos metros más camina Jacinto que Eduardo?

    Modelo: Hallar el exceso de una parte sobre la otra

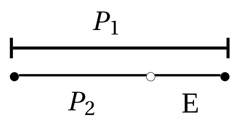
    P_1 : Jacinto camina 50 metros
    P_2 : Eduardo camina 40 metros
    E : Metros que camina Jacinto más que Eduardo

E = P_1 - P_2 = 50 - 40 = 10

Como Jacinto recorrió 50 m y Eduardo tan solo 40 m, se obtiene una diferencia de 10 m, lo cual quiere decir que Jacinto caminó 10 metros más que Eduardo.

12. Antonio tiene una caja con 130 bolas. El tiene 80 bolas más que Pedro. ¿Cuántas tiene Pedro?

Modelo: Dada una parte y su exceso sobre otra, hallar la otra.



P_1 : Bolas que tiene Antonio

E : Exceso de Antonio sobre Pedro 80 bolas

P_2 : Bolas que tiene Pedro?

P_2 = P_1 - E = 130 - 80 = 50

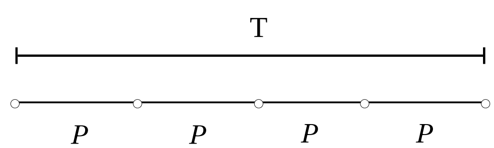
Antonio tiene un total de 130 bolas, a ellas se le quita 80 que es el exceso que él tiene sobre Pedro, quedando así 50 bolas que son las que finalmente tiene Pedro.

En el desarrollo de los problemas 10, 11 y 12 puede notarse el uso de la palabra más; sin embargo, el primero de ellos es de adición y los dos últimos de sustracción. Por ello es necesario, para la comprensión, buscar los significados y no limitarse a las posibles palabras claves, ya que esto puede conducir a errores.

Significados de la Multiplicación

1. Reunión de partes iguales para hallar el todo (Suma de sumandos iguales)

$$P + P + P + P = 4 \cdot P = T$$



2. Dada la cantidad de partes iguales n y el contenido de cada parte a, hallar el todo.

$$n \cdot a = T$$

3. Dada a, hallar múltiplos de un número.

$$\{a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots\}$$

Significados de la División

1. Repartir en partes iguales el todo. (Hallar el contenido de cada parte)

$$\frac{T}{n} = a$$

2. Dado el todo y el contenido de cada parte, hallar la cantidad de partes (Cuántas veces está contenida en el todo).

$$\frac{T}{a} = n$$

   n : Número de partes.
   a : Contenido de cada parte.

3. Hallar una parte alícuota (La parte alícuota es la que se obtiene de dividir algo en un cierto número de partes iguales).

Ejemplos:

1. Un camión debe dejar 40 cajas de limones en cada escuela primaria. Después de haber visitado 8 escuelas, quedó totalmente vacío. ¿Cuántas cajas de limones llevaba al inicio el camión?

   Modelo: Reunión de partes iguales para hallar el todo.

   T: ?
   n: 8
   a: 40

   $$T = n \cdot a = 8 \cdot p = 8 \cdot 40 = 320$$

   40 es un sumando que se repite ocho veces, así que
   $T = 40 + 40 + 40 + 40 + 40 + 40 + 40 + 40 = 8 \cdot 40 = 320$

   El camión al visitar las 8 escuelas y dejar en cada una de ellas 40 cajas de limones queda vacío, por lo tanto al inicio llevaba 320 cajas.

2. En el aula Rosa, Juanito y Camilo tienen 8 años cada uno. ¿cuántos años tienen en total?

   Modelo: Reunión de partes iguales para hallar el todo

   p: Años de cada uno. Cantidad de veces que se repite 3

   $$T = 3 \cdot p = 3 \cdot 8 = 24, \text{ que equivale a } 8 + 8 + 8 = 24$$

   Rosa, Juanito y Camilo tienen 8 años, la misma edad, lo cual quiere decir que al sumar sus edades se obtiene un total de 24 años.

3. ¿Cuántas mesas hay en una biblioteca que tiene 5 salas de lectura con 6 mesas en cada una?

   Modelo: Dada la cantidad de partes iguales y el contenido de cada parte; hallar el todo.

   n: Cantidad de salas
   a: Número de mesas
   T: Total de mesas que hay en la biblioteca

$T = n \cdot a = 5 \cdot 6 = 30$

Teniendo en cuenta que en la biblioteca hay 5 salas y en cada una hay 6 mesas, entonces en la biblioteca hay 30 mesas en total.

4. Lorena tiene 2 floreros. Ella colocó 5 flores en cada uno. ¿Cuántas flores colocó Lorena?

   Modelo: Dada la cantidad de partes iguales y el contenido de cada parte; hallar el todo.

   n: Cantidad de floreros
   a: Número de flores en cada florero
   T: Número de flores que colocó Lorena

   $$T = n \cdot a = 2 \cdot 5 = 10$$

   $$\boxed{\quad 5 \quad}\boxed{\quad 5 \quad}$$

   Como son 2 floreros y en cada uno de ellos hay 5 flores, se puede concluir que en total Lorena tiene 10 flores.

5. Chicho techó cuatro chozas. Empleó veintiocho planchas. ¿Cuántas planchas utilizó para techar cada choza si cada choza tenía la misma cantidad de planchas?.

   Modelo: Repartir en partes iguales el todo. Hallar el contenido de cada parte.

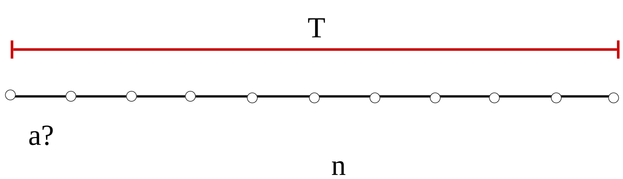
   T: Número de planchas
   n: Chozas que techó
   a: Planchas que utilizó para techar cada choza?

   $a = \dfrac{T}{n} = \dfrac{28}{4} = 7$

   Chico al techar las cuatro chozas, utilizó 7 planchas para cada una.

6. A una fiesta fueron invitados 10 niños. Se prepararon 20 lápices para repartir por igual entre los niños. ¿Cuántos lápices recibió cada uno?

   Modelo: Repartir en partes iguales el todo.



Repartir en partes iguales el todo (hallar el contenido de cada parte).

20 : 10 = 2

   T: Lápices que se preparan para repartir
   n: Niños invitados a la fiesta
   a: Número de lápices que recibe cada niño

   $a = \dfrac{T}{n} = \dfrac{20}{10} = 2$

   Como se prepararon 20 lápices para 10 niños, cada uno de ellos recibe 2 lápices.

7. A Laura se le encargaron entradas para asistir al teatro. Ella recibe \$18.000. Una entrada cuesta \$ 2.000. ¿Cuántas entradas pudo comprar Laura?

   Ahora conocemos el todo que son \$18.000 y el contenido de cada parte \$2.000 y se debe hallar el número de partes iguales.

   Modelo: Dado el todo y el contenido de cada parte, hallar la cantidad de partes iguales.

   T: Lo que recibe Laura para las entradas al teatro
   a: Costo de cada entrada
   n: Número de entradas que puede comprar Laura

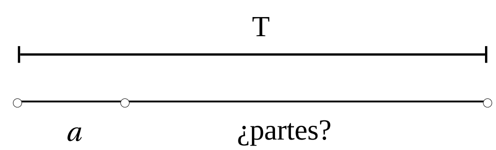
   $$n = \frac{T}{a} = \frac{18000}{2000} = 9$$

   Laura tiene \$18.000 para comprar entradas al teatro, como cada una cuesta \$2.000, entonces podrá comprar 9.

8. Se tienen 20 cuadernos y se le quiere dar 2 a cada niño. ¿Para cuántos niños alcanzan?

   Modelo: Dado el todo y el contenido de cada parte, hallar la cantidad de partes iguales.

   T: Número de cuadernos
   a: Número de cuadernos para cada niño
   n: Número de niños que reciben los cuadernos



   $$n = \frac{T}{a} = \frac{20}{2} = 10$$

   En total hay 20 cuadernos, 2 para cada niño, esto quiere decir, los cuadernos alcanzan para 10 niños.

9. Dulce María y Blas son hermanos. Ella tiene 8 años y él tiene el triplo. ¿Qué edad tiene Blas?

   Modelo: Dada la cantidad de partes iguales y el contenido de cada parte, hallar el todo.

   n: El triplo de María
   a: Edad de María
   T: Edad de Blas

   Aquí se conoce la cantidad de partes iguales que es 3 y el contenido de cada parte (que es ocho años) y se debe hallar el todo (que es la edad de Blas); es decir que se debe calcular el producto, así:

   $$T = n \cdot a = 3 \cdot 8 = 24$$

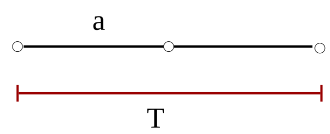
   Como Dulce María tiene 8 años, y Blas es 3 veces mayor, entonces la edad de él es 24 años.

10. En un almacén hay 10 máquinas. En otro almacén hay el doble. ¿Cuántas máquinas hay en el segundo?

    Modelo: Hallar el doble.

    T: Número de máquinas en el segundo almacén
    n: 2
    a: Número de máquinas en el primer almacén

    $T = n \cdot a = 2 \cdot 10 = 20$

    Hallar un múltiplo:

    2 . 10 = 20

    Sí en el primer almacén hay 10 máquinas y en el segundo hay dos veces la misma cantidad, entonces en el segundo almacén hay 20 máquinas.

11. Marcela está leyendo un libro de cuentos que tiene 80 páginas. Ella ya leyó la décima parte. ¿Cuántas páginas ha leído?

    Modelo: Hallar una parte alícuota. Se conoce el todo (80 páginas que tiene el libro), la cantidad de partes iguales y debo hallar el contenido de cada parte.

    T: Número de páginas que tiene el cuento
    n: Décima parte; 10
    a: Páginas que ha leído

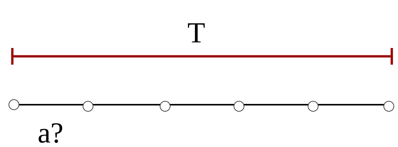
    $$a = \frac{T}{n} = \frac{80}{10} = 8$$

    La décima parte de las 80 hojas que tiene el libro, me indican que Marcela tan solo ha leído 8 páginas.

12. En una competencia de geometría deben resolverse 10 ejercicios. Si falta por resolver la quinta parte de ellos. ¿Cuántos faltan por resolver?

    Modelo: Hallar una parte alícuota (quinta parte)

    T: Número de ejercicios
    n: Quinta parte
    a: Cantidad de ejercicios que faltan por resolver

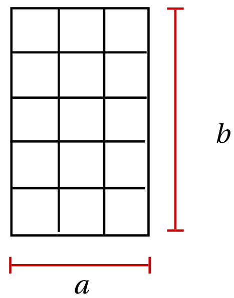
    

    $$a = \frac{T}{n} = \frac{10}{5} = 2$$

    De los 10 ejercicios de geometría falta por resolver 2 ejercicios, ya que esto equivale a la quinta parte.

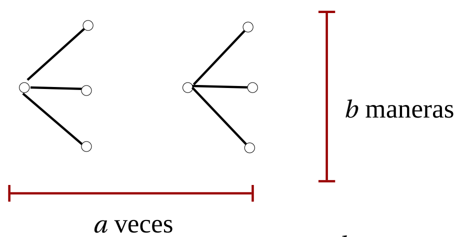
Otros significados de la Multiplicación y la División

1. Significado de área. Dado el largo y el ancho en un rectángulo, hallar el área.



$$a \cdot b = A$$

2. Conteo: Diferentes maneras de hacer algo.



Esta es una
nueva manera de representar
la operación mediante
diagramas de árbol o ramificados

$a \cdot b$ maneras

Maneras

$$F = a \cdot b$$

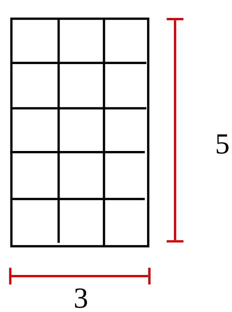
Maneras

Formas

3. Restas sucesivas. Dados la cantidad de elementos que tiene un rectángulo, y los que tiene en uno de sus lados. Hallar la cantidad de elementos que tiene en el otro lado.

Ejemplos:

1. En una escuela primaria se quiere sembrar pinos, de manera que formen un rectángulo. Por el espacio disponible solamente se pueden sembrar 5 pinos a lo largo y 3 pinos a lo ancho, a un metro de separación entre ellos. ¿Cuántos pinos se podrán sembrar en este terreno?



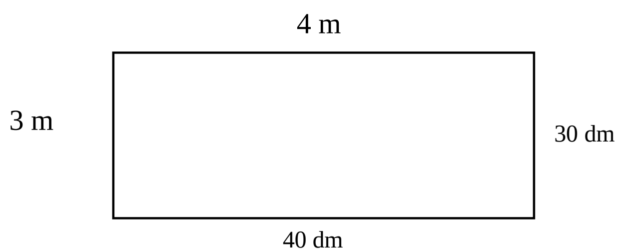
Modelo: Significado de Área.

a: 3 pinos
b: 5 pinos
A: Número de pinos que se pueden sembrar.

$A = a \cdot b = 3 \cdot 5 = 15$

Como el terreno dado tiene un largo y un ancho, esto me genera el área que equivale a los 15 pinos que se pueden sembrar.

2. ¿Cuántos mosaicos de 1 dm^2 se necesitan para cubrir un piso rectangular cuyas dimensiones son 3 m de largo y 4m de ancho?



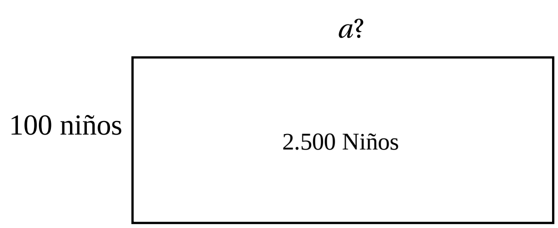
Modelo: Significado de Área

a: 4 m = 40 dm
b: 3 m = 30 dm
A: Mosaicos de 1 dm^2 para cubrir el piso.

$A = a \cdot b = 40 \text{ dm} \cdot 30 \text{ dm} = 1200 \text{ dm}^2$

Se obtiene 12 m^2, pero como piden dm^2, entonces se necesitan 1.200 dm^2, que corresponde al número de mosaicos de 1 dm^2 necesarios para cubrir el piso rectangular.

3. En un desfile participaron 2.500 niños de una escuela primaria, formando un bloque rectangular de 100 niños a lo largo. ¿Cuántos niños desfilaron a lo ancho?



Modelo: Cálculo de áreas
A: Los 2.500 niños de la escuela primaria
b: 100 niños ubicados a lo largo
a: Número de niños que desfilaron a lo ancho

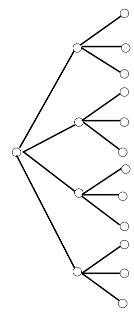
$$a = \frac{A}{b} = \frac{2500}{100} = 25$$

Se tiene el área que equivale a 2.500 niños, al formar el bloque rectangular de 100 niños a lo largo, a lo ancho se tiene 25 niños.

4. Tengo 4 blusas y 3 chaquetas.¿Cuántas combinaciones diferentes puedo formar con ellas?

   Modelo: Conteo : Diferentes formas de vestirse

   F: Posibles combinaciones
   a: 4 blusas
   b: 3 chaquetas



Problema de conteo

$4 \cdot 3 = 12$

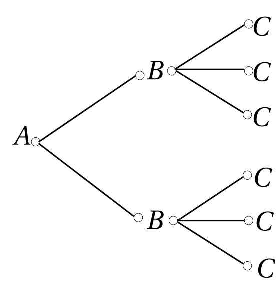
   $F = a \cdot b = 4 \cdot 3 = 12$

   Al tener 4 blusas y 3 chaquetas, se puede hacer 12 combinaciones diferentes.

5. Para ir de una ciudad A a otra B existen dos carreteras distintas mientras que para ir de la ciudad B a otra C hay tres carreteras diferentes. ¿De cuántas formas distintas pudieras tú viajar de la ciudad A a la C, pasando por B?

   Modelo: Conteo

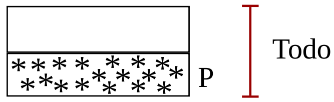
   F: Distintas formas para viajar de la ciudad A a la C, pasando por B
   a: Dos carreteras para ir de A a B
   b: Tres carreteras para ir de B a C



   Hay seis formas distintas para viajar de A a C como se puede apreciar en el diagrama anterior.

   $F = a \cdot b = 2 \cdot 3 = 6$

Operaciones con fracciones



Todo: T
Parte: P
La fracción: $\dfrac{a}{b}$

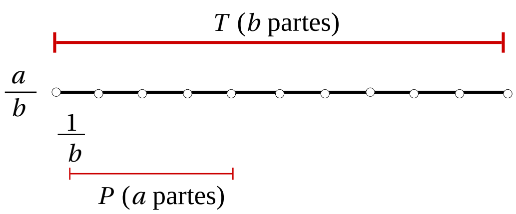
La fracción es la razón entre la parte y el todo:

$$\frac{a}{b} = \frac{P}{T}$$

$\dfrac{a}{b}$ significa que el todo está dividido en b partes iguales (b partes alícuotas) y en la parte considerada caben a partes alícuotas (o se toman a partes de ese tipo).

<u>Problemas que se presentan</u>

T	P	a/b		
√	√	?	$\longrightarrow$	$\frac{a}{b} = \frac{P}{T}$
√	?	√	$\longrightarrow$	$P = \frac{a}{b} \cdot T$
?	√	√	$\longrightarrow$	$T = \dfrac{P}{\frac{a}{b}}$



La parte considerada es a veces

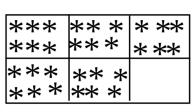
$$\frac{1}{b}$$

(en la parte considerada caben a partes alícuotas)

- La mamá de Katerine hizo un pastel:

a) ¿En cuántas partes iguales debe dividirlo para obtener sextos? En 6 partes iguales.

b) Si colocó en un plato, 5 de las partes iguales en que dividió el pastel, ¿Qué fracción del pastel colocó en el plato?

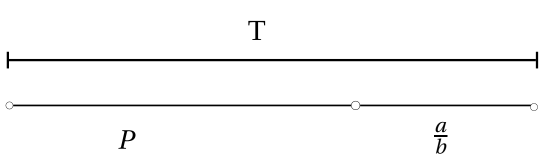


$5 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ Significado de la fracción

Nuevos significados de la multiplicación y la división:

Multiplicación

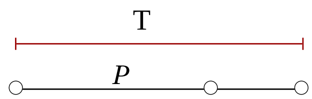
1. Se conoce el todo y la fracción y se quiere hallar la parte.



$$\mathrm{P} = \frac{a}{b} \cdot T = \frac{a \cdot T}{b}$$

División

1. Se conoce la parte y el todo y se quiere hallar la fracción.



$$\frac{P}{T} = \frac{a}{b}$$

2. Se conoce la parte y la fracción y se quiere hallar el todo.

$$T = \frac{P}{a} \cdot b$$

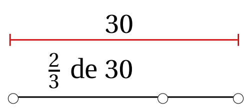
b veces P entre a

En los dos casos si $\frac{a}{b} > 1$, la parte es mayor que el todo.

Ejemplos

1. Claudia asistió a la universidad $\frac{2}{3}$ de los 30 días del mes de mayo. ¿Cuántos días fue a la universidad en ese mes?

   Modelo: Dada la fracción y el todo, hallar la parte.



   T: Los 30 días del mes de mayo.
   $\frac{a}{b}$: $\frac{2}{3}$
   P: Días que fue a la universidad en el mes de mayo

   $\text{P} = \frac{a}{b} \,.\, \text{T} = \frac{2 \cdot 30}{3} = \frac{60}{3} = 20$

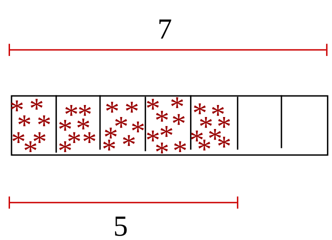
   Se puede apreciar que se han tomado 2 veces una parte alícuota del todo (la tercera parte) o también que se han tomado $\frac{2}{3}$ veces el todo.

   Claudia en el mes de mayo asistió a la universidad 20 días lo cual quiere decir que faltó 10 días a clase.

2. ¿Qué parte de los 7 días de la semana son los 5 días que los niños asisten a la escuela?

   Modelo: Dada la parte y el todo hallar la fracción.

   T: Los 7 días de la semana
   P: 5 días
   $\frac{a}{b}$: ?
   $\frac{P}{T} = \frac{5}{7}$



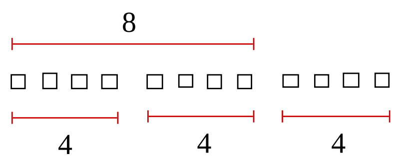
   $\frac{5}{7}$ de la semana

La semana tiene 7 días, y solo 5 de estos se asiste a la escuela, lo cual quiere decir que la parte que los niños asisten a clase es $\frac{5}{7}$ de la semana.

3. El equipo de fútbol de la Universidad Surcolombia ganó 8 de los juegos celebrados, lo que representa las dos terceras partes de ellos. ¿Cuántos juegos se celebraron?

   Modelo: Dada la parte y la fracción hallar el todo.

   T: Número de juegos que se celebraron
   P: Juegos ganados
   $\frac{a}{b}$: $\frac{2}{3}$
   $T = \frac{P}{\frac{a}{b}} = \frac{8}{\frac{2}{3}} = 12$

   $(8 : 2) \,.\, 3 = 12$

   $8 : \frac{2}{3} = 12$

   Se puede observar que se han tomado 3 veces una parte alícuota de la parte (la mitad) o también que se ha repartido la parte en $\frac{2}{3}$ partes iguales.

   La universidad Surcolombiana efectivamente celebró 12 juegos.

4. En una fabrica de vidrio se logró producir $\frac{5}{4}$ de lo previsto en el plan del mes. Si la producción era de 200 t, ¿Cuánto se produjo?

   Modelo: Dada la fracción y el todo hallar la parte.

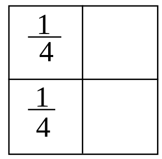
   $\frac{a}{b}$: $\frac{5}{4}$
   T: 200 t
   P: Producción
   $P = \frac{a}{b} \cdot T = \frac{5}{4} \cdot 200t = 250t$

   En la fabrica de vidrio se logró producir 250 t.

   El anterior es un problema donde resulta que lo que se considera parte es mayor que el todo.

Igualdad de fracciones y proporciones

Las fracciones iguales o equivalentes representan la misma parte de un todo.

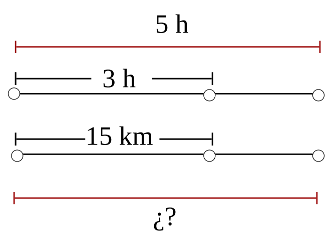


$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Esta relación entre las fracciones permite establecer relaciones entre parte y todo de cantidades de magnitud diferentes cuando estas representan fracciones iguales.

Ejemplos

1. Un hombre recorre 15 km en 3 h. ¿Cuántos kilómetros recorre en 5 h?



$$\frac{3}{5} = \frac{15}{x}$$
$$x = 25$$

(igualdad de fracciones)

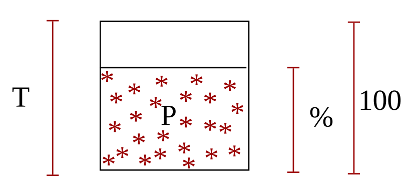
15 km equivale a 3 h

5 km equivale a 1 h

25 km equivale a 5 h

Observemos que la fracción que representa la parte del camino recorrido es igual a la que representa el tiempo transcurrido (esto sucede porque las magnitudes son directamente proporcionales).

A partir de estas mismas ideas se puede trabajar el tanto por ciento (el todo se considera dividido en 100 partes iguales), o bien tomando como referencia los significados de las operaciones de multiplicar y dividir con fracciones (problemas típicos) o por la idea de las proporciones. En este último caso se tiene que la razón entre la parte y el todo se expresa en centésimas y la cantidad de centésimas es el tanto por ciento. Tenemos que



$$\frac{P}{T} = \frac{\%}{100}$$

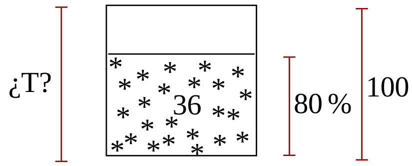
2. El examen de Cálculo lo aprobaron 36 alumnos de décimo grado del colegio San Francisco de Asís. Estos representan el 80 por ciento de los evaluados. ¿Cuántos alumnos evaluaron?

   Modelo: Se conoce la fracción y la parte, y se quiere hallar el todo.

   T: Número de alumnos que evaluaron
   P: 36 alumnos de décimo

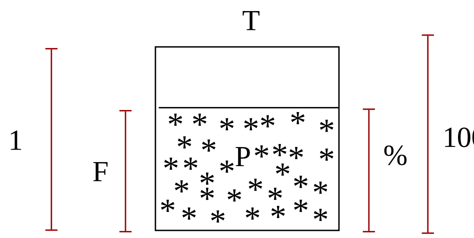
$\frac{a}{b} : \frac{80}{100}$

Puesto que $T = \frac{b}{a}.P$, entonces $T = \frac{5}{4} \cdot 36 = \frac{180}{4} = 45$



Se evaluaron 45 alumnos

Se pueden resumir todas las relaciones entre la parte, el todo, la fracción, los problemas típicos y el tanto por ciento, en el siguiente esquema:



$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{T}} = \frac{\%}{100}$$

F representa la (fracción) entre la parte y el todo, y el 1, la fracción que le corresponde al todo.

De esa igualdad de razones se tienen los problemas típicos y el tanto por ciento:

Problemas típicos		Tanto por ciento
$\mathrm{P} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{T}$	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _	$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{T} \cdot \%}{100}$
$\mathrm{F} = \mathrm{P} : \mathrm{T}$	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _	$\% = \frac{\mathrm{P} \cdot 100}{\mathrm{T}}$
$\mathrm{T} = \mathrm{P} : \mathrm{F}$	_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _	$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{P} \cdot 100}{\%}$

3. En las rebajas de enero el descuento de una tienda es del 20 % sobre el precio indicado. Una señora compra un juego de toallas etiquetado con \$ 16.000. ¿Cuánto es el descuento? ¿Cuánto tiene que pagar?

   Si el descuento es del 20 %, quiere decir que de cada \$ 100 pagamos \$ 80.

   Modelo: Se conoce el todo y la fracción y se quiere hallar la parte.

   T: Precio normal del juego de toallas
   $\frac{a}{b} : \frac{20}{100}$
   P: Descuento del valor de la toalla

   Aquí, $\mathrm{P} = \frac{a}{b} \cdot \mathrm{T} = \frac{20}{100} \cdot \$\, 16.000 = \$\, 3.200$

   El descuento es de \$ 3.200 y lo que finalmente tiene que pagar la señora es:

$$\$16.000 - \$3.200 = \$12.800$$

4. Andrés compra un coche cuyo precio de fabrica es de $25.000.000. A ese precio hay que añadirle un 16 % de I.V.A. ¿Cuánto tiene que pagar de IVA? ¿Cuál será el precio final del coche?.

   Modelo: Se conoce el todo y la fracción y se quiere hallar la parte.

   T: Valor inicial del coche
   $\frac{a}{b}$: $\frac{16}{100}$
   P: I.V.A

   El valor que Andrés tiene que pagar de I.V.A

   $$\text{P} = \frac{a}{b} \cdot T = \frac{16}{100} \cdot \$\ 25.000.000 = \$\ 4.000.000$$

   Luego el precio final del coche es de: $ 25.000.000 + $ 4.000.000 = $ 29.000.000

5. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

   Modelo: Se conoce la parte y el todo y se quiere hallar la fracción.

   P: Alumnos que fueron de viaje
   T: Alumnos del colegio
   %: Porcentaje de los alumnos que viajaron

   $$\% = \frac{(P)(100)}{T} = \frac{(600)(100)}{800} = 75$$

   El porcentaje de alumnos que viajaron es 75, puesto que de los 800 alumnos del colegio, solo fueron 600.

CAPÍTULO 2

TÉCNICAS DE LA LECTURA ANALÍTICA Y LA REFORMULACIÓN

Resolver un problema significa encontrar la vía que permita satisfacer las exigencias a partir de las condiciones dadas. Como ya se había mencionado en la introducción, en el proceso de desarrollo de habilidades para solucionar problemas es importante que los estudiantes tengan en cuenta técnicas que le faciliten dicho proceso, a continuación se hace referencia a cada una de éstas técnicas.

- La técnica de la modelación permite reproducir las relaciones fundamentales que se establecen en el enunciado de un problema, mediante representaciones gráficas o esquemas que ayudan a la comprensión del problema. La forma de hacer los modelos es muy personal, sin embargo los modelos más utilizados son los lineales, los tabulares, los conjuntistas y los ramificados. En el trabajo se puede ver las aplicaciones de ésta técnica.

- Las técnicas de la lectura analítica y la reformulación (tema central de éste capítulo), permiten realizar un estudio del texto del problema de modo que se separen claramente sus partes y se distingan las relaciones esenciales que se dan explícitas o implícitamente en él, con el propósito de ayudar a la comprensión del problema y también en la búsqueda de la idea de la solución.

- En la técnica de la determinación de problemas auxiliares desempeñan un papel importante las técnicas de la lectura analítica y la reformulación, así como la modelación. En la búsqueda de éstos problemas intervienen el análisis, tanto de la información que piden como de la que dan, a partir de la pregunta: ¿qué se necesita para contestar la pregunta del problema?. Si no se sabe, se formula un problema auxiliar y se vuelve a hacer la misma pregunta, hasta que se llegue a un subproblema que se pueda resolver.

- La técnica del tanteo inteligente consiste en la búsqueda sistemática de soluciones mediante pruebas sucesivas, analizando cada resultado obtenido y comparandolo con resultados anteriores, con el fin de disminuir los cálculos a realizar. En el siguiente capítulo se considerará ésta técnica.

- La técnica de la comprobación es una técnica poco común entre los estudiantes pero muy importante, es una de las formas de control del aprendizaje, desde el punto de vista cognoscitivo. Comprobar un problema no se trata de comprobar las operaciones realizadas en su solución, sino de analizar si el razonamiento utilizado en la solución es correcto o no. Algunas de las formas de hacerlo es haciendo un estimado previo y compararlo con el resultado; desarrollando la operación inversa a la realizada en el problema original y realizar el problema por otra vía diferente y comparar los resultados, entre otras.

Las técnicas que se han mencionado, considerando como técnica a "un conjunto de acciones que permiten proceder ante una determinada acción de aprendizaje y que opera como un recurso de la actividad mental para actuar (herramienta) y a la vez como recurso de regulación (recurso metacognitivo), la metacognición es la habilidad de la persona para: Planear una estrategia, producir la información que sea necesaria, estar conscientes de sus propios pasos y estrategias durante la resolución de problemas, reflejar y evaluar la productividad de su propio pensamiento", están descritas mediante un conjunto de acciones que se formulan en forma aseverativa e incluyen una serie de preguntas metacognitivas, en el lenguaje de los estudiantes, que recorren el proceso mental que se realiza y constituye, a la vez, un importante recurso de control de este proceso.

Según Labarrere "...La solución de un problema no debe verse como un momento final, sino como todo un complejo proceso de búsqueda, encuentros, avances y retrocesos en el trabajo mental. Este complejo proceso de trabajo mental se materializa en el análisis de la situación ante la cual uno se halla: en la elaboración de hipótesis y la formulación de conjeturas; en el descubrimiento y selección de posibilidades; en la previsión y puesta en práctica de procedimientos de solución."[1]

El análisis es un elemento de suma importancia pues permite determinar las principales relaciones que se dan entre los elementos de las condiciones del problema y entre estos y la pregunta planteada (lo que se pide), lo cual debe ser claramente diferenciado. El análisis es un componente que está presente en todo el proceso de solución, no obstante hay un momento inicial en el que tiene una función especial, dirigida a la comprensión del problema. Ese momento de familiarización tal como se ha expresado anteriormente, implica no solo el conocimiento de los objetos, palabras y situaciones que se dan en el texto del problema, sino también debe caracterizarse por una actividad mental que conlleve a diferenciar lo dado y lo que se quiere hallar. Esta es una habilidad que el maestro debe formar y desarrollar en el estudiante a través de un trabajo sistemático. En numerosas ocasiones, cuando ese momento inicial analítico no es considerado con toda la importancia que requiere, se debe a que para el maestro lo esencial es la respuesta al problema, lo que se refleja en el estudiante con toda la significación negativa que posee y lo lleva a operar exageradamente con los datos que se dan directamente en el problema, muchas veces sin un fundamento adecuado, sin una reflexión previa con carencia del debido autocontrol, conduciendo todo ello a errores de los cuales no se percata. Labarrere ha llamado a esta forma de actuar, tendencia a la ejecución.

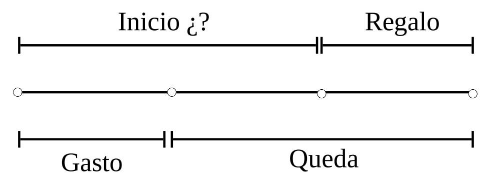
Las técnicas de la lectura analítica y la reformulación se utilizan según se hagan necesarias o no, deacuerdo a la complejidad que presente el problema. Por ejemplo, el siguiente problema se reduce a determinar lo dado y lo buscado, encontrando así las relaciones existentes entre ellos, sin necesidad de hacer reformulaciones del texto, como se presenta a continuación:

- Manuel ha reunido cierta cantidad de dinero; gasta $40.000 en libros de Matemáticas, $2.200 en un cuaderno y $50 en un caramelo. Después su mamá le regala $1.600. Si al final tiene $50.600. ¿Cuánto dinero tenia reunido Manuel?

Un análisis del problema debe conducir al estudiante a separar lo conocido de lo desconocido. En este caso, lo conocido es, lo que gastó, lo que le regalaron y lo que le queda, y la incógnita que se debe hallar es lo que tenía al inicio.

[1] Labarrere, Estrategia para la Resolución de Problemas como un recurso para la interacción sociocultural. 1988, Pág 17

De acuerdo a las condiciones dadas existe una relación de parte y todo: el dinero que gastó y el que le queda son partes de un todo que es el mismo todo que se obtiene reuniendo otras partes que son: el dinero inicial y el regalo. El siguiente esquema ayuda a la interpretación.



Observen que complementado el problema con la modelación favorece la comprensión de la situación planteada. Una reformulación de este problema puede consistir en identificar la pregunta en el modelo:

- ¿Cuánto quedó si al total le quitó lo que le regalaron?

En este problema la lectura analítica consiste en considerar el problema resuelto, es decir, trabajar de atras hacia delante a partir de la pregunta, descomponiéndola y reformulándola, así:

- ¿Cuánto dinero tenía reunido?

El dinero reunido es el total menos el que le regalaron. En el ejemplo vamos a sumar todo lo que gastó y lo que le quedó, luego le restamos lo que le regalaron:

$40.000 + $2.200 + $50 + $50.600 = $92.850 Ahora vamos a restar
$92.850 - $1.600 = $91.250

Entonces, podemos dar respuesta a nuestro problema diciendo que Manuel tenía reunido $91.250.

Cambiar la pregunta:

- ¿Qué dinero tenía en total?

Si se habla de un total incluye todo, es decir la suma de lo que gastó, lo que le quedó, y lo que le regalaron, así:

$40.000 + $2.200 + $50 + $50.600 + $1.600 = $94.450

Al contestar la pregunta, se tiene $94.450
También se puede responder sobre:

- ¿Qué dinero gastó?
- ¿Qué dinero le quedó?

En el ejemplo se ve con claridad la estrecha relación entre la lectura analítica y la reformulación, en las que mediante un proceso de análisis - síntesis se separa lo dado de lo buscado, se determina qué conforma las condiciones del problema y qué la exigencia, es decir, de dónde se parte y hacia dónde debe dirigirse, en ese proceso se van haciendo cambios en la significación de lo analizado, donde se descubren nuevas relaciones, propiedades, que permiten tener mayor comprensión de lo que se ha planteado.

Requerimientos para el desarrollo de la habilidad de la lectura analítica y la reformulación

El trabajo con la técnica de la lectura analítica, es la descomposición de un todo en partes para poder estudiar su estructura o funciones para la solución de problemas, de ahí que es necesario que el estudiante realice algunas acciones, entre las que se encuentran las siguientes:

1. Leer detenidamente e identificar lo conocido:(¿Qué es lo que conoce y qué es lo que no conoce?)
2. Descifrar las palabras desconocidas. (¿Qué le dice lo que lee?)
3. Identificar los datos que dan en el problema. (¿Qué conoce y cuáles son las incógnitas a las que se tiene que enfrentar?)
4. Identificar las relaciones existentes entre las partes del problema.(Pueden ser de parte y todo, proporcionalidad, transitividad, combinatoria, orden, tanto más o menos que, entre otras.)
5. Si es útil se hace un esquema. (¿Puede modelar la situación que le dan?)

En el siguiente ejemplo se puede mirar cada caso:

- Entre Elena y su hermana pesan 87 kg. Si la hermanita pesa la mitad de lo que pesa Elena, ¿Cuánto pesa cada una?

¿Qué es lo que conoce y qué es lo que no conoce?
Se sabe cuánto es la suma del peso de las dos hermanas, 87 kg.

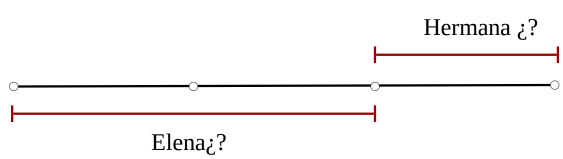
¿Qué significa lo que lee?

Se puede deducir que una parte es el doble de la otra.

¿Qué le dicen sobre lo que conoce y sobre lo qué no conoce?
Sobre lo que conoce le dan el peso total, y sobre lo que no conoce le dicen que el peso de las dos hermanas suma 87 kg.

¿Qué tipo de relaciones se establecen?
Relaciones de parte y todo, dan el todo y se tiene que hallar el contenido de cada parte.

¿Se puede modelar la situación?
Se puede modelar así:



87 : 3 = 29 kg

Finalmente podemos responder que Elena pesa 58 kg y su hermana 29 kg.

Si aplicados estos pasos, aún no se entiende el problema se hace necesario una traducción del texto al lenguaje del estudiante, es decir, reformular el problema:

1. Vea los datos y las condiciones de una forma distinta, es decir, recombinarlos . (¿Puede asociar de otra forma los datos que dan y las condiciones que se presenten?)

2. Identificar cuál es la pregunta en el modelo y se apoya en él para expresarla de una forma que sea clara. (¿Puede reformular la pregunta?)
3. Descomponga la pregunta en otras más sencillas y combinelas de diferente forma. (¿Puede descomponer la pregunta en otras más sencillas?)
4. Formule otro problema análogo más comprensible (¿Puede reformular de otra manera el problema?)

Ejemplos

Algunos ejercicios que ilustran las técnicas planteadas, en problemas más complejos son los siguientes:

1. Un tarro lleno de miel pesa 500 g. Este mismo tarro lleno de kerosene pesa 350 g. El kerosene es dos veces más ligero que la miel. ¿Cuánto pesa el tarro?

   ¿Qué es lo que se conoce y qué es lo que no se conoce?. Se conoce lo que pesa el tarro lleno de miel y de kerosene, no se conoce lo que pesa la miel, ni el kerosene, ni el tarro.

   ¿Qué significado tiene lo que lee?

   Decir que el kerosene es dos veces más ligero que la miel significa que la miel es el doble de pesada que el kerosene.

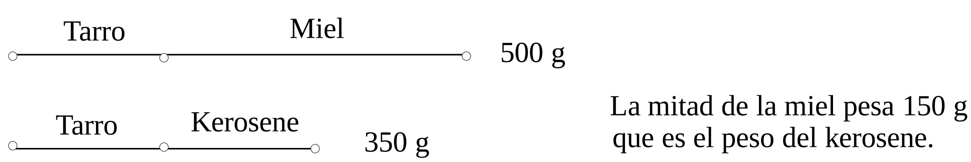
   ¿Qué le dicen sobre lo que se conoce y sobre lo qué no se conoce?

   Sobre lo que se conoce, se tienen los pesos, y sobre lo que no se conoce, dicen que la miel es dos veces más pesada que el kerosene.

   ¿Qué tipo de relaciones se pueden establecer?

   Se establecen relaciones de parte y todo, ya que dan dos partes y piden una parte común a esas dos partes; además, entre cantidades dan una relación entre el peso del kerosene y la miel.

   ¿Puede modelar la situación dada?. Si se puede:



   Tomando como referencia el modelo, analiza:

   ¿Puede asociar de otra forma los datos y las condiciones? No se puede.

   ¿Puede reformular las preguntas o descomponerlas en otras más elementales? ¿Cuánto pesa la miel? ¿Cuánto pesa el kerosene? ¿Cuál es la diferencia entre el peso del tarro de miel sobre el tarro lleno de kerosene?

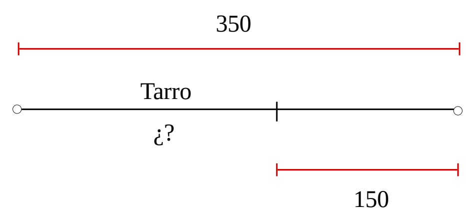
   Esta última pregunta es una reformulación del problema en términos más claros.

   Hasta aquí la lectura analítica y la reformulación, ya que se puede responder directamente la pregunta con los datos que se tienen:

500 g - 350 g = 150 g.

Es decir 150 g, es el peso del kerosene que cabe en el tarro (el tarro lleno de miel pesa lo mismo que pesaría si en el cupiera el doble de cantidad de kerosene).

Ahora se puede apoyar de nuevo en el modelo y en las condiciones dadas, como la miel pesa el doble de kerosene, la diferencia hallada es exactamente lo que pesa el kerosene y entonces ya se puede contestar la pegunta del problema:



De aquí se deduce el peso neto del tarro: Se conoce el todo y una parte, y lo que se debe hallar es la otra parte:

350 g - 150 g = 200 g

El tarro pesa 200 g.

En efecto, se utiliza la información del tarro de miel y la relación existente entre la miel y el kerosene:

500 g - 200 g = 300 g

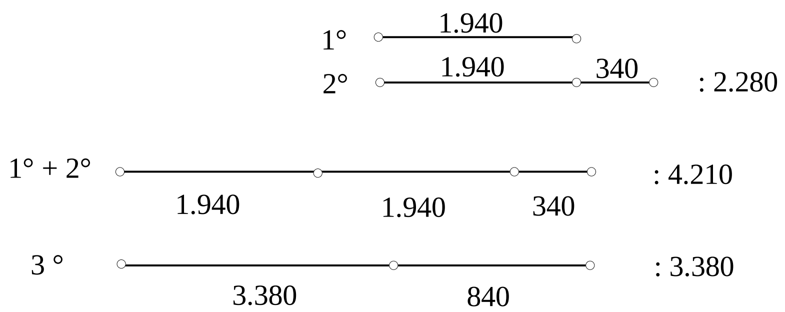
Es decir, que la miel es dos veces más pesada que el kerosene.

2. Un aeroplano recorrió 1.940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 840 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos kilómetros recorrió el aeroplano en total?

   Un análisis que podría hacer el estudiante, usando las técnicas de la lectura analítica y la modelación, es:

   - Se conocen los kilómetros recorridos el primer día.
   - No se conocen los recorridos que hace en el segundo y tercer día.
   - No hay ninguna palabra cuyo significado no se conozca.
   - No dicen nada adicional sobre lo que se conoce y sobre lo que no se conoce. Para conocer los kilómetros recorridos el segundo día se dispone de los kilometros recorridos el primer día y los kilómetros recorridos de más. Para conocer los kilómetros recorridos el tercer día se necesita conocer los kilómetros recorridos los dos primeros días.
   - Identifica relaciones de parte y todo. Le dan las partes y se debe encontrar el todo.

La situación se puede modelar así:



Del modelo surgen las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto recorre en el segundo día?

Se conoce lo recorrido el primer día y cuantos más el segundo, luego se puede conocer lo recorrido el segundo: (Se conoce una parte y el exceso de otra sobre ella se puede hallar la otra).

$$1.940 \text{ km} + 340 \text{ km} = 2.280 \text{ km}.$$

- ¿Cuánto recorre en el tercer día?

Se conoce lo recorrido el primer día, lo recorrido el segundo día y cuanto menos el tercero, luego conoce lo recorrido en el tercero: (Se conoce una parte y su exceso sobre otra, hallar la otra).

2.280 km + 1.940 km - 840 km = 3.380 km.

De estas formulaciones del problema puede surgir la idea de la solución, todos las preguntas formuladas son subproblemas del problema dado.

La solución es entonces: Se conoce lo recorrido los días primero, segundo y tercero, luego se conoce el recorrido total: (conocidas las partes hallar el todo).

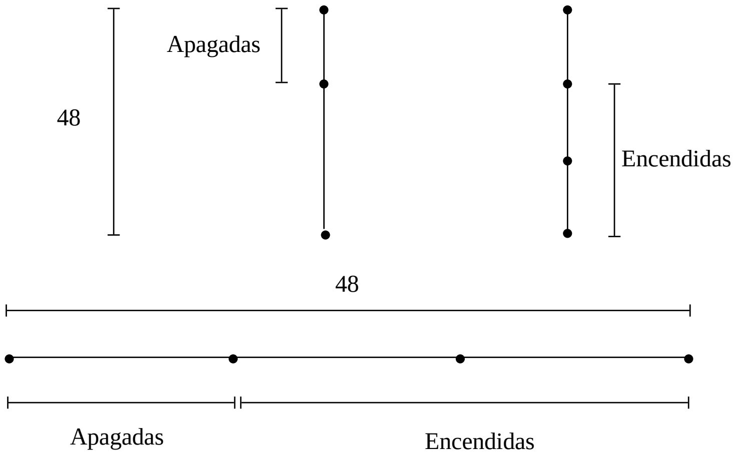
1.940 km + 2.280 km + 3.380 km = 7.600 km

El proceso de lectura analítica y reformulación es muy personal y depende de cómo cada quien interprete la solución, como se observa en el siguiente ejemplo:

3. Hay dos salones, uno iluminado con 48 lámparas y el otro a oscuras. Se apagan 2 lámparas del primer salón y se encienden 4 en el segundo salón y se repite la operación hasta que ambos salones tienen el mismo número de lámparas encendidas ¿Cuántas lámparas encendidas hay al final?

   La primera vía para resolver el problema es la siguiente: Se conoce el total de lámparas encendidas en el primer salón y cómo se van apagando y encendiendo. No se conoce cuántas quedan encendidas al final. Todos los términos son conocidos. Se dice que por cada vez se encienden el doble de las que se apagan, hasta igualarse. Identifica ralaciones de parte y todo, en particular hay partes iguales.

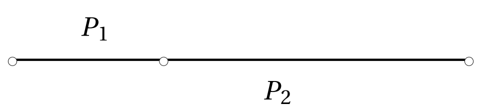
   El problema se puede modelar de varias formas:



Los datos hacen ver que al final el total de lámparas encendidas es el doble de las apagadas. Se puede reformular el problema así:

- Se tienen 48 lamparas encendidas en un salón y se van apagando en éste y encendiendo en otro hasta que las encendidas en el segundo sean el doble de las apagadas en el primero. ¿Cuántas lámparas encendidas quedan en cada salón?

El todo está dividido en 2 partes y una parte es el doble de la otra:



P_1 : Apagadas

P_2 : Encendidas

$P_2 = 2\ P_1$

$$T = P_1 + P_2 = P_1 + 2\ P_1 = 3\ P_1$$

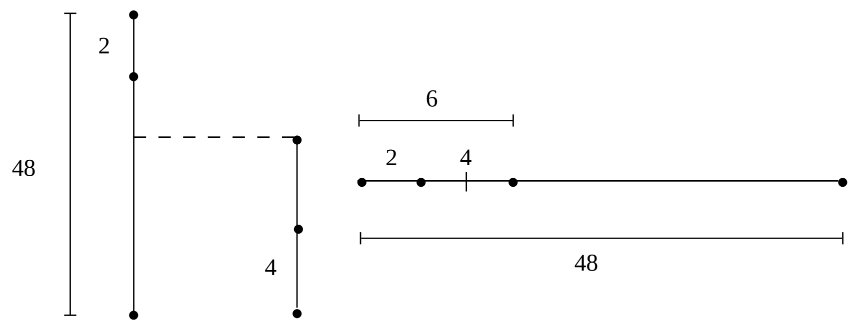
$$48 = 3\ P_1$$

Hay apagadas 48 : 3 = 16 lamparas. La solución es: En el primer salón se apagan 16 lamparas es decir que quedan 32 encendidas; en el segundo salón quedan también 32 encendidas.

Otra vía para resolver este mismo problema es:

Se conoce el total de lámparas encendidas en el primer salón y cómo se van apagando y encendiendo. No se conocen cuántas quedan encendidas al final. Todos los términos son conocidos. Se dice que cada vez que se encienden y se apagan se acercan en 6 lámparas (2 que se apagan y 4 que se encienden). Identifica relaciones de parte y todo; específicamente, hay partes iguales.

Se puede modelar la situación así:



Los datos del problema indican que inicialmente la separación entre la cantidad de lámparas encendidas y la de apagadas es 48 y se acercan en seis cada vez, hasta que no haya ninguna separación.

Se puede, reformular el problema así:

- Se tienen 48 lámparas encendidas en un salón y se van apagando 2 en el primero y encendiendo 4 en el segundo, hasta que tienen la misma cantidad de luces encendidas. ¿Cuántas veces se tiene que apagar y encender hasta que se igualen?

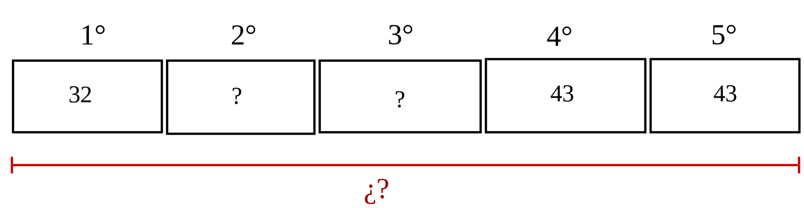
Como cada vez se acercan en 6 unidades se necesitan 48 : 6 = 8 veces de apagar y encender, para que la diferencia sea cero.

En 8 veces de apagar y encender, en el primer salón se apagan 16 lamparas y en el segundo se prenden 32. En ambos salones quedaron 32 lamparas encendidas.

4. Un tren lleva 5 vagones de pasajeros. En el primero van 32 personas, en el segundo van 13 viajeros más que en el primero, en el tercero van tantos viajeros como en el primero y en el segundo, el cuarto y quinto coche llevan cada uno 43 viajeros. ¿Cuántos viajeros lleva el tren?.

   Se hace el análisis, usando las técnicas vistas:

   - Se sabe cuantos viajeros llevan los vagones 1°, 4° y 5°, porque son datos del problema.
   - No se conoce el número de pasajeros que llevan los vagones 2° y 3°. Debe hallarse el número de viajeros que llevan estos dos vagones.
   - No dice nada adicional sobre lo que se conoce y lo que no se conoce, pero hay unas condiciones implícitas básicas: Para determinar los viajeros del segundo vagón, se debe saber los que lleva el primer vagón (se sabe) y añadir 13 (una condición del problema). Para determinar los viajeros del tercer vagón, se ha de saber los que lleva el primer vagón y el segundo.
   - Solo se identifican relaciones de parte y todo, se dan las partes y se debe encontrar el todo.
   - Se puede modelar la situación:



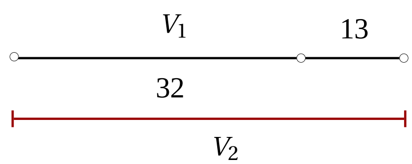
Ahora bien, los viajeros de los vagones 2 y 3, se han convertido en nuevas incógnitas que no figuraban en el planteamiento del problema. Se puede hacer ahora otras preguntas:

- ¿Cuántos pasajeros lleva el segundo vagón?
- ¿Cuántos pasajeros lleva el tercer vagón?

  De estas reformulaciones del problema puede surgir la idea de la solución, las dos preguntas formuladas son subproblemas del problema dado.

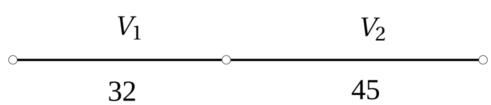
  Para efectuar estos cálculos, basta con recorrer el camino del análisis en sentido inverso: Partiendo de los datos, caminar a través de las preguntas hechas, hasta llegar a la incógnita del problema:

- Para determinar los viajeros del segundo vagón se ha de saber los que lleva el primer vagón y añadir 13. (Se conoce el exceso de pasajeros del segundo vagón sobre el primero)



En el segundo vagón van 45 pasajeros.

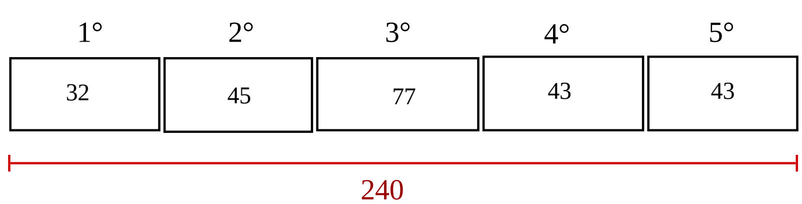
- Se necesita hallar ¿Cuántos pasajeros lleva el tercer vagón?.



Se sabe cuantos pasajeros lleve el 1° y 2° vagón, en el tercero van tantos viajeros como en el primer y segundo vagón, de aquí:

$$32 + 45 = 77 \text{ Pasajeros. El tercer vagón lleva 77 pasajeros.}$$

Se han resuelto las preguntas auxiliares, puesto que se hallaron las partes que faltaban para hallar el todo, queda, resolver la pregunta inicial. ¿Cuántos viajeros lleva el tren?



La suma de los 5 vagones genera un total de 240 personas a bordo del tren.

El uso de estas técnicas en la solución de problemas es una cuestión de gran importancia para el avance de las matemáticas, hay que enseñarlas desde los primeros grados, puesto que los estudiantes se ven inmersos en la construcción de sus propios sistemas individuales de comprensión y aprendizaje.

CAPÍTULO 3

TÉCNICA DEL TANTEO INTELIGENTE

Con frecuencia se encuentran situaciones en las que, para hallar la solución, no es necesario un procedimiento estrictamente matemático, se puede hacer uso de una búsqueda sistemática mediante pruebas sucesivas, en las que se debe analizar cada nuevo resultado y compararlo con los obtenidos anteriormente para encontrar una regularidad que permita disminuir los cálculos a realizar.

Las pruebas de tanteo son los primeros actos con que se empieza a efectuar el análisis y la síntesis, que se desarrollan bajo el aspecto de pruebas con que se busca la solución necesaria. Es conocido que una prueba equivocada puede conducir, y conduce con mucha frecuencia, al análisis a través de la síntesis como forma superior del tanteo. En ese sentido, al fallar una prueba surge, como es natural, el problema de por qué ha fallado y la causa del error se busca en el hecho de no haber tenido en cuenta, total o parcialmente, alguna de las condiciones del problema, manifestándose así una conducta inteligente que pone en juego el procedimiento de búsqueda por tanteo, combinado con el sistema de conocimientos relacionados con el problema dado y las condiciones establecidas en el mismo, llegándose en muchas ocasiones al replanteo o reformulación del problema dado inicialmente, y a la reducción del proceso de búsqueda ajustándose cada vez más, y mejor, a las condiciones establecidas.

Esta búsqueda sistemática es lo que se llama tanteo inteligente y no existen fórmulas para decidir cuándo se debe utilizar, sin embargo, existen una serie de acciones que nos pueden ayudar a desarrollar ésta habilidad:

a) Analizar si el problema se puede separar en casos.

b) Decidir cómo organizar los datos.

c) Buscar regularidades para reducir, si es posible, los casos.

d) Verificar qué casos cumplen las condiciones del problema.

e) Confirmar si se consideraron o no todos los casos.

En los siguientes ejemplos se ilustran varias formas de hacer un tanteo inteligente.

Ejemplos

1. En una finca hay más gallinas que perros y hay por lo menos un perro. En total hay 26 patas. ¿Cuántos animales hay de cada uno?

De acuerdo al enunciado si se puede separar en casos, también sabemos que en cada caso como mínimo debe haber un animal de cada especie. Analicemos los casos posibles:

Perros	Gallinas	Posibilidad
0	13	No
1	11	Si
2	9	Si
3	7	Si
4	5	Si
5	3	Si
6	1	Si

Es de resaltar la importancia de modelar el problema para poder hallar todas las posibles soluciones con más certeza y que permita observar que no se ha quedado sin tomar en cuenta alguna.

2. Oscar compró sellos por los que pagó 41 centavos en monedas de 20, 5 y 2 centavos. ¿Cuántas monedas de cada una utilizó?

Oscar utilizó solo una moneda de 20c, pues de lo contrario no hubiera podido pagar 41c. De aquí se deduce que usó máximo 3 monedas de 5c, pues de lo contrario tampoco podría haber pagado los 41c.
Para resolver el problema haremos uso de una tabla en la que analizaremos los casos posibles:

	20c	5c	2c	Posibilidad
No de monedas	1	1	8	Si
	1	2	0	No
	1	3	3	Si

Como se observa la segunda opción no es posible. El problema tiene dos soluciones.

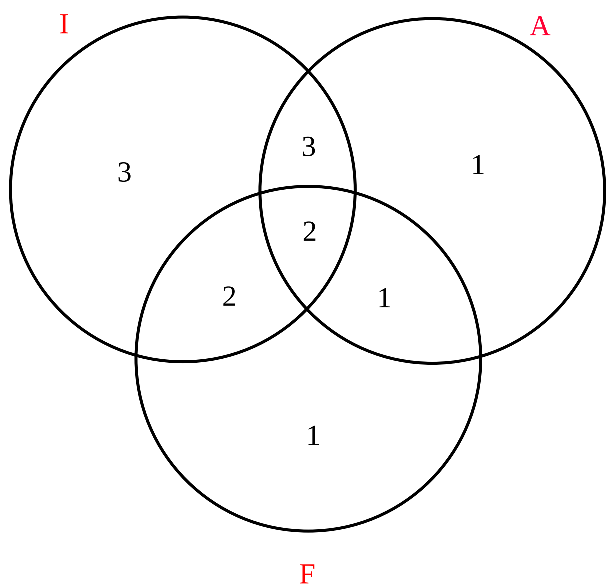
3. Tres niñas tienen blusas blanca, rosa y violeta. La que tiene el color violeta dice: nuestros nombres son Blanca, Rosa y Violeta. Otra niña dice yo me llamo Blanca, como pueden ver nuestros nombres son iguales a los colores de nuestras blusas, pero ninguna lleva blusa con el color de su nombre. ¿Cuál es el nombre de cada niña según el color de su blusa?

De acuerdo a la información proporcionada en el problema tenemos lo siguiente:
La primera niña que habla es Blanca o Rosa. Del enunciado: "otra niña dice: Yo me llamo Blanca..." se deduce que la primera que habló fué Rosa. Luego Rosa tiene el color violeta, Blanca el color rosa y Violeta el color Blanco.

4. En un preuniversitario hay 13 personas que conocen al menos un idioma extranjero: 10 inglés, 7 alemán y 6 francés; 5 de ellos hablan inglés y alemán, 4 inglés y francés y 3 alemán y francés. ¿Cuántos saben los tres idiomas?¿Cuántos solo inglés?

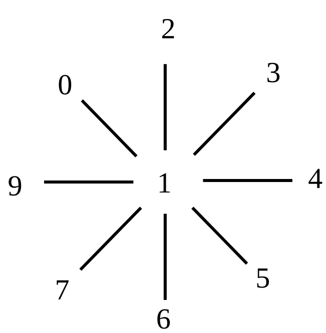
	rosa	blanca	violeta
Rosa	No	Si	Si
Blanca	Si	No	Si
Violeta	Si	Si	No

Analizando la situación usaremos un diagrama de Veen para clasificar mejor la información y organizarla para poder dar respuesta a nuestro problema



Organizando la información proporcionada en el enunciado del problema podemos ver que tan solo dos personas hablan los tres idiomas y sólo tres hablan únicamente inglés.

5. ¿Cuántos números de tres cifras no repetidas hay que empiecen con 8?



Tomando como referencia el 1, éste tiene 8 posibilidades de relacionarse con los otros números sin contar el 8, la misma cantidad de posibilidades tienen los otros números.

Hay dos posibles formas de hallar los números que cumplan con la condición del enunciado, la primera intentar uno por uno y la otra, como no piden decir cuáles son los números sino cuántos entonces se puede multiplicar 9 (la cantidad de números) por 8 (la cantidad de posibilidades de cada número) hallamos cuántos números son:

$$9 \times 8 = 72 \quad \text{números}$$

6. El minutero de un reloj señala un número exacto de minutos y el horario está 2 divisiones detrás. ¿Qué hora es?

Para solucionar el problema, se hará referencia a 60 divisiones correspondientes al número de minutos que tiene la hora. Se empezará identificando el punto de partida la hora cero, que corresponde cuando el horario y el minutero apuntan de manera vertical hacia arriba, es decir las $12:00$.
Hay que tener en cuenta que cuando el minutero está en posición de inicio el horario debe marcar una hora exacta, y que el recorrido del minutero en 60 divisiones corresponde al movimiento del horario en 5 de ellas; es decir, la relación entre el horario y el minutero es de 1 a 12, por cada división que recorra el horario el minutero recorre 12.
Ahora, la situación planteada sólo puede ocurrir cuando el minutero este en las divisiones $0, 12, 24, 36$ y 48, múltiplos de 12.
Si el minutero está en la división:

- Cero, el horario debe estar en la división 55, es decir son las $11:00$. Esto significa que el horario está a 5 divisiones del minutero, por lo tanto no cumple la condición inicial.

- Doce, el horario debería estar en la división 10, lo cual es imposible, pues la única posibilidad de que el horario marque una división que sea multiplo de 5 es siendo una hora exacta. En el caso que nos ocupa, el horario debe estar en la división 11, marcando las $2:12$ y la diferencia sería una sola división.

- Veinticuatro, el horario debe estar en la división 22 y en este caso son las $2:24$, que en efecto corresponde a las condiciones planteadas en el problema. Recordemos que por cada 12 divisiones que recorre el minutero, el horario recorre 1; aquí el minutero ha recorrido 24 y el horario ha recorrido 2.

- Treinta y seis, el horario debería estar en la división 34 lo cual es imposible. A partir de las $6:00$ y al recorrer el horario 3 divisiones el minutero recorrería 36 divisiones y serían las $6:36$, aquí la diferencia son 3 divisiones. Si se hace que el horario recorra una división más, la hora marcada sería las $6:48$ que tampoco cumple con la condición inicial.

- Cuarenta y ocho, el horario debería estar en la división 46, lo cual es imposible. A partir de las $9:00$ y recorriendo el minutero 12 divisiones hacia atrás el horario estaría en la división 44 y el reloj marcaría las $8:48$ y aquí hay 4 divisiones de diferencia.

En éste ejercicio se han observado todos los casos posibles y solo uno satisface las condiciones iniciales. Cuando el minutero está en la división 24 y el horario está en la 22, es decir, cuando son las $4:24$.

CAPÍTULO 4

PROBLEMAS RESUELTOS

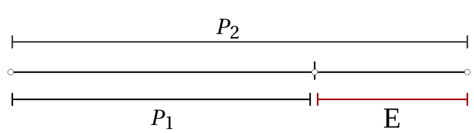
> “Resolver un problema es hacer un descubrimiento.
> Un gran problema significa un gran descubrimiento,pero hay una partícula de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El suyo puede ser modesto, pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, y si lo resuelve por medios propios, puede experimentar la tensión y el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo."

George Pólya

En este capítulo se pondrán en práctica las técnicas examinadas en los capítulos anteriores. Para ello se han seleccionado varios problemas sencillos y de fácil solución, de modo que nos podemos concentrar en el proceso de resolución.

1. Los estudiantes de la escuela El Jardín cosecharon 63.580 kg de papas y los de Montessori, 72.915 kg. ¿Cuántos kilogramos más cosecharon los de la segunda escuela?.

   Modelo: Dadas dos partes; hallar el exceso de una sobre la otra.

   P_1 : Cosecha de la escuela El Jardín.

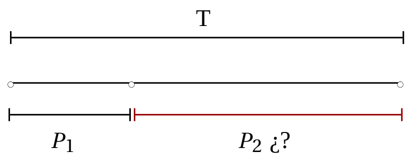
   P_2 : Cosecha de la escuela Montessori
   .

   E : Los kilogramos de más que cosechó la segunda escuela.
   E = P_2 - P_1 = 72.915 - 63.580 = 9.335

   Entonces, una de las dos escuelas obtuvo mejor cosecha, y la que logró dicho resultado fue la escuela Montessori quién le ganó a El Jardín por 9.335 kg de papa.

2. En el almacén del municipio había 21.538 libretas y se distribuyeron 7.399 ¿Cuál es el total de libretas que hay ahora en el almacén?

Modelo: Dado el todo y una parte, hallar la otra parte.



T : Libretas que habían en el almacén

P_1 : Libretas que se distribuyeron

P_2 : Libretas que quedaron en el almacén

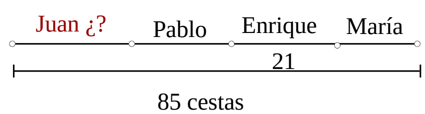
P_2 = T - P_1 = 21.538 - 7.399 = 14.139

Se tiene un total de 21.538 libretas de ellas se distribuyeron 7.399, lo cual quiere decir que en el almacén quedan 14.139 libretas.

3. Juan, Pablo, Enrique y María recogieron 85 cestas de naranjas. Enrique recogió 3 cestas más que María y 1 más que Pablo. Si Enrique recogió 21 cestas. ¿Cuántas cestas recogió Juan?

   Para saber cuántas cestas recogió Juan se halla los datos desconocidos.

   Modelo: Dado el todo y una de las partes, hallar las otras:



   El único dato que se tiene es la parte que recogió Enrique.

   Enrique: Recogió 21 cestas, 3 más que María y 1 más que Pablo.

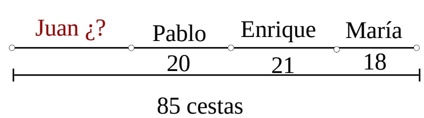
   María: Recogió 3 cestas menos que Enrique, entonces María recogió

   $$21 - 3 = 18 \text{ cestas.}$$

   Pablo: Recogió 1 cesta menos que Enrique, o sea que Pablo recogió

   $$21 - 1 = 20 \text{ cestas}$$

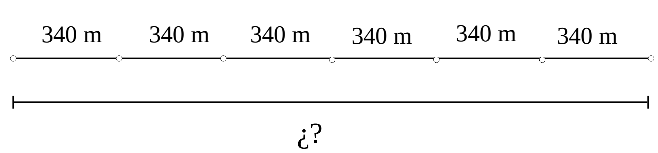
   Se sabe que entre los cuatro recogieron 85 cestas de naranjas y cuántas recogieron Pablo, Enrique y María cada uno, lo que recogieron entre los tres fué:



   20 + 21 + 18 = 59 cestas Juan recogió 85 - 59 = 26 cestas.

4. Sabiendo que el sonido recorre 340 m/s, ¿ a qué distancia está una nube si oigo el trueno 6 s después de ver el relámpago?

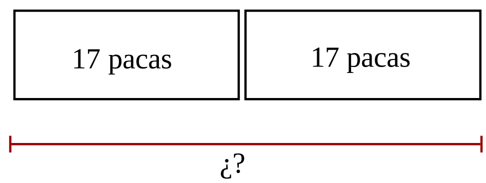
   Modelo: Dadas la cantidad de partes y el contenido de cada parte, hallo el todo:



Se sabe que por cada segundo que pasa el sonido recorre 340 m, entonces para conocer la distancia de la nube se suman 6 veces 340 m o se multiplica 340 m/s x 6 s = 2040 m.

Como se puede deducir del desarrollo del problema que la nube se encuentra a una distancia de 2.040 m.

5. Dos camiones llevan cada uno 17 pacas de latas de jugo, cada paca contiene 24 latas. ¿Cuántas latas llevan los dos camiones?.
Modelo: Dadas las partes, hallar el todo.

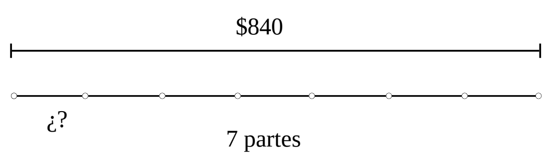


En el gráfico: 2 camiones y cada uno de ellos lleva 17 pacas de jugo, entonces, entre los dos llevan:

$$17 \cdot 2 = 34 \text{ pacas}$$

Hasta ahí queda resuelta una parte, pero preguntan por el número total de latas, un dato que no lo dan, pero se conoce que cada paca de jugo contiene 24 latas, entonces los dos camiones llevan: $24 \cdot 34 = 816$ latas de jugo.

6. Siete docenas de botones cuesta \$840. ¿Cuánto cuesta un botón?
Modelo: Repartir en partes iguales el todo. Hallar el contenido de cada parte. Lo primero que se debe encontrar es cuánto cuesta cada docena:

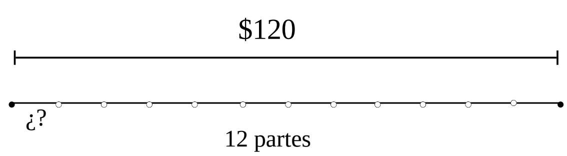


Puesto que las 7 docenas de botones cuestan \$840, cada docena costará:

$$\$840 : 7 = \$120$$

Ahora se toma el valor de una docena y se determina el valor de cada botón, así que:

$$\$120 : 12 = \$10$$



El problema también se puede resolver de la siguiente manera: se calcula cuántos botones hay en las 7 docenas y luego se averigua el costo de cada botón, es decir el costo de cada botón es:

$$\frac{\$840}{7 \cdot 12} = \frac{\$840}{84} = \$10$$

7. Si 20000 naranjas fueron empacadas en cajas y vendidas en \$550000, a razón de \$440 la caja. ¿Cuántas naranjas había en cada caja?

   Si n cajas de naranjas fueron vendidas en \$550000 a \$440 cada caja, entonces:

$$n = \frac{550000}{440} = 1250$$

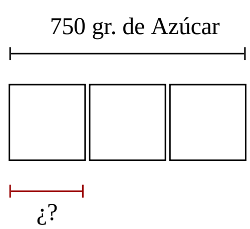
   Como hay 20000 naranjas empacadas en 1250 cajas, entonces en cada caja hay:

$$\frac{20000}{1250} = 16$$

   Luego, en cada caja hay 16 naranjas.

8. Para preparar un pastel, se necesita: $\frac{1}{3}$ de un paquete de 750 gr. de azúcar, $\frac{3}{4}$ de un paquete de harina de kilo y $\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de 200 gr. Halla, en gramos, las cantidades que se necesitan para preparar el pastel.

   Modelo: Se conocen los tres todos y las fracciones y se quiere hallar las partes.

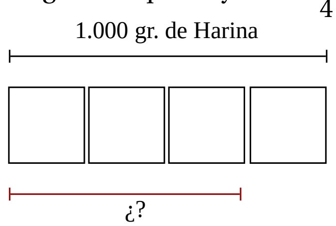


Se tiene 750 gr. de azúcar, pero de ella solo se quiere tomar $\frac{1}{3}$

   Entonces:

$$\frac{1}{3}(750) = \frac{750}{3} = 250 \text{ gr.}$$

   Por ahora se ha tomado una parte del todo, o lo que es lo mismo, la tercera parte. Solo se ha encontrado uno de los ingredientes de la torta.
   Implicitamente, tenemos que un kilo de harina equivale a 1.000 gr., queremos determinar el número de gramos que hay en los $\frac{3}{4}$ del kilo de harina.

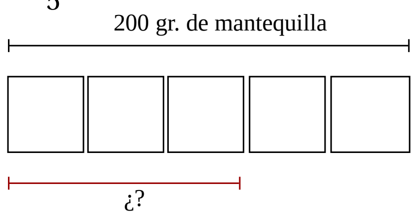


Hay 1.000 gr. de harina, pero de ella solo se gasta para el pastel las $\frac{3}{4}$ partes.

   Ahora:

$$\frac{3}{4}(1000) = \frac{3000}{4} = 750 \text{ gr.}$$

Quiere decir que la harina se ha dividido en 4 partes iguales cada una de ellas quedando en 250 gr., pero como el pastel requiere tres partes, entonces se toman: 250 gr. · 3 = 750 gr. Hasta aquí solo se ha encontrado dos ingredientes. Necesitamos saber cuál es la cantidad del tercero: $\frac{3}{5}$ de una barra de mantequilla de 200 gr.

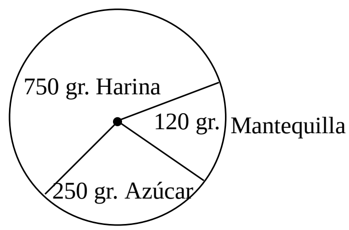


Hay 200 gr. de mantequilla, solo necesito $\frac{3}{5}$ partes.

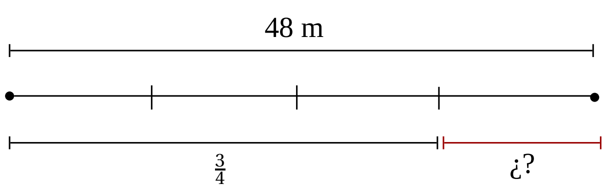
Se observa que:

$$\frac{3}{5}(200) = \frac{600}{5} = 120 \text{ gr.}$$

Como en el caso anterior de la harina, cada parte equivale a 40 gr., pero como piden tomar 3 partes entonces, se multiplica: 40 gr. · 3 = 120 gr. Finalmente, se ha encontrado la cantidad de cada uno de los ingredientes.



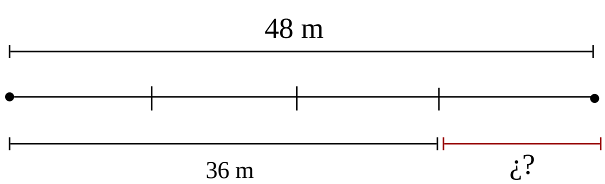
9. De una pieza de tela de 48 m se cortan $\frac{3}{4}$. ¿Cuántos metros mide el trozo restante?
   Modelo: Dado el todo y la fracción, se quiere hallar la parte:



Entonces,

$$\frac{3}{4}(48) = \frac{48 \cdot 3}{4} = \frac{144}{4} = 36 \text{ m}$$

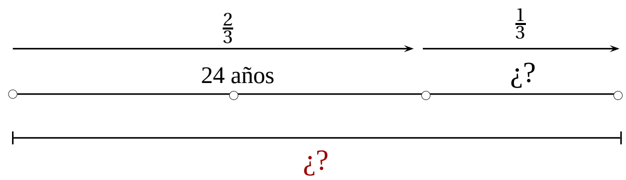
Los $\frac{3}{4}$ de 48 m equivale a 36 m, ahora se necesita hallar cuántos metros mide el trozo restante, tenemos:



$$48 - 36 = 12 \text{ m}$$

De un total de 48 m se puede obtener que el trozo restante mide 12 m.

10. Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los $\frac{2}{3}$ de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?
Modelo: Dan una parte, se tiene que encontrar la otra parte y finalmente hallar el todo.



Como se sabe, los $\frac{2}{3}$ es su edad actual que equivale a 24 años entonces: 24 : 2 = 12, la mitad de esos 24 años es 12, por lo tanto se puede concluir que cada parte que se graficó son 12 años; y si se tiene 3 partes:

$$12 \times 3 = 36 \text{ años}$$

Lo que quiere decir que la edad de Pedro es de 36 años.

11. En las casas de María, Juana y Paula, hay en total 16 animales domésticos. Entre ellos hay tres perros, el número de gatos es el doble del número de perros, hay canarios y loros. En casa de Juana aborrecen a los perros y a los loros, pero tienen 4 gatos y 2 canarios; en la casa de Paula solo hay un perro y dos gatos; en la de María hay 3 canarios. ¿Qué otros animales hay en casa de María?

Al organizar la información en un tabla tenemos lo siguiente:

	Perros	Gatos	Canarios	Loros	Total
María			3		
Juana	0	4	2	0	6
Paula	1	2	0	0	3
Total	3	6	5		16

Entre los animales que hay en casa de Juana y Paula; 6 y 3 suman 9 animales lo que quiere decir que en casa de María hay 7 animales. Pero sabemos que en total deben haber 3 perros y entre Juana y Paula tienen a uno, entonces en casa de María hay 2 perros, debe haber 6 gatos y entre Juana y Paula hay 6 gatos entonces en casa de María no hay; Luego completando la tabla se tiene:

	Perros	Gatos	Canarios	Loros	Total
María	2	0	3	2	7
Juana	0	4	2	0	6
Paula	1	2	0	0	3
Total	3	6	5	2	16

Luego en la casa de María hay 2 perros, 3 canarios y 2 loros.

12. Rojas está conversando con Pérez quien le cuenta de un nuevo club que se ha fundado en la ciudad, llamado el club de los mentirosos, cuyos miembros mienten siempre y nunca dicen la verdad. Pérez le dice a Rojas que un grupo cercano formado por tres hombres y tres mujeres están próximos a casarse entre ellos. Se llaman Pedro, Juan, Miguel, María, Ana y Susana, y todos son miembros del club. Rojas se dirige a ellos y le pregunta a Pedro con quién se va a casar. Pedro le dice que con María y entonces le pregunta a María con quien se va a casar y ella le dice que con Miguel. Rojas se dirige a Miguel y este le dice que Susana será su esposa. ¿Quién se va a casar con quién?

    Organizando ésta información se tiene:

	María	Ana	Susana
Pedro	x		
Juan			
Miguel	x		x

    Teniendo en cuenta que ninguno de los implicados dice la verdad se puede decir que: María no se casará con Pedro, ni con Miguel, por tanto su esposo será Juan; Miguel no se casará con María, ni con Susana, entonces su esposa será Ana; ahora, Pedro no se casará con María, ni con Ana porque será la esposa de Miguel, luego su esposa será Susana.
    Organizando nuevamente la información en la tabla se puede observar que:

	María	Ana	Susana
Pedro			x
Juan	x		
Miguel		x	

    Finalmente, Juan será el esposo de María; Ana la esposa de Miguel y Susana la esposa de Pedro.

13. Carmen, Estela y Alicia tienen 30 prendas de vestir de estas 15 son blusas y el resto faldas o pantalones. Carmen tiene 3 blusas y 3 faldas. Alicia que tiene 8 prendas de vestir, tiene 4 blusas. El número de pantalones de Carmen es igual al número de blusas de Alicia. Estela tiene tantos pantalones como blusas tiene Carmen. La cantidad de pantalones de Alicia es igual a la cantidad de blusas de Carmen. ¿Cuántas faldas tiene Estela?

    Modelando la información se tiene:

	Carmen	Estela	Alicia	Total
Blusas	3		4	15
Faldas	3			
Pantalones	4	3	3	
Total	10		8	30

    De acuerdo a estos datos, el total de blusas entre Carmen, Estela y Alicia debe ser 15 y entre Carmen y Alicia hay 7 blusas, por tanto Estela tiene 8 blusas; Alicia debe tener 8 prendas en total y entre pantalones y blusas tiene 7 prendas, entonces debe tener 1 falda; entre Carmen y Alicia hay 18 prendas y entre todas deben sumar 30 prendas, por tanto Estela tiene en total

12 prendas, pero entre pantalones y blusas tiene 11 prendas, entonces tiene 1 falda.

Completando la información en la tabla se puede concluir que:

	Carmen	Estela	Alicia	Total
Blusas	3	8	4	15
Faldas	3	1	1	5
Pantalones	4	3	3	10
Total	10	12	8	30

Estela tiene 1 falda.

14. Se dispone de tres cajas iguales. En una hay dos fichas blancas, en otra dos fichas negras y en la otra, una blanca y una negra. Se ponen las etiquetas:BB, NN y BN. La persona que puso las etiquetas las equivocó y a ninguna le tocó la etiqueta que le correspondía. Puedes sacar de cada caja una ficha. ¿Cuál es el menor número de fichas que puedo sacar de las cajas para saber qué caja es cada cual?

    La clave está en sacar una ficha de la caja con etiqueta BN, hay dos posibilidades: que la ficha sea blanca o negra.

    - Si la ficha es negra, esa caja debe llevar la etiqueta N; debido a que ninguna caja tiene la etiqueta que le correspondía, por tanto esa caja no puede tener la etiqueta BN. Luego la caja con etiqueta N debe ser la de las fichas blancas, es decir debe llevar la etiqueta B, de lo contrario no se cumpliría de que todas las cajas estuvieran mal etiquetadas y por último, la caja etiquetada con B es la caja de las fichas blancas y negras, debe llevar la etiqueta BN.
    - Si la ficha es blanca, esa caja debe llevar la etiqueta B; debido a que ninguna caja tiene la etiqueta que le correspondía, por tanto esa caja no puede tener la etiqueta BN. Luego la caja con etiqueta B debe ser la de las fichas negras, es decir debe llevar la etiqueta N, de lo contrario no se cumpliría de que todas las cajas estuvieran mal etiquetadas y por último, la caja etiquetada con N es la caja de las fichas blancas y negras, debe llevar la etiqueta BN.

15. En un aula hay cinco figuras geométricas, cada una fabricada con diferente material, pintada de diferente color y con un tamaño distinto. Se trata de deducir lógicamente las características específicas de cada una de ellas partiendo de los datos que se dan a continuación:

    1. Una figura es VERDE y otra BLANCA; ésta última mide 15 cm.
    2. La ESFERA no es la figura de MADERA.
    3. La PIRÁMIDE es menor que el CUBO.
    4. La figura de CARTÓN no es NEGRA.
    5. La figura de PLÁSTICO es mayor que la de VIDRIO.
    6. El CONO mide 18 cm, pero no es la figura NEGRA.
    7. La figura de METAL mide 2 cm más que la de CARTÓN y 6 cm más que la de PLÁSTICO.
    8. El CUBO no es la figura AMARILLA.

9. El CILINDRO mide 12 cm y la figura azul 10 cm.
10. La ESFERA es la figura de menor tamaño.

Para solucionar el problema se ubican los datos en la siguiente tabla:

FIGURA		Cono	Cilindro		
MATERIAL					
COLOR	Blanco			Azul	
TAMAÑO	15 cm	18 cm	12 cm	10 cm	

Ahora teniendo en cuenta la condición 7 tendríamos dos posibilidades:

- Que la figura de CARTÓN mida 10 cm, la de METAL 12 cm y la de PLÁSTICO 6 cm, cumple perfectamente la condición 7, sin embargo, la condición 5 en la que dice que la figura de PLÁSTICO es mayor que la de VIDRIO, no la está cumpliendo; ya que la de VIDRIO tendría que medir 15 cm o 18 cm, sería mayor que la de PLÁSTICO; por tanto ésta posibilidad no es válida.
- Que la figura de CARTÓN mida 16 cm, la de METAL 18 cm y la de PLÁSTICO 12 cm, cumple perfectamente la condición 7 y la condición 5; por tanto es válida.

FIGURA		Cono	Cilindro		
MATERIAL		Metal	Plástico		Cartón
COLOR	Blanco			Azul	
TAMAÑO	15 cm	18 cm	12 cm	10 cm	16 cm

Se tiene por la condición 10 que la ESFERA mide 10 cm y es la figura de VIDRIO por las condiciones 2 y 5. Además, la PIRÁMIDE mide 15 cm y el CUBO mide 16 cm por la condición 3.

FIGURA	Pirámide	Cono	Cilindro	Esfera	Cubo
MATERIAL		Metal	Plástico	Vidrio	Cartón
COLOR	Blanco			Azul	
TAMAÑO	15 cm	18 cm	12 cm	10 cm	16 cm

Luego, la PIRÁMIDE es de MADERA, el CUBO es VERDE por las condiciones 8 y 4 y el CONO es AMARILLO por la condición 6.

FIGURA	Pirámide	Cono	Cilindro	Esfera	Cubo
MATERIAL	Madera	Metal	Plástico	Vidrio	Cartón
COLOR	Blanco	Amarillo		Azul	Verde
TAMAÑO	15 cm	18 cm	12 cm	10 cm	16 cm

Finalmente se tiene que el CILINDRO es NEGRO y así se ha completado toda la información en la tabla.

FIGURA	Pirámide	Cono	Cilindro	Esfera	Cubo
MATERIAL	Madera	Metal	Plástico	Vidrio	Cartón
COLOR	Blanco	Amarillo	Negro	Azul	Verde
TAMAÑO	15 cm	18 cm	12 cm	10 cm	16 cm

BIBLIOGRAFÍA

- Campistrous, Luis y Rizo Cabrera, Celia. Aprender a Resolver Problemas Aritméticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996

- Tomas Folch, Marina. Los problemas Aritméticos de la Enseñanza Primaria. Estudios de dificultades y propuesta didáctica. Editorial Educar. Universidad Autónoma de Barcelona. 1990
  http://www.raco.cat/index.php/educar/article/viewFile/42236/90185

- Nieto Said, Jose Heber. Resolución de Problemas Matemáticos. Talleres de formación matemática. Maracaibo, 2004
  http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

- Cruz Ramírez, Miguel. La Enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas, Tomo I. Educación Cubana. Ciudad de la Habana . 2006
  http://www.matematicaparatodos.com/varios/resoluciondeproblemas.pdf

- Cantero Caja, Antonio. Resolución de Problemas Aritméticos en Educación Primaria. Proyecto de Formación en Centros. C.F.I.E. de Ponferrada. 2002-2003
  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/ c̃epco3/competencias/mates /primaria/ResolucionproblemasEOE %20Ponferrada.pdf

- Barros, Patricio y Bravo, Antonio. Problemas y Experimentos Recreativos. Yakov Perelman. 2009

- Garrett, Roger M. Revista: Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas. ISSN 0212-4521. Vol. 6 N° 3, 1988 págs 224 - 230. School of Education, Universidad de Bristol, U.K.

- Gil Perez, Daniel. La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. ISSN 0213 - 7771, 1988. págs. 3-20

- Labarre Sarduy, Alberto Félix. Estrategia para la Resolución de Problemas como un recurso para la interacción sociocultural. 1988, Pág 17