Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Modelos Económicos

Edwin Alfonso Perdomo Centeno
José Vicente Quimbaya Torres

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Modelos Económicos

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

Edwin Alfonso Perdomo Centeno
2007165980
José Vicente Quimbaya Torres
2007166639

Asesor:
Mauro Montealegre Cárdenas

Neiva, Huila
2012

Nota de aceptación

Firma Asesor del Trabajo de Grado

Firma Segundo Lector

Firma Jefe de Programa

Neiva, Enero de 2012

AGRADECIMIENTOS

Al ver concluida esta importante etapa de nuestra vida, queremos expresar un profundo agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda, apoyo y compresión nos alentaron a lograr esta meta. Agradecemos en primer lugar a Dios por todo lo que somos, a nuestros padres porque aun sabiendo que no existirá forma alguna de pagar una vida de sacrificios, esfuerzos y amor, queremos que sientan que la meta alcanzada también es de ellos y que la fuerza que nos ayudó a conseguirla fue gracias a su incansable e incondicional apoyo; de igual manera a nuestros maestros quienes con su sabiduría iluminaron nuestras mentes y sembraron en ella la semilla del conocimiento, en especial a Mauro Montealegre Cárdenas y Ricardo Cedeño Tovar quienes con su paciencia y valiosas sugerencias lograron ampliar nuestros conocimientos brindandonos las herramientas necesarias para desempeñarnos con éxito en el camino que nos espera como profesionales.

Gracias
Con amor e infinito respeto.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las ciencias ha permitido que el mundo se mueva de una manera distinta en comparación de años atrás, las tecnologías avanzan a pasos significativos generando un ritmo de vida muy acelerado en nuestros días. Es evidente que nuestro diario vivir es un constante cambio, desarrollo de dispositivos electrónicos que estarían lejos de nuestro pensamiento hace pocos años atrás. Campos como la medicina donde se llega a importantes descubrimientos que logran prolongar la vida en los seres humanos, desarrollo de supercomputadoras que procesan millones de operaciones en solo segundos, modelos económicos que rigen día tras día las finanzas de las grandes corporaciones bancarias.

Pero, ¿qué hay de las ciencias puras?, ¿qué se está haciendo en estas?, en especial, ¿qué papel están desempeñando las matemáticas en el desarrollo del mundo moderno?. Pues bien, es evidente que los desarrollos tecnológicos tienen sus cimientos en herramientas poderosas que consolidan sus bases, es decir, una buena herramienta de trabajo funciona siempre y cuando todas las partes que componen la misma están correctamente dispuestas, como ejemplo, una supercomputadora no lo sería sin un buen software. Una economía no sería la mejor si el modelo que se tiene tampoco lo es, en fin la base de todo desarrollo científico o económico deben tener cimientos sólidos y contundentes, ¿será posible que exista una ciencia que tenga dichas características?. Es claro que la ciencia más próxima a estas características es la Matemática, ya que esta brinda resultados confiables y que además sus cimientos están definidos de una manera estrictamente lógica.

Por esta razón el presente trabajo expone una aplicación de la Matemática en el área de la economía, haciendo énfasis en la optimización y su incidencia en los problemas económicos, iniciando con el análisis convexo y el estudio de conjuntos y funciones convexas, que juegan un importante papel en problemas de optimización. Luego se desarrollan algunos conceptos del cálculo en varias variables como el estudio de Máximos y Mínimos de funciones, el estudio del gradiente de una función así como un análisis a la matriz Hessiana, utilizada en la determinación de extremos de funciones.

Por otra parte se estudiará un problema elemental de la programación lineal (PL) y su relación con la optimización, revisando algunos problemas con restricción y sin restricción, y el uso de los multiplicadores de Lagrange para la resolución de algunos problemas, finalizando en el análisis de sensibilidad con el Teorema de la Envolvente.

Al final encontraremos algunas nociones de la Teoría de Juegos aplicada específicamente a la economía en el análisis de decisiones en microeconomía, haciendo énfasis en los distintos tipos de juegos, en especial un problema conocido como el dilema del prisionero y su aplicación en un problema económico.

JUSTIFICACIÓN

La Matemática es una disciplina que históricamente ha sido cuestionada en la forma de enseñar y desde allí la indiferencia que algunas personas tienen con esta ciencia, porque simplemente la ven como un ente muy abstracto. Muchas de las preguntas que surgen son de estudiantes en distintos niveles de formación, ya sea de educación primaria o secundaria, e incluso a nivel superior, y de allí la necesidad de superar este problema.

Por tal razón el presente trabajo quiere mostrar una aplicación Matemática en algunos modelos económicos, el cual pretende que maestros de colegios y universidades logren mostrar a sus estudiantes que la Matemática es una ciencia que tiene usos en distintas disciplinas y de allí la necesidad de conocer estas teorías que se convierten en un referente para docentes y estudiantes.

Por otra parte este trabajo puede ser consultado por estudiantes de ciencias económicas y Licenciatura en Matemáticas. Los primeros debido a que la aplicación de los modelos que se tratan son de gran importancia en la toma de decisiones de un economista en la empresa a fin de obtener los mejores beneficios. Para un estudiante de Licenciatura en Matemáticas es importante conocer de antemano este tipo de modelos, ya que puede convertirse en un antecedente para continuar profundizando en el campo de la modelación matemática y desde luego que este trabajo constituya una motivación para aquellos estudiantes que gustan de la Matemática Aplicada.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Indagar y comprender algunas aplicaciones de la Matemática en relación con la optimización mediante la Teoría de Juegos y la modelación Matemática en microeconomía.
- Mostrar a docentes y estudiantes la importancia de la Matemática y sus aplicaciones, especialmente en el campo de la economía.

Objetivos Específicos

- Resaltar la importancia de la Matemática Aplicada en las ciencias económicas y sus contribuciones mediante la creación de modelos.
- Desarrollar algunos conceptos básicos de la economía que son resultado de la modelación Matemática.
- Producir nuevas interpretaciones y aplicaciones de la Matemática, demostrando que es una ciencia fundamental en los desarrollos científicos y sociales.
- Mostrar que la Matemática es una ciencia necesaria en el diario vivir, y de allí la importancia de motivar a los estudiantes en todos los niveles de formación en esta disciplina.

RESUMEN

La realización de este trabajo tiene como finalidad evidenciar la aplicación de la Matemática en la economía, haciendo énfasis en la Optimización, la Teoría de Juegos, y la influencia que esta tiene a la hora de tomar decisiones en un deteminado modelo económico, además de cómo la Matemática se convierte en una herramienta fundamental para que estas teorías tomen forma en el lenguaje matemático, y comprender lo que estos significan en determinado modelo económico, y la influencia que esta puede tener dentro de una economía.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS CONVEXO

En todo proceso económico las empresas deben invertir capital en materias primas, mano de obra e impuestos, lo que significa que este capital es un recurso limitado, debido a que la compañía debe tener un nivel de producción que cumpla con las dinámicas del mercado manteniendo los precios para asegurar sus ingresos y evitar la super producción, lo que le obligaría a la empresa bajar los precios de sus productos (*Ley de la oferta y la demanda*). Lo anterior es lo que en economía se conoce como restricciones que son el punto de partida para que una empresa tome las decisiones que marcan los lineamientos de esta, y que son objeto de análisis con el propósito de maximizar sus ingresos.

Los problemas de optimización tienen que ver con maximizar o minimizar una función con o sin restricciones. La convexidad toma gran importancia a la hora de buscar óptimos, ya que en los conjuntos convexos encontramos una colección de soluciones que son consideradas factibles, es decir, estas generan utilidades para la empresa. El análisis convexo tiene la tarea de encontrar dentro de una colección de soluciones la mejor de estas mediante una determinada función objetivo, pues determina el momento en que dichos óptimos son soluciones factibles que ayudan notablemente en la toma de decisiones. Por tal razón se hace necesario realizar un estudio previo sobre los conjuntos y funciones convexas.

1.1. Conjuntos convexos

Definición 1

Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se llama **convexo** si para cualquier par de elementos $x_1, x_2 \in X$, $\lambda x_1 + [1-\lambda] x_2 \in X$, siendo $\lambda \in [0,1]$.

Si se traza un segmento de recta que une cualquier par de puntos x_1, x_2 de un conjunto, se dice que es convexo si esta recta queda enteramente en el conjunto, de lo contrario este no es convexo.

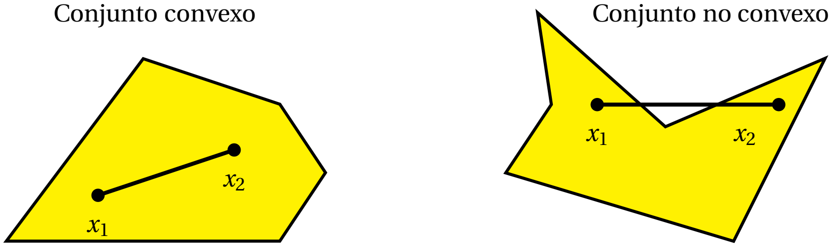

Figura 1.1

1.1.1. Propiedades de los conjuntos convexos

Si X y Y son dos conjuntos convexos, entonces:

i. $X \cap Y$ es un conjunto convexo.

ii. $X + Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\}$ es un conjunto convexo.

iii. $kX = \{kx | x \in X\}$ donde $k \in \mathbb{R}$, es un conjunto convexo.

Demostración

i. Sean los puntos x y y que están contenidos en $X \cap Y$. Esto es, $x, y \in X$, y $x, y \in Y$ y además estos conjuntos son convexos, por lo que se cumple $\lambda x + (1-\lambda) y$ está en X y en Y. Luego este demuestra que la intersección de dos conjuntos convexos, es un conjunto convexo.

ii. Sean z_1 y z_2 dos elementos cualesquiera de $X + Y$. Existen entonces $x_1, x_2 \in X$ y $y_1, y_2 \in Y$ tal que, $z_1 = x_1 + y_1$ y $z_2 = x_2 + y_2$, ahora $z = \lambda z_1 + [1-\lambda] z_2 = \lambda(x_1 + y_1) + [1-\lambda](x_2 + y_2) = (\lambda x_1 + [1-\lambda] x_2) + (\lambda y_1 + [1-\lambda] y_2)$. Pero como X y Y son dos conjuntos convexos se tiene que $\lambda x_1 + [1-\lambda] x_2 \in X$, y, $\lambda y_1 + [1-\lambda] y_2 \in Y$. Por tanto, $z \in X + Y$

iii. Sean z_1 y z_2 dos elementos cualesquiera de kX. Existen entonces $x_1, x_2 \in X$ y $k \in \mathbb{R}$ tal que, $z_1 = kx_1$ y $z_2 = kx_2$. Ahora, $z = \lambda z_1 + [1-\lambda] z_2 = \lambda(kx_1) + [1-\lambda](kx_2) = k(\lambda x_1 + [1-\lambda] x_2)$. Pero como X es un conjunto convexo se tiene que $\lambda x_1 + [1-\lambda] x_2 \in X$, por tanto, $z \in kX$

Ejemplo 1.1

i. El disco $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$ es un conjunto convexo mientras que la circunferencia $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$ no lo es.

ii. La recta $L_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = a + bx; a, b \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto convexo

iii. Los conjuntos $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2\}$ y $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq |x|\}$ son también conjuntos convexos.

1.2. Funciones cóncavas y convexas

Definición: 2
La función $y = f(x)$ es cóncava si su dominio es convexo y el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica no está nunca por encima de la gráfica.

Definición 3:
La función $y = f(x)$ es convexa si su dominio es convexo y el segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica no está nunca por debajo de la gráfica.

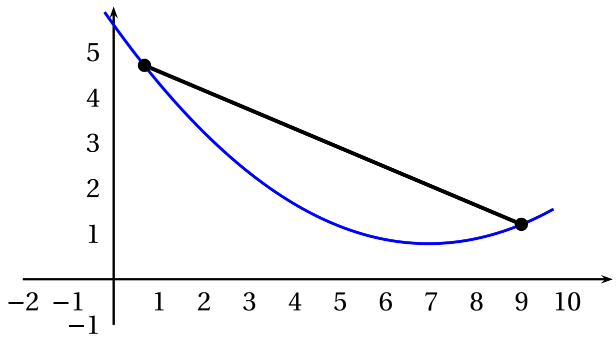

Figura 1.2: Función convexa

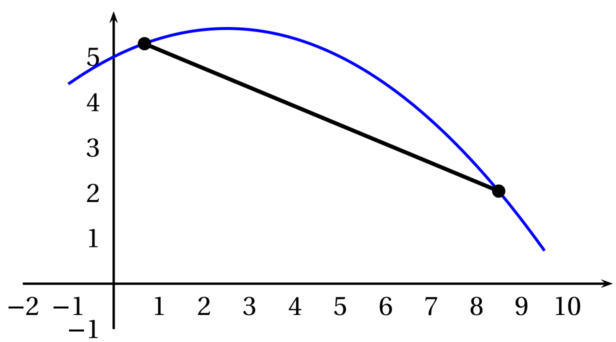

Figura 1.3: Función no convexa

Definición formal

- La función f es cóncava en el intervalo I si, para todo $a, b \in I$ y todo $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)a + \lambda b) \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$.
- La función f es convexa en el intervalo I si, para todo $a, b \in I$ y todo $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$.

Si en las definiciones anteriores exigimos que la desigualdad sea estricta para todo λ cuando $a \neq b$, la función se llama estrictamente cóncava o estrictamente convexa.

Ejemplo 1.2: Probar que $f(x) = |x|$ es convexa en $(-\infty, \infty)$.
Prueba: Sean a y b números arbitrarios y sea $\lambda \in [0,1]$. Tenemos que probar que la diferencia D entre el miembro de la izquierda y el de la derecha de la desigualdad correspondiente a funciones convexas es menor o igual a cero.

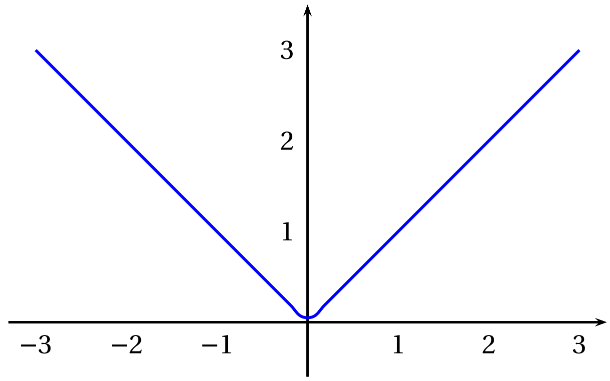

Figura 1.4 $f(x) = |x|$

Como $|xy| = |x||y|$ y $|x + y| \leq |x| + |y|$ para cualquier par de números reales x, y debemos ver que $f((1-\lambda)a + \lambda b) - \left[(1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)\right] \leq 0$, en efecto, $|(1-\lambda)a + \lambda b| - (1-\lambda)|a| - \lambda|b| \leq (1-\lambda)|a| + \lambda|b| - (1-\lambda)|a| - \lambda|b| = 0$. Así que f es convexa.

Ejemplo 1.3: $f : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ Probar que esta función es convexa.

<u>*Prueba:*</u> Veamos que $\left[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\right] - f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq 0$, en efecto, $\left[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y) = \left[(1-\lambda)x^2 + \lambda y^2\right] - ((1-\lambda)x + \lambda y)^2 = (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2 - (1-\lambda)^2 x^2 - 2(1-\lambda)\lambda xy - \lambda^2 y^2 = (1-\lambda)x^2(1-(1-\lambda)) - 2(1-\lambda)\lambda xy + \lambda y^2(1-\lambda) = \lambda(1-\lambda)\left[x^2 - 2xy + y^2\right] = \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geq 0$. Se concluye que f es una función convexa. Notemos que si $x \neq y$ entonces $(x-y)^2 \geq 0$, y si λ está en el intervalo abierto $(0,1)$ se tiene que $\lambda(1-\lambda) > 0$, concluimos luego que $\left[(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\right] - f((1-\lambda)x + \lambda y) > 0$, es decir f es estrictamente convexa.

1.3. Máximos y mínimos de funciones cóncavas y convexas.

Para el estudio de máximos y mínimos de funciones, tendremos que analizar en primer lugar los puntos críticos de una función.

Comencemos entonces con las más sencillas, la funciones de una variable.

Definición 4: Se dice que una función f tiene un valor máximo relativo en m, si existe un intervalo abierto que contenga a m, en el cual f este definida, tal que $f(m) \geq f(x)$ para toda x en este intervalo.

Definición 5: Se dice que una función f tiene un valor mínimo relativo en m, si existe un intervalo abierto que contenga a m, en el cual f este definida, tal que $f(m) \leq f(x)$ para toda x en este intervalo.

Una de las herramientas de gran ayuda para nuestro propósito lo encontramos en el cálculo con el siguiente teorema.

Teorema: Si $f(x)$ existe para todo los valores de x en el intervalo abierto (a,b) y si f tiene un extremo relativo en m, donde $a < m < b$, entonces si $f'(m)$ existe $f'(m) = 0$, es decir, en los puntos extremos de una función la recta tangente es totalmente horizontal.

Ejemplo 1.4: Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$f(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + 1\ ,\ \ x \in [-3,3]$

Solución: la función es derivable en todo punto y $f'(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{x^2-x-2}{3} = \frac{(x-2)(x+1)}{3} = 0$. Es claro que hay dos puntos en el intervalo $(-3,3)$, para los cuales $f'(x) = 0$, y estos puntos son $x = -1$ y $x = 2$. Luego debemos evaluar, $f(-3) = -\frac{3}{2},\ f(-1) = \frac{25}{18},\ f(2) = -\frac{1}{9},\ f(3) = \frac{1}{2}$, por tanto, de allí concluimos que el valor mínimo es $-\frac{3}{2}$ en $x = -3$, y el valor máximo es $\frac{25}{18}$ en $x = -1$ (*Ver figura 1.5*).

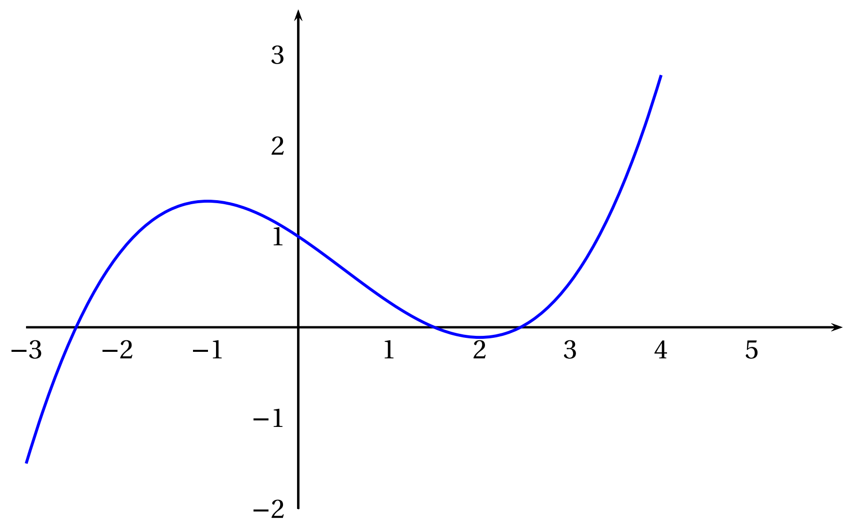

Figura 1.5 $\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + 1,\quad x \in [-3,3]$

1.3.1. Prueba de la segunda derivada para extremos relativos.

Sea m un punto crítico de una función f en la cual $f'(m) = 0$, y f'' exista para todos los valores de x en algún intervalo abierto que contenga a m si $f''(m)$ existe y,

Si $f''(m) < 0$, entonces f tiene un valor máximo relativo en m.

Si $f''(m) > 0$, entonces f tiene un valor mínimo relativo en m.

Ejemplo 1.5: Dado $f(x) = x^4 + \frac{4x^3}{3} - 4x^2$, obtener los máximos y mínimos relativos aplicando el criterio de la segunda derivada.

Solución: En primer lugar tenemos $f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$, y, $f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$. Como $0 = f'(x) = 4x(x^2 + x - 2) = 4x(x+2)(x-1)$, luego $x = 0,\ x = -2,\ x = 1$. Por tanto los puntos críticos de f son 0, -2 y 1. Apliquemos el criterio de la segunda derivada en estos puntos.

$$f''(0) = -8 < 0,\quad f''(-2) = 24 > 0;\quad f''(1) = 12 > 0$$

Lo anterior significa que el punto $x = 0$ es un máximo relativo, y los puntos $x = -2$ y $x = 1$ son mínimos relativos, (*ver figura 1.6*).

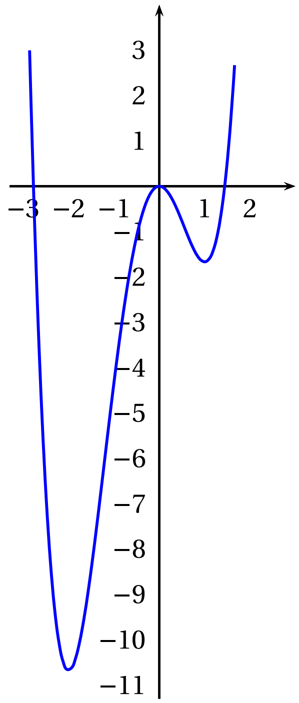

Figura 1.6 $x^4 + \frac{4x^3}{3} - 4x^2$

Ejemplo 1.6: Una nueva empresa de alimentos del departamento del Huila ha decidido sacar al mercado un nuevo producto de pulpa de fruta, para la cual han decidido utilizar un recipiente de tipo cilíndrico que debe tener una capacidad de 750 centímetros cúbicos de contenido. Con el propósito de disminuir costos en los materiales utilizados para los envases del producto, la empresa ha optado por utilizar el siguiente el modelo:

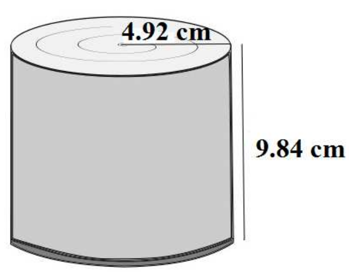

Figura 1.7

El área total del envase A_t está dado por la expresión

$$A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 \tag{1.1}$$

donde r es el radio y h es la altura del envase. Como el volumen debe ser de 750 centímetros cúbicos la representación es la siguiente:

$$750 = \pi r^2 h \tag{1.2}$$

Al despejar h en (1.2) se tiene que

$$h = \frac{750}{\pi r^2} \tag{1.3}$$

y reemplazando el valor de h en (1.1) tendremos $A_t = 2\pi r\left(\frac{750}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$ que se convierte en la siguiente función en razón de r

$$A_t(r) = \frac{1500}{r} + 2\pi r^2$$

Hallamos ahora la derivada de esta función para encontrar los puntos críticos.

$$A_t'(r) = -\frac{1500}{r^2} + 4\pi r,$$

ahora $0 = -\frac{1500}{r^2} + 4\pi r$, $r^3 = \frac{1500}{4\pi} = \frac{375}{\pi}$; así que $r = 5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$

Ahora se analizará si este punto crítico corresponde a un máximo ó un mínimo de la función, utilizando para ello el criterio de la segunda derivada.

Puesto que $A_t''(r) = \frac{3000}{r^3} + 4\pi$ entonces, $A_t''\left(5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right) = \frac{3000}{\left(5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right)^3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0$

Esto significa que en el punto $r = 5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ exite un mínimo, por lo que al reemplazar el valor de r en (1.3) se tiene:

$$h = \frac{750}{\pi\left(5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\right)^2} = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

Finalmente los valores de r y h son $r = 5\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \approx 4{,}92$ cm y $h = 10\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \approx 9{,}84$ cm.

Lo anterior significa que la empresa debe utilizar envases que tengan una altura de 9.84 cm y un radio de 4.92 cm aproximadamente (*ver figura 1.7*), y de esta manera disminuir costos en la producción de los envases para su nuevo producto.

En economía se resaltan este tipo de soluciones, ya que son estas las que permiten analizar la evolución de un mercado y poder tomar las decisiones más acertadas, es por esto que en busca de enfrentarnos a problemas reales en economía, y teniendo en cuenta que allí son las variables las que aumentan considerablemente, veremos que se hace necesario buscar en el cálculo de varias variables algunos resultados que son de gran importancia para este propósito, que consiste fundamentalmente en desembocar en el Teorema de la Envolvente y sus aplicaciones.

CAPÍTULO 2

DERIVADAS DIRECCIONALES Y GRADIENTES

Ahora se analizará la definición de derivada parcial con el fín de determinar la tasa de variación de una función en una dirección determinada, esto es lo que se conoce como **derivada direccional.**

Si f es una función de dos variables x, y. Sea $p(x, y)$ un punto en el plano, y sea u el vector unitario que forma un ángulo θ, $u = \cos\theta i + \sin\theta j$

Definiciń 6: Sea f una función de dos variables x, y. Si u es el vector unitario $\cos\theta i + \sin\theta j$, entonces la derivada direccional de f en la dirección u , representada por:

$$D_u f(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - f(x, y)}{h} \quad ,$$

siempre que este límite exista. Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema. Si f es una funciń diferenciable de x y y, y $u = \cos\theta i + \sin\theta j$, entonces

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$$

Ejemplo 2.1: Determinar $D_u f(x, y)$ si $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2$; $u = \cos\frac{\pi}{4} i + \sin\frac{\pi}{4} j$

$$D_u f(x, y) = 4x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 10y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}.$$

La derivada direccional se puede escribir como el producto escalar de dos vectores, ya que

$$f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta = (\cos\theta i + \sin\theta j)(f_x(x, y)i + f_y(x, y)j)$$

Luego,

$$D_u f(x, y) = (\cos\theta i + \sin\theta j)(f_x(x, y)i + f_y(x, y)j)$$

El vector del segundo miembro de la igualdad se conoce como el gradiente de la función, y determina la dirección hacia la cual la función sufrió mayor incremento o tasa de variación. El gradiente de una función se simboliza con la letra griega nabla ∇, y en algunas ocasiones como $grad\, f$.

Definición 7: Si f es una función de dos variables x, y, además f_x y f_y existen entonces el gradiente de f se define como:

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j$$

Con lo cual la derivada direccional se escribe como

$$D_u f(x,y) = u \cdot \nabla f(x,y)$$

Ejemplo 2.2:

i. Determine el gradiente de la función $f(x,y) = 4x^2 - 3xy + y^2$.

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,i + f_y(x,y)\,j = (8x-3y)\,i + (2y-3x)\,j$$

ii. Determine el gradiente de la función $f(x,y) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2$ en el punto $(4,3)$, además calcular la derivada en la dirección $\frac{\pi}{4}$ en el mismo punto.

Tenemos

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{8}x\,i + \frac{2}{9}y\,j;\ \ \nabla f(4,3) = \frac{1}{2}i + \frac{2}{3}j$$

Ahora calculamos $D_u f(4,3)$ en la dirección $\frac{\pi}{4}$. El vector unitario es:

$$u = \cos\frac{\pi}{4}\,i + \sin\frac{\pi}{4}\,j = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$$

La derivada direccional buscada es:

$$D_u f(4,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j\right)\left(\frac{1}{2}i + \frac{2}{3}j\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}.$$

Si α es la medida en radianes del ángulo entre los vectores u y ∇f, entonces se tiene

$$u \cdot \nabla f(x,y) = ||u||\,\big||\nabla f(x,y)|\big|\cos\alpha$$

Finalmente se deduce,

$$D_u f(x,y) = ||u||\,\big||\nabla f(x,y)|\big|\cos\alpha.$$

Como se observa la derivada direcional será un máximo cuando $\cos\alpha = 1$, es decir cuando el vector unitario u tiene la misma dirección de $\nabla f(x,y)$, esto significa que $D_u f(x,y) = \big||\nabla f|\big|$, por lo tanto, el gradiente de una función está en la dirección en la cual la función tiene la máxima representación, es decir, el gradiente apunta en la dirección de mayor declive. Veamos la representación en curvas de nivel ejemplo 8 (ii.) en el punto $(4,3)$, *(Ver figura 2.1)*

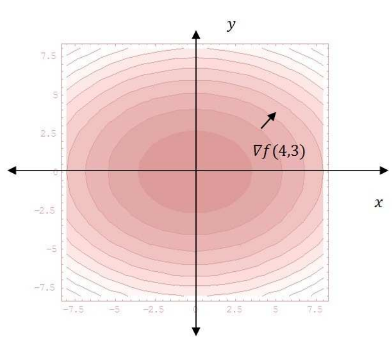

Figura 2.1

2.1. Valores extremos de funciones de dos variables por el método de la segunda derivada.

En economía el problema de optimizar una función para la toma de decisiones consiste en la búsqueda de los máximos y mínimos de una función de variable real y valor real. Por los problemas que tenemos con los puntos críticos, específicamente por los puntos de silla se presentan a continuación las condiciones para determinar los máximos y mínimos de una función.

Sea f una función de dos variables tal que f y su primera y segunda derivadas parciales sean continuas en algún disco abierto $B((a,b),r)$. Además que $f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$ entonces.

- **i.** f tiene un máximo relativo en (a,b) si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2>0$ y $f_{xx}(a,b)>0$
- **ii.** f tiene un máximo relativo en (a,b) si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2>0$ y $f_{xx}(a,b)<0$
- **iii.** f tiene punto de silla si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2<0$
- **iv.** No se puede decidir si $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2=0$

Ejemplo 2.3:
Una empresa transportadora de alimentos requiere diseñar una caja rectangular sin tapa con un volumen de 4000 cm^3. Hallar las dimensiones de la caja si se quiere utilizar la mínima cantidad de material en su manufactura.
Solución
Sea x unidades la longitud de la base de la caja; y unidades la anchura de la base de la caja; z unidades la profundidad de la caja y A unidades cadradas el área de la superficie de la caja.

Cada una de las variables x, y y z está en el intervalo de $(0,+\infty)$. Tenemos las ecuaciones

$$A = xy + 2xz + 2yz$$
$$V = xyz = 4000 \text{ cm}^3$$

De aquí tenemos que $z=\dfrac{4000}{xy}$ y de esto $A=xy+\dfrac{8000}{y}+\dfrac{8000}{x}$. Por lo tanto $\dfrac{\partial A}{\partial x}=y-\dfrac{8000}{x^2}$, y, $\dfrac{\partial A}{\partial y}=x-\dfrac{8000}{y^2}$. También $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}=\dfrac{16000}{x^3}$, $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x\partial y}=1$, y, $\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2}=\dfrac{16000}{y^3}$. Haciendo $\dfrac{\partial A}{\partial x}=0$ y $\dfrac{\partial A}{\partial y}=0$ encontramos que:

$$x^2y-8000=0,\ \text{y},\ xy^2-8000=0,$$

de lo cual se concluye que $x=\sqrt[3]{8000 \text{ cm}^3}=20$ cm y $y=\sqrt[3]{8000 \text{ cm}^3}=20$ cm.

Cuando $x=20$ cm y $y=20$ cm, $z=\dfrac{4000}{20\times 20}=10$ cm

La caja que transporta los alimentos debe tener base cuadrada de 20 cm de lado y una profundidad de 10 cm, que es la mitad de uno de los lados de la base (*ver figura 2.2*).

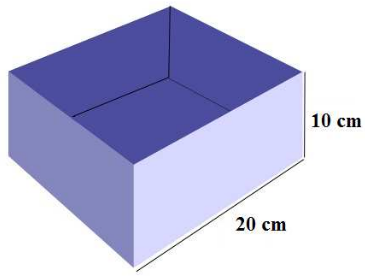

Figura 2.2

2.2. Matriz Hessiana

En el cálculo cuando las variables aumentan considerablemente, como lo es en un problema de la vida real y más aún en economía, el cálculo de máximos y mínimos de funciones lo podemos realizar con una herramienta poderosa como lo es la matriz Hessiana, la cual consiste en calcular las segundas derivadas parciales de una función de n variables, veamos de quí se trata.

La matriz Hessiana de la función $f, Hf(x)$, es la matriz de orden $n \times n$ formada por las derivadas parciales de segundo orden de la función, esto es:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial_1}(x) & . \quad . \quad . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial_n}(x) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial_1}(x) & . \quad . \quad . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial_n}(x) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.4:
Calcular las matrices hessianas de las siguientes funciones.

i. $f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^2$

ii. $f(x, y, z) = x^3 z + xy^2 + z^2 y^2$

Solución
i.

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$$

ii.

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 6xz & 2y & 3x^2 \\ 2y & 2x+2z^2 & 4zy \\ 3x^2 & 4zy & 2y^2 \end{pmatrix}$$

2.3. Aplicación de la matriz Hessiana

2.3.1. Concavidad y convexidad de conjuntos

La matriz hessiana brinda una gran herramienta para determinar la convexidad o concavidad de un conjuto determinado por una aplicación o función, sirviendo además para la determinación de los puntos críticos de la misma. Para ello tenemos las siguientes definiciones.

Sea A una matriz $n \times n$ simétrica. Entonces se dice que:

i. A es **negativa definida-n.d**, si $x^t Ax < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

ii. A es **negativa semidefinida-n.s.d**, si $x^t Ax \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

iii. A es **positiva definida o semidefinida** invirtiendo las disigualdades anteriores.

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y la función definida por $f : A \to \mathbb{R}$ que cumpla condiciones suficientes de segundo orden, y además que estas sean continuas.

- f es cóncava si y solo si, para toda $a \in A$, la matriz hessiana es *negativa semidefinida* (n.s.d.).
- f es convexa si y solo si, para toda $a \in A$, la matriz hessiana es semidefinida positiva (p.d.).
- si para toda $a \in A$ la matriz hessiana $Hf(a)$ es definida negativa entonces f es estrictamente cóncava.
- si para toda $a \in A$ la matriz hessiana $Hf(a)$ es definida positiva entonces f es estrictamente convexa.

2.3.2. Determinación de puntos críticos

- **Máximo:** si la matriz hessiana en el punto es definida negativa.
- **Mínimo:** si la matriz hessiana en el punto es definida positiva.
- **Punto de silla:** si la matriz hessiana en el punto es indefinida es decir, no definida o semidefinida positiva ni definida semidefinida negativa.

Es claro que las definiciones que se dan en el cálculo acerca de los puntos críticos de una función y teniendo en cuenta que la definición $f_{xx}(a_1,a_2)f_{yy}(a_1,a_2) - \left[f_{xy}(a_1,a_2)\right]^2$ corresponde al determinante de la matriz hessiana.

CAPÍTULO 3

¿QUÉ ES LA OPTIMIZACIÓN?

Es importante reconocer que los seres humanos, nos preocupamos en buscar el mejor beneficio de las actividades cotidianas. Por ende queremos minimizar costos, maximizar ganancias que es el objetivo de la optimización. La Matemática ha estado presente en las grandes revoluciones del conocimiento a tal punto que ha desarrollado formas de escribir para comunicar y explicar resultados de la naturaleza en un posible futuro. Puesto que para obtener mejores beneficios, debemos tomar la mejor decisión, y es allí donde nuestro trabajo toma gran importancia, porque explicaremos cómo se puede obtener un mejor beneficio según la actividad que se está realizando.

En esta sección realizamos una breve introducción historica a la optimización.

3.1. Historia

La optimización está estrechamente ligada a la Investigación de Operaciones, la cual tiene como fundamento dar solución a problemas que requieran una "solución óptima" a través de la herramienta Matemática. Su origen se dió durante la Segunda Guerra Mundial en Inglaterra, cuando el gobierno encomendó a un equipo de científicos ingleses para la toma de decisiones en cuanto al manejo de materiales bélicos exclusivos de las fuerzas militares.

Al término de la guerra estas ideas fueron adoptadas por la industria y la agricultura, pues se convirtió en una herramienta de gran utilidad para la toma de decisiones de las crecientes industrias que vieron favorecida su productividad.

3.2. Antecedentes de la optimización

Quesnay fue un economista francés y fundador de la escuela fisiocrática de la economía política burguesa del siglo XVIII. Los fisiócratas se preguntaban sobre el origen del producto nacional y el reparto entre las distintas clases que hacían parte de la sociedad. Entre los aportes más significativos se encuentra el *Tableau Economique de Quesnay* (*modelo en el cual la sociedad se divide en tres clases: propietarios de la tierra, trabajadores estériles y trabajadores productivos*), ya que representa el primer modelo lineal para la descripción de relaciones económicas. Este modelo en verdad carece de función objetivo, que es la característica de la optimización, pero ya se ven implícitamente la idea de optimalidad pues se busca en sí un sistema económico estable (equilibro).

Vale la pena resaltar algunas de las personas que han hecho aportes de relevancia en la optimización lineal, de matemáticos y economistas inclusive de la extinta URSS (*unión de repúblicas socialistas soviéticas*), e incluso militares americanos. Entre los aportes significativos encontramos los trabajos de Pareto en la teoría económica y política con el principio que lleva su nombre que también se conoce como la regla 80 - 20. Otro de los importantes aportes los realizó Von Neumann con los juegos llamados *Zero-sum* (suma cero) donde los jugadores conocen lo que está planeando su adversario, y si este pierde obtener la menor pérdida posible. Este procedimiento es conocido como **teorema del minimax**.

Por su parte Leontief y su modelo **input-output** en la Unión Soviética constituyó un marco de referencia para los modelos de optimización lineal que más tarde realizaría Danzing en 1947 en los Estados Unidos. Más tarde Koopman desarrollaría el modelo del Transporte que contribuyo en la movilización de rutas marítimas y terrestres para las fuerzas militares y para el comercio. Otro de los aportes que ha sido de gran relevancia se debe a Kantorivich y Gavurin, pues en la Unión Soviética se buscaba fortalecer las industrias y las comunicaciones, mediante planes racionales de transporte realizados por Tolstoy quien propuso tres modelos, los cuales no fueron satisfactorios. Y fueron Kantorivich y Gavurin en los años cuarenta quienes completaron lo que hacía falta.

Pero al parecer la teoría de la optimización lineal es aún más antigua y que el modo de abordarla está estrechamente relacionado con las matemáticas, específicamente en los sistemas de inecuaciones y los conjuntos convexos, que al parecer Fourier (1772-1837) trabajaba ya en términos de optimizar, tal cual como se hace hoy en día.

Como vemos son muchos los pensadores que de una u otra forma han construido modelos que aún hoy se utilizan en muchas economías, y que desde luego han sido piezas fundamentales para la obtención de nuevos modelos y teorías, que sin duda son las que mueven los mercados del siglo XXI.

Ejemplo 3.1: Una compañía de autobuses que viaja de Pitalito (Huila)-Garzón (Huila) ofrece plazas para fumadores al precio de \$10.000 y a no fumadores al precio de \$6.000. Al no fumador se le deja llevar 50 kgs de peso y al fumador 20 kgs. Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3.000 kg. ¿Cuál ha de ser la oferta de plazas de la compañía para cada tipo de pasajeros, con la finalidad de optimizar el beneficio?

Solución
Sean las variables de decisión: x = número de plazas de fumadores, y, y = número de plazas de no fumadores.

La Función objetivo $f(x, y) = z$ es:

$$\text{máx}\, z = 10000x + 6000y$$

Restricciones:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x + y \leq 90$$

$$20x + 50y \leq 3000$$

De la desigualdad $20x + 50y \leq 3000$ equivale a $2x + 5y \leq 300$.
La zona de soluciones factibles (*ver Figura 3.1*) utilizando el método gráfico encontrando los siguientes vértices:

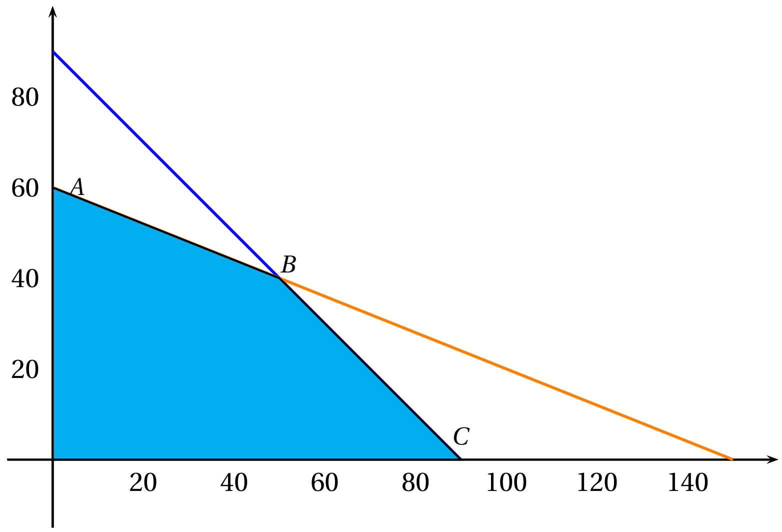

Figura 3.1

$$A(0,60)$$

$$B(50,40)$$

$$C(90,0)$$

Valores de la función objetivo:
$f(A) = 6000 * 60 = 360000$
$f(B) = 10000 * 50 + 6000 * 40 = 740000$
$f(C) = 10000 * 90 = 900000$ **Valor máximo.**

Por lo que la compañá de buses ha de vender 90 plazas para fumadores y ninguna para no fumadores y así obtener un beneficio máximo de $900.000 .

Ahora nos centraremos en el análisis de un teorema que permite apreciar la afectación de la función objetivo cuando los parámetros de esta varían, afectando directamente su resultado, veamos de qué se trata.

CAPÍTULO 4

EL TEOREMA DE LA ENVOLVENTE

En la década de 1930 un economista distinguido, Jacob Viner, analizó el comportamiento de las firmas (empresas o compañías) en el corto y largo plazo. Viner definió el corto plazo como un periódo de tiempo en que un factor de producción, presumiblemente *capital* es fijo, mientras que el otro factor *trabajo* es variable. Él postula una serie de curvas de costes de corto plazo (CMeC), donde primero decrece y luego de sus puntos mínimos (para la entrada de capital sucesivamente mayor) crece. Viner razonó que si ambos insumos (inputs) fueran variables, el costo resultante medio a largo plazo (CMeL) siempre será menor o igual al correspondiente coste a corto plazo. Él, por lo tanto concluyó que la curva de costo medio a largo plazo debería ser la “Envolvente” a todas las curvas de costes medios a corto plazo. (*Ver figura 4.1*).

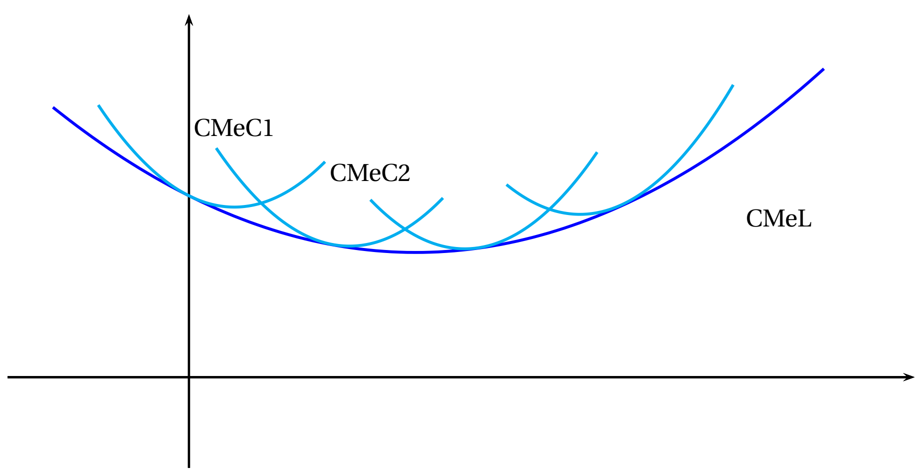

Figura 4.1

Sin embargo, Viner estaba desconcertado por el hecho de que la curva de coste medio a largo plazo no pasaba por los puntos mínimos de las curvas de coste medio a corto plazo, ya que la reducción de los costes unitarios parecía aumentar los beneficios disponibles. Por otra parte, en los puntos de tangencia, las pendientes de las curvas de largo y corto plazo eran las mismas, indicando que el coste medio fue cayendo (o subiendo) en la misma tasa, independientemente de si el capital se mantiene constante. Viner al parecer pidió a su dibujante para que este elaborara una curva de coste medio a largo plazo que fuera envolvente a las curvas de coste medio a corto plazo que tambien pasara por los puntos mínimos de las curvas de coste medio a corto plazo. Cuando Wong, su dibujante indicó la imposibilidad de esta ocurrencia, Viner optó por dibujar la curva de coste medio a largo plazo a través de los puntos mínimos de las curvas de coste medio a corto plazo, lo cual no era posible a excepción de que la curva sea un segmento de recta que pase por los puntos mínimos.

El problema fue pronto analizado algebraicamente por Paul Samuelson, quien demostró la exactitud de la tangencia de las curvas de coste medio a corto y largo plazo. Sin embargo sigue siendo algo desconcertante el hecho de que la tasa o razón de cambio de una función objetivo sea el mismo, no tanto como si una variable se mantiene constante. Tal vez lo más sorprendente, ya que los economistas investigaron este rompecabezas de más, fue el descubrir relaciones que subyacen al "Teorema de la Envolvente" que revelan los teoremas básicos de la existencia refutable de la estática comparativa. Esto es el problema al que trataremos ahora.[1]

4.1. Teorema de la Envolvente sin restricciones

Dada la función de beneficios $f(x,\alpha)$ partimos del problema

$$\max_x f(x,\alpha)$$

donde $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $\alpha=(\alpha_1\ldots\alpha_n)$
En una fución de producción, las condiciones de primer orden asociadas son:

$$f_{x_1}=f_{x_2}=\ldots=f_{x_n}=0$$

Este sistema permite encontrar los puntos críticos del problema. Para que estos puntos sean máximos, debemos exigir que en la función hayan condiciones de segundo orden, comprobando la concavidad de la función. En este caso es fundamental el hecho de que la matriz hessiana de f sea distinta de cero con el propósito de poder aplicar el teorema de la función implícita, lo cual nos lleva a exigirle a la función que sea estríctamente cóncava.

Consideremos un modelo de maximización con dos variables de decisión x_1 y x_2, y un parámetro α, por lo que la función de producción a maximizar es $y=f(x_1,x_2,\alpha)$. Las condiciones de primer orden son $f_{x_1}=f_{x_2}=0$; y asumiendo las condiciones suficientes de segundo orden, obtenemos la función $x_i=x_i^*(\alpha)$ como solución de las ecuaciones de primer orden. Al sustituir esta solución dentro de la función objetivo tendremos.

$$\phi(\alpha)=f(x_1^*(\alpha),x_2^*(\alpha),\alpha)$$

La función $\phi(\alpha)$ es el valor de la función objetivo f cuando un x_i maximiza la utilidad *(para un determinado α)* de f. Además $\phi(\alpha)$ representa el máximo valor de f para algún α específico. Llámese a $\phi(\alpha)$ *la función objetivo indirecta*.

Nos preguntamos ahora ¿Como puede variar ϕ cuándo α varía?. Al diferenciar con respecto a α tendremos:

$$\phi_\alpha(\alpha)=f_{x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial\alpha}+f_{x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial\alpha}+f_\alpha$$

Sin embargo, de las condiciones de primer orden, $f_{x_1}=f_{x_2}=0$, vemos que los dos términos del segundo miembro a mano derecha desaparecen, quedando:

[1] Ver The structure of economics a mathematical análysis, Eugene Silberberg, Wing Suen

$$\phi_\alpha(\alpha) = f_\alpha$$

Esta ecuación dice que como α cambia, la tasa de variación del máximo valor de f, donde x_1 y x_2 varían de forma óptima, variando en α , es igual a la tasa de cambio de f variando en α, manteniendo x_1 y x_2 constantes.

Antes de estudiar la geometría de la ecuación vamos a comprobar el modelo de maximización del beneficio.

Supongamos que una empresa desea producir un determinado producto dado por una función de producción $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, para la cual requiere de n insumos (*inputs*) a un precio w_i, y que su producción *(outputs)* tiene un costo p. El beneficio viene dado por

$$\pi(x_1, ..., x_n) = pF(x_1, ..., x_n) - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

Por las condiciones de primer orden para puntos críticos *máximos ó mínimos* obtenemos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = p\frac{\partial F}{\partial x_i} - w_i = 0 \;\; i = 1, 2, ..., n$$

Suponiendo que las condiciones de segundo orden son suficientes para la maximización, sabemos que se producen las soluciones *(óptimas)* $x_i^*(w_1, w_2, ..., w_n, p)$ para $i = 1, ..., n$, por lo tanto, al reemplazar estos valores óptimos en la función de beneficio se tiene

$$\pi^* = pF(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) - \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^*$$

que es la función de máximo beneficio.

El interrogante ahora es determinar, o analizar cómo varía el beneficio si se altera el valor de un determinado insumo, por ejemplo, si varía el precio de x_1 del primer insumo, tendremos por la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial w_1} = p\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial w_1} - \left[x_1^* + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial w_1} \right]$$

$$= p\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_i^*}{\partial w_1} - x_1^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial w_1}$$

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial w_1} \sum_{i=1}^{n} \left(p \frac{\partial F(x_1^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i^*} - w_i \right) - x_1^* = -x_1^*$$

recordemos que con la condición de primer orden aseguramos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p \frac{\partial F(x_1^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i^*} - w_i \right) \frac{\partial x_i^*}{\partial w_1} = 0.$$

Esto nos permite interpretar que si aumenta el precio del primer insumo en una unidad, el beneficio disminuye en una proporción igual a x_1^*.

4.2. Aplicaciones a la teoría de la producción y a la teoría del consumidor

El objetivo de toda empresa es maximizar su beneficio con respecto a algún tipo de acción, sea π la función de beneficio, dada por

$$\pi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = R(a_1, a_2, \ldots, a_n) - C(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

donde R indica los ingresos y C los gastos. Ahora bien por las condiciones de primer orden se tiene

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\partial R}{\partial a_i} = \frac{\partial C}{\partial a_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Esto es, si la empresa decide escoger un nivel a_i de producción, entonces la empresa debe escoger aquel cuyo costo marginal sea igual al ingreso marginal. Si la empresa emplea un nivel de fuerza laboral a_i, entonces debe contratar una cantidad de trabajo de manera tal que el ingreso marginal de emplear una persona más, sea igual al costo marginal de emplear dicha persona.

La decisión de la empresa queda resuelto si:

- Se conoce cuánto producir (producto) y a qué precio vender.
- Se conoce cuánto debe utilizarse en cada insumo y cuánto pagar por ellos.

Usualmente se supone que tanto los precios de los insumos como los precios de venta son dados y fijos y, por lo tanto, sólo interesa saber cuánto debe producirse y emplearse como insumos. Lo anterior no es tan frecuente, ya que en un mercado se encuentran los productores *(muchos)* y los consumidores *(más todavía)* y ninguno tiene el poder de influir en los precios.

Supongamos una determinada tecnología de producción representada por una función de producción

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

dada por $q = f(x_1, \ldots, x_n)$ donde $x_1, \ldots, x_n > 0$ son los insumos.
A esta función se le exigen algunas propiedades:

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua sobre $\mathbb{R}^n$ y C^2 (*continua en su segunda derivada*), sobre $\{x \in \mathbb{R}^n | x_i > 0 \;\; i = 1, \ldots, n\}$ con $f(0) = 0$ es decir, si no se utilizan insumos logicamente no existe ningún nivel de producción.
- Para todo $x \in \{x \in R^n | x_i > 0\}$, y, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} > 0$, esto significa que los insumos son productivos, en el sentido de que un mayor empleo de ellos produce un incremento en la tasa de producción.
- f es una función cóncava en $\{x \in \mathbb{R}^n | x_i > 0\}$ significa que el producto marginal es decreciente

4.3. Teorema de la envolvente en un problema sin restricciones

Consideremos el problema de maximización donde tomaremos un parámetro arbitrario lo llamaremos r, por lo que nuestra función será:

$$\max_x f(x,r)$$

Donde x es un $n-$ vector y r es un $k-$vector de parámetros. Ahora supondremos que el vector r posee una solución única, denotándola con $x^*(r)$. Nuestro trabajo consiste en determinar el máximo valor de f, para cualquier valor dado de r, por $f^*(r)$ es decir:

$$f^*(r) = f(x^*(r), r)$$

esta es la función de máximo valor.

Ejemplo 4.1: Sea $n = 1$, $k = 2$ y $f(x,r) = x^{r_1} - r_2 x$, donde $0 < r_1 < 1$. Esta función es cóncava, la prueba es sencilla utilizando la prueba de la segunda derivada, y la solución de un máximo de $f_x(x,r) = r_1 x^{r_1-1} - r_2 = 0$ es positiva, por lo que la condición de primer orden satisface la primera condición de orden, por lo tanto

$$x^*(r) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_1}}$$

es la solución del problema, por lo que la función de máximo valor f es:

$$f^*(r) = (x^*(r))^{r_1} - r_2 x^*(r) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{1-r_2}} - r_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_2}}$$

Ejemplo 4.2: Consideremos el hecho de que una empresa pude producir un determinado producto con precio p, y un insumo con precio w. De acuerdo con la función de producción f. El beneficio de la empresa cuando utiliza la cantidad x de la entrada $\pi(x,(w,p)) = pf(x) - wx$, y la función de máximo beneficio

$$f^*(w,p) = pf(x^*(w,p)) - wx^*(w,p).$$

Donde $x^*(w,p)$ es la cantidad óptima de los precios de insumos (w,p). Esta función f^* se conoce como la función utilidad de la empresa. Por el teorema de la envolvente , la derivada de esta función con respecto a p, es la derivada parcial de π con respecto a p evaluado en $x = x^*(w,p)$ esto es,

$$f(x^*(w,p))$$

En particular la derivada es positiva si el precio de la producción aumenta, entonces los beneficos máximos de la empresa aumentan.

También por el teorema sobre la derivada en los máximos beneficios de la empresa con respecto a w es:

$$-x^*(p,w)$$

Este resultado es conocido como **el lema de Hotelling**. Como vemos esta derivada es negativa, esto es, si el precio de los insumos aumentan, entonces la ganancia máxima de la empresa disminuye.

Una consecuencia del **Lema de Hotelling** es que podemos encontrar fácilmente la función de demanda de insumos de la empresa x^*, si conocemos la función de beneficios de la empresa, aunque no sepamos la función de producción de la empresa: Tenemos que $x^*(p,w) = -\pi^*_w(p,w)$ para todo (p,w) por lo que puede obtenerse la función de demanda de insumos, simplemente diferenciando la función de beneficio.

Considerando el ejemplo anterior, en el cual teníamos la función $f(x,r) = x^{r_1} - r_2 x$, donde $0 < r < 1$. Encontramos que allí la solución estaba dada por

$$x^*(r) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_1}}$$

así con el Teorema de la Envolvente, la derivada del máximo valor de f con respecto a r_1, es la derivada de f con respecto a f_1 evaluada en $x^*(r)$, por lo tanto esto es:

$$(x^*(r))^{r_1} \ln x^*(r)$$

es decir,

$$\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_1}}\right]^{r_1} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_1}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{1-r_1}} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{1}{1-r_1}}$$

Pero ¿por qué es que llamamos a este teorema *¿envolvente?*. Pues bien, es una curva o superficie que es tangente a cada una de la familia de curvas que dependen de las variables y parámetros en su valor máximo.

Veámoslo con un ejemplo.

Consideremos para ello un modelo de 2 variables y un parámetro, de tal forma que se cumplan las condiciones de primer orden

$$x_1 = x_1^*(\alpha), \quad \text{y}, \quad x_2 = x_2^*(\alpha)$$

Por lo que la función obejtivo indirecta es

$$\phi(\alpha) = f(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha)$$

Donde sabemos que $\phi(\alpha)$ proporciona el máximo valor de f para un determinado valor en el parámetro, por lo que tendremos

$$f(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha) \leq \phi(\alpha)$$

Consideremos un valor arbitrario de α sea este α^0, tal que para este valor encontramos los valores óptimos de las variables de decisión, por lo que tendremos

$$x_1^0 = x_1^0(\alpha^0), \quad \text{y}, \quad x_2^0 = x_2^*(\alpha^0)$$

de donde verificaremos

$$\phi(\alpha^0) = f(x_1^0, x_2^0, \alpha^0)$$

Ahora, si mantenemos los valores de las variables constantes pero cambiamos el valor del parámetro, donde se puede ver que los valores de las variables no son máximos de la función f para los demás valores de α, de manera tal que para estos puntos

$$f(x_1^0, x_2^0, \alpha) < \phi(\alpha)$$

siempre en un entorno de α^0. Bajo los criterios de diferenciabilidad, f y ϕ deben ser tangentes en α^0, siendo además f más concava, ó menos convexa que ϕ en ese punto. Como esto se puede verificar para cada α arbitrario, podemos ver que $\phi(\alpha)$ será la envolvente de las curvas $f(x_1, x_2, \alpha)$, cuando α varía en su dominio, de allí su nombre *Teorema de la Envolvente*. Veámoslo de manera gráfica.

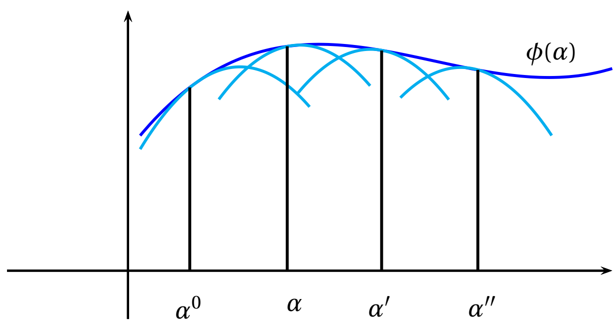

Figura 4.2

Se observa que hemos dibujado la curva que corresponde a f cuando vamos cambiando el parámetro α, mientras que ϕ recoge el valor óptimo de cada una de las curvas para cada valor de α, siendo tangente en cada punto donde f alcanza su máximo.

4.4. Teorema de la envolvente sujeta a restricciones

Veamos que ocurre cuando deseamos optimizar una fución sujeta a restricciones, por lo que ahora nuestro interés se dirige a las siguientes expresiones.

$$\text{máx}\, f(x, y) \text{ sujeta a } g(x, a) \leq 0\,, \quad x \geq 0$$

y suponemos que $x^*(a)$, donde a es un parámetro, es la solución a dicho problema, por lo que definimos la *Función de máximo valor* $V(a)$

$$V(a) = f(x^*(a), a)$$

El teorema que enunciaremos es conocido como Teorema de la Envovlente, el cual establece la variación de la funcion de máximo valor ante un cambio del parámetro a.

Supongamos que f y g son funciones derivables, y que $x^*(a)$, $\lambda^*(a) > 0$, donde λ es el multiplicador de Lagrange

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a} = \frac{\partial L(x^*(a), \lambda^*(a), a)}{\partial a} = \frac{\partial \phi(a)}{\partial a}$$

Lo que nos dice el teorema de la envolvente es que si en un problema de optimización, deseamos saber cómo reaccionará el valor de la función objetivo ante un cambio en las variables, lo que debemos hacer es derivar el lagrangiano respecto a dicha variable.

Demostración:

Las condiciones de Kuhn- Tucker nos dice que siendo L el Lagrangiano,

$$\frac{\partial L(x^*(a),\lambda^*(a),a)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial x_i}+\lambda^*(a)\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial x_i}=0$$

$$\text{para} \quad i=1,...,n, \quad y, \quad g(x^*(a),a)=0$$

por lo tanto, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial L(x^*(a),\lambda^*(a),a)}{\partial x_i}=0$$

y

$$\frac{\partial L(x^*(a),\lambda^*(a),a)}{\partial \lambda}=g(x^*(a),\lambda^*(a),a)=0$$

se tiene que

$$\frac{\partial \phi(a)}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda^*}{\partial a}+\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{\partial L}{\partial a}$$

Donde L se evalúa en $(x^*(a),\lambda^*(a),a)$ y x_i y λ^* en a.

Además con f en $(x^*(a),a)$ se tiene,

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial a_j}+\frac{\partial f}{\partial a_j}=-\sum_{i=1}^{n}\lambda^*\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial a_j}+\frac{\partial f}{\partial a_j}$$

pero como $g(x^*(a),a)=0$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial x_i^*}{\partial a_j}+\frac{\partial g}{\partial a_j}=0$$

y, por lo tanto

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a_j}=\lambda^*(a)\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial a_j}+\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a_j}=\frac{\partial L(x^*(a),\lambda^*(a),a)}{\partial a_j}$$

Es claro que al presentarse cambios en la función objetivo en el parámetro a_j, es la misma que la dada por la función lagrangiana. Al comparar este resultado con el modelo sin restricciones, vemos que la función objetivo juega el mismo papel en ambos casos.

Veamos ahora un ejercicio donde aplicaremos los resultados obtenidos.

Ejemplo 4.3: Tenemos una lámina metálica de 25 cm^2 de superficie, con la que debe construirse una caja rectangular, que se llenará de gasolina corriente. Se pide:

a) ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja si el objetivo es llevar la mayor cantidad posible de gasolina?

b) Sabiendo que el litro de gasolina corriente cuesta \$2300 , ¿cuánto estaría usted dispuesto a pagar por un cm^2 más de lámina?

c) A última hora se advierte que el Consejo del Ministerio de Minas y Energía ha decidido subir el precio de la gasolina corriente a \$2500 el litro. ¿en estas circunstancias, cuanto pagaría por un cm^2 adicional de lámina metalica?

Solución

a) Hay que construir una caja rectangular a partir de una lámina metálica de 25 cm^2 en la que se introducirá la mayor cantidad posible de gasolina. Construiremos la caja sin tapa superior para aprovechar al máximo la lámina dada y, conseguir una caja con la mayor capacidad posible. Las variables de decisión x_1, x_2, x_3 son las dimensiones de la caja a construir, tal como se indica en la *figura 4.3*.

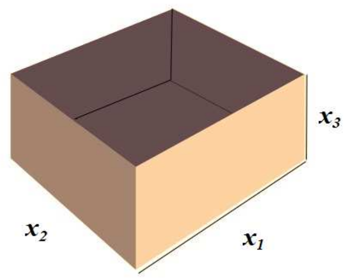

Figura 4.3

- El volumen de la caja es

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

- El área total de paredes que forman la caja es

$$A(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$$

Por lo tanto, el programa será:

$$\left.\begin{array}{r} \text{máx}\, V(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \\ \textbf{s.a.}\;\; x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 - 25 = 0 \\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \end{array}\right\}$$

La función Langragiana es

$$\mathscr{L}(\lambda_1, x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + \lambda(x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 - 25)$$

y las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = x_2 x_3 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = x_1 x_3 + \lambda x_1 + 2\lambda x_3 = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_3} = x_1 x_2 + 2\lambda x_1 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 - 25 = 0$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos el punto

$$\overline{x}^* = \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right) \quad \text{con} \quad \lambda^* = \frac{-5\sqrt{3}}{12}$$

Estudiaremos si se verifican las condiciones suficientes. El hessiano de la función Lagrangiana es

$$H\mathscr{L}(\lambda, \overline{x}^*) = \begin{pmatrix} 0 & x_3+\lambda & x_2+2\lambda_3 & x_2+2x_3 \\ x_3+\lambda & 0 & x_1+2\lambda & x_1+2x_3 \\ x_2+2\lambda & x_1+2\lambda & 0 & 2x_1+2x_2 \\ x_2+2x_3 & x_1+2x_3 & 2x_1+2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en $\overline{x}$ resulta

$$H\mathscr{L}(\lambda, \overline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5\sqrt{3}}{12} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{20\sqrt{3}}{3} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} & \frac{10\sqrt{3}}{3} & \frac{20\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, como $m = 1$ y $n = 3$, tenemos que comprobar que

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{5\sqrt{3}}{12} & \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ \frac{5\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 \end{vmatrix} > 0 \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{5\sqrt{3}}{12} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{20\sqrt{3}}{3} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} & \frac{10\sqrt{3}}{3} & \frac{20\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{5\sqrt{3}}{12} & \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ \frac{5\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 \end{vmatrix} = \frac{125\sqrt{3}}{72} > 0 \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{5\sqrt{3}}{12} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} & \frac{5\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{20\sqrt{3}}{3} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} & \frac{10\sqrt{3}}{3} & \frac{20\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{625}{3} < 0$$

se cumple la condición suficiente de segundo orden de máximo en $\overline{x}^*$, por lo que dicho punto es máximo local estricto.
El volumen óptimo será

$$V(x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*) = \frac{125\sqrt{3}}{18} m^3$$

b) Un cm^2 adicional de lámina metálica permitirá un incremento de volumen, $\triangle V$, sobre el volumen óptimo. Luego el incremento del valor de la gasolina que se pueda introducir en la caja por efecto de un cm^2 adicional de lámina, será igual a $\triangle V$ multiplicado por el precio de un metro cúbico de gasolina.

Calculemos, en primer lugar, $\triangle V$. Sabemos que:

$$\lambda^* = -\frac{dV(\overline{x}^*)}{db}, \text{ de donde, } \lambda^* \cong -\frac{\triangle V}{\triangle b}, \text{ o sea } \triangle V \approx -\lambda^* \triangle b$$

como, en este caso $\lambda^* = \frac{-5\sqrt{3}}{12}$ y, $\triangle b = 1cm^2 = 10^{-4}m^2$, tenemos que

$$\triangle V \approx 10^{-4}\frac{5\sqrt{3}}{12}m^3$$

El precio de un litro de gasolina es de \$2.300. Ahora bien, un litro equivalente a un decámetro cúbico que es igual a 10^{-3} metros cúbicos, por ello, el metro cúbico de gasolina valdrá \$2.300.000. Por tanto, el incremento de valor de la gasolina que se puede obtener al disponer de un centímetro cuadrado más de lámina será aproximadamente de:

$$(10^{-4})\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)(2300)(10^3) = (2300)(10^{-1})\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) = \frac{575}{6}\sqrt{3} \approx 166 \text{ pesos.}$$

luego usted estaría dispuesto a pagar por un centímetro cuadrado más lámina a lo más hasta 166 pesos.

Repitiendo el razonamiento anterior, y, sustituyendo 2.300 por 2.500 obtenemos que

$$10^{-4}\ \frac{5\sqrt{3}}{12}\ (2500)10^3 = 10^{-1}(2500)\ \frac{5\sqrt{3}}{12} = 125\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)\ \frac{625\sqrt{3}}{6} \approx 180 \text{ pesos.}$$

Sería la cantidad de dinero que estaríamos dispuestos a pagar.

Se puede apreciar que los modelos matemáticos permiten determinar tanto a las empresas como a las personas del común las mejores opciones, y es allí donde se logra ver la potencialidad de los modelos matemáticos que conllevan a la toma de decisiones siempre en busca de alcanzar el mejor beneficio ya sea en términos de gastos e ingresos.

CAPÍTULO 5

TEORÍA DE JUEGOS

5.1. Antecedentes

La Teoría de Juegos ha presentado sus primeros origenes hacia 1913 con los trabajos de Ernst Zermelo, un matemático y filósofo alemán, donde trató con diversos tipos de juegos, como el ajedrez, demostrando que son resolubles. Hacia los años 20, los matemáticos Emile Borel y Von Neumann estudian los equilibrios de tipo minimax en los juegos de suma cero, es decir, aquellos juegos en los que lo que gana uno lo pierde el otro.

La idea que tenía el grupo Bourbaki, de axiomatizar todas las matemáticas a partir de la teoría ingenua de conjuntos[1], también contagió a Von Neumann y Oskar Morgensten donde publican el libro denominado *"The Theory of Games and Economic Behavior"*[2] en el año 1944, el cual se trató de manera rigurosa la axiomatización de la Teoría de Juegos. En este libro se divulgaba una formalización general de los juegos en su forma extensiva y normal, se introdujo el concepto de estrategias en los juegos extensivos y propuso aplicaciones.

Pero es John Forbes Nash quien en 1950 definió el concepto de equilibrio Nash, consiguiendo extender la teoría a los juegos no-cooperativos, mucho más generales que los de suma cero en los que había trabajado Von Neumann. La demostración de que todo juego no-cooperativo tenía al menos un punto de equilibrio fue la tesis de John Nash de aproximadamente 27 hojas. A partir del año 1950 se ha profundizado la Teoría de Juegos en muchas áreas del conocimiento (economía, psicología, biología, política, filosofía, estrategias militares,...), aplicando distintos modelos de juegos que han beneficiado a sus jugadores.

Von Neumann axiomatizó la noción de utilidad sobre la base de la idea de preferencia directamente observable. Suponiendo que los resultados de una elección sean x, y o z, suponiendo, también que éstos sean más o menos probables y que se prefieran unos a otros, lo cual depende así mismo de cuán probables sean, Von Neumann planteó los siguientes axiomas en la edición de 1947[3]:

1. La relación de preferencias es una ordenación completa; es decir, todo evento probable es

[1] ÁVILA del Palacio, Alfonso. ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LA TEORÍA KEINESIANA. Instituto de Cultura del Estado de Durango, Fondo de Cultura Económica. México 2000. Pág 14

[2] ia600301.us.archive.org/29/items/theoryofgamesand030098mbp/theoryofgamesand030098mbp.pdf

[3] ÁVILA del Palacio, Alfonso. ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LA TEORÍA KEINESIANA. Instituto de Cultura del Estado de Durango, Fondo de Cultura Económica. México 2000. Pág 26

preferido a otro, o hay alguno que es preferido al primero.

2. Sólo se da una de las tres relaciones entre dos eventos probables: x es preferido a y, o y es preferido a x, o x es indiferente en relación con y.
3. La preferencia es transitiva.
4. Si x es preferido a y, entonces x puede ser preferido a x y y juntos, si la probabilidad de esta última x es muy pequeña.
5. Si x es preferido a y y z es preferido a x, entonces x puede ser preferido a y y z juntos si la probabilidad de z es pequeña.

Si "$>$" significa "es preferido a", y p y $1-p$ son dos probabilidades que sumadas den 100

1. $\forall x \exists yz((x > y) \vee (z > x))$
2. $\forall xy((x > y) \vee (y > x) \vee (x = y))$
3. $\forall xyz(((x > y) \wedge (y > z)) \rightarrow (x > z))$
4. $\forall xy \exists p((x > y) \rightarrow (x > p + (1-p)y))$
5. $\forall xyz \exists p(((x > y) \wedge (z > x)) \rightarrow (x > pz + (1-p)y))$

Von Neumann y Morgenstern aseguran que los juegos contienen los siguientes elementos:

d1 Un número ν, que representa la longitud o número de movidas de un juego.

d2 Un conjunto finito Ω, que representa el conjunto de todas las partidas diferentes que se pueden jugar en el juego en cuestión Γ.

d3 Para cada jugador $k = 1, 2, ..., n$ una función $f_k = f_k(\pi)$, con π en Ω que representa la función de pagos de la partida π para jugador k.

d4 Una partición $\mathbf{A}_r$ en Ω para cada $r = 1, 2, ..., \nu, \nu+1$, que representa el esquema de información de un árbitro; y donde A_r de $\mathbf{A}_r$ es la información actual del árbitro que precede a la movida M_r.

d5 Una partición $\mathbf{B}_r$ en Ω para cada $r = 1, 2, ..., \nu$; $\mathbf{B}_r$ consiste de $n+1$ conjuntos de $B_r(k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, enumerados en este sentido; $\mathbf{B}_r$ representa un esquema de asignaciones, donde un $B_r(k)$ es la movida actual de M_r.

d6 Una partición $\mathbf{C}_r(k)$ en $B_r(k)$ para cada $r = 1, 2, ..., \nu$; y cada $k = 1, 2, ..., n$; $\mathbf{C}_r(k)$ representa un esquema de elección, donde un C_r de $\mathbf{C}_r$ es la elección actual del jugador k en el movimiento M_r.

d7 Una partición $\mathbf{D}_r(k)$ en $B_r(k)$, para toda $r = 1, 2, ..., \nu$, y toda $k = 1, 2, ..., n$; que representa el esquema de información del jugador k, donde D_r de $\mathbf{D}_r(k)$ es la información del jugador k en la movida M_r.

d8 Un número $p_r(C_r)$ para todo $r = 1, 2, ..., \nu$, y toda C_r de $\mathbf{C}_r(0)$; $p_r(C_r)$ representa la probabilidad de la elección actual C_r en el movimiento M_r.

Estas entidades deben satisfacer los siguientes requisitos:

a1. $\mathbf{A}_r$ es una subpartición de $\mathbf{B}_r$; es decir, los esquemas de información del árbitro en la movida M_r, incluyen las asignaciones de esa movida.

a2. $\mathbf{C}_r(0)$ es una subpartición de $\mathbf{A}_r$; es decir, los esquemas de elección de una movida de oportunidad, o de suerte, M_r, incluyen los esquemas de información del árbitro en esa movida.

a3. $\mathbf{C}_r(k)$ es una subpartición de $\mathbf{D}_r(k)$, para $k = 1,2,...,n$; es decir, los esquemas de elección de una movida personal M_r de un jugador k incluyen los esquemas de información del jugador k en esa movida.

a4. Dentro de $B_r(r)$, A_r es una subpartición de $D_r(k)$, para $k = 1,2,...,n$.

a5. Para toda $r = 1,2,...,\nu$, y toda A_r de $\mathbf{A}_r$ que sea un subconjunto de $B_r(0)$; para toda C_r de $\mathbf{C}_r(0)$ que sea subconjunto de esa A_r, $p_r(C_r) \geq 0$, y para la suma extendida sobre ellos $\Sigma p_r(C_r) = 1$

a6. $\mathbf{A}_1$ consite de un conjunto Γ vacío.

a7. $\mathbf{A}_{\nu+1}$ consiste de conjuntos de un elemento.

a8. Para $r = 1,2,...,\nu$: $\mathbf{A}_{r+1}$ se obtiene de $\mathbf{A}_r$ superponiendo a éste con todos los $\mathbf{C}_r(k)$, $k = 1,2,...,n$.

a9. Para $r = 1,2,...,\nu$: si A_r de $\mathbf{A}_r$ y C_r de $\mathbf{C}_r(k)$, $k = 1,2,...,n$, son subconjuntos del mismo D_r de $\mathbf{D}_r(k)$, entonces la intersección $A_r \cap C_r$ no debe ser vacía.

a10. Para $r = 1,2,...,\nu$: para $k = 1,2,...,n$, y para toda D_r de $\mathbf{D}_r(k)$: debe existir algún $C_r(k)$ de $\mathbf{C}_r$, que sea un subconjunto de D_r [4].

Estos axiomas, según los autores, están libres de contradicción y son independientes entre sí, pero no tienen completitud ya que existen diferentes juegos que satisfacen estos axiomas.

5.2. ¿Qué es la Teoría de Juegos?

La Teoría es un sistema Lógico compuesto por observaciones, axiomas y postulados, cuya función es afirmar bajo qué condiciones se desarrollaron ciertos postulados[5] . Un Juego es una actividad recreativa donde interactúan uno o más participantes, su función es proporcionar entretenimiento y diversión, aunque también puede cumplir con un papel educativo.[6]

Luego La Teoría de Juegos es la parte de la matemática aplicada que utiliza modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (llamados juegos) y llevar a cabo procesos de decisión. Sus investigadores estudian estrategias óptimas así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos.

Los juegos se representan de dos formas: la forma normal y la forma extensiva.

[4]Von Neumann y Morgenstern, 1947
[5]definición.de/teoria
[6]definición.de/juego

5.2.1. La forma normal:

* Hay un conjunto P de jugadores $1,2,...,m$.

* Cada jugador k de P tiene un número finito de estrategias puras.

  Un perfil de estrategia pura es una asociación de estrategias con jugadores, que es una m-tupla.

$\overline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m)$ tal que $\sigma_1 \in S_1, \sigma_2 \in S_2, ..., \sigma_m \in S_m$.
Llamamos a conjunto de perfiles de estrategias § una función de recompensa es una función

$$F : \Sigma \to \mathbb{R}$$

cuya interpretación es el premio que recibe cada jugador al final del juego. De acuerdo con esto, para especificar por completo un juego, la función de recompensa tiene que especificarse para cada jugador del conjunto $P = (1,2,...,m)$. El juego es entonces una función

$$\prod : \prod_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Definición 8:
Un juego en forma normal es una estructura (P, S, F) donde $P = 1,2,...,m$ es un conjunto de jugadores, $S = (S_1, S_2, ..., S_m)$ es un m-tupla de conjuntos de estrategias puras, una para cada jugador $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ es una m-tupla de funciones de recompensa.

5.2.2. Forma extensiva

Los juegos se presentan en árboles. cada vértice o nodo representa un punto donde el jugador se especifica por un número situado junto al vértice. Las líneas que parten del vértice representan acciones posibles para el jugador. Las recompensas se especifican en las hojas del árbol.

5.3. Tipos de juegos

* **Juegos simétricos y asimétricos:** Un juego simétrico es cuando las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen sólo de las estrategias que empleen los otros jugadores y no de quién las juegue. Si las identidades de los jugadores pueden cambiarse sin que cambien las recompensas de las estrategias, entonces el juego es simétrico. Ejemplos: Juego de la Gallina; Juego de la batalla de los sexos; Dilema del prisionero; Juego del Oso. Los juegos asimétricos más estudiados son los juegos donde no hay conjuntos de estrategias idénticas para ambos jugadores. Ejemplo: Juego del Ultimétum; Juego del Dictador.

* **Juegos de Suma Cero y de Suma no Cero:** En los juegos de suma cero el beneficio total para todos los jugadores del juego, en cada combinación de estrategias, siempre suma cero (en otras palabras, un jugador se beneficia solamente a expensas de otros). Ejemplo: El Go; El Ajedrez; El Póker; El Juego del Oso.

* **Criterio Maximin y Minimax:** establece que cada jugador debe minimizar su pérdida máxima. El primer criterio establece que un jugador A, elige que su pago mínimo posible sea el mayor, mientras que en el otro criterio, el jugador B, elige el pago máximo de A sea el menor posible.

* **Equilibrio de Nash:** Puede interpretarse como un par de expectativas sobre la elección de cada persona tal que, cuando la otra revela su elección, ninguna de las dos quiere cambiar la conducta.

* **Juegos cooperativos:** Es un juego en el cual dos o más jugadores no compiten, sino más bien se esfuerzan por conseguir el mismo objetivo y por lo tanto ganan o pierden como un grupo. Un juego no cooperativo es uno cuyos jugadores forman decisiones independientemente para su benificio personal, lo cual impide que en algunos casos dicha toma de decisiones pueda favorecerlos a todos, como es lo que se busca en los juegos cooperativos.

* **Simultáneos y secuenciales:** Los juegos simultáneos son juegos en los que los jugadores se mueven simultáneamente o en los que éstos desconocen los movimientos anteriores de otros jugadores, se representa mejor en la forma normal. Los juegos secuenciales (o dinámicos) son juegos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previstas. Este conocimiento no necesariamente tiene que ser perfecto, sólo debe consistir en algo de información, se representa mejor en forma extensiva.

* **Juegos de información perfecta:** Si todos los jugadores conocen los movimientos que han efectuado previamente todos los otros jugadores, por ejemplo, el ajedrez y el go.

Es claro que cada uno de los anteriores tipos de juegos están presentes cada día en los mercados marcando las directrices de las firmas o compañías alrededor del mundo, siempre con el objetivo de tomar las mejores decisiones que lleven al crecimiento económico de las mismas.

A continuación se analizará un problema clásico de la teoría de juegos conocida como “El dilema del prisionero " que consiste en lo siguiente.

La policía ofrece un trato a dos prisioneros **A** *y* **B**, *cada uno de ellos ubicado en celdas distintas. El trato consiste en delatar a su cómplice a cambio de una leve condena de 2 años, siempre y cuando su cómplice no haga lo mismo, y en una larga condena de 20 años si no confiesa y su cómplice sí lo delata. A ambos prisioneros en conjunto les interesa no confesar pues obtendrían únicamente 5 años de condena; sin embargo el interés de cada uno de ellos les lleva a confesar, recibiendo por ello una condena de 15 años.*

El problema lo podemos representar en una matriz de pagos como la siguiente.

		Cómplice A	
		No confesar	**Confesar**
Cómplice B	**No confesar**	A es condenado a 5 años B es condenado a 5 años	A es condenado a 2 años B es condenado a 20 años
	Confesar	A es condenado a 20 años B es condenado a 2 años	A es condenado a 15 años B es condenado a 15 años

Tabla 5.1

Si se analiza detalladamente este juego es no cooperativo, debido a que cada prisionero pensaría en beneficio propio, lo cual llevará a que ambos confiesen y por lo tanto tendrán una condena de 15 años. Desde el punto de vista del prisionero **A**, él piensa que si confiesa verá reducida su pena de 5 años a solo 2 años si **B** no confiesa. Además si su cómplice **B** confiesa verá reducida su pena de

20 a 15 años, por lo que es una buena decisión independientemente de lo que confiese **B**. Desde el punto de vista del prisionero **B**, las decisiones no varían mucho a las de su cómplice, por lo que al final ambos confesarán, pues recordemos que los prisioneros nunca se pusieron de acuerdo en no confesar, que era la mejor opción.

Al observar la matriz se evidencia un equilibrio cuando ambos prisioneros confiesan, es allí donde este tipo de equilibrios toma relevancia debido a que es la mejor decisión que puede tomar un jugador independientemente de lo que decida su oponente, en nuestro caso los prisioneros. Este tipo de equilibrio es conocido en economía como “Equilibrio de Nash", en honor al matemático y Premio Nobel John Nash. El equilibrio de Nash también se conoce como **Equilibrio no cooperativo**, debido a que los jugadores no tienen en cuenta el efecto de sus decisiones en los demás jugadores.

Es evidente que en muchas ocasiones las empresas no se ponen de acuerdo sobre la toma de decisiones, debido a que ellas piensan en el beneficio propio, especialmente cuando está compitiendo por un mismo mercado, como se verá en el siguiente ejemplo de un juego no cooperativo de las compañías **P** y **Q**.

En este caso de *Duopolio* las firmas **P** y **Q** compiten por un mismo mercado, donde las decisiones de una afectará indudablemente a la otra compañía, por lo que éstas deben prestar cuidado en tomar las mejores decisiones para ver optimizado su beneficio.

Supongamos que **P** tiene dos alternativas las cuales son tener un nivel de producción de 50.000 unidades de libros ó aumentar su nivel de producción a 70.000 unidades. Por otro lado **Q** tiene las mismas alternativas, que generan un beneficio mostrada en la matriz de pagos que se muestra a continuación.

		Compañía P	
Compañía Q		**Producir 50.000 unidades de libros**	**Producir 70.000 unidades de libros**
	Producir 50.000 unidades de libros	Beneficio de 250 millones de pesos Beneficio de 250 millones de pesos	Beneficio de 300 millones de pesos Beneficio de 210 millones de pesos
	Producir 70.000 unidades de libros	Beneficio de 210 millones de pesos Beneficio de 300 millones de pesos	Beneficio de 220 millones de pesos Beneficio de 220 millones de pesos

Tabla 5.2

Es claro que el beneficio óptimo para cada compañía es que ambas produzcan 50.000 unidades de libros. Pero cada una de las empresas pueden mejorar su beneficio siempre y cuando una de ellas produzca 70.000 unidades mientras que la otra produzca 50.000 unidades. Por otro lado, si ambas empresas producen 70.000 unidades, éstas obtendrán un beneficio menor.

Evidentemente este tipo de juegos está presente todos lo días en los mercados y desde luego en la vida de las personas ya que en el diario vivir se suelen presentar situaciones en las cuales tenemos que tomar decisiones que llevan a resultados en lo posible favorables, que permiten el crecimiento económico de cada una de las personas y empresas.

En este capítulo se ha querido mostrar otra de las teorías que constituyen hoy en día una de las bases de la economía moderna, La Teoría de Juegos donde cada persona ó cada compañía es un jugador que está inmerso en un conjunto de estrategias que le permiten obtener el mayor provecho de estas, y recibir a cambio un beneficio que en lo posible debe ser optimizado, esto se logra siempre y cuando se halla tomado la mejor decisión.

CONCLUSIONES

Este trabajo se desarrolló con el propósito de conocer algunos modelos matemáticos que forman parte de la teoría económica, tales como la programación lineal (**PL**), el Teorema de la Envovente y la Teoría de Juegos que se constituyen en herramientas fundamentales de esta área y que consolidan los fundamentos de ésta, lo que permitie reflexionar en cómo la matemática logra adentrarse en el campo de las ciencias económicas para luego hacer un análisis de dichos modelos y verlos reflejados en la toma de decisiones de una compañía o un consumidor.

Realmente es llamativo el hecho de llevar un problema de tipo descriptivo, a un modelo matemático para poder analizarlo y desde allí ver el comportamiento de este, permitiendo cuantificar los resultados y tomar las decisiones para dar la mejor solución a dicho problema.

Por otra parte es importante resaltar la gran gama de aplicaciones de la matemática en distintas disciplinas que hacen ver esta ciencia como una herramienta poderosa que puede ser adecuada a diversos campos científicos llevando cada día a la solución de problemas de mayor complejidad.

Finalmente el anterior trabajo ha mostrado algunas aplicaciones de la matemática en el campo de la economía, específicamente en el área de la optimización y la toma de decisiones mediante los modelos anteriormente mencionados, que son de gran importancia para ser estudiados por estudiantes de matemáticas y ciencias económicas, así como profesores que tengan interés por este campo de aplicación de las matemáticas que en últimas son desarrollados mediante conocimientos previos en cálculo de una y varias variables así como elementos de algebra lineal, que son fundamentales para comprender los temas expuestos, pues son la base de gran parte de la teoría desarrollada.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ávila, Alfonso. Estructura Matemática de la Teoría Keynesiana. Editorial Progreso. México D.F, 2000.

[2] Barrios García, Javier . Carrillo Fernandez, Marianela . Análisis de funciones en economía y empresa: un enfoque interdisciplinar. Ediciones Díaz de Santos. España, 2005.

[3] Carreras Escobar, Francesc. Teoría de juegos, Ediciones UPC. Barcelona, 2001.

[4] Escobar Uribe, Diego. Introducción A La Economía Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1998.

[5] Gomollón, Félix. Ejercicios de investigación de operaciones, Ediciones Esic. Madrid, 1996.

[6] Krugman, Paul. Fundamentos de economía. Editorial Reverté. Barcelona, 2008.

[7] Mora, Héctor. Optimización no lineal y dinámica. Ediciones Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 1996.

[8] Pecha, Arsenio. Optimización estática y dinámica en economía, Ediciones Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2005.

[9] Silberberg, Eugene. Suen, Wing. The structure of economics a mathematical analysis. Editorial McGraw-Hill. Boston, 2001.

[10] Sydsaeter, Knut. Matemáticas para el análisis económico. Editorial Pearson Educación. Madrid, 2006.

[11] Varian, Hal R. Análisis Microeconómico. 3^a Edición, Editorial Antoni Bosch. Barcelona, 1992.

[12] http://www.economics.utoronto.ca/osborne/MathTutorial/MEE.HTM, 07 Mayo de 2011, 8:15 pm.