Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

De la Geometría a la Trigonometría

Mónica Andrea Ospina Dussán
Ana María Pérez Ramos

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

De la Geometría a la Trigonometría

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de licenciados en matemáticas

Mónica Andrea Ospina Dussán
2006135410
Ana María Pérez Ramos
2005203374

Asesor:
Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Enero de 2012

AGRADECIMIENTOS

Al concluir los logros propuestos en este ciclo de formación como docentes de matemáticas y despúes de ir superando poco a poco los obstáculos e inconvenientes presentados en esta etapa de nuestros proyectos de vida, queremos expresar un profundo agradecimiento a quienes con su experiencia supieron apoyarnos y darnos valiosos consejos que nos guiaron a lograr esta meta anhelada. Agradecemos en primer lugar a Dios por la vida y permitirnos alcanzar lo que hoy en día somos y podemos llegar ser. En segundo lugar a nuestros padres y esposos porque no existe forma alguna de retribuirles todos sus sacrificios, esfuerzos, paciencia y amor, además queremos que sientan que este objetivo alcanzado también es de ellos y que la fuerza que nos ayudó a conseguirla fue la fortaleza y deseos de hacer nuestro sueño realidad. De igual manera queremos manifestar nuestros sinceros agradecimientos a nuestros maestros, y de manera especial al profesor Ricardo Cedeño Tovar, quien nos orientó y asesoró para la realización de este trabajo, de igual forma a los profesores Augusto Silva Silva, Hernando Gutiérrez Hoyos, Osmin Oberto Ferrer Villar quienes nos formaron y aportaron valiosos conocimientos que serán nuestras bases para el desarrollo de nuestras metas.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado titulado “De la geometría a la trigonometría ” pretende llevar al estudiante de la geometría a la trigonometría, dando los elementos básicos con los cuales los griegos desarrollaron esta ciencia y mostrar de manera intuitiva como la geometría se parte en dos, cuando pretendieron medir algunas distancias en el firmamento. Esta necesidad llevo a los geómetras a proponer algunas proposiciones referentes a la semejanza de triángulos y garantizar que sin importar que tan grande o pequeño fuera el triángulo la relación entre sus lados se conservan, en particular en el triángulo rectángulo el cual adquirió relación importante a través del Teorema de Pitágoras y es allí donde realmente aparece la importancia de la trigonometría.

El trabajo se divide en 11 capítulos, de los cuales los 6 primeros son de agradecimientos, introducción, formulación y descripción del problema, justificación, objetivos y marco teórico, y en el 7, 8, 9, y 10 capítulos encontramos los dos grandes temas del trabajo: el séptimo de ellos los conceptos básicos de la geometría euclidiana, donde se hará un estudio de figuras y en particular de los triángulos. El octavo las relaciones y funciones trigonométricas donde mostraremos todas la funciones trigonométricas con sus respectivas gráficas y propiedades. El noveno sobre triángulos oblicuángulos, el décimo se presentan algunas aplicaciones. El onceavo corresponde a la bibliografía.

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Resolver problemas que requieren de la utilización de los ángulos y los conceptos de la trigonometría es una de las tareas usuales que aparecen en las matemáticas dadas las múltiples aplicaciones que tienen las funciones circulares y que son de gran importancia en el cálculo, para explicar situaciones de la vida diaria. La trigonometría tiene el carácter de eje articulador de saberes matemáticos y además su importancia se debe a que ésta se aplica en diferentes problemas de la ciencia. Por esta razón esperamos que este material se convierta en un apoyo significativo para docentes y estudiantes que desean tratar situaciones matemáticas que involucren la geometría y la trigonometría.

Atendiendo a lo anterior queremos compartir algunas aplicaciones importantes, partiendo de los conceptos básicos y el análisis de las propiedades fundamentales, modelos matemáticos y sus aplicaciones. Presentamos diversos ejemplos y actividades que permiten enriquecer la formación en el mencionado tema, además contribuir al fortalecimiento matemático en general.

OBJETIVOS

Objetivo general

- Presentar un material de estudio organizado sobre la geometría y la trigonometría, donde se muestre su utilidad para resolver y explicar situaciones del mundo real.

Objetivos específicos

- Presentar elementos básicos de la geometría y la trigonometría que puedan ser utilizados en el grado décimo de la Educación Básica Secundaria.

- Organizar un documento con aplicaciones y desarrollo matemático más complejo que pueda ser implementado en cursos de Fundamentos de Matemáticas.

JUSTIFICACIÓN

Tradicionalmente en el currículo de la educación secundaria únicamente se tienen en cuenta aspectos muy básicos de la geometría y la trigonometría. Generalmente se estudia de manera elemental las relaciones geométricas, trigonométricas y algunas aplicaciones sencillas a la solución de triángulos rectángulos; se trabaja de manera superficial las funciones e identidades trigonométricas y los métodos que se emplean para resolverlas así mismo los teoremas del seno y el coseno, omitiendo otras aplicaciones importantes que desempeñan un papel esencial en distintas áreas no sólo de la matemática sino de la ciencia en general.

Lo anterior nos permite poner en evidencia la importancia de la trigonometría en el currículo escolar y de esta manera recopilar, analizar, organizar y producir un material organizado que muestre desde diferentes enfoques la trascendencia del tema y que a la vez contribuya a una enseñanza más efectiva de las matemáticas, más exactamente de la trigonometría y la geometría.

MARCO TEÓRICO

La palabra Trigonometría, en un sentido primario, significa medición de triángulos. Desde tiempos remotos también abarcó el establecimiento de las relaciones existentes entre lados, ángulos y área de un triángulo. Alrededor del año 100 a.C fueron utilizadas las relaciones entre lados y ángulos de un triangulo rectángulo para resolver problemas de astronomía, navegación y geografía, estos trabajos dieron origen a la trigonometría de ahí que la palabra trigonometria viene del griego: Trigonon: triángulo, Metría: Medida. Hiparco y Ptolomeo crearon esta rama de las matemáticas y su primera presentación se encuentra en **"el almagesto".**[1] Con el uso de la trigonometría lograron calcular tamaños y distancias de cuerpos celestes.

Hoy día la trigonometría tiene un objetivo más amplio, pues incluye todos los modos de investigaciones geométricas y algebraicas que pueden hacerse a partir de ciertas cantidades, llamadas razones trigonométricas que serán estudiadas en este trabajo de grado. En todas las ramas de las matemáticas superiores, el conocimiento de la trigonometría es de mucho valor.

Para llevar a cabo lo anterior estudiaremos las funciones trigonométricas las cuales permitieron al hombre explicar la naturaleza de los sonidos y así permitir que este conocimiento fuera utilizado en el diseño de aparatos como el teléfono, el fonógrafo, la radio, etc., inicialmente el estudio de las matemáticas de los sonidos, no se realizó con la aplicación de las funciones trigonométricas. Grandes matemáticos del siglo XVII, como Joseph Fourier (en 1816 y, en 1.882, publicó la "Teoría analítica del Calor", basándose, en parte, en la ley de enfriamiento de Newton. A partir de esta teoría desarrolló las **"Series de Fourier".**[2] de gran importancia en el posterior avance del análisis matemático y con interesantes aplicaciones para la resolución de muchos problemas de física e ingenieria). Estudiaron cuerdas vibrantes y encontraron que las funciones trigonométricas eran adecuadas para representar sus vibraciones. Todos los sonidos musicales son periódicos. Esto es, un sonido musical es un

[1] Durante muchos siglos, la trigonometría de Ptolomeo fue la introducción básica para los astrónomos. El libro de astronomía el Almagesto, escrito por él, tenía una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, y a lo largo del libro dio ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. El teorema de Menelao utilizado para resolver triángulos esféricos fue autoría de Ptolomeo.

[2] En 1807, Fourier, presenta los trabajos en el instituto de Francia que: cualquier señal periódica puede ser representada por una serie de sumas trigonométricas en senos y cosenos relacionadas armónicamente. Estos argumentos por Fourier eran imprecisos y en 1829 Dirichlet proporcionó las condiciones precisas para que una señal periódica pueda ser representada por una serie de Fourier.

movimiento de moléculas de aire que es repetido muchas veces en un segundo (frecuencia de vibración). Estos movimientos periódicos pueden describirse usando las funciones seno y coseno.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hizo en los campos de la navegación, la cartografía y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna. Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el flujo de corriente alterna.

Cuando se propone una igualdad de expresiones trigonométricas que no es una identidad, el objetivo es determinar valores que la hacen verdadera; para ello se requiere resolver una ecuación. La ecuación puede o no tener solución, si tiene, este número puede ser infinito. Una de las propiedades más importantes de las funciones trigonométricas es la periodicidad. También los problemas de aplicación se pueden resolver utilizando las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos, hay casos en los que requiere el uso de triángulos que no son rectángulos y sin embargo es posible encontrar sus elementos los lados y los ángulos.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

Para iniciar el desarrollo de la temática de nuestro trabajo comenzaremos con la geometría, la cual es fundamental para las aplicaciones que se desarrollaran más adelante, haremos un breve recorrido por los conceptos de punto, segmento, recta, semirecta y ángulo.

1.1. Punto

Un punto indica la posición en el plano o en el espacio, los puntos se nombran con letras mayúsculas.

Figura 1.1

1.2. Segmento

Un segmento es la porción de recta limitada por dos puntos, llamados extremos.

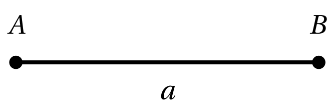


Figura 1.2

1.3. Recta

Conjunto infinito de puntos seguidos que se extienden en dos direcciones, y se nota como $\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{m}$

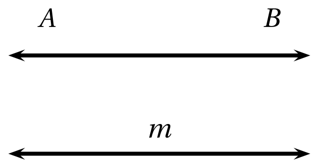


Figura 1.3

1.4. Semirrecta

Cada una de las dos porciones en que queda dividida una recta por cualquiera de sus puntos.

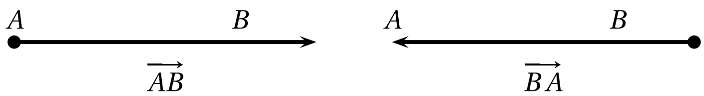


Figura 1.4

1.5. Vértice

Es el punto donde concurren dos o más semirrectas o segmentos de rectas.

1.6. Ángulos

Un ***ángulo*** es la abertura formado por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. Las semirrectas se llamarán los lados. Un ángulo se designa por una letra mayúscula situado en el vértice. A veces se usa una letra griega dentro del ángulo para denotarlo. También podemos usar tres letras mayúsculas de manera que quede en el centro la letra que esta situada en el vértice del ángulo. En la figura 7.5 se representa los ángulos A, α y MNP o PNM. La ***bisectriz*** de un ángulo es la semirrecta que tiene como origen el vértice y lo divide en dos ángulos congruentes (de igual medida), y lo notaremos $\angle MNQ \approx \angle QNP$ o $m\angle MNQ = m\angle QNP$.

En la figura 1.5 la semirrecta $\overrightarrow{NQ}$ es la bisectriz del ángulo N si $m\angle MNQ = m\angle QNP$.

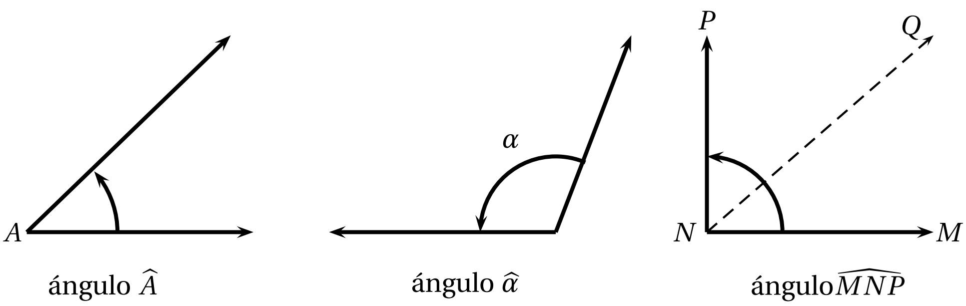
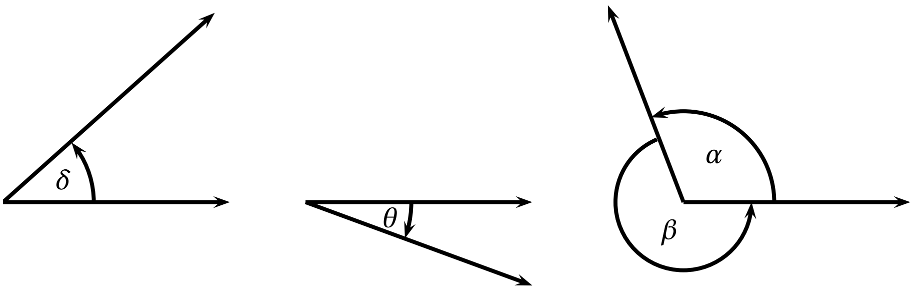


Figura 1.5

En el desarrollo del presente trabajo utilizaremos indistintamente cualquiera de las notaciones mencionadas. Una rotación en el sentido contrario a la manecillas del reloj produce un ***ángulo positivo***. Una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un ***ángulo negativo***. El tamaño de la rotación en cualquier dirección no está limitada. Dos ángulos diferentes que tienen los mismos lados iniciales y terminales, se llaman ***ángulos coterminales***.



Ángulo positivo Ángulo negativo Ángulos coterminales

Figura 1.6

1.6.1. Medida de Ángulos

Medir un ángulo es compararlo con otro que se considera unidad de medida. Existen tres escalas de medición de ángulos: Los grados sexagesimales, los grados centesimales y los radianes. Este último llamado sistema cíclico.

En los grados sexagesimales se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales. Un ángulo de un grado es el que tiene el vértice en el centro y sus lados pasan por dos divisiones consecutivas. A su vez cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos para estas unidades son: grado^0 minuto $'$, segundo $''$.

$$\text{Note que } 1^0 = 60'\ ;\ 1' = 60'' \text{ así que } 1^0 = 3600''.$$

Por ejemplo. Si el ángulo $\angle ABC$ mide 38 grados 15 minutos 12 segundos, se escribe: $m\angle ABC$ = $38^0 15'12''$.

En el sistema centesimal se considera a la circunferencia dividida en 400 partes iguales, llamadas grados centesimales. Cada grado tiene 100 minutos centesimales y cada minuto tiene 100 segundos centesimales. Si el ángulo $\angle ABC$ mide 72 grados 50 minutos 18 segundos centesimales, se escribe: $72^g 50^m 8^s$, es decir que $m\angle ABC = 72^g 50^m 8^s$.

En el sistema circular se usa como unidad el ángulo llamado radián, notado Rad. Un radián es el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. De manera que si la longitud del arco AB (figura 1.7) es igual a r, entonces, $\angle AOB = 1$ rad.

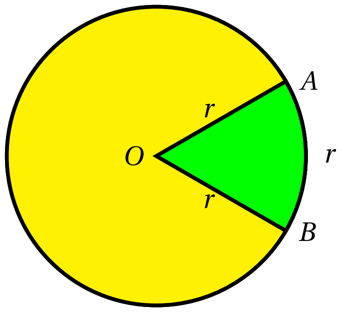


Figura 1.7

Como la longitud de una circunferencia es $2\pi r$ donde r es el radio del círculo tomado, resulta que un ángulo de 360^0 equivale a 2π radianes, es decir, 6.28 radianes, dándole a π el valor de 3.14. Un radián es igual $1 Rad \approx 57{,}29577951$, que equivale a $57^0\ 17'\ 44.81''$ (se obtiene dividiendo 360^0 entre 2π).

1.7. Relación entre grado Sexagesimal y el radián

Si representamos con S la medida de un ángulo en grados sexagesimales y con R la medida del mismo ángulo en radianes, podemos establecer la siguiente proporción,

$\dfrac{S}{180^0} = \dfrac{R}{\pi}$ o bien $S = \dfrac{180^0 \cdot R}{\pi}$ o $R = \dfrac{\pi \cdot S}{180^0}$

Así por ejemplo, un ángulo que mide 90^0 equivale en radianes a $R = \dfrac{\pi(90^0)}{180^0} = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57 Rad$.

Dos ángulos se llaman ***adyacentes*** cuando están formados de manera que un lado es común y los otros dos lados pertenecen a la misma recta. Por ejemplo, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ están sobre la misma recta $\overleftrightarrow{AB}$ en la figura 1.8 ; $\overrightarrow{OC}$ es común $\therefore \angle AOC$ y $\angle BOC$ son ángulos adyacentes.

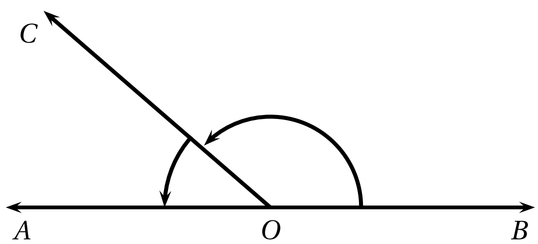


Figura 1.8

Un ángulo se denomina ***recto*** cuando mide 90^0 y un ángulo que mide 180^0 se denomina ángulo ***llano***. Note que podemos definirlo también como el ángulo en el cual un lado es la prolongación del otro.

Dos ángulos se llaman ***complementarios*** cuando su suma es un ángulo recto, es decir 90^0. Por ejemplo, los ángulos $m\angle AOB = 60^0$, y $m\angle BOC = 30^0$ son complementarios pues, $m\angle AOC = m\angle AOB + m\angle BOC = 90^0$.

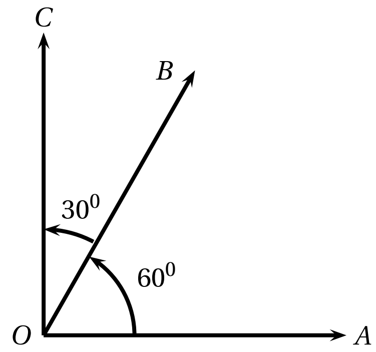


Figura 1.9

Dos ángulos que sumados den dos ángulos rectos se llaman ***suplementarios***. Por ejemplo, $m\angle MON = 120^0$ y $m\angle NOP = 60^0$, son suplementarios pues
$m\angle MON = m\angle MON + m\angle NOP = 180^0$.

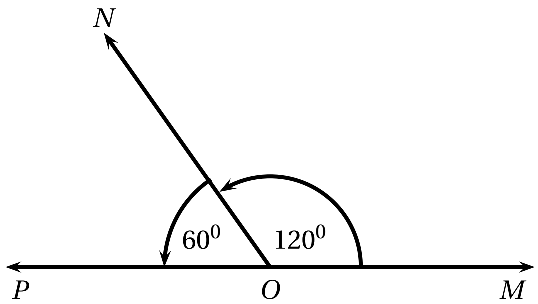


Figura 1.10

De acuerdo con lo definido anteriormente es evidente que dos ángulos adyacentes son suplementarios:

Dos ángulos se llaman ***opuestos por el vértice*** cuando los lados de uno de ellos es la prolongación de los lados del otro. En la figura 1.11 los ángulos $\angle AOC$ con $\angle BOD$, y $\angle AOD$ con $\angle BOC$ son opuestos por el vertice.

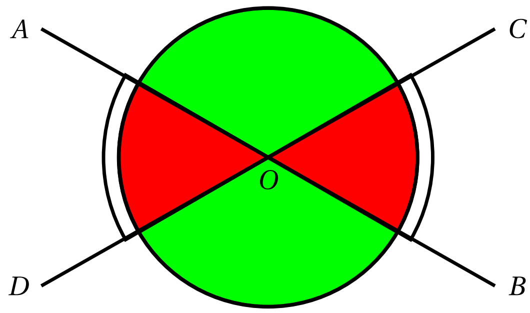


Figura 1.11

Dos ángulos se llaman ***consecutivos*** si sólo tiene un lado común. Varios ángulos son consecutivos si el primero es consecutivo del segundo, el segundo del tercero y así sucesivamente.

Para la figura 1.12, tenemos que:

a. Los ángulos COD y DOE son consecutivos.

b. Los ángulos AOB, BOC, COD, DOE, EOF y FOA son consecutivos.

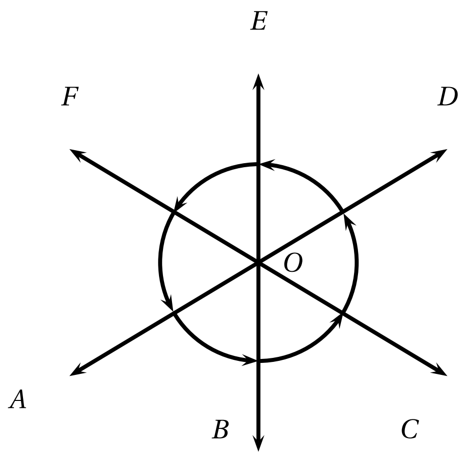


Figura 1.12

1.8. Triángulos

Un triángulo es la porción del plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos; o simplemente una figura plana limitada por tres lados. Un triángulo posee tres ángulos interiores que suman 180^0, tres lados y tres vértices.

Un triángulo es ***rectángulo*** si uno de sus ángulos es recto, si los tres son agudos es un triángulo ***acutángulo*** y aquel en el cuál uno de sus ángulos es obtuso es un triángulo ***obtusángulo***.

Un triángulo que tiene sus lados congruentes es ***equilátero***, si tiene dos congruentes es ***isósceles*** y aquel en el que todos son diferentes es ***escaleno***.

En los triángulos rectángulos los lados que determinan el ángulo recto se llaman ***catetos***, y el lado opuesto al ángulo recto, se llama la ***hipotenusa***. La ***base*** de un triángulo puede ser uno cualquiera de sus lados y en tal caso, su ***altura*** es la perpendicular bajada desde un vértice a la base opuesta o a la prolongación de ésta, su notación se realiza con la letra h.

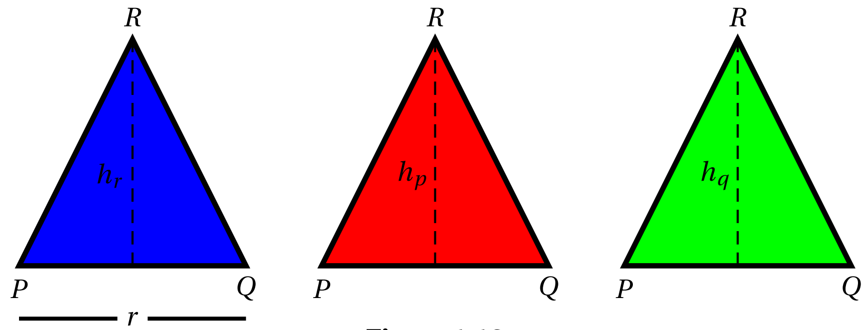


Figura 1.13

En la figura 1.13 se observa que la altura es relativa a cada uno de los lados del triángulo. En el primer triángulo, la altura es relativa al segmento $\overline{PQ}$ y la hemos llamado h_r, de igual forma se trata a h_q y h_p.

La altura no necesariamente esta contenida en el triángulo, por ejemplo:

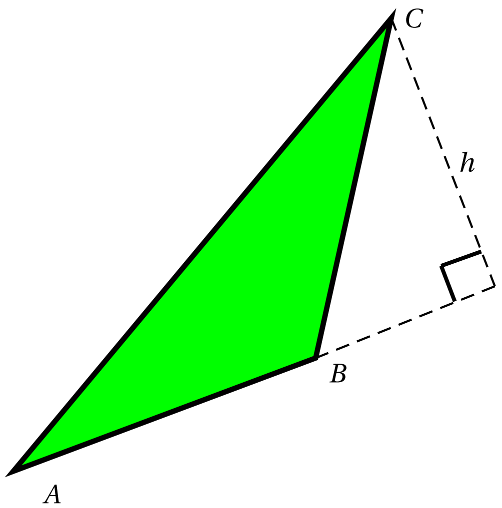


Figura 1.14

Observe que la altura se obtiene por prolongación del segmento $\overline{AB}$ hasta que la perpendicular trazada del punto C corte a dicha prolongación.

La ***mediatriz*** es la perpendicular trazada en el punto medio de cada lado de un triángulo, su notación se realiza con la letra M. La ***mediana*** son segmentos de recta que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos y se nota con la letra m. Como se ilustra en la figura 1.15

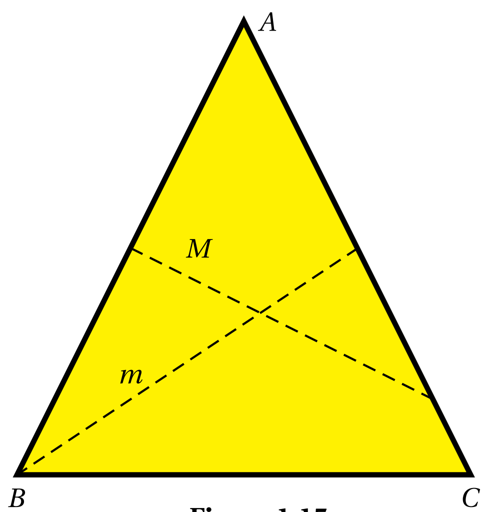


Figura 1.15

A veces se acostumbra indicar a los tres ángulos de un triángulo con letras mayúsculas A, B, C y las longitudes de los lados opuestos respectivos con las letras a, b, c. Deberá entenderse que $a,\ b\ y\ c$ son cantidades positivas.

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demostración del teorema de Pitágoras.

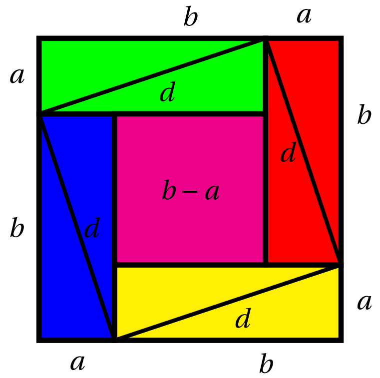


Figura 1.16

De la figura 1.16 obtenemos:

$A_{\square g} = (a+b)^2 = 8A_{\triangle ab} + (a-b)^2 = 4A_{\square ab} + (a-b)^2 = A_{\square d} + 4A_{\triangle ab}$

de aquí se deduce que $a^2 + 2ab + b^2 = d^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab = d^2 + 2ab$, así que $a^2 + b^2 = d^2$

Generalmente se representa el ***teorema de Pitágoras*** por la figura 1.17 para hacer notar que $a^2 = b^2 + c^2$.

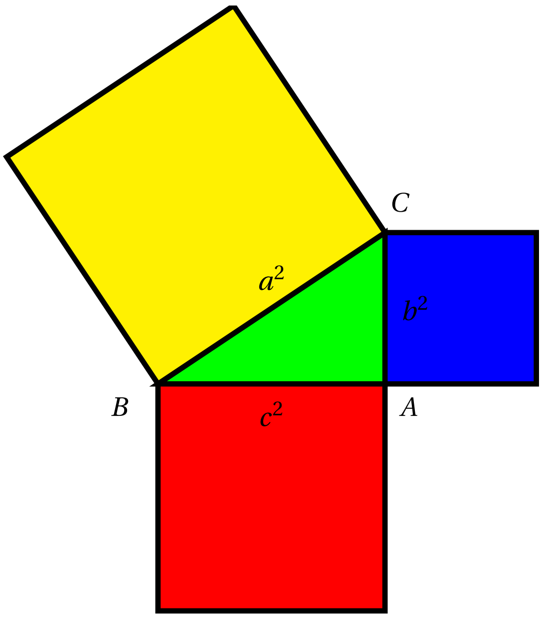


Figura 1.17

Ejemplo. Si en el triángulo ABC, el ángulo C es recto y $a = 20$u y $b = 20$u entonces $c = \sqrt{b^2 + a^2}$ $= \sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = \sqrt{400} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2}u$.

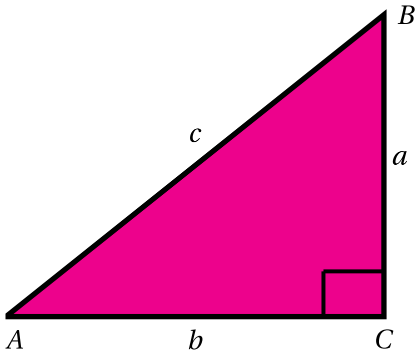


Figura 1.18

El ***perímetro*** de un triángulo es la suma de las longitudes de todos sus lados. Si los tres lados se designan a, b y c, el perímetro P es dado por $P = a + b + c$, y el área de un triángulo es el espacio limitado por sus lados.

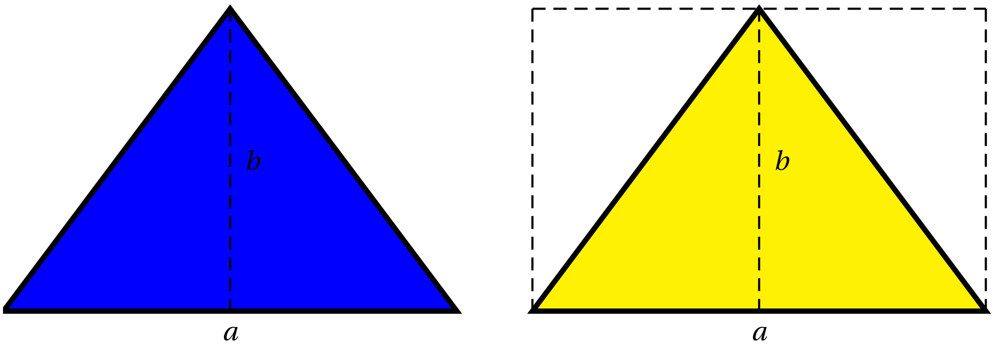


Figura 1.19

Observemos que el área del triángulo corresponde a la mitad del área del rectángulo en el cual el este inscrito, por esta razón $A_{\triangle} = \dfrac{b \cdot a}{2}$

Fórmula de Herón

Nos permite calcular el área de un triángulo conocidos los tres lados. No es necesario por tanto conocer la altura ni ninguno de los ángulos. Si llamamos s al semiperímetro y a, b, c los tres lados, tenemos que $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, y el área del triángulo puede calcularse mediante la siguiente fórmula:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Demostración:

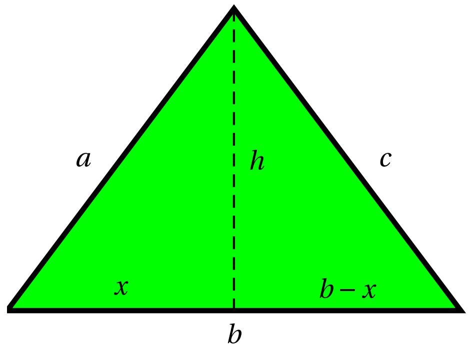


Figura 1.20

Por la figura 1.20, tenemos: $h^2 + x^2 = a^2$, y, $(b-x)^2 + h^2 = c^2$, luego
$c^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 = a^2 + b^2 - 2bx$ de aquí $2bx = a^2 + b^2 - c^2$, por lo tanto
$x = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, así que

$$A_\triangle = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{2} = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2}} = \frac{b}{2\cdot 2b}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} =$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{[2ab-(a^2+b^2-c^2)][2ab+(a^2+b^2-c^2)]} =$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{c^2-(a^2+b^2-2ab)}\sqrt{(a^2+2ab+b^2)-c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{c^2-(a-b)^2}\sqrt{(a+b)^2-c^2} =$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} = \sqrt{\frac{c+a-b}{2}\cdot\frac{c+b-a}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} =$$
$$\sqrt{s\cdot\frac{a+c+b-2b}{2}\cdot\frac{c+b+a-2a}{2}\cdot\frac{a+b+c-2c}{2}} = \sqrt{s\cdot\frac{p-2b}{2}\cdot\frac{p-2a}{2}\cdot\frac{p-2c}{2}} =$$
$$\sqrt{s\cdot\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)} = \sqrt{s(s-b)(s-a)(s-c)},\text{ donde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Por lo tanto tenemos la fórmula de Herón.

$$A_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ejemplo 1.. Si los lados de un triángulo miden 3, 4 y 5, hallar su área.

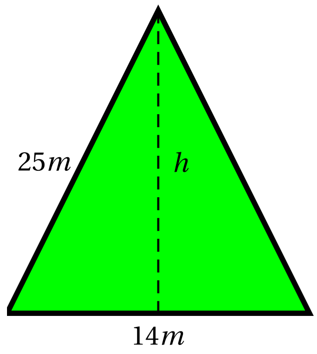
Solución: El perímetro de este triángulo es $P = 3+4+5 = 12$ y el semiperímetro es $S = \dfrac{P}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$.

Así que su área es $A = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \sqrt{36} = 6$

Ejemplo 2. El perímetro de un triángulo isósceles es 64m, y el lado desigual mide 14m. Calcula el área del triángulo.

Solución: Puesto que el triángulo es isosceles y el lado desigual que aparece en la figura 1.21 tomado como base mide 14m, los otros dos lados miden cada uno 25m.

Por otra parte:



$$h^2 = (25^2) - (7)^2 = 625 - 49 = 576,$$

$$\text{así que } \sqrt{h} = \sqrt{576} = 24\text{m}$$

$$\text{Por lo tanto el área es:} A_{\triangle} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168\ m^2$$

Figura 1.21

1.9. Ejercicios propuestos

- Si el $\angle AOB$ es recto y los ángulos $\angle BOC$ y $\angle COA$ están en la relación de 4:5 ¿Cuánto vale cada ángulo?

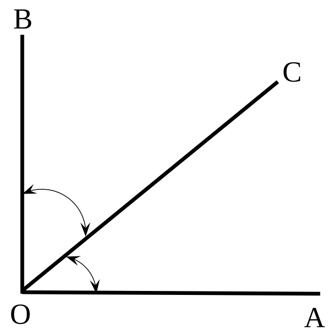


Figura 1.22

- Si el $\angle AOD$ es recto y $m\angle AOB = 2x$, $m\angle BOC = 3x$, $m\angle COD = 4x$ ¿Cuánto vale cada ángulo?

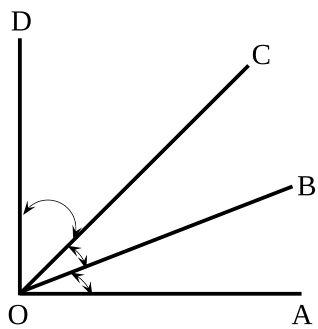


Figura 1.23

- Si $\angle BOC = 2\angle AOB$, hallar: $\angle AOB, \angle COD, \angle BOC, \angle AOD$

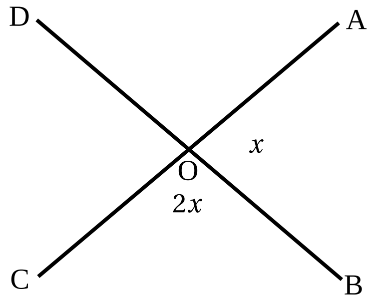


Figura 1.24

- Si $m\angle MON$ y $m\angle NOP$ están en la relación de 4:5, ¿Cuánto mide cada uno?

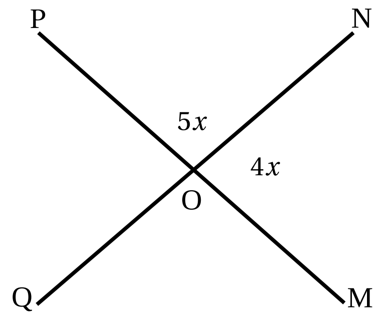


Figura 1.25

i. Hallar el ángulo que es igual a su complemento.
ii. Encontrar el ángulo que es el doble de su complemento.
iii. Hallar el ángulo que es igual a la mitad de su complemento.

- Hallar el perímetro de un triángulo isósceles si sabemos que uno de sus lados iguales mide 9cm, y el otro lado mide $\frac{1}{3}$ de lo que miden sus lados iguales.
- Dos trenes salen de una misma estación, uno hacia al sur y el otro hacia el oeste. ¿Qué distancia en línea recta, les separa cuando cada uno lleva recorrido 80km?. ¿A qué distancia se encuentran de la estación cuando ambos están a 100km uno del otro y llevan recorrida la misma distancia?
- Un muchacho quiere cambiar el foco de un farol situado en una pared a 5,4m de altura, con la ayuda de una escalera de 3,5m de longitud. Si el muchacho puede llegar hasta los 2,25m con el brazo extendido, ¿a qué distancia máxima de la pared ha de colocar el pie de la escalera para conseguir su objetivo?.
- Las proyecciones de los catetos de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa miden 3 y 9cm, respectivamente. Halle la longitud de los catetos y la altura relativa a la hipotenusa.

CAPÍTULO 2

RELACIONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos la siguiente figura:

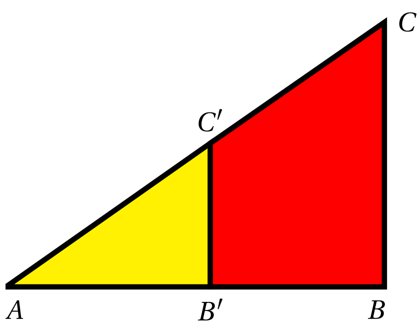


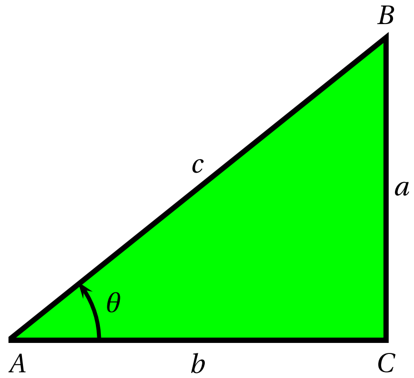
Figura 2.1

Con los triángulos $AB'C'$ y ABC con ángulos rectos en B' y B. Los triángulos antes mencionados son semejantes, es decir; $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

Lo cual significa que se pueden establecer 6 relaciones entre los lados de un triángulo sin importar el tamaño de estos lados.

A estas relaciones las llamaremos ***Relaciones Trigonométricas.***

Consideremos el triángulo rectángulo ABC de la figura 2.2, establezcamos las seis relaciones entre las medidas de los lados de dicho triángulo.



$$\frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \quad (1) \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad (2)$$

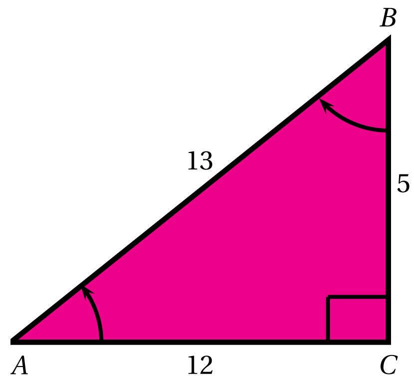
$$\frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \quad (3) \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \quad (4)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \quad (5) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \quad (6)$$

Figura 2.2

A la relación (1) de aquí en adelante la llamaremos ***seno*** del ángulo θ (o equivalentemente del ángulo BAC) y lo notaremos $\operatorname{sen} A$. De igual manera llamaremos ***coseno*** del ángulo θ a la relación (2) y lo notaremos $\cos A$. La relación (3) la llamaremos ***tangente*** del ángulo θ y lo notaremos $\tan A$. De igual forma llamaremos ***cotangente*** del ángulo θ a la relación (4) y lo notaremos $\cot A$. La relación (5) la llamaremos ***secante*** del ángulo θ y lo notaremos $\sec A$. Por último tenemos la relación (6) y la llamaremos ***cosecante*** del ángulo θ y la notaremos $\csc A$. A estas seis relaciones se llaman ***razones o relaciones trigonométricas***.

Ejemplo: Si el triángulo ABC es rectángulo y $AB = 13$, $BC = 5$ y $AC = 12$, entonces las razones trigonométricas del ángulo B son:



$$\operatorname{sen} B = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13} \qquad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$$

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{5} \qquad \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$$

$$\sec B = \frac{AB}{BC} = \frac{13}{5} \qquad \csc B = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{12}$$

Figura 2.3

y las del ángulo A son:

$$\operatorname{sen} A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}; \quad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$$
$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}; \quad \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{5}$$
$$\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{12}; \quad \csc A = \frac{AB}{BC} = \frac{13}{5}$$

Como en todo triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado mayor; se deduce que aquellas razones que tengan la hipotenusa en el **denominador** nunca serán mayores que la unidad, así que el seno y el coseno de un ángulo nunca pueden ser mayores que 1; la cosecante y la secante de un ángulo no pueden ser menores que 1; la tangente y la cotangente pueden tener cualquier valor numérico.

2.1. Funciones Trigonométricas:

Tomando un círculo de radio 1 y centro el origen, como en la figura 2.4; la longitud del arco s es igual al ángulo central θ medido en radianes. En otras palabras sobre el círculo unitario, el número real usado para medir un ángulo θ en radianes corresponde exactamente al número real usado para medir la longitud del arco subtendido por ese ángulo.

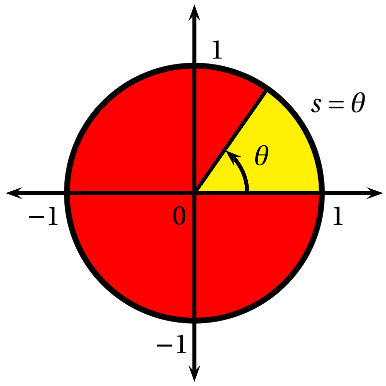


Figura 2.4

Por ejemplo, Si $r = 1$ pie. Entonces, si $\theta = 3$ radianes, $s = 3$ pies; si $\theta = 8{,}2$ radianes, entonces $s = 8{,}2$ pies.

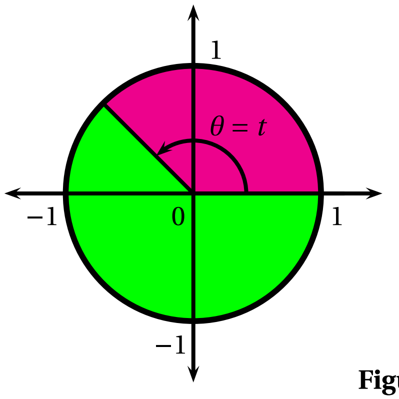
Ahora, sea t cualquier número real, sea θ el ángulo, igual a t radianes. Sea P el punto sobre el círculo unitario que está tambien sobre el lado terminal de θ. Si $t \geq 0$, este punto se alcanza moviendose en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo del círculo unitario, comenzando en $(1{,}0)$, una distancia de arco igual a t unidades. Si $t < 0$, este punto se alcanza moviendolo en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo del círculo unitario, comenzando en $(1{,}0)$, una distancia de arco a $|t|$ unidades.

Así, a todo número rel t le corresponde un punto único $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario; es decir, no afecta qué número real t se escoja, habrá un punto único P que les corresponda sobre el círculo unitario. Usaremos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario correspondientes al número real t para definir las seis ***Funciones Trigonométricas***.

Estas seis funciones se definen: $\operatorname{sen} t = b$, $\cos t = a$, $\tan t = \dfrac{b}{a}$, $\cot t = \dfrac{a}{b}$, $\sec t = \dfrac{1}{a}$, $\csc t = \dfrac{1}{b}$.

Veamos en estas definiciones que si $a = 0$, es decir, si el punto $P = (0, b)$ está sobre el eje y, la función tangente y la función secante son indefinidas. Así mismo, si $b = 0$, es decir, si el punto $P = (a, 0)$ está sobre el eje x, entonces la función cosecante y la función cotangente son indefinidas. Puesto que el círculo unitario se usa para dar estas definiciones de las funciones trigonométricas, a veces se les llama funciones circulares.

Si $\theta = t$ radianes, las seis funciones trigonométricas del ángulo θ se definen como:



$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} t \qquad \cos\theta = \cos t$

$\tan\theta = \tan t \qquad \cot\theta = \cot t$

$\sec\theta = \sec t \qquad \csc\theta = \csc t$

Figura 2.5

Aún cuando la distinción entre las funciones trigonométricas de números reales y las funciones trigonométricas de ángulos es importante, es costumbre referirse a tales funciones, en forma genérica como ***funciones trigonométricas***.

Si un ángulo θ se mide en grados, usaremos el símbolo de los grados cuando escribamos una función trigonométrica de θ, como $\operatorname{sen} 30^0$ y $\tan 45^0$. Si un ángulo se mide en radianes, no usaremos ningún simbolo cuando escribamos una función trigonométrica de θ, como por ejemplo, en $\cos\pi$ y $\sec\dfrac{\pi}{3}$.

Finalmente, puesto que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ estan determinadas por las coordenadas del punto $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario correspondiente a θ, las unidades usadas para medir el ángulo θ son irrelevantes.

Por ejemplo, no importa si escribimos $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ radianes o $\theta = 90^0$. El punto que corresponde a este ángulo en el círculo unitario será P = (0,1). Por lo tanto, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 90^0 = 1$ y $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos 90^0 = 0$.

Ejemplo: Sea t un número real y sea $P = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t, encontrar el valor de las seis funciones trigonométricas.

Solución:

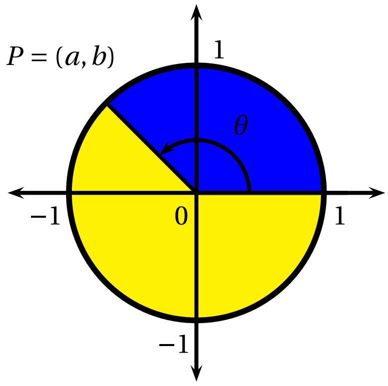
$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos t = -\frac{1}{2}, \qquad \tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\cot t = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \sec t = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \csc t = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2.1.1. Dominio de las funciones trigonométricas:

Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P = (a, b)$ un punto sobre el lado terminal de θ que se encuentra sobre el círculo unitario, como se muestra en la figura 2.6:

Entonces, para $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, θ puede ser cualquier ángulo, así que el dominio de la función seno y el de la función coseno es el conjunto de todos lo números reales.



$$\operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos\theta = a$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}, a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, b \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{a}, a \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{1}{b}, b \neq 0$$

Figura 2.6

Si $a = 0$, la función tangente y la función secante no están definidas. Así para estas funciones la absisa del punto $P(a,b)$ no puede ser 0. Sobre el círculo unitario los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$, corresponden a los ángulos que sean múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$, como $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, etc. Por lo tanto estos ángulos deben excluirsen del dominio de las funciones tangente y secante, por lo tanto su dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$.

Si $b = 0$, las funciones cotangente y cosecante no están definidas, para estas funciones la coordenada del punto $P(a,b)$ no puede ser (0,0). Sobre el círculo unitario los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$, corresponden a los ángulos 0 y π, o de modo general, a cualquier ángulo que sea un múltiplo entero de π, como 0, π, 2π, 3π, $-\pi$, etc. Por lo tanto estos ángulos deben excluirse del dominio de las funciones cotangente y cosecante. así que el dominio de estas funciones es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de π.

2.1.2. Rango de las funciones trigonométricas:

Sea $P(a,b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde al ángulo θ. Se sigue que $-1 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 1$, puesto que $\operatorname{sen}\theta = b$ y $\cos\theta = a$, entonces $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$ y $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, es decir, $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$ y $|\cos\theta| \leq 1$.

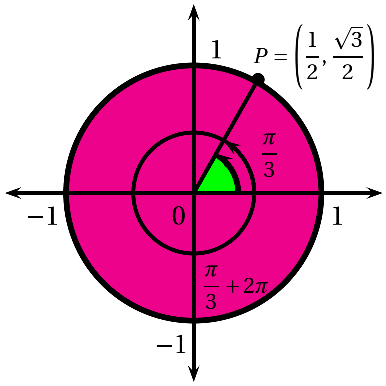
De manera similar, si θ no es múltiplo de π y como $b = \operatorname{sen}\theta \neq 0$, entonces $|\csc\theta| = \frac{1}{|b|} \geq 1$, ya que $|b| \leq 1$, así que $\csc\theta \geq 1$ o $\csc\theta \leq -1$.

Analicemos el caso en que θ no es múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$. Dado que $a = \cos\theta \neq 0$, tenemos que $|\sec\theta| = \left|\frac{1}{\cos\theta}\right| = \frac{1}{|a|} \geq 1$, puesto que $|a| \leq 1$, así que $\sec\theta > 1$ o $\sec\theta \leq -1$.

El rango de las funciones tangente y cotangente consta de todos los números reales es decir, $-\infty < \tan\theta < \infty$ y $-\infty < \cot\theta < \infty$.

2.1.3. Periodo de las funciones trigonométricas:

La figura 2.7 muestra que para un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes, el punto P correspondiente sobre el círculo unitario es $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Veamos que para un ángulo de $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ radianes, el correspondiente punto P sobre el círculo unitario es también $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Así:



$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}$$

Figura 2.7

En general, dado un ángulo θ, medido en radianes y el punto P = (a, b) correpondiente sobre el círculo unitario. Sumemos ahora 2π a θ, el punto sobre el círculo unitario correspondiente a $\theta + 2\pi$ es idéntico al punto P sobre el círculo unitario a θ. Así los valores de las funciones trigonométricas de $\theta + 2\pi$ son iguales a los valores de las correspondientes funciones trigonométricas de θ.

Si sumamos o restamos múltiplos enteros de 2π a θ, los valores trigonométricos de nuestras dos funciones no cambian, es decir, que para toda θ, $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi.k) = \operatorname{sen}\theta$; $\cos(\theta + 2\pi.k) = \cos\theta$ donde k es cualquier entero.

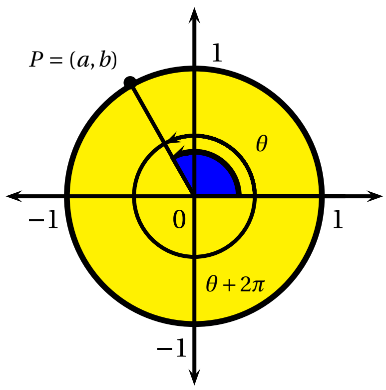


Figura 2.8

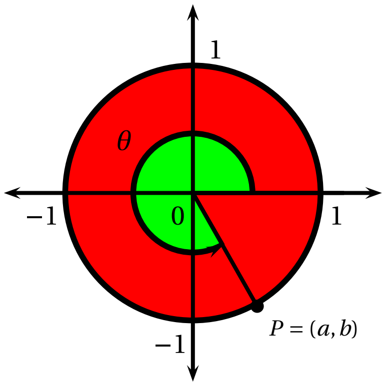
Las funciones que muestran este comportamiento se llaman funciones periódicas.

Una función f se llama ***periódica*** si existe un número positivo p tal que, siempre que θ esté en el dominio de f, también lo estará $\theta + p$ y $f(\theta + p) = f(\theta)$. El mínimo número p que cumpla esta condición se llama ***periodo*** de f.

Así, con base en la ecuación $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi.k) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos(\theta + 2\pi.k) = \cos\theta$, las funciones seno y coseno son periódicas y su periodo es de 2π. Las funciones secante y cosecante son también periódicas con un periodo 2π por que las funciones coseno y seno lo son y las funciones tangente y cotangente son periódicas con un periodo π.

2.1.4. Signos de las funciones trigonométricas:

Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario correspondiente al ángulo θ. Si sabemos en que cuadrante está P, podemos determinar los signos de las seis funciones trigonométricas de θ. Por ejemplo, si $P = (a, b)$ está en el cuadrante IV, como vemos en la figura 2.9, sabemos que $a > 0$ y $b < 0$.



$\operatorname{sen}\theta = b < 0 \qquad \cos\theta = a > 0$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a} < 0 \qquad \cot\theta = \dfrac{a}{b} < 0$

$\sec\theta = \dfrac{1}{a} > 0 \qquad \csc\theta = \dfrac{1}{b} < 0$

Figura 2.9

Tomando en cuenta lo anterior observemos en las siguientes gráficas los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante.

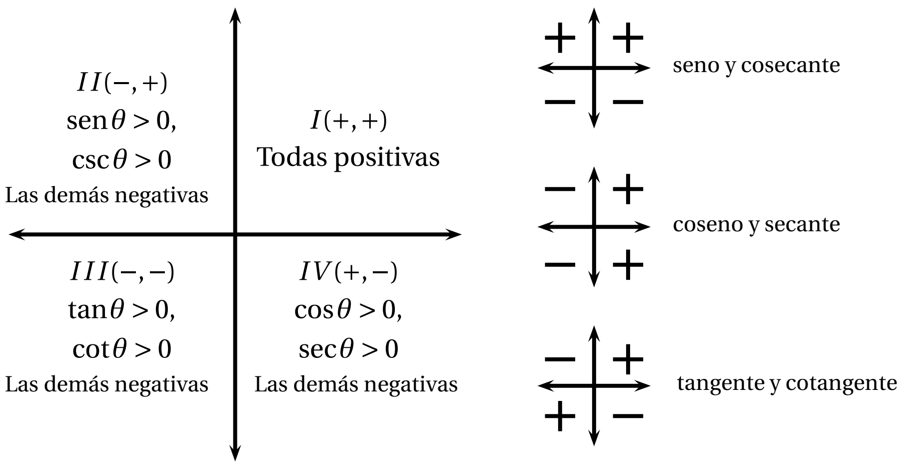


Figura 2.10

2.1.5. Funciones pares e impares:

Una función f es par si $f(-\theta) = f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f; f es impar si $f(-\theta) = -f(\theta)$ para todo θ en el dominio de f. Teniendo en cuenta lo anterior podemos decir que las funciones trigonométricas seno, tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que las funciones coseno y secante son funciones pares.

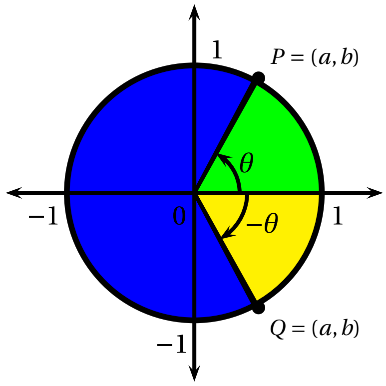


Figura 2.11

Sea $P(a,b)$ el punto sobre el lado terminal del ángulo θ sobre el círculo unitario, el punto Q sobre el lado terminal del ángulo $-\theta$ sobre círculo unitario tendrá coordenadas $(a,-b)$.

A partir de la definición de las funciones trigonométricas, tenemos que: $\operatorname{sen}\theta = b$, $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}(-\theta) = -b$ y $\cos(-\theta) = a$. Por lo que, $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(-\theta) = \cos\theta$, ahora usando estos resultados y algunas de las identidades fundamentales tenemos:

$$\begin{aligned}
\tan(-\theta) &= \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = -\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan\theta \\
\cot(-\theta) &= \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan(\theta)} = -\frac{1}{\tan(\theta)} = -\cot(\theta) \\
\sec(-\theta) &= \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)} = \sec(\theta) \\
\csc(-\theta) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(-\theta)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\theta)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = -\csc(\theta)
\end{aligned}$$

Por ejemplo: Tenemos que: $\operatorname{sen}(-45^0) = -\operatorname{sen}(45^0) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ por ser el seno una función impar y $\cos(-\pi) = \cos\pi = -1$, por ser coseno una función par.

2.2. Gráficas de las funciones trigonométricas:

Ahora vamos a mostrar una manera de graficar las funciones trigonométricas utilizando lo visto en los items anteriores.

2.2.1. Gráfica de $y = \operatorname{sen} x$:

Puesto que la función seno tiene periodo 2π, sólo es necesario graficar $y = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, el resto de la gráfica consistirá en la repetición de esta porción de la gráfica.

Comenzamos por construir la tabla en la cual se muestran algunos valores para x tomados en radianes, el valor $y = \operatorname{sen} x$ y las parejas de los puntos obtenidos (x, y).

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \operatorname{sen} x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
(x, y)	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\pi, 0)$

$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{3\pi}{2},-1)$	$(\frac{7\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(2\pi,0)$

Si trazamos los puntos obtenidos en la tabla y los unimos por medio de una curva suave, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 2.12:

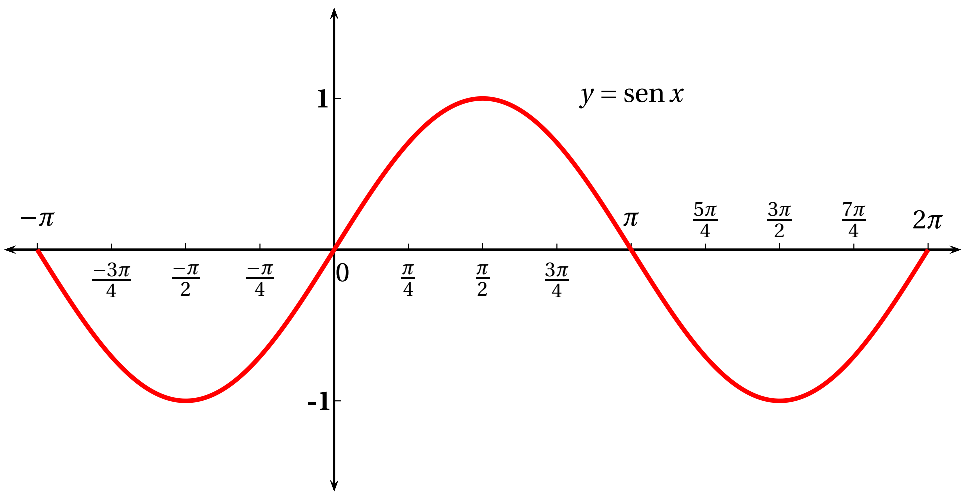


Figura 2.12

Caracteristicas de la función seno:

- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- El rango consiste en todos los números reales desde -1 hasta 1.
- Es una función impar como lo indica la simetría de la gráfica con respecto al origen.
- Es periódica con periodo 2π.
- Los interceptos de x son: -2π, $-\pi$, 0, π, 2π,...; el intercepto de y es 0.
- El valor máximo es 1 y ocurre en $x = ...,-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2},...$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = ..., -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2},...$
- La función crece en los intervalos $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right)$,... y decrece en $\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,...

2.2.2. Gráfica de $y = \cos x$:

La función coseno también tiene periodo 2π, así que sólo es necesario graficar $y = \cos x$ sobre el intervalo $[0,2\pi]$, el resto de la gráfica, al igual que con la función $y = \operatorname{sen} x$; consistirá en la repetición de esta porción de la gráfica.

Comenzamos por construir la tabla en la cual se muestran algunos valores para x tomados en radianes, el valor $y = \cos x$ y las parejas de los puntos obtenidos (x,y).

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
(x, y)	$0, 1$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$(\pi, -1)$	$(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(2\pi, 1)$

Si trazamos los puntos obtenidos en la tabla y los unimos por medio de una curva suave, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 2.13:

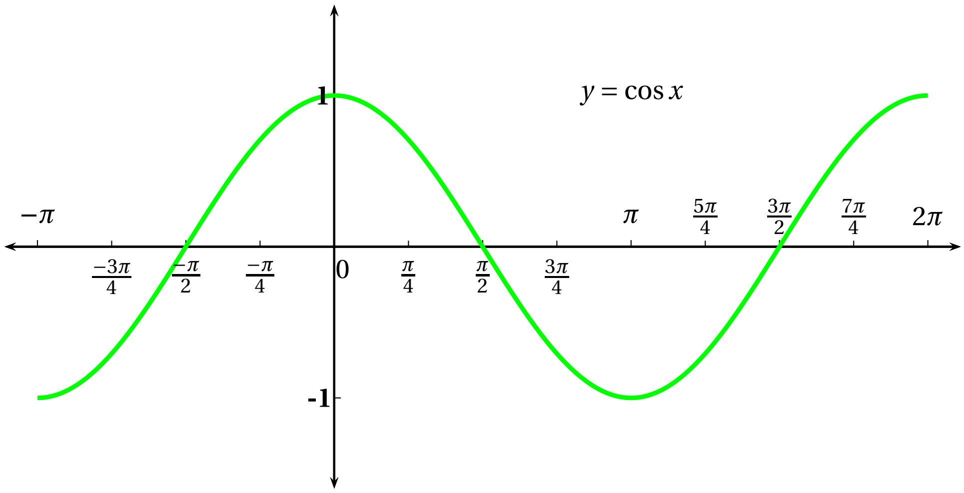


Figura 2.13

Caracteristicas de la función coseno:

- El dominio es el conjunto de todos los números reales.
- El rango consiste en todos los números reales desde -1 hasta 1.
- Es una función par como lo evidencia la simetría de la gráfica con respecto al eje y.
- Es periódica con periodo 2π.
- Los interceptos de x son: $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$; el intercepto de y es 1.
- El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$
- La función decrece en los intervalos $(-2\pi, -\pi), (0, \pi), (2\pi, 3\pi), \ldots$ y crece en $(-\pi, o)(\pi, 2\pi), \ldots$

Esto explica el hecho que las gráficas de las funciones seno y coseno se denominan ***gráficas senoidales***, pues al comparar ambas gráficas observamos que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ despues de una traslación horizontal de $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la derecha, es decir $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

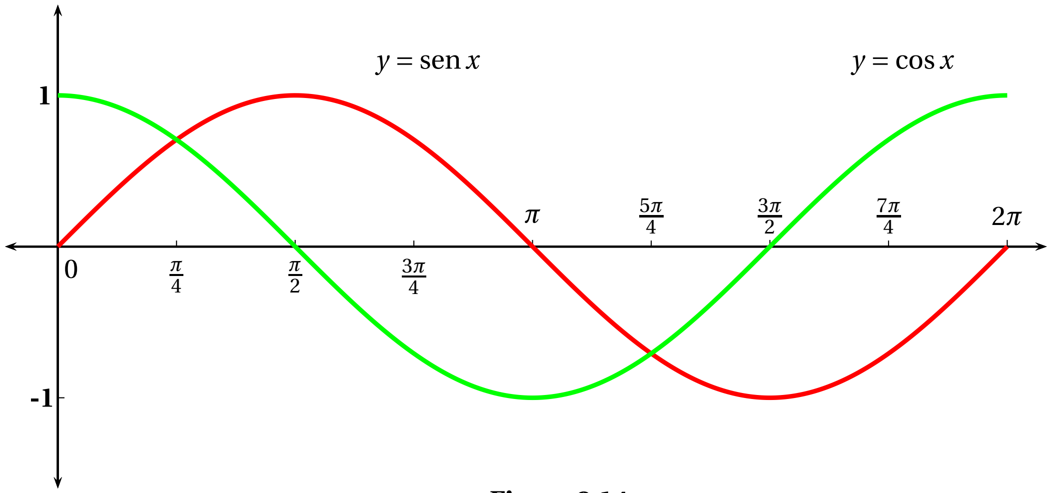


Figura 2.14

2.2.3. Amplitud de la funciones trigonométricas:

En general las funciones $f(x) = A \operatorname{sen} x$ y $f(x) = A \cos x$, el número $|A|$ se deno-mina ***amplitud*** y es el valor más grande que puede tomar las funciones. Es decir, las funciones $f(x) = A \operatorname{sen} x$ y $f(x) = A \cos x$ tiene amplitud $|A|$

Ejemplo:

En la gráfica de la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$, los cuales son la comprensión y alargamiento vertical de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, respectivamente, se tiene que para la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, el mayor valor que puede tener la función es 2, mientras que para la función $f(x) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$, el mayor valor es $\dfrac{1}{2}$.

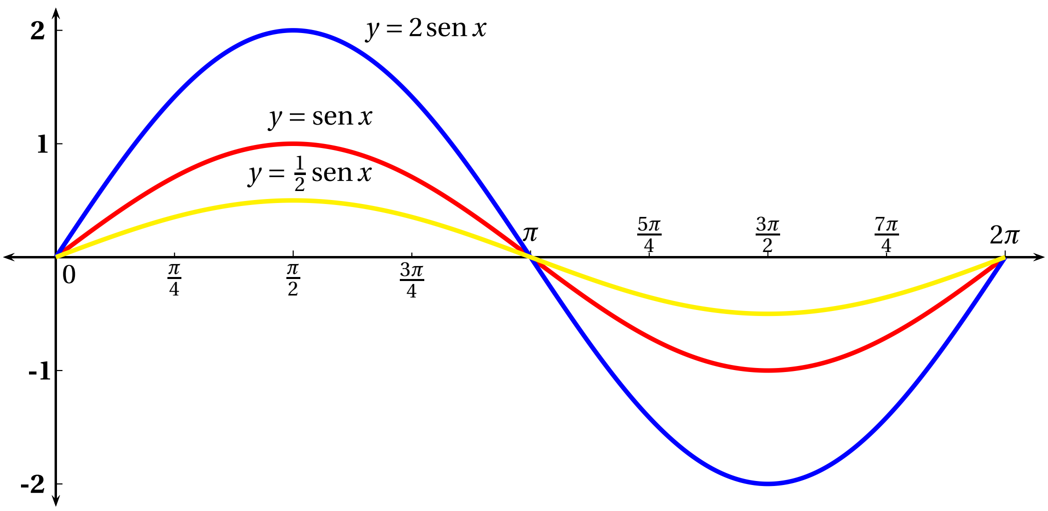


Figura 2.15

2.2.4. Desfase o desplazamiento de fase de las funciones trigonométricas:

Las gráficas de las funciones $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ y $y = A \cos(Bx - C)$ se denominan ***curvas senosoidales*** con amplitud $|A|$ y periodo $T = \dfrac{2\pi}{B}$, donde $B > 0$.

El número $\dfrac{C}{B}$ es un desplazamiento horizontal de las funciones seno y coseno que de denomina ***desfase o desplazamiento de fase***.

Esto quiere decir que si $y = A\operatorname{sen}(Bx - C)$ o $y = A\cos(Bx - C)$, $|A|$ es la amplitud, $\dfrac{2\pi}{B}$ es el periodo y $\dfrac{C}{B}$ es el desplazamiento o fase.

Ejemplo:

Para la función $y = 2\operatorname{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ se tiene que: A = 2 = B y C = $\dfrac{\pi}{4}$.

Por lo tanto, la amplitud de la función es $|A| = |2| = 2$

El periodo $T = \dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

El desfase es $\dfrac{C}{B} = \dfrac{\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\pi}{8}$

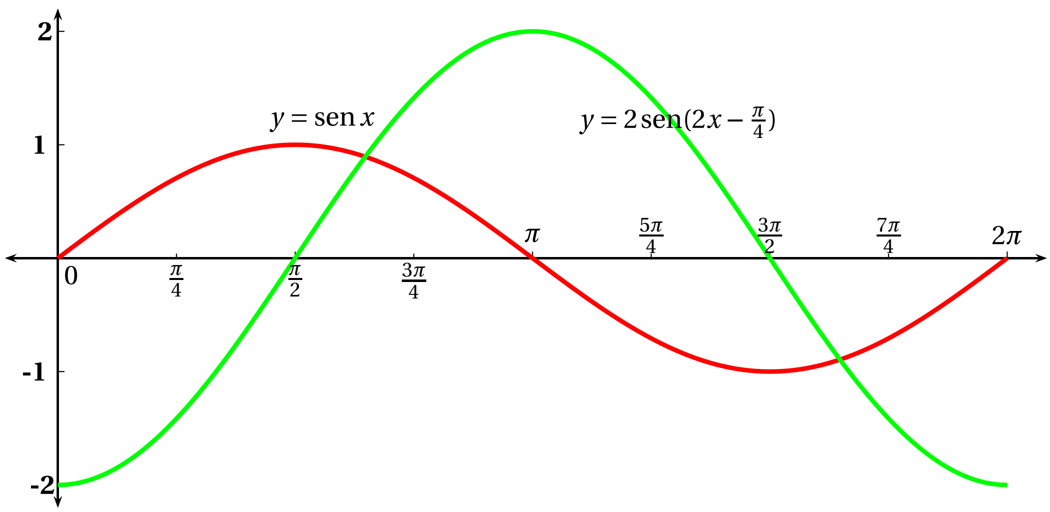


Figura 2.16

2.2.5. Gráfica de $y = \tan x$:

Puesto que la función tangente tiene período π, sólo necesitamos determinar la gráfica sobre algún intervalo de la longitud π. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de ese intervalo. Dado que la función tangente no esta definida en ..., $-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$,....sólo graficaremos en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, de longitud π y empezamos por construir la tabla que obtiene algunos puntos sobre la gráfica de $y = \tan x$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$
$y = \tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
(x, y)	$(-\frac{\pi}{3}, -\sqrt{3})$	$(-\frac{\pi}{4}, -1)$	$(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$

0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$(0,0)$	$(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\pi}{4},1)$	$(\frac{\pi}{3},\sqrt{3})$

Veamos el comportamiento de la función cuando x tiende a $-\dfrac{\pi}{2}$ y a $\dfrac{\pi}{2}$ puesto que $y = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, esta función no está definida para estos valores. Si x es cercana a $\dfrac{\pi}{2}$, pero permanece menor que $\dfrac{\pi}{2}$, entonces $\operatorname{sen} x$ será cercano a 1 y $\cos x$ será positivo y cercano a 0. Por tanto la razon $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ será positiva y grande.

La línea vertical de $x = \dfrac{\pi}{2}$ es una asintota vertical de la gráfica de $y = \tan x$. Si x es cercana a $-\dfrac{\pi}{2}$ pero permanece mayor que $-\dfrac{\pi}{2}$ entonces la función $\operatorname{sen} x$ será cercana a -1 y $\cos x$ será positiva y cercana a 0, por lo tanto la razón $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ tenderá a $-\infty$, es decir que la línea vertical $x = -\dfrac{\pi}{2}$ es también una asintota vertical de la gráfica.

Si trazamos los puntos obtenidos en la tabla y los unimos por medio de una curva suave, obtenemos la gráfica mostrada en la siguiente figura 2.17:

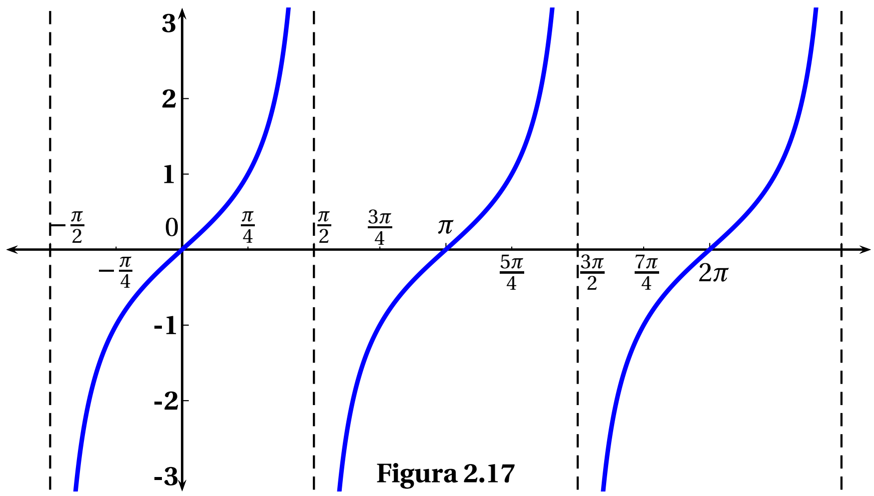


Figura 2.17

Caracteristicas de la función tangente:

- El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$.
- El rango consiste en todos los números reales.
- Es una función impar como lo evidencia la simetría de la gráfica con respecto del origen.
- Es periódica con periodo π.
- Los interceptos de x son: $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; el intercepto de y es 0.
- Las asintotas verticales se presentan en $x = -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}. \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$
- La función tangente es creciente en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right), \ldots$

2.2.6. Gráfica de $y = \cot x$:

Haremos el mismo procedimiento utilizado para obtener la gráfica $y = \tan x$. El período de $y = \cot x$ es π. Puesto que la función cotangente no está definida para múltiplos enteros de π, sólo necesitamos determinar la gráfica sobre algún intervalo, por ejemplo $(0, \pi)$. El resto de la gráfica consistirá en repeticiones de ese intervalo. Empezamos por construir la tabla que obtiene algunos puntos sobre la gráfica de $y = \cot x$, $0 < x < \pi$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$y = \cot x$	$N.D$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
(x, y)	$(N.D)$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$

π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$N.D$	$\sqrt{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$N.D$
$(N.D)$	$(\frac{7\pi}{6}, \sqrt{3})$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$N.D$

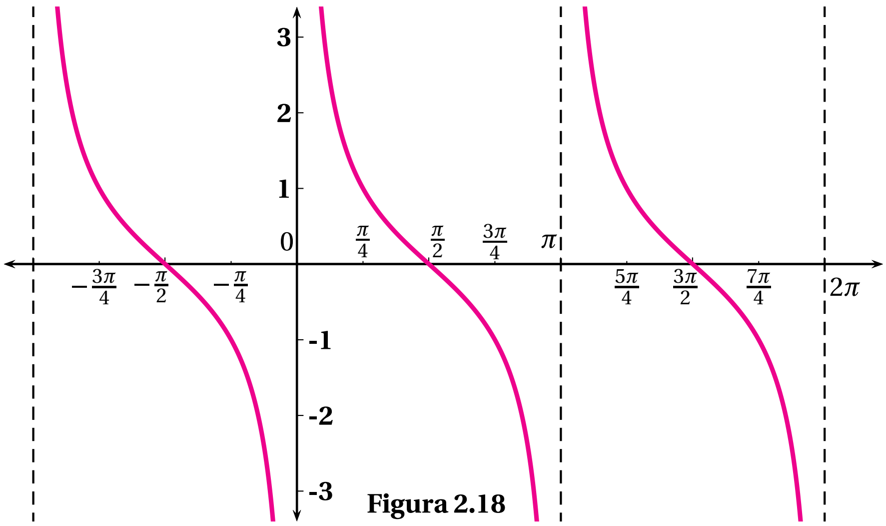


Figura 2.18

Cuando x tiende a 0, pero permanece mayor que 0, el valor de $\cos x$ tenderá a 1 y el valor de $\operatorname{sen} x$ será positivo y cercano a 0.

Por lo tanto, la razón $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$, será positiva y creciente, por lo que cuando x tienda a 0, $\cot x$ tenderá a $+\infty$. De modo similar cuando x se aproxima a π pero permanece menor que π, el valor de $\cos x$ tenderá a -1 y el valor de $\operatorname{sen} x$ será positivo y cercano a 0. Es decir que la razón $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$ será negativa y tenderá a $-\infty$ cuando x tienda a π por la izquierda.

2.2.7. Gráficas de $y = \csc x$ y $y = \sec x$:

Cotangente, secante y cosecante son las funciones, llamadas a veces ***funciones recíprocas***. Puesto que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, las graficaremos utilizando las funciones seno y coseno

El valor de la función cosecante $y = \csc x$ en un número dado x es igual al recíproco del valor correspondiente de la función seno, siempre que el valor de la función seno no sea 0.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$y=\csc x$	$N.D$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(x,y)	$(N.D)$	$(\frac{\pi}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\pi}{2},1)$	$(\frac{2\pi}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$

π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$N.D$	-2	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$N.D$
$(N.D)$	$(\frac{7\pi}{6},-2)$	$(\frac{3\pi}{2},-1)$	$(\frac{5\pi}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$N.D$

Si el valor de seno x es 0, entonces, en tal número x, la función cosecante no está definida. De hecho, la gráfica de la función cosecante tiene asíntotas verticales en los múltiplos enteros de π; veamos la gráfica,

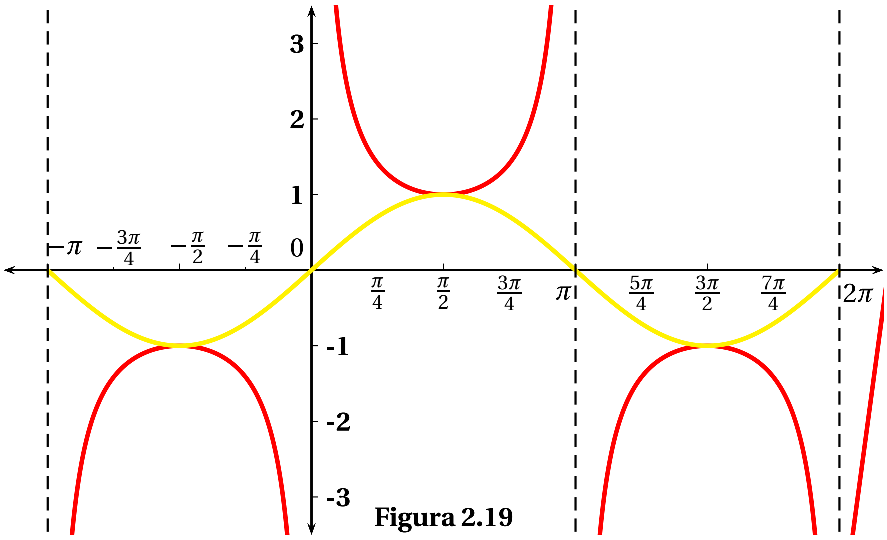


Figura 2.19

$y=\csc x$, $-\infty<x<\infty$, x diferente a múltiplos enteros de π, $|y|\geq 1$

La tabla de $y=\sec x$, es:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$y=\sec x$	1	2	$N.D$	-2
(x,y)	$(0,1)$	$(\frac{\pi}{3},2)$	$(N.D)$	$(\frac{2\pi}{3},-2)$

π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$N.D$	2	1
$(\pi,-1)$	$(\frac{7\pi}{6},-\frac{2\sqrt{3}}{3})$	$(2\pi,1)$	$(\frac{5\pi}{3},2)$	$N.D$

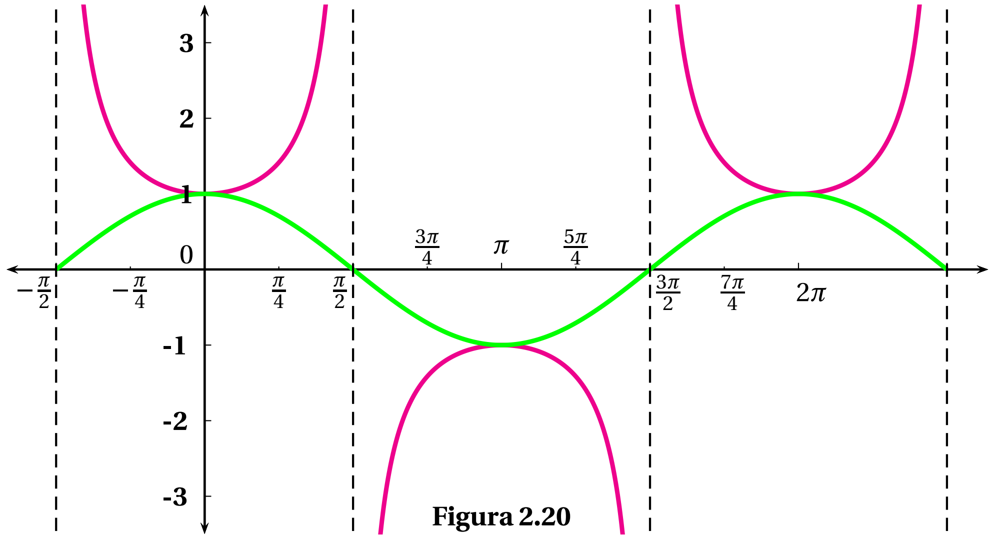


Figura 2.20

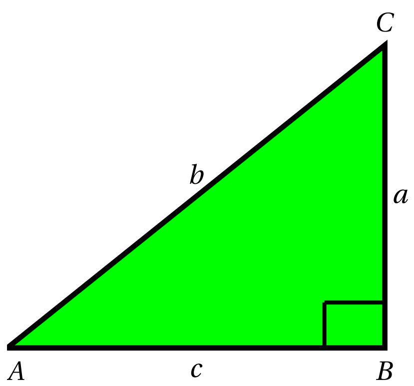
$y = \sec x$, $-\infty < x < \infty$, x no igual a múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$, $|y| \geq 1$

2.3. Identidades trigonométricas

Una expresión que contiene términos con funciones trigonométricas, se le llama ***Expresión Trigonométrica***, dichas expresiones pueden reemplazarsen con expresiones equivalentes más sencillas. Una ***Identidad Trigonométrica*** es una igualdad entre expresiones trigonométricas que es verdadera para todos los valores para los que dicha expresión tenga sentido. Esto es: si $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones trigonométricas, $f(x) = g(x)$ es una identidad trigonométrica, si la igualdad se cumple para todo x que esté tanto en el dominio de f y como el de g.

2.3.1. Identidades fundamentales

En la sección donde definimos las seis relaciones trigonométricas, estudiamos que si ABC es un triángulo rectángulo entonces:



$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b} \qquad \cos A = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{a}{c} \qquad \cot A = \frac{c}{a}$$

$$\sec A = \frac{b}{c} \qquad \csc A = \frac{b}{a}$$

Figura 2.21

Tomando en cuenta lo anterior, se concluye las siguientes identidades recíprocas:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\csc A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\tan A}{\sec A}$$
$$\cos A = \frac{c}{b} = \frac{\frac{c}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\sec A} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\cot A}{\csc A}$$
$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\cot A} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$$

Además tenemos que: $b^2 = a^2 + c^2$, de donde $1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A$.

También $\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{c^2}{a^2}$, es decir $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$, de donde $\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$.

Por otra parte $\frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} + 1$, y esto equivale a $\left(\frac{b}{c}\right)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 1$ y obtenemos $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$.

Identidades fundamentales:

Pitagóricas:

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$; $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

Recíprocas:

$\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\csc\beta}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sec\beta}$; $\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta}$

Cocientes:

$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$; $\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$;

Ejemplo: Haciendo uso de las identidades fundamentales encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ si: $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, y, $\operatorname{sen}\theta>0$.

Solución

Puesto que $\tan\theta < 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, se deduce que $\cos\theta < 0$ y de aqui $\sec\theta < 0$.

Sabemos que $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, luego $\cot\theta = -\frac{4}{3}$.

Luego $\sec\theta = -\frac{5}{4}$. De esto deducimos que $\cos\theta = -\frac{4}{5}$.

De otro lado , $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ y de esto se deduce que $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{5}{3} > 0$.

Ejemplos: Verificar las siguientes Identidades:

(a) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$.

(b) $\frac{1}{1-\cos v} + \frac{1}{1+\cos v} = 2\csc^2 v$

Solución: (a)

$\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$

$= (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)\cdot 1 = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$.

Además

(b) $\frac{1}{1-\cos v} + \frac{1}{1+\cos v} = \frac{2}{1-\cos^2 v} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 v} = 2\csc^2 v$.

2.3.2. Identidades para la suma y resta de ángulos

A las fórmulas, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$, se les llama identidades para la suma y diferencia de ángulos.

Demostraremos primero la fórmula $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + sen\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Esta fórmula es válida para todos los números α y β, aquí suponemos que $0 < \beta < \alpha < 2\pi$. Consideremos un círculo con centro en el origen $(0,0)$ y radio unidad. Sean α y β ángulos en posición estándar, como se muestra en la figura 2.22.

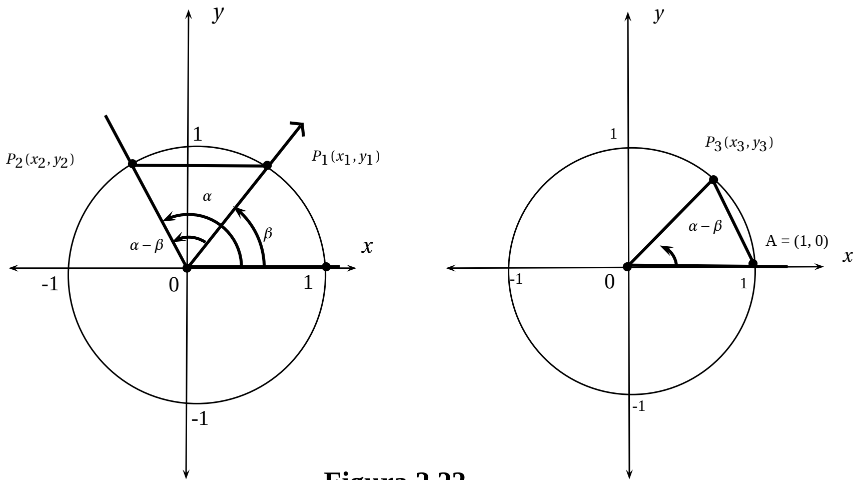


Figura 2.22

El punto $P_1(x_1,y_1)$ se encuentra sobre el lado terminal de β y el punto $P_2(x_2,y_2)$ se encuentra sobre el lado terminal de α.

Ahora rotamos el ángulo $\alpha-\beta$ de tal manera que el punto $P_1(x_1,y_1)$ coincide con el punto (1,0) y lo llamamos A y el punto $P_2(x_2,y_2)$ rotado lo llamamos $P_3(x_3,y_3)$. De esto tenemos que $d(A,P_3) = d(P_1,P_2)$, esto significa que $(x_3-1)^2 + y_3^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$ y de esto $x_3^2+y_3^2-2x_3+1 = x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_2y_1$, pero $x_3^2+y_3^2 = x_1^2+x_2^2 = y_1^2+y_2^2 = 1$, por estar sobre el círculo unitario, así que $1-2x_3+1 = 1-2x_1x_2+1-2y_1y_2$, de donde $x_3 = x_1x_2+y_1y_2$. Pero $x_3 = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Ahora, $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) =$

$\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. Aquí hemos utilizado el hecho que las funciones seno y coseno son impares y par respectivamente.

Ahora tenemos que, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left((\alpha+\beta)-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\beta\right) =$ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\beta - \operatorname{sen}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - (-\cos\alpha)\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

Por otro lado, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

Ejemplo 1.

1. Si α es un ángulo en el primer cuadrante con $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ y β es un ángulo en el segundo cuadrante con $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{12}{13}$, evalúe $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ y determine el cuadrante de $\alpha+\beta$.

Solución:

Tenemos que $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ por que α esta en el I cuadrante.

De otro lado, $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$; $\cos\beta = -\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$, para que β este en el II cuadrante; $\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = -\frac{12}{5}$.

Ahora,

$\operatorname{sen}\left(\alpha+\beta\right) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\,\cos\alpha = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)+\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{33}{65}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = -\frac{56}{65}$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{12}{5}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{12}{5}\right)} = -\frac{33}{56}$

Como $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es positivo y $\cos(\alpha+\beta)$ es negativo, $\alpha+\beta$ es un ángulo del II cuadrante.

Ejemplo 2.

Hallar los valores de $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ y $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Solución:

Tenemos que $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi+3\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

De la misma manera,

$\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

$\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{9-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{8} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

2.4. Ángulos Dobles

Si en las fórmulas del seno y el coseno para la suma de ángulos hacemos $\alpha=\beta$, obtenemos:

$\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Puesto que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, entonces en la última identidad encontramos que:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$, o equivalentemente $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ y también $\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha$ y de aquí $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

En resumen, $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{2}$, y ,$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Ejemplo 1:

Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, encuentre el valor exacto de:

(a) $\operatorname{sen} 2\theta$ y (b) $\cos 2\theta$.

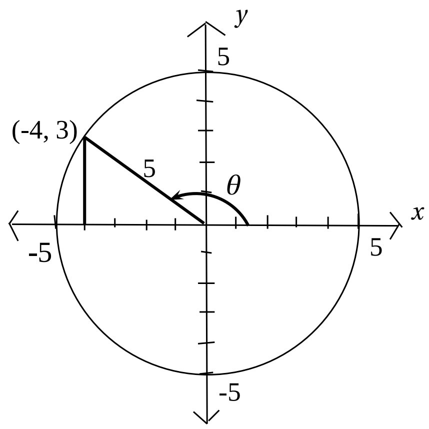


Figura 2.23

Solución:

(a). Tenemos que $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$, además, $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

(b). $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$, también podemos decir que el ángulo de 2θ queda en el IV cuadrante por que $\tan 2\theta = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$.

2.5. Ecuaciones trigonométricas

Cuando se propone una igualdad de expresiones trigonométricas que no es una identidad, el objeto es determinar valores que la hacen verdadera; para ello se requiere resolver una ecuación. Puede haber infinitas soluciones en un intervalo, por esto es muy importante tener en cuenta el intervalo en donde se va a resolver la ecuación.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación: $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

Solución:

En el intervalo $[0, 2\pi]$ hay dos ángulos θ para los cuales $\cos\theta = \frac{1}{2}$: $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Puesto que la función coseno tiene periodo 2π, tenemos que todos todas las soluciones de la ecuación $\cos\theta = \frac{1}{2}$ son de la forma $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $\theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

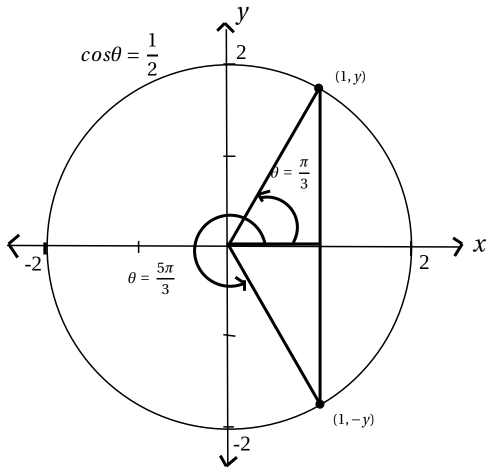


Figura 2.24

Ejemplo 2.

Resuelva la ecuación: $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Solución

En el intervalo $[0, 2\pi]$, la función seno tiene el valor $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ y en $\frac{5\pi}{6}$. En consecuencia, si $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$, tenemos que: $2\theta = \frac{\pi}{6}$ o $2\theta = \frac{5\pi}{6}$, es decir $\theta = \frac{\pi}{12}$, o, $\theta = \frac{5\pi}{12}$, o, $\theta = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13}{12}\pi$, o, $\theta = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$.

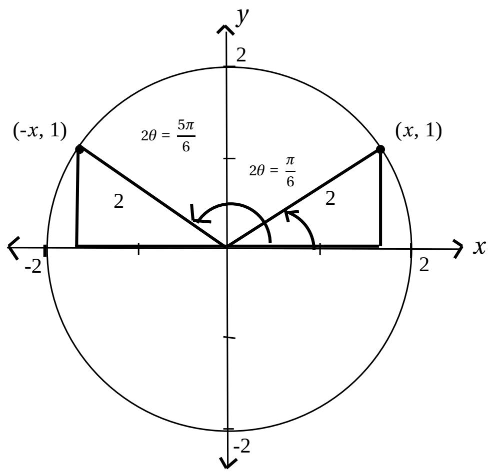


Figura 2.25

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2\cos\theta + 1 = 0$, si $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Solución

Si $2\cos\theta = -1$, entonces $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, y como $\cos\theta < 0$ en los cuadrantes II y III, los ángulos que satisfacen esta condición son $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$.

Además ya que la función coseno tiene como periodo 2π, la solución general es: $\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$; $\dfrac{4\pi}{3} + 2n\pi$ donde $n \in Z$

Ejemplo 4.

Resolver la ecuación: $\tan(\alpha - \pi) = \sqrt{3}$, para, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Solución:

Puesto que $\tan(\alpha - \pi) = \sqrt{3}$, $\alpha - \pi \in (-\pi, \pi)$, entonces
$\alpha - \pi = \dfrac{5\pi}{6}$, o, $\alpha - \pi = -\dfrac{\pi}{6}$, es decir $\alpha = \pi + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$, o, $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.
Cuando se resuelven este tipo de ejercicios es bueno tener a la mano una calculadora que tenga las funciones trigonométricas con inversas ya que esto facilita el cálculo de ángulos.

Por ejemplo: si $\tan\alpha = 3{,}2$ en la calculadora hacemos el siguiente proceso:

Primero **Shift**, luego **tan**, después **3.2** y por último el =. Y listo.

Debe de arrojar como resultado 72,65 (por aproximación), programar la calculadora en el MODE deg.

2.6. Ejercicios propuestos

1. Determina el valor de la función del ángulo α, a partir del valor de la función dada.

a) $\cot\alpha$ si $\tan\alpha = -\sqrt{8}$

b) $\sec\alpha$ si $\cos\alpha = \dfrac{5}{7}$

c) $\tan\alpha$ si $\cot\alpha = \dfrac{5}{4}$

2.Comprueba las siguientes identidades.

a) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

b) $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$

3. Demuestra que:

a) $\cos 2\beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta$

b) $\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} = \cot\alpha - \tan\alpha$

4. Resolver la ecuación trigonométrica $2\operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

CAPÍTULO 3

LEY DEL SENO Y DEL COSENO

En el capítulo anterior usamos las funciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos, es decir triángulos con un ángulo de 90^0, ahora vamos a resolver para cualquier clase de triángulos, para ello formularemos dos resultados llamados la ley del seno y la ley del coseno que enunciaremos más adelante.

En el análisis que sigue, notaremos los triángulos oblicuángulos de manera que el lado a sea el opuesto al ángulo α, el lado b el opuesto al ángulo β y el lado c el opuesto al ángulo γ.

Resolver un triángulo oblicuángulo significa encontrar las longitudes de sus lados y las medidas de sus ángulos. para hacer esto, necesitamos al menos conocer la longitud de un lado junto con otras dos cantidades: ya sean dos ángulos, otros dos lados, o bien un ángulo y otro lado, para ello existen cuatro posibilidades por considerar.

$CASO\ I$: se conocen un lado y dos ángulos ($LAA\ O\ ALA$)

$CASO\ II$: se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)

$CASO\ III$: se conocen un lado y el ángulo entre ellos (LAL)

$CASO\ IV$: se conocen tres lados (LLL)

3.1. Ley de los senos:

La ley de los senos se usa para resolver triángulos de los casos I y II y se enuncia de la siguiente manera:

Para un triángulo con lados $a,\ b$ y c y ángulos opuestos α , β y γ respectivamente:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad (1)$$

Para demostrar la ley de los senos construimos una altura de longitud h desde uno de los vértices de un triángulo no rectángulo. En la figura 3.1 lo hacemos para un triángulo acutángulo y en la figura 3.2 lo hacemos para un triángulo obtusángulo. En cada caso, la altura esta trazada desde el ángulo β

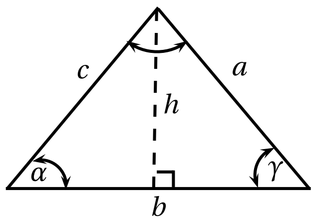


Figura 3.1.

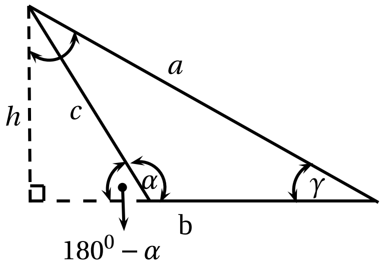


Figura 3.2

Usando cualquiera de las figuras tenemos:

$\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{h}{a}$ y por tanto $h = a\ \operatorname{sen}\gamma$ (2)

De la fig 3.1, se tiene además que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{c}$, de donde $h = c\ \operatorname{sen}\alpha$ (3)

De la misma manera de la fig 3.2, se tiene que:

$\operatorname{sen}(180^0 - \alpha) = \dfrac{h}{c}$ y de nuevo $h = c \operatorname{sen}\alpha$.

Así, aunque el triángulo tenga los tres ángulos agudos o bien dos ángulos agudos y uno obtuso, las ecuaciones (2) y (3) se cumplen. Entonces al igualar las expresiones para h en las ecuaciones (2) y (3), obtenemos

$$a\ \operatorname{sen}\gamma = c\ \operatorname{sen}\alpha$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad (4)$$

De la misma manera, construyendo la altura h^* desde el vértice del ángulo α, se llega a la igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad (5)$$

y por tanto de (4) y (5) se sigue que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Ejemplo 1. Resuelve el siguiente triángulo con los datos que a continuación se dan $\alpha = 40^0$, $\beta = 60^0$, $a = 4$

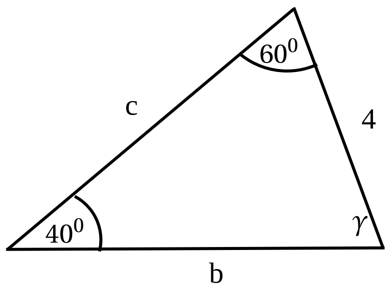


Figura 3.3

La figura 3.3 muestra el triángulo que queremos resolver. El tercer ángulo γ se encuentra fácilmente con la ecuación: $\gamma = 180 - (40 + 60) = 80$.

Ahora usamos dos veces la ley de los senos para encontrar los lados desconocidos b y c

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

Puesto que $a = 4$, $\alpha = 40^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 80^0$ entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}\ 40^0}{4} = \frac{\operatorname{sen}\ 60^0}{b} = \frac{\operatorname{sen}\ 80^0}{c}$$

Así que;

$$b = \frac{4\operatorname{sen}60^0}{\operatorname{sen}40^0} \approx 5,39,\ c = \frac{4\operatorname{sen}80^0}{\operatorname{sen}40^0} \approx 6,13.$$

Ejemplo 2. Resuelve el siguiente triángulo donde: $\alpha = 35^0$, $\beta = 15^0$, $c = 4$

Solución:

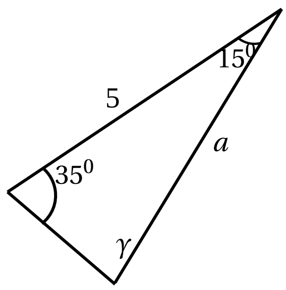


Figura 3.4

$\gamma = 180^0 - (35 + 15) = 130^0$

Además:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

o bien,

$$\frac{\operatorname{sen}35^0}{a} = \frac{\operatorname{sen}130^0}{5} = \frac{\operatorname{sen}15^0}{b}$$

Así que

$$a = \frac{5\operatorname{sen}35^0}{\operatorname{sen}130^0} \approx 3,74,\ b = \frac{5\operatorname{sen}15^0}{\operatorname{sen}130^0} \approx 1,69.$$

3.2. Ley de los cosenos:

Para un triángulo con lados $a,\ b,\ c$ y ángulos $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, opuestos respectivamente, se cumple que:

$$c^2 = a^2\ +\ b^2\ -2\ a\ b\ \cos\gamma\ (1)$$
$$b^2 = a^2\ +\ c^2\ -2\ a\ c\ \cos\beta\ (2)$$
$$a^2 = b^2\ +\ c^2\ -2\ b\ c\ \cos\alpha\ (3)$$

Demostraremos la fórmula (1), ya que la (2) y (3) se hace de manera similar.

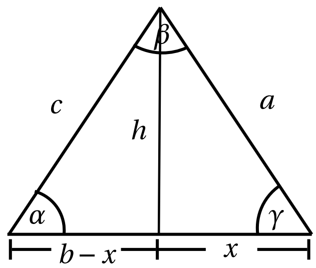


Figura 3.5

$\cos\gamma = \dfrac{x}{a}$; $x = a\cos\gamma$, $a^2 = h^2 + x^2$; $c^2 = (b-x)^2 + h^2$; $c^2 - (b-x)^2 = h^2$; $c^2 - (b^2 - 2bx + x^2) = a^2 - x^2$; $c^2 - b^2 + 2bx - x^2 = a^2 - x^2$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2b(a)\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Esta fórmula se puede expresar con palabras de la siguiente manera: el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos dos veces su producto por el coseno de su ángulo incluido.

Ejemplo 3. Resuelva el siguiente triángulo si: $a = 2,\ b = 3,\ \gamma = 60^0$

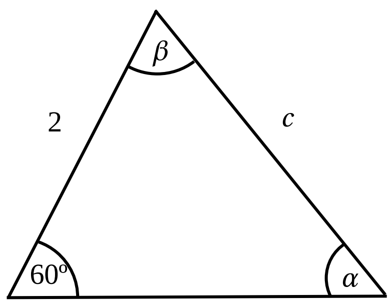


Figura 3.6

Solución:

$c^2 = 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 60^0 = 13 - 12\cdot\dfrac{1}{2} = 13 - 6 = 7$, así que $c = \sqrt{7}$, por otra parte tenemos que $2\cdot 3\cdot\sqrt{7}\cdot\cos\alpha = 3^2 + 7 - 2^2$, es decir $\cos\alpha = \dfrac{12}{6\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Usando la calculadora obtenemos que $\alpha \approx 40{,}9^0$, de esto $\beta = 180^0 - (60^0 + 40{,}9^0)\ = 180^0 - 100{,}9^0 = 79{,}1^0$

Ejemplo 4. Resuelva el siguiente triángulo si: $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$

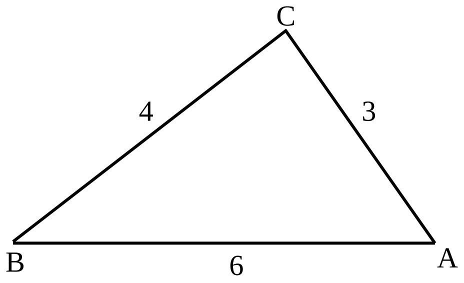


Figura 3.7

Solución: calculamos inicialmente los ángulos, así:

$\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9+36-16}{(2)(3)(6)} = \dfrac{29}{36}$ luego, $\alpha \approx 36,3^0$.

$\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{16+36-9}{(2)(4)(6)} = \dfrac{43}{48}$, luego, $\beta \approx 26,4^0$. Así que,

$\alpha = 180^0 - (\alpha+\beta) = 180^0 - (36,3^0 + 26,4^0) = 117,3^0$.

Ejemplo 5: Rescate en el mar

La estación guardacostas Zulu esta localizada a 120 millas al oeste de la estación Rayo X. Un barco envía una llamada SOS de auxilio desde el mar y la reciben ambas estaciones. la llamada a la estación Zulu indica que el barco esta a 40º al noroeste. La llamada a la estación Rayo X indica que el barco esta a 30º al noroeste.

(a) ¿Qué tan lejos esta cada estación del barco?

(b) Si un helicóptero que vuela a 200 millas por hora se envía de la estación más cercana al barco, ¿qué tiempo le tomará llegar hasta éste?.

Solución:

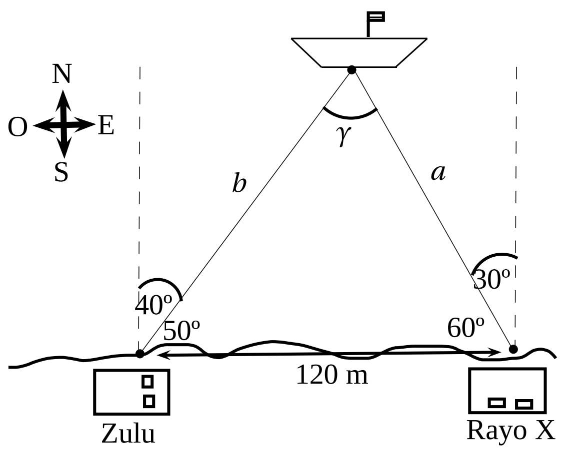


Figura 3.8

(a) En la figura 3.8 se ilustra la situación, el ángulo γ es: $\gamma = 180^0 - 50^0 - 60^0 = 70^0$

A partir de la ley de los senos encontraremos que: $\dfrac{\text{sen } 50^0}{a} = \dfrac{\text{sen } 70^0}{120}$

o bien $a = \dfrac{120 \ \text{sen } 50^0}{\text{sen } 70^0} \approx 97{,}82$ millas

Ahora, $\dfrac{\text{sen } 60^0}{b} = \dfrac{\text{sen}\,70^0}{120}$ o bien $b = \dfrac{120\ \text{sen}\,60^0}{\text{sen } 70^0} \approx 110{,}59$ millas.
La estación Zulu está aproximadamente a 110,59 millas del barco y la estación Rayo X está aproximadamente a 97,82 millas del barco.

(b) El tiempo t requerido por el helicóptero para llegar al barco desde la estación Rayo X es:
$t = \dfrac{d}{v} = \dfrac{97,82}{200}$ horas $= \dfrac{97,82 \times 60}{200}$ minutos $= 29,34$ minutos.

Ejemplo 6.

Un bote de vela con motor sale de Naples, Florida y se dirige a Key West que esta a 150 millas de distancia. Mantiene una velocidad constante de 15 mi/h, pero encuentra durante la travesía fuertes corrientes y vientos cruzados. la tripulación detecta que después de 4 horas, el bote se ha desviado 20^0 de su curso.

(a) ¿Qué tan lejos esta el bote Key West en ese momento?

(b) ¿Qué ángulo debe girar el bote para corregir su curso ?

Solución:

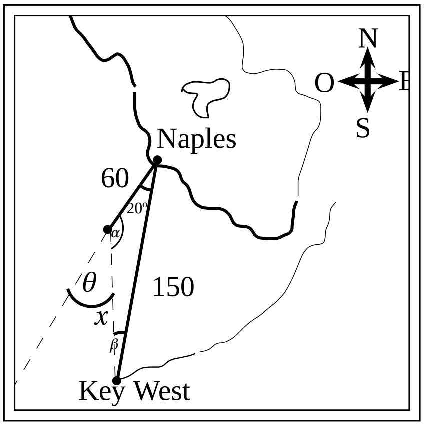


Figura 3.9

De acuerdo a la información, si el bote viaja a 15 mi/h, en 4 h habrá viajado 60 millas

Vamos a encontrar la distancia x del bote a Key West y también el ángulo θ que el bote debe girar para corregir su curso. Tenemos que:

$x^2 = 150^2 + 60^2 - 2 \cdot 150 \cdot 60 \cdot \cos 20^0 \approx 9\,186$, así que $x = 95{,}84$ millas, lo que indica que el bote está aproximadamente a 96 millas de Key West.

(b) Tenemos que $\text{sen}\,\beta = \dfrac{60 \cdot \text{sen}\,20^0}{95,84} \approx 0,21$, de donde $\beta = 12,36^0$, así que: $\alpha = 180^0 - (20^0 + 12,36^0) = 180^0 - (32,36^0) = 147,64^0$, de esto tenemos que, $\theta = 180^0 - 147,64^0 = 32,36^0$

3.3. Ejercicios propuestos

1. Hallar el valor de b en cada triángulo.

a) $\angle A = 50^0, \angle B = 67^0, a = 7\text{cm}$

b) $\angle A = 44^0, a = 18\text{cm}\ \angle B = 86^0$

c) $\angle C = 88^0, \angle A = 55^0\, a = 14\text{cm}$

2. En un trapecio isósceles, la base menor AD = 2 cm, la base mayor BC = 4m y $\angle C = 55^0$. Calcula la medida de la diagonal del trapecio.

3. Dos personas A y B se encuentran a una distancia de 400 m una de la otra. Cuando un avión pasa por el plano vertical de las mencionadas personas, estas lo ven simultáneamente con ángulos de elevación de 35^0 y 48^0, respectivamente. Calcula la altura del avión en ese instante.

4. Dos carreteras se cruzan en un punto P formando un ángulo de 42^0. En un punto R de una de las carreteras hay un edificio que esta a 368 m de P, y en un punto S de la otra carretera, hay un edificio que esta a 426 m de P. Determina la distancia entre P y S.

5. En un trapecio isósceles, la base menor AD = 2 cm, la base mayor BC = 4m y $\angle C = 55^0$. Calcula la medida de la diagonal del trapecio.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES VARIAS

Ejemplo 1.

Un poste vertical de 60 pies de longitud esta colocado en la cima de una colina, y proyecta una sombra de 138 pies de largo directamente colina abajo a lo largo del camino cuando el ángulo de elevación del sol es de 58^0 figura 4.1. Encuentre el ángulo de inclinación θ del camino.

Solución:

La siguiente figura ilustra la situación planteada en el problema:

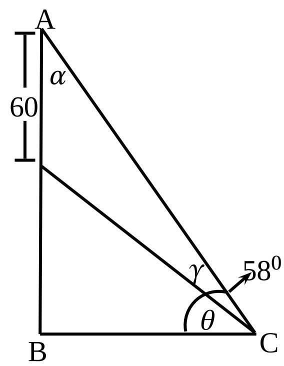


Figura 4.1

El triangulo ABC es rectángulo en B por tanto $\alpha = 180^0 - (58^0 + 90^0) = 32^0$.

Ahora, por el teorema del seno tenemos $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{138} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{60}$.

Luego $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{(60)0,53}{138} = 0{,}23$; así $\gamma \approx 13,29^0$ luego $\theta = 58^0 - 13,29^0 = 44,71^0$.

Ejemplo 2.

Una antena de radio esta sujeta con cables de acero como se indica en la figura 4.2. Hallar la longitud de los cables.

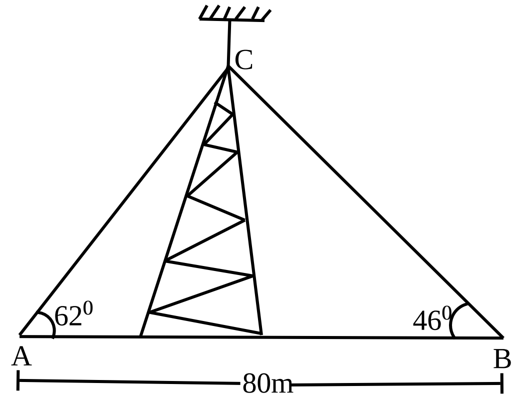


Figura 4.2

Solución:

Aquí tenemos que $C = 180^0 - (46^0 + 62^0) = 180^0 - 108^0 = 72^0$,

así que $a = \dfrac{80^0 \cdot \operatorname{sen} 62^0}{\operatorname{sen} 72^0} \approx 74,3m$. Por otra parte $b = \dfrac{80 \cdot \operatorname{sen} 46^0}{\operatorname{sen} 72^0} \approx 60{,}5m$

Ejemplo 3.

Desde un punto A en una llanura, el ángulo de elevación de una cometa es α y desde otro sitio en un punto B a c unidades a la derecha de A el ángulo de elevación es B. Demuestre que la distancia de A a la cometa es: $\dfrac{c \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$ y que la altura de la cometa es $\dfrac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$ es decir $d = \dfrac{c \ \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$, y, $h = \dfrac{c \ \operatorname{sen} \alpha \ \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$.

Solución:

La figura 4.3 explica la situación planteada en el problema:

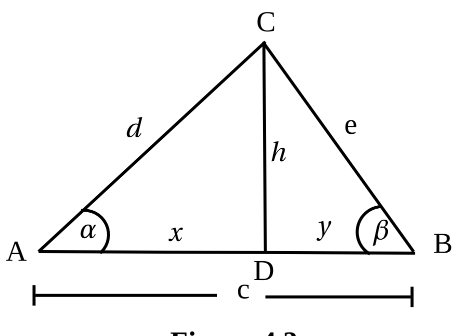


Figura 4.3

En el triángulo ADC, $\tan \alpha = \dfrac{h}{x}$, así que $x = \dfrac{h}{\tan \alpha} = \dfrac{h \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$.

En el triángulo BDC, $\tan \beta = \dfrac{h}{y}$, por lo tanto $y = \dfrac{h}{\tan \beta} = \dfrac{h \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta}$.

De esto $c = x + y = \dfrac{h \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \dfrac{h \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = h \left(\dfrac{\operatorname{sen} \beta \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta} \right)$

así que $h = \dfrac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha} = \dfrac{c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$.

Por otra parte, $d = \sqrt{h^2+x^2} = \sqrt{\dfrac{c^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)} + \dfrac{c^2\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\cdot\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \dfrac{c\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\cdot$
$\sqrt{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}} = \dfrac{c\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

Ejemplo 4.

Desde el pie de un poste, el ángulo de elevación a la azotea de un edificio es 60^0 y desde el tope del poste, que tiene 3m de altura, el ángulo de elevación al mismo punto es 35^0. Encuentre la altura del edificio y la distancia a que se encuentra del poste.

Solución:

La situación planteada la podemos visualizar en la figura 4.4.

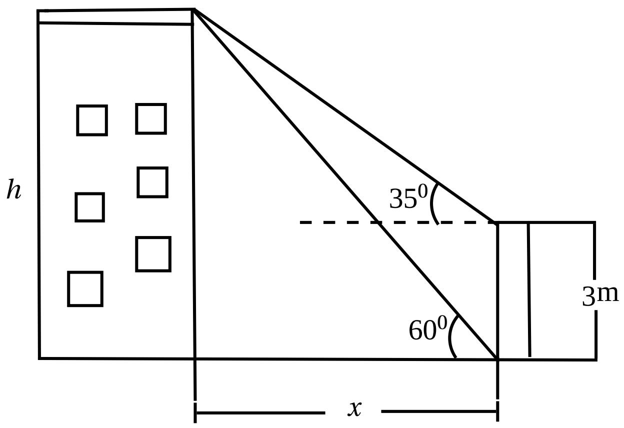


Figura 4.4

De aquí tenemos: $h = x\tan 60^0$, y, $h-3 = x\tan 35^0$, así que

$x\tan 60^0 - x\tan 35^0 = 3$, de donde $x = \dfrac{3}{\tan 60^0 - \tan 35^0} \approx 2,91$ m

Ahora $h = x\tan 60^0 \approx 2,91\cdot\sqrt{3}$ m $\approx 5,03$ m

Ejemplo 5.

Desde la cima de una colina, una persona determina que los ángulos de depresión de tres piedras consecutivas, indicadoras de los kilómetros de un camino recto distanciados 1 kilómetro cada una son: $\theta,\ \beta,\ \alpha$. Demuestre que la altura de la colina es

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cot^2\theta - 2\cot^2\beta + \cot^2\alpha}}$$

Solución:

Ilustraremos la situación en el siguiente gráfico.

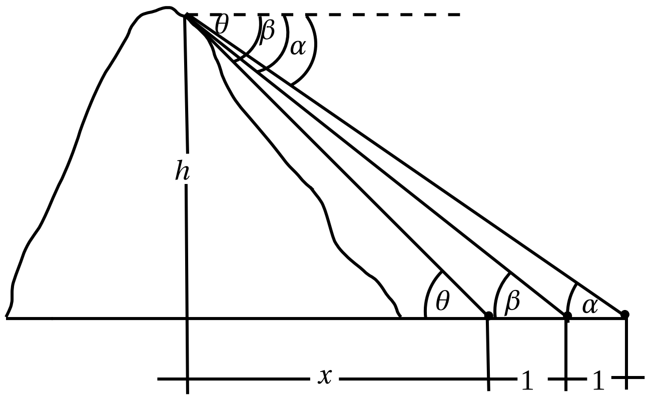


Figura 4.5

De la figura 4.5 se tiene que: $\cot^2\theta = \left(\frac{x}{h}\right)^2$; $\cot^2\beta = \left(\frac{x+1}{h}\right)^2$, y, $\cot^2\alpha = \left(\frac{x+2}{h}\right)^2$

Por lo tanto, $\cot^2\theta - 2\cot^2\beta + \cot^2\alpha = \frac{x^2 - 2(x+1)^2 + (x+2)^2}{h^2} = \frac{2}{h^2}$, es decir,

$h^2 = \frac{2}{\cot^2\theta - 2\cot^2\beta + \cot^2\alpha}$, de donde $h = \sqrt{\frac{2}{\cot^2\theta - 2\cot^2\beta + \cot^2\alpha}}$.

CAPÍTULO 5

BIBLIOGRAFÍA

- **BALDOR. J. A.**,GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA Stephen, Primera reimpresión, grupo editorial patria, México, 2009.
- **HALL**,H.S y **KNIGHT**, S.R Trigonometría Elemental. Uteha, México, 1961.
- **RAMIREZ MARISOL, YAMILE CASTAÑEDA NEYLA** y otros, Hipertexto , Matemáticas 10, Editorial de Santillana S.A , Bogota Colombia 2007.
- **SULLIVAN MICHAEL**. Trigonometría y Geometría Analítica, cuarta edición, Editorial Pearson Educación, Chicago State University, 1997.
- **VIEDMA JUAN A**. Lecciones de geometría intuitiva. Editorial Norma, Universidad Central de Madrid, 1966.