



*Universidad Surcolombiana*

---

---

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

Aplicaciones de las integrales:  
momentos y centro de masa; teoremas  
de Pappus y fuerza hidrostática

Sandra Patricia Camacho Salazar

Neiva, Huila  
2012



*Universidad Surcolombiana*

---

---

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

Aplicaciones de las integrales:  
momentos y centro de masa; teoremas  
de Pappus y fuerza hidrostática

*Trabajo presentado como requisito de grado  
para optar al título de licenciada en matemáticas*

Sandra Patricia Camacho Salazar  
*2004201316*

Asesor:  
Mauricio Penagos

Neiva, Huila  
2012

# Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

Presidente del jurado

---

Jurado

---

Jurado



DEDICATORIA

A mis padres José Lino Camacho Acosta y Gricelda Salazar Camacho, a mis hermanos Lina Marcela Camacho Salazar, Hector Javier Camacho Salazar y Yeison Daniel Camacho Salazar y a mi esposo Mariano Salazar Cabrera , quienes me brindan su apoyo incondicional.

*Sandra Patricia Camacho Salazar*



## AGRADECIMIENTOS

Expreso mis agradecimientos

A Dios por darme habilidades y conocimientos para cumplir esta meta.

Al profesor Mauricio Penagos, quien me asesoró oportunamente y gracias a sus valiosos aportes pude sacar adelante este trabajo.

Al profesor Ricardo Cedeño Tovar, por sus importantes aportes y correcciones realizados para la redacción de este trabajo.

A los profesores del Programa de la Licenciatura en Matemáticas, por la colaboración en algunas inquietudes que se me presentaron y en general por la formación que me ofrecieron durante toda mi estadía en la Universidad.

Desde lo más profundo de mi corazón:

¡Muchas gracias!





<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>Justificación</b>	<b>13</b>
<b>Objetivos</b>	<b>15</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>17</b>
1.1. Teorema del Sándwich . . . . .	17
1.2. Función Primitiva o Antiderivada: . . . . .	18
1.3. Integral Indefinida . . . . .	18
1.3.1. Tabla de Integrales Indefinidas . . . . .	19
1.3.2. La notación sumatoria y propiedades . . . . .	19
1.3.3. Partición de un segmento: . . . . .	21
1.3.4. Área bajo una curva a través de sumas superiores e inferiores . . . . .	23
1.3.5. Sumas de Riemann: . . . . .	25
1.4. Integral Definida . . . . .	26
1.4.1. Propiedades de la Integral definida . . . . .	29
1.4.2. Teorema del valor medio para Integrales . . . . .	29
1.4.3. Primer Teorema Fundamental del cálculo: Derivada de una Integral . . . . .	30
1.4.4. Segundo Teorema Fundamental del cálculo: Derivada de una Integral . . . . .	34
<b>2. MOMENTOS Y CENTROS DE MASA</b>	<b>37</b>
2.1. Conceptos Básicos . . . . .	37
2.2. Centro de masa de una varilla o de un alambre . . . . .	38
2.3. Centro de masa de una región plana o de una lámina delgada . . . . .	41
2.4. Centro de masa de un sólido de revolución . . . . .	48
<b>3. TEOREMAS DE PAPPUS</b>	<b>53</b>
3.1. Pappus de Alejandría . . . . .	53
3.2. Teorema 1: . . . . .	54
3.3. Teorema 2 . . . . .	55
<b>4. PRESIÓN DE LÍQUIDOS</b>	<b>59</b>
4.1. Blaise Pascal . . . . .	59
4.2. Fuerza Hidrostática . . . . .	61

<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

En muchos casos prácticos de las ciencias el estudio del cálculo integral resulta útil para mostrar diversas aplicaciones interesantes y fáciles de observar en nuestro entorno. En éste trabajo de grado se presentarán: aplicaciones a los momentos y centros de masa; los Teoremas de Pappus para calcular áreas de superficies y volúmenes de sólidos de revolución y la fuerza hidrostática.

Se iniciará presentando los conceptos básicos; los hechos y técnicas relacionadas con el cálculo de Integrales Definidas e Indefinidas luego, se expondrán las aplicaciones mencionadas anteriormente. También se incluirán datos históricos, ejemplos sencillos, gráficas ilustrativas de cada uno de los ejemplos, definiciones y demostraciones y las bibliografías de Pappus de Alejandría y Blaise Pascal.

La finalidad que se desea conseguir con la realización de éste proyecto es profundizar, aclarar y servir como una guía para el estudio de éstos temas de manera que cualquier lector logre una aprehensión de una manera más sencilla de cada uno de los temas propuestos en el trabajo.



La matemática, además de ser una ciencia de carácter abstracto, ha sido utilizada por el hombre como una forma de lenguaje para expresar y modelar los aspectos cualitativos y cuantitativos del mundo que lo rodea. Un lenguaje del que se valen otras ciencias, como por ejemplo, la Física y otras áreas de la actividad humana, tales como la ingeniería, las ciencias sociales como la economía o la administración.

Algunas situaciones de nuestro medio se pueden explicar por medio de las integrales de funciones, como por ejemplo los momentos y centros de masa, los Teoremas de Pappus y Fuerza Hidrostática donde las cantidades que queremos calcular puede ser expresada como integrales y a la vez relacionando así su modelo propio. A lo largo del desarrollo de los capítulos que se mostrarán a continuación se pretende ofrecer al lector no sólo un estudio sencillo y claro sobre las aplicaciones de las integrales, sino que la facilidad de acceder de una manera más sencilla a éstos conocimientos sin tener la necesidad de consultar en numerosos libros que quizá no puedan ser de fácil adquisición.



### **Objetivo general**

- Presentar un material sencillo que permita mostrar algunas de las aplicaciones que tienen las integrales de funciones específicamente para el cálculo de los momentos y centros de masa, los Teoremas de Pappus, el cálculo de volúmenes y áreas de sólidos, igualmente una aplicación a la mecánica de fluidos.

### **Objetivos específicos**

- Poner en evidencia la importancia y las aplicaciones que tienen los momentos y centros de masa en nuestro medio.
- Aplicar los teoremas de Pappus a la solución de problemas de área bajo una gráfica en situaciones de aplicación de las ciencias en la Ingeniería y la Física; a partir del conocimiento de las propiedades de la integral definida; mostrando una actitud analítica, reflexiva y colaborativa.
- Mostrar al estudiante diversos modelos que permiten aplicar las integrales de distintas áreas del conocimiento y desarrollar la capacidad de plantear y resolver problemas relacionados.





En éste primer capítulo se realizará una introducción de conceptos que proporcionan al lector las herramientas básicas para calcular integrales, las cuales nos permitirán llevarlas a las aplicaciones en los momentos y centros de masa, los Teoremas de Pappus y la Fuerza Hidrostática. Iniciamos el capítulo presentando las definiciones, propiedades y ejemplos sencillos correspondientes al Teorema del Sándwich, Función Primitiva o Antiderivada, Integral Indefinida y posteriormente Integral definida.

### 1.1. Teorema del Sándwich

Si  $a$  y  $b$  son números reales tales que  $a \leq b < a + \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N$  entonces,  $b = a$ .

Este hecho se hace evidente en el siguiente enunciado: sean  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  y  $\{c_n\}$  tres sucesiones tales que  $a_n \leq c_n \leq b_n$  a partir de un  $N \in \mathbb{N}$ , es decir  $n \geq N$ . Se cumple que, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ , entonces,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

#### Demostración

Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Sea  $\epsilon > 0$ , entonces, existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , tales que si  $n \geq N_1$  y  $n \geq N_2$  entonces  $|a_n - L| < \epsilon$  y  $|b_n - L| < \epsilon$ .

Tomemos  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Así que, si  $n \geq N$  entonces,  $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ , y,  $|b_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$

De esto,  $-\frac{\epsilon}{2} < a_n - L < \frac{\epsilon}{2}$ , y,  $-\frac{\epsilon}{2} < b_n - L < \frac{\epsilon}{2}$

Así que,  $L - \frac{\epsilon}{2} < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \frac{\epsilon}{2}$

de aquí que  $|c_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

## 1.2. Función Primitiva o Antiderivada:

Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$ . Una función  $F(x)$  se llama *primitiva o antiderivada* de  $f(x)$  en  $I$  si  $F$  es diferenciable y  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  en  $I$ , también son primitivas las funciones  $F(x) + c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ ,  $(F(x) + c)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$ . Esto significa que si una función  $f(x)$  tiene primitiva esta no es única.

**Ejemplo 1:** Si  $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 4x + 5$ , entonces, algunas primitivas de  $f(x)$  son las funciones:

$$F_1(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 6 \quad \text{y} \quad F_2(x) = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 4$$

Porque,

$$F_1'(x) = F_2'(x) = 4x^3 + 8x^2 - 4x + 5 = f(x)$$

Note que en general, si  $k \in \mathbb{R}$ , la familia de funciones

$$F(x) = 4x^3 + 8x^2 - 4x + 5 + k$$

son primitivas ó antiderivadas de  $f(x)$ .

**Ejemplo 2:** Si  $f(x) = \sec x$ , son primitivas de  $f(x)$  las siguientes funciones:

$$F_1(x) = \ln(\sec x + \tan x) + \pi, \quad \text{y} \quad F_2(x) = \ln(\sec x + \tan x) - \sqrt{2}$$

Pues si,  $F_1(x) = \ln(\sec x + \tan x) + \pi$ , entonces,

$$F_1'(x) = \frac{1}{(\sec x + \tan x)} \cdot (\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x) = \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} = \sec x = F_2'(x)$$

De la misma manera, la familia de funciones  $g(x) = \ln(\sec x + \tan x) + k$  (donde  $k$  es una constante real) también es primitiva de  $f(x)$ .

## 1.3. Integral Indefinida

Si  $F(x)$  es una función primitiva de  $f(x)$ , la expresión  $F(x) + c$ , representa la familia de todas las primitivas o antiderivadas de  $f(x)$ . A ésta familia  $F(x) + c$ , se denomina *integral indefinida* de la función  $f(x)$  y se denota por el símbolo  $\int f(x)dx$ . Esto es:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

- El símbolo  $\int$  se llama “signo de integral” y la ecuación  $\int f(x)dx = F(x) + c$  se lee “La integral de  $f(x)$  con respecto a  $x$  es  $F(x)$  más  $c$ ”. La función  $f$  es el integrando de la integral, y  $c$  es la “constante de integración”. El factor  $dx$  expresa que la variable de integración es  $x$ .

Algunas veces no es posible encontrar directamente la integral indefinida o primitiva de una función  $f$  y por esta razón se deben aplicar unos métodos o técnicas que permitan determinar funciones primitivas para estas. La derivada de una integral indefinida es igual al integrando; es decir:

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x) = F'(x) = \int \frac{d}{dx} f(x)$$

Dado que nuestro objetivo es la aplicación de las integrales en algunos campos del saber necesitaremos las técnicas de integración y para ello daremos a continuación una tabla de antiderivadas.

### 1.3.1. Tabla de Integrales Indefinidas

1)	$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$ , Si $\alpha$ y $\beta \in \mathbb{R}$
2)	$\int dx = x + C$
3)	$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} & , \text{ si } n \neq -1 \\ \ln u  + C & , \text{ si } n = -1 \end{cases}$
4)	$\int e^x dx = e^x + C$
5)	$\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \begin{cases} \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & , a \in \mathbb{R}^+ \\ -\frac{1}{a} \cot^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \end{cases}$
6)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7)	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & , a \in \mathbb{R}^+ \\ -\cos^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C & \end{cases}$
8)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9)	$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}} du = \begin{cases} \frac{1}{a} \sec^{-1}\left \frac{u}{a}\right  + C & , a \in \mathbb{R}^+ \\ -\frac{1}{a} \csc^{-1}\left \frac{u}{a}\right  + C & \end{cases}$
10)	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
11)	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + C$
12)	$\int \cos x dx = \sin x + C$
13)	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
14)	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
15)	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

### 1.3.2. La notación sumatoria y propiedades

Sean  $f$  una función,  $m$ ,  $n$  y  $k$  enteros tales que  $m \leq k \leq n$  pertenecientes al dominio de  $f$ , entonces

el símbolo  $\sum_{k=m}^n f(k)$  se define por:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n-1) + f(n)$$

Donde  $k$  se denomina índice de la sumatoria,  $m$  es el límite inferior y  $n$  es el límite superior. El índice  $k$  se puede sustituir por cualquier otro índice  $i$ , y esto no altera el valor de la sumatoria.

### Propiedades

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones y  $m$ ,  $n$ ,  $k$  y  $p$  enteros pertenecientes al dominio de  $f$  y  $g$  tales que  $m \leq k \leq n$ , y  $c$  una constante real.

1) Propiedad aditiva

$$\sum_{k=m}^n [f(k) + g(k)] = \sum_{k=m}^n f(k) + \sum_{k=m}^n g(k)$$

2) Propiedad distributiva

$$\sum_{k=m}^n cf(k) = c \sum_{k=m}^n f(k)$$

3) Sumatoria de una constante

$$\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1)c$$

Si  $m \leq n$  y  $m \leq k \leq p \leq p + 1 \leq n$ , entonces

4) Propiedad aditiva de los límites

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \sum_{k=m}^p f(k) + \sum_{k=p+1}^n f(k)$$

5) Desplazamiento del índice

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$$

6) Propiedad telescópica

$$\sum_{k=m}^n [f(k) - f(k-1)] = f(n) - f(m-1)$$

### Demostración

$$\begin{aligned} 1) \quad \sum_{k=m}^n [f(k) + g(k)] &= [f(m) + g(m)] + [f(m+1) + g(m+1)] + \cdots + [f(n) + g(n)] \\ &= [f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)] + [g(m) + g(m+1) + \cdots + g(n)] \\ &= \sum_{k=m}^n f(k) + \sum_{k=m}^n g(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sum_{k=m}^n cf(k) &= cf(m) + cf(m+1) + \cdots + cf(n) \\ &= c[f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)] \\ &= c \sum_{k=m}^n f(k) \end{aligned}$$

$$3) \sum_{k=m}^n c = \underbrace{c + c + c + \dots + c}_{n-m+1 \text{ veces}} = (n-m+1) \cdot c$$

$$\begin{aligned} 4) \sum_{k=m}^n f(k) &= f(m) + f(m+1) + \dots + f(p) + f(p+1) + \dots + f(n) \\ &= [f(m) + f(m+1) + \dots + f(p)] + [f(p+1) + \dots + f(n)] \\ &= \sum_{k=m}^p f(k) + \sum_{k=p+1}^n f(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \sum_{k=m}^n f(k) &= f(m) + f(m+1) + \dots + f(n-1) + f(n) \\ &= f(m+p-p) + f(m+1+p-p) + \dots + f(n-1+p-p) + f(n+p-p) \\ &= \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \sum_{k=m}^n [f(k) - f(k-1)] &= [f(m) - f(m-1)] + [f(m+1) - f(m)] + [f(m+2) - f(m+1)] \\ &\quad + \dots + [f(n-1) - f(n-2)] + [f(n) - f(n-1)] \\ &= -f(m-1) + [f(m) - f(m)] + [f(m+1) - f(m+1)] \\ &\quad + \dots + [f(n-1) - f(n-1)] + f(n) \\ &= f(n) - f(m-1) \end{aligned}$$

A partir de las propiedades anteriores pueden deducirse las siguientes igualdades, las cuales pueden probarse haciendo inducción sobre  $n \in \mathbb{R}^+$

$$1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$$

$$2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

$$3) \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2$$

$$4) \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} = \frac{1}{5} \cdot n^5 + \frac{1}{2} \cdot n^4 + \frac{1}{3} \cdot n^3 - \frac{1}{30} \cdot n$$

### 1.3.3. Partición de un segmento:

#### Definición

Dado un intervalo  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ , llamaremos una partición  $P$  de  $[a, b]$  a la colección de números reales  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ; tales que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

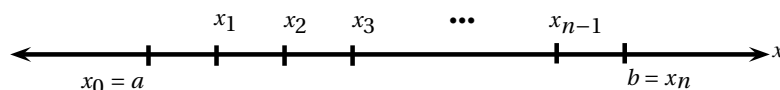


Figura 1

$$[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \cdots \cup [x_{k-1}, x_k] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n] = [a, b]$$

La longitud del intervalo  $k$ -ésimo es  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ , y lo notamos por

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Hay tres conceptos básicos en las particiones de un segmento o de un intervalo: Consideremos  $P$  una partición  $[a, b]$ . *La norma de la partición*, denotada por  $\|P\|$ , se define como el máximo entre los siguientes valores:

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$$

Pero si se tiene que

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \cdots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

entonces, la partición se llama *regular*, con base a lo anterior se cumple que:

- 1)  $\Delta x_k > 0$ , para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , puesto que  $x_k > x_{k-1}$ . En consecuencia,  $\|P\| > 0$
- 2)  $\Delta x_k \leq \|P\|$  para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, n$
- 3)  $\sum_{k=1}^n (\Delta x_k - \Delta x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = -x_0 + x_n = b - a$

**Ejemplo 3:** Una partición regular  $P$  en  $n$ -subintervalos de  $[1, 9]$ ; se obtiene de la siguiente manera:

$\Delta x_n = \frac{b-a}{n} = \frac{9-1}{n} = \frac{8}{n}$ , Entonces la partición  $P$  de  $[1, 9]$  será:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 + \Delta x = 1 + 1 \cdot \frac{8}{n} \\ x_2 &= 1 + 2\Delta x = 1 + 2 \cdot \frac{8}{n} \\ x_3 &= 1 + 3\Delta x = 1 + 3 \cdot \frac{8}{n} \\ &\vdots \\ x_{k-1} &= 1 + (k-1)\Delta x = 1 + (k-1) \cdot \frac{8}{n} \\ x_k &= 1 + k\Delta x = 1 + k \cdot \frac{8}{n} \\ &\vdots \\ x_n &= 1 + n\Delta x = 1 + n \cdot \frac{8}{n} = 9 \end{aligned}$$

En donde,

$$\left[1, 1 + 1 \cdot \frac{8}{n}\right] \cup \left[1 + 1 \cdot \frac{8}{n}, 1 + 2 \cdot \frac{8}{n}\right] \cup \left[1 + 2 \cdot \frac{8}{n}, 1 + 3 \cdot \frac{8}{n}\right] \cup \cdots \cup \left[1 + (n-1) \cdot \frac{8}{n}, 1 + n \cdot \frac{8}{n}\right] = [1, 9]$$

### 1.3.4. Área bajo una curva a través de sumas superiores e inferiores

Sea  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , una partición de  $[a, b]$ . En cada uno de los subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , levantamos un rectángulo  $R_i$  cuya base es  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  y su altura el valor mínimo de la función en  $[x_{i-1}, x_i]$ , el cual existe ya que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , en un intervalo cerrado y acotado. Si  $m_i$  es el valor mínimo de  $f$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces el área de  $R_i$  es  $m_i \cdot \Delta x_i$  para todo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , y el área de todos los rectángulos es:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

En este caso, la suma de las áreas de los rectángulos es menor o igual al área de la región  $R$ , o sea:

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq A, \text{ donde } A \text{ es el área de la región } R$$

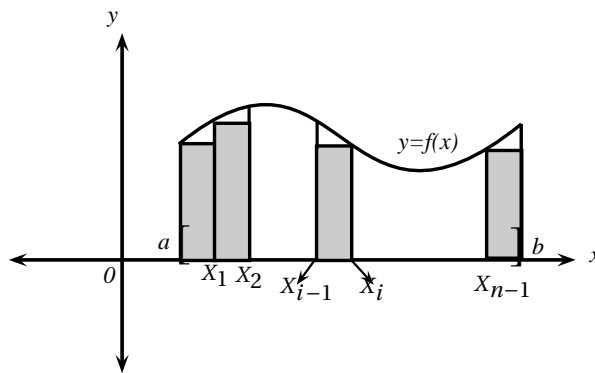


Figura 2

Tomando como altura de cada rectángulo el valor máximo  $M_i$  de la función  $f$  en  $[x_{i-1}, x_i]$ , se obtiene que la suma de las áreas de los rectángulos es mayor o igual que el área de la región  $R$ , es decir,

$$A \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \text{ y se puede concluir que:}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq A \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

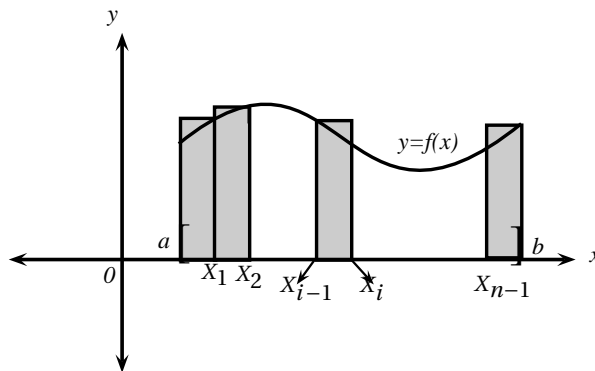


Figura 3

**Ejemplo 4:** Sea  $f(x) = x^2$  definida en  $[0, 2]$  y  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una partición regular. Si  $M_i$  es el valor máximo de  $f$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  y  $m_i$  es el valor mínimo de  $f$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  con  $i \in \mathbb{R}^+$ , Hallemos

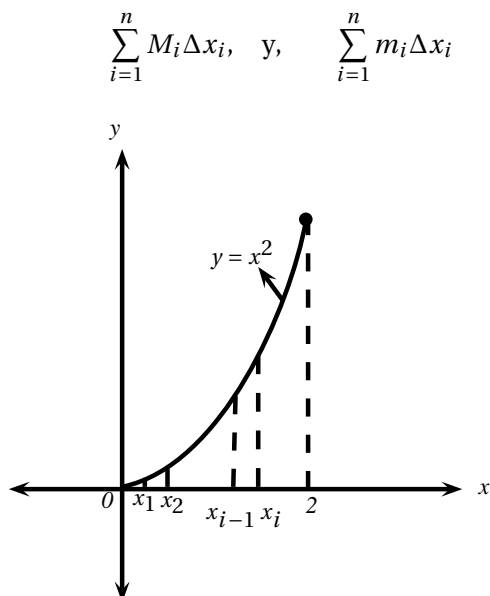


Figura 4

**Solución:** Como la función  $f(x) = x^2$  es creciente en  $[0, 2]$ , entonces también es creciente en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , en los cuales  $P$  divide al intervalo  $[a, b]$ , y por lo tanto:

$$M_i = \max f([x_{i-1}, x_i]) = x_i^2 \quad \text{y}, \quad m_i = \min f([x_{i-1}, x_i]) = x_{i-1}^2$$

Por otro lado, como la partición es regular, se tiene:  $\Delta x_i = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \cdot \frac{2}{n}, \quad x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n}, \dots, \quad x_{i-1} = (i-1) \cdot \frac{2}{n}, \quad x_i = i \cdot \frac{2}{n}, \dots, \quad x_n = n \cdot \frac{2}{n} = 2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^2} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} \end{aligned}$$

Hallando el valor mínimo de la función:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \Delta \cdot x_i &= \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_{i-1}^2 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{4(i-1)^2}{n^2} \\ &= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] \\ &= \frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} \end{aligned}$$



Teniendo en cuenta que el área bajo la curva está entre  $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ , y,  $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ , tenemos que:

$$\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} \leq A \leq \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}$$

Tomando límites en los lados de la desigualdad y teniendo en cuenta que  $A$  es un número fijo obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2} &\leq A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}, \text{ de aquí,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left( \frac{n-1}{n} \right) \left( \frac{2n-1}{n} \right) &\leq A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left( \frac{n+1}{n} \right) \left( \frac{2n+1}{n} \right), \text{ y esto equivale a,} \\ \frac{4}{3}(1)(2) &\leq A \leq \frac{4}{3}(1)(2), \text{ así que,} \end{aligned}$$

por el teorema de comparación tenemos que,  $A = \frac{8}{3}$ .

Note que si elegimos como altura del rectángulo  $R_i$  el valor que asume la función en un punto  $t_i$  cualquiera del intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , la suma de las áreas de éstos rectángulos es:

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

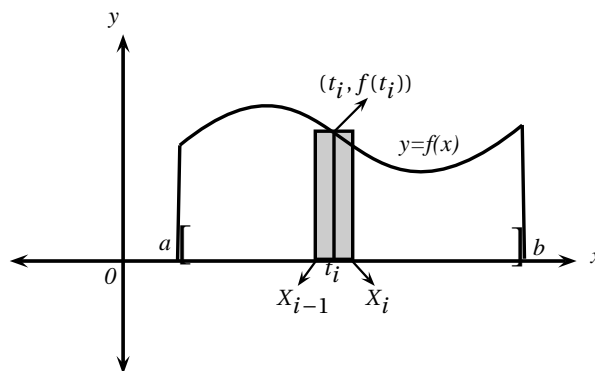


Figura 5

### 1.3.5. Sumas de Riemann:

#### Definición

Sea  $f$  una función definida y acotada en  $[a, b]$  y tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x$  de  $[a, b]$  y cierto  $M$  real positivo, sea  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , una partición de  $[a, b]$  y sean  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ , puntos tales que  $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$

La expresión  $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$ , se llama suma de *Riemann*, para  $f$  en  $[a, b]$

**Ejemplo 5:** Si  $f(x) = c$ , es la función constante ( $c \in \mathbb{R}$ ). Halle la suma de Riemann para  $f(x)$  en  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ .

**Solución:** Consideremos una partición  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  cualquiera de  $[a, b]$ , entonces:  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  y  $f(t_i) = c$ , para todo  $i \in \mathbb{R}^+$ ; Luego,

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a)$$

Esto quiere decir que para la función constante  $f(x) = c$ , todas las sumas de Riemann son iguales a  $c(b - a)$

**Ejemplo 6:** Si  $f(x)$  es una función monótona creciente en  $[a, b]$  y si  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$  entonces:

$$f(a)(b - a) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \leq f(b)(b - a)$$

**Solución:** Si  $t_i$  está en  $[x_{i-1}, x_i]$ , entonces por ser  $f$  creciente  $f(a) \leq f(t_i) \leq f(b)$  y puesto que  $\Delta x_i > 0$  se concluye que:

$$f(a)\Delta x_i \leq f(t_i)\Delta x_i \leq f(b)\Delta x_i \quad (1.1)$$

Si en (1.1) efectuamos la suma variando  $i$  desde 1 hasta  $n$ , obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n f(a)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(b)\Delta x_i$$

Como  $f(a)$  y  $f(b)$  son constantes

$$f(a) \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \leq f(b) \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

Luego,

$$f(a)(b - a) \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \leq f(b)(b - a)$$

## 1.4. Integral Definida

Sea  $f$  una función definida en el intervalo  $[a, b]$ . Se dice que  $f$  es integrable en  $[a, b]$  (según Riemann) si existe un número real  $L$  que satisface la siguiente propiedad: Para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

Para toda partición  $P$  de  $[a, b]$  para la cual  $\|P\| < \delta$  y cualquiera que sea la elección de  $t_i$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  con  $i = 1, 2, \dots, n$

Cuando una función  $f$  satisface la definición anterior, diremos que  $L$  es el valor de la *integral definida* de  $f$  entre  $a$  y  $b$ . Esto se puede notar así:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \right] = L$$

Denotando a  $L$  como  $\int_a^b f(x)dx$ , la llamaremos la integral definida de la función  $f$  en el intervalo desde  $a$  hasta  $b$ . Es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \right]$$

En la expresión  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $a$  y  $b$  se llaman límite inferior y límite superior, respectivamente, de la integral definida;  $f(x)$  se llama integrando y  $dx$  indica que  $x$  es la variable independiente que toma valores desde  $a$  hasta  $b$ . Es importante indicar además que cuando existe el valor de la integral definida, es único.

**Ejemplo 7:** A partir de la definición de la integral definida (según Riemann) vamos a calcular  $\int_a^b xdx$ , haciendo una partición regular y tomando rectángulos circunscritos.

**Solución:** En este caso  $f(x) = x$ , y consideremos la partición regular  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para la cual:  $\Delta x_n = \frac{b-a}{n}$ , y

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + 1 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right), \quad x_2 = a + 2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right), \dots, \quad x_{i-1} = a + (i-1) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right), \dots \\ \dots, \quad x_i = a + (i) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right), \dots, \quad x_n = b$$

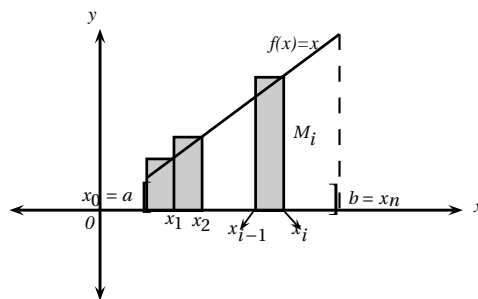


Figura 6

También,

$$M_i = \text{máx } f([x_{i-1}, x_i]) = x_i = a + (i) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^b xdx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[ a + (i) \left(\frac{b-a}{n}\right) \right] \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \left[ a + (i) \left(\frac{b-a}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left[ \sum_{i=1}^n a + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n i \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left[ na + \frac{(b-a)}{n} \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \\ &= (b-a) \left(\frac{2a+b-a}{2}\right) = \frac{(b-a)(a+b)}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

De ésta forma,

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

**Ejemplo 8:** Calcular  $\int_3^4 (x+1)dx$ .

**Solución:** En este caso  $f(x) = x + 1$ , y consideremos la partición regular  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para la cual:

$$\Delta x_n = \frac{b-a}{n} = \frac{4-3}{n} = \frac{1}{n},$$

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 3 + 1 \cdot \frac{1}{n}, \quad x_2 = 3 + 2 \cdot \frac{1}{n}, \dots, x_{i-1} = 3 + (i-1) \cdot \frac{1}{n}, \quad x_i = 3 + i \cdot \frac{1}{n}, \dots, x_n = 4$$

Luego,

$$M_i = \max f([x_{i-1}, x_i]) = x_i + 1 = 3 + (i) \left( \frac{1}{n} \right) + 1 = 4 + \frac{i}{n}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_3^4 (x+1) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[ 4 + i \cdot \frac{1}{n} \right] \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 4 + i \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n 4 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ 4n + \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

De ésta forma,

$$\int_3^4 (x+1) dx = \frac{9}{2}$$

**Ejemplo 9:** Calcular  $\int_1^3 x^3 dx$ .

**Solución:** En este caso  $f(x) = x^3$ , y consideremos la partición regular  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para la cual:

$$\Delta x_n = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n},$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + 1 \cdot \frac{2}{n}, \quad x_2 = 1 + 2 \cdot \frac{2}{n}, \dots, x_{i-1} = 1 + (i-1) \cdot \frac{2}{n}, \quad x_i = 1 + i \cdot \frac{2}{n}, \dots, x_n = 3$$

$$M_i = \max f([x_{i-1}, x_i]) = x_i^3 = \left[ 1 + (i) \left( \frac{2}{n} \right) \right]^3$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[ 1 + i \cdot \frac{2}{n} \right]^3 \frac{2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{2i}{n} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{4i^2}{n^2} + 8 \cdot \frac{i^3}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[ 1 + 6 \cdot \frac{i}{n} + 12 \cdot \frac{i^2}{n^2} + 8 \cdot \frac{i^3}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[ \sum_{i=1}^n 1 + \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n i + \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^3 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left[ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 + 6 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + 4 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \left( 2 + \frac{1}{n} \right) + 4 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 \right] = 2 + 6 + 4 \cdot 2 + 4 = 20 \end{aligned}$$

De ésta forma,

$$\int_1^3 x^3 dx = 20$$

### 1.4.1. Propiedades de la Integral definida

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones integrables en  $[a, b]$ ,  $k$  una constante real y  $a < c < b$ , entonces:

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3) kf \text{ es integrable en } [a, b] \text{ y } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$4) (f + g) \text{ es integrable en } [a, b] \text{ y } \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$5) \text{ Si } f(x) \geq 0 \text{ para todos } x \text{ de } [a, b] \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$6) f \text{ es integrable en } [a, c] \text{ y en } [c, b], \text{ y, } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$7) \text{ Si } f(x) = g(x) \text{ para todo } x \text{ de } (a, b) \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

$$8) \text{ Propiedad de traslación del intervalo de integración: } \int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$$

9) Propiedad de dilatación o contracción del intervalo de integración:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{k} \int_{a-k}^{b-k} f\left(\frac{x}{k}\right) dx, \text{ siendo } k \neq 0$$

$$10) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

### 1.4.2. Teorema del valor medio para Integrales

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe al menos un  $c$  tal que  $a \leq c \leq b$  y tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Al valor  $f(c)$  se le conoce como *valor medio de la función* en  $[a, b]$ .

Geoméricamente, cuando la función es no negativa, se puede interpretar el teorema de la manera siguiente: el valor de la integral entre  $a$  y  $b$  es igual al área del rectángulo cuya base es  $(b-a)$  y su altura es  $f(c)$

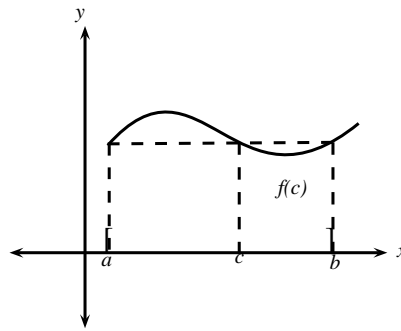


Figura 7

**Demostración**

- (i) Si  $f$  es constante, el teorema se cumple trivialmente.
- (ii) Si  $f$  no es constante, como  $f$  es continua en el intervalo cerrado, entonces  $f$  alcanza un máximo absoluto y un mínimo absoluto en  $[a, b]$ .

Sea  $f(c_1) = M$  el máximo absoluto y  $f(c_2) = m$ , el mínimo absoluto de  $f$  en  $[a, b]$ . Entonces,  $m \leq f(x) \leq M$ , se tiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (1.2)$$

de donde,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq M$$

Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces por el teorema del valor medio  $f$  toma todos sus valores entre  $m$  y  $M$ . Por tanto,

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}$$

corresponde a uno de dichos valores funcionales. Es decir, existe  $c$  en  $[a, b]$  tal que,

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)}$$

De donde,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

**1.4.3. Primer Teorema Fundamental del cálculo: Derivada de una Integral**

**Preliminar:** Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $F$  está definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

con  $x$  en  $[a, b]$ , entonces  $F$  es continua en  $[a, b]$

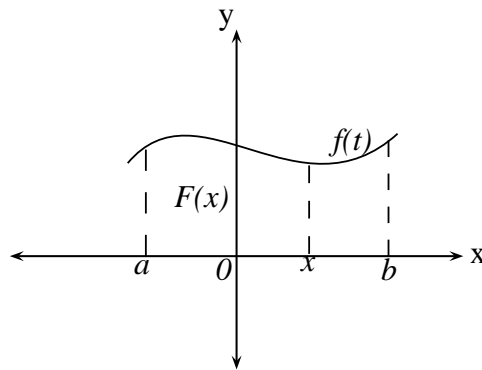


Figura 8

**Demostración**

Sea  $c \in (a, b)$  y sea además  $h$  tal que  $a \leq c+h \leq b$ . Demostraremos que  $F$  es continua en  $c$ , es decir, que  $\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) = F(c)$ .

En efecto, por hipótesis se tiene que

$$F(c+h) = \int_a^{c+h} f(t) dt, \quad \text{y}, \quad F(c) = \int_a^c f(t) dt$$

Luego,

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t) dt - \int_a^c f(t) dt = \int_c^{c+h} f(t) dt$$

Puesto que  $f$  es acotada en  $[a, b]$  (por ser  $f$  integrable), entonces existe  $M \geq 0$  tal que  $|f(t)| \leq M$  para todo  $t$  de  $[a, b]$ .

De ésta manera,

$$-M \leq f(t) \leq M$$

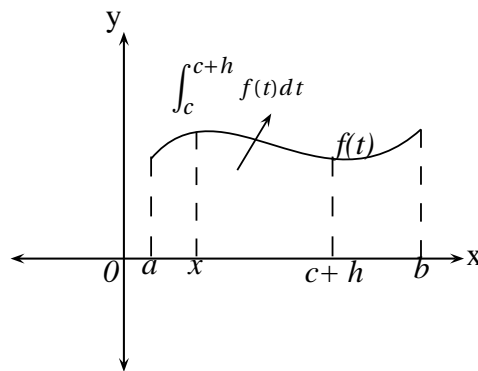


Figura 9

O bien,

$$\int_c^{c+h} (-M) dt \leq \int_c^{c+h} f(t) dt \leq \int_c^{c+h} M dt$$

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f(t) dt \leq Mh$$

Si tomamos límite a esta expresión cuando  $h$  tiende a cero por la derecha, obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} (-Mh) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} [F(c+h) - F(c)] \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} (Mh)$$

Puesto que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} (-Mh) = 0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} (Mh)$ , se concluye, por el teorema de comparación (sandwich), que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} [F(c+h) - F(c)] = 0$$

así que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(c+h) = F(c)$$

Si  $h < 0$ , entonces  $C+h < C$ , se tiene:

$$-M(-h) \leq \int_{c+h}^c f(t) dt \leq M(-h)$$

Entonces

$$Mh \leq - \int_c^{c+h} f(t) dt \leq -Mh$$

Al multiplicar la desigualdad por  $(-1)$  resulta:

$$-Mh \geq F(c+h) - F(c) \geq Mh$$

Tomando el límite por la izquierda y por el teorema de comparación (sandwich) se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} [F(c+h) - F(c)] = 0$$

Luego,

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} F(c+h) = F(c)$$

De los límites tanto por la izquierda como por la derecha se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(c+h) = F(c)$$

Así se ha probado que dada una función  $f(x)$  integrable en  $[a, b]$  la función  $F$  es continua en todo  $c$  de  $(a, b)$ , es decir

$$\int_a^x f(t) dt$$

con  $a \leq x \leq b$  siempre es continua en  $[a, b]$

### Teorema :

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y  $F$  la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

con  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces  $F$  es derivable en todo  $x$  de  $[a, b]$  y  $F'(x) = f(x)$ .



**Demostración**

Sea  $x$  un punto en el que  $f$  es continua y supuesta  $x$  fija, se forma el cociente:

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Para demostrar el teorema se ha de probar que este cociente tiende a  $f(x)$  cuando  $h \rightarrow 0$ . El numerador es:

$$A(x+h) - A(x) = \int_c^{x+h} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \int_c^{x+h} f(t) dt + \int_x^c f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Si en la última integral se escribe  $f(t) = f(x) + [f(t) - f(x)]$  resulta:

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(x) dt + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = h \cdot f(x) + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt$$

de donde,

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \quad (1.3)$$

Por tanto, para completar la demostración es necesario probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt = 0$$

En esta parte de la demostración es donde se hace uso de la continuidad de  $f$  en  $x$ .

Si se designa por  $G(h)$  el último término del segundo miembro de (1.3) se trata de demostrar que  $G(h) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Aplicando la definición de límite, se ha de probar que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$G(h) < \epsilon, \text{ siempre que } 0 < h < \delta \quad (1.4)$$

En virtud de la continuidad de  $f$  en  $x$ , dado un  $\epsilon$  existe un número positivo  $\delta$  tal que:

$$\left| f(t) - f(x) \right| < \frac{1}{2} \epsilon \quad (1.5)$$

siempre que:

$$x - \delta < t < x + \delta \quad (1.6)$$

Si se elige  $h$  de manera que  $0 < h < \delta$ , entonces cada  $t$  en el intervalo  $[x, x+h]$  satisface (1.6) y por tanto (1.5) se verifica para cada  $t$  de ese intervalo. Aplicando la propiedad

$\left| \int_x^{x+h} g(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |g(t)| dt$ , cuando  $g(t) = f(t) - f(x)$ , de la desigualdad en (1.5) se pasa a la relación:

$$\left| \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \int_x^{x+h} \frac{1}{2} \epsilon dt = \frac{1}{2} h \epsilon < h \epsilon$$

Dividiendo por  $h$  se ve que (1.4) se verifica para  $0 < h < \delta$ . Si  $h < 0$ , un razonamiento análogo demuestra que (1.4) se verifica siempre que  $0 < |h| < \delta$ , lo que completa la demostración.

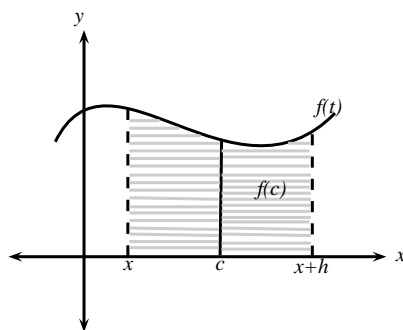


Figura 10

#### 1.4.4. Segundo Teorema Fundamental del cálculo: Derivada de una Integral

##### Teorema 1:

Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y  $F$  una función tal que  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$  entonces,

$$\int_a^b f(t) dt = F(t) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

##### Demostración

Como  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , sea  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $a \leq x \leq b$ , entonces,  $G'(x) = f(x)$ , y como por hipótesis  $F'(x) = f(x)$ , entonces  $F$  y  $G$  difieren en una constante, es decir,  $G(x) = F(x) + C$ . Esto es,

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C$$

Por tanto,

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C$$

de donde  $F(a) = -C$ ; Además

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = F(b) + C$$

Luego,

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

##### Observación:

- 1) Si  $f$  es una función par ( $f(-x) = f(x)$ ), si  $f$  es simétrica con respecto al eje  $y$ , entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

- 2) Si  $f$  es una función impar ( $f(-x) = -f(x)$ ), si  $f$  es simétrica con respecto al origen, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
 1) \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = (-1) \int_{-a \cdot (-1)}^{0 \cdot (-1)} f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= -\int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= (-1) \int_{-a \cdot (-1)}^{0 \cdot (-1)} f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= (-1) \int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a [-f(x)] dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 10:** Calcule el valor de la siguiente integral  $\int_0^5 x dx$ .

**Solución:**  $f(x) = x$ ,  $y$ ,  $F(x) = \frac{x^2}{2}$

Luego por el primer Teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\int_0^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{25}{2}$$

**Ejemplo 11:** Calcule el valor de la siguiente integral  $\int_1^3 x^4 dx$ .

**Solución:**  $f(x) = x^4$ ,  $y$ ,  $F(x) = \frac{x^5}{5}$

Luego por el primer Teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\int_1^3 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_1^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$$



Muchas estructuras y sistemas mecánicos modelados en ingeniería se comportan como si sus masas estuviesen concentradas en un solo punto, llamado centro de masa. Cuando las masas de los objetos son puntuales (caso discreto), el centro de masa es un cociente de sumatorias, pero en el caso de cuerpos sólidos, que tienen una distribución continua de materia (caso continuo), las sumatorias se reemplazan por integrales y el propósito en este capítulo es usar la integral para calcular el centro de masa de sólidos con alta simetría como los casos de: las varillas delgadas, las láminas planas delgadas y los sólidos de revolución. Acerca de tales problemas se puede decir en forma general que:

1. Si un cuerpo es homogéneo (densidad constante) el centro de masa está en el centro geométrico.
2. Si un cuerpo tiene un eje de simetría, el centro de masa está sobre dicho eje.
3. En ocasiones el centro de masa de un cuerpo no está localizado dentro del cuerpo. Por ejemplo, el centro de masa de un sólido toroidal está en el agujero. De otro lado, por ejemplo, el centro de masa de un alambre en forma circular está fuera de él.

## 2.1. Conceptos Básicos

**Densidad de un cuerpo:** La densidad se define como la relación de la masa del cuerpo por unidad de longitud, área o volumen según la geometría del objeto estudiado. En la práctica se utilizan unidades que pueden medirse de manera más apropiada. Así por ejemplo:

Densidad de: Longitud;  $\lambda = \frac{m}{L}$  Superficie;  $\sigma = \frac{m}{A}$  Volumen;  $\tau = \frac{m}{V}$

Los conceptos anteriores se deben especificar en las integrales, para calcular el centro de masa de sólidos con alta simetría:

- En el caso de alambres y varillas delgadas el elemento de masa es:  $dm = \lambda dL$
- Cuando se trata de hojas planas y láminas delgadas el elemento de masa es:  $dm = \sigma dA$
- Cuando se trabaja con sólidos el elemento de masa es:  $dm = \tau dV$

**Cálculos y Unidades:** Para cada uno de los centros de masa (alambres y varillas delgadas, hojas planas y láminas delgadas y sólidos de revolución) se realizarán en su secuencia cálculos para hallar: masa total, momentos y centros de masa o centroide del sistema.

En los resultados es importante destacar las unidades de cada uno de los parámetros empleados:

### Unidades Básicas

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	Kilogramo	Kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	Cd

### Unidades SI derivadas expresadas a partir de unidades básicas

Magnitud	Nombre	Símbolo	Otras unidades SI	Unidades SI básicas
Frecuencias	hertz	Hz		$s^{-1}$
Fuerza	Newton	N		$m \cdot Kg \cdot s^{-2}$
Presión	Pascal	Pa	$N \cdot m^2$	$m^{-1} \cdot Kg \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	Joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot Kg \cdot s^{-2}$
Potencia	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot Kg \cdot s^{-3}$
Momento de fuerza	newton metro	$N \cdot m$		

### Conversión a unidades SI de unidades que no forman parte del SI

De/a	A/de	Multiplicar por/dividir por
Pulgada (in)	m	$2,54 \times 10^{-2}$
Pie (ft)	m	0,3048
Pulgada cuadrada ( $in^2$ )	$m^2$	$6,4516 \times 10^{-4}$
Pie cuadrado ( $ft^2$ )	$m^2$	$9,2903 \times 10^{-2}$
Pulgada cúbica ( $in^3$ )	$m^3$	$1,63871 \times 10^{-5}$
Pie cúbico ( $ft^3$ )	$m^3$	$2,83168 \times 10^{-2}$
Libra (Lb)	Kg	0,453592
Gramo/ $cm^3$ ( $g \cdot cm^{-3}$ )	$Kg \cdot m^{-3}$	$10^3$
Dina	N	$10^{-5}$

## 2.2. Centro de masa de una varilla o de un alambre

### i) Caso discreto:

Supongamos un conjunto de  $n$  masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  situadas sobre el eje  $x$  en los puntos de abscisas  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . El momento de cada masa  $m_i$  con respecto al origen será  $m_i x_i$  y su momento total será

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (2.1)$$

Se llama *centro de masa* al punto  $P$  de abscisa  $\bar{x}$  dada por:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.2)$$

El centro de masa  $P$  tiene la siguiente propiedad física: si las masas son puntuales, o sea que ocupan solamente un punto y están colocadas sobre una varilla ideal de peso despreciable, el sistema queda en equilibrio cuando se le suspende de  $P$ .

**Ejemplo 1:** Cuatro masas de 3, 5, 6 y 8 gramos están colocadas sobre el eje  $x$  en las abscisas  $-2$ , 3, 5 y  $-4$  respectivamente. Halle el centro de masa del sistema.

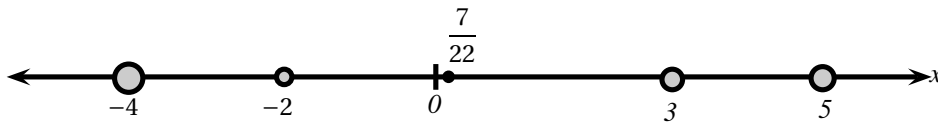


Figura 11

**Solución:** De acuerdo a la ecuación (2.2) tenemos que:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{3(-2) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 8(-4)}{3 + 5 + 6 + 8} = \frac{-6 + 15 + 30 - 32}{22} = \frac{7}{22}$$

## ii) Caso contínuo

Consideremos ahora una varilla rígida cuyo diámetro es muy pequeño en comparación con su longitud  $L$  colocada sobre el eje  $x$  de tal modo que uno de sus extremos coincide con el origen  $0$ . Supongamos además que su densidad lineal  $\delta = \delta(x)$  es una función de la distancia  $\delta(x)$ , integrable en  $[0, L]$ .

Si hacemos una partición  $P$  de la varilla en  $n$  segmentos de longitud  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , la masa del  $i$ -ésimo intervalo será  $\delta(t_i)\Delta x_i$ , en donde  $t_i$  es un punto de  $[x_{i-1}, x_i]$  y  $\Delta x_i$  su longitud, una aproximación a su momento con respecto al origen será  $t_i \delta(t_i)\Delta x_i$ .

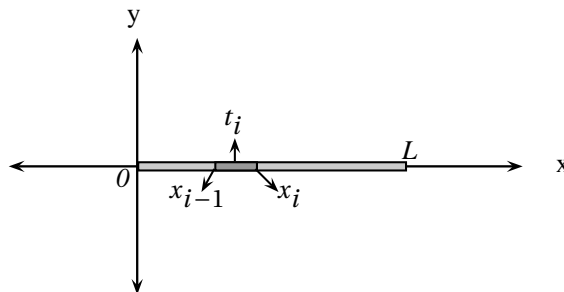


Figura 12

La masa total  $m$  está dada por:

$$m = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \delta(t_i)\Delta x_i = \int_0^L \delta(x) dx \quad (2.3)$$

El momento de masa total  $M$  es:

$$M = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i \delta(t_i) \Delta x_i = \int_0^L x \delta(x) dx \quad (2.4)$$

y el centro de masa está dado por:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \delta(x) dx}{\int_0^L \delta(x) dx} \quad (2.5)$$

Note que si  $\delta = k$  entonces, el centro de masa será:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \delta dx}{\int_0^L \delta dx} = \frac{\int_0^L x \cdot k dx}{\int_0^L k dx} = \frac{\left. \frac{k \cdot x^2}{2} \right|_0^L}{kx \Big|_0^L} = \frac{L}{2}$$

Este resultado confirma la propiedad que si una varilla de densidad uniforme se suspende de su punto medio, queda en equilibrio.

**Ejemplo 2:** Una varilla de longitud 60 cm tiene una densidad lineal que varía proporcionalmente al cuadrado de su distancia a uno de los extremos. Si la densidad en el extremo más pesado es de 7200 g/cm, halle su masa total y el centro de masa.

**Solución:** Si colocamos la varilla sobre el eje  $x$  con su extremo más liviano en el origen, entonces, la densidad lineal será  $\delta(x) = R x^2$ , de tal modo que cuando  $x = 60$ ,  $P(60) = 7200$ , luego  $R \cdot 60^2 = 7200$ , de donde obtenemos  $R = 2$ , y por tanto  $\delta(x) = 2x^2$ .

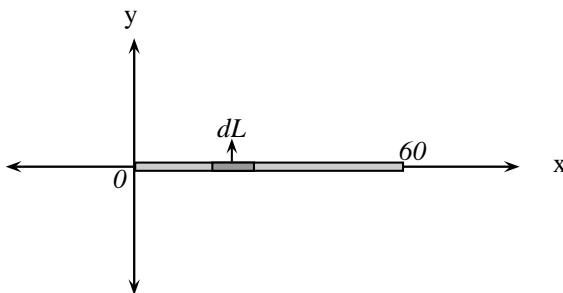


Figura 13

Así que:

$$m = \int_0^{60} 2x^2 dx = 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{60} = 144000g$$

y

$$\bar{x} = \frac{2 \int_0^{60} x \cdot x^2 dx}{m} = \frac{2 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^{60}}{144000} = 45cm$$

Este último resultado nos indica que para que la varilla quede en equilibrio debe suspenderse de un punto a 45 cm del extremo más liviano.



### 2.3. Centro de masa de una región plana o de una lámina delgada

#### i) Caso discreto

Consideremos  $n$  partículas de masas  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  situadas sobre el plano  $xy$  en los puntos  $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); \dots; (x_n, y_n)$ .

Los momentos de estas masas respecto a los ejes  $x$  e  $y$  denotados por  $M_x$  y  $M_y$ , respectivamente, se definen así:

#### Momento respecto al eje $x$

$$M_x = \sum_{i=1}^n y_i m_i$$

#### Momento respecto al eje $y$

$$M_y = \sum_{i=1}^n x_i m_i$$

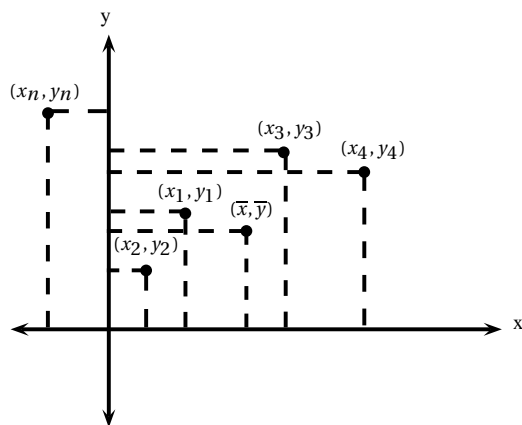


Figura 14

Las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del *centro de masa* se definen por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

El punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  tiene la propiedad de que si las masas están colocadas sobre una placa sin peso y dicha placa se suspende de él, debe entonces quedar en equilibrio.

**Ejemplo 3:** Se tienen masas de 5, 10 y 20 kg situadas en los puntos (1, 1), (-3, 1) y (0, 3), respectivamente. Halle los momentos de masa respecto a los ejes coordenados y el centro de masa.

**Solución:**

$$M_x = \sum_{i=1}^3 y_i m_i = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 20 \cdot 3 = 5 + 10 + 60 = 75 \text{ kg}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^3 x_i m_i = 5 \cdot 1 + 10(-3) + 20 \cdot 0 = 5 - 30 = -25 \text{ kg}$$

$$m = \sum_{i=1}^3 m_i = 5 + 10 + 20 = 35 \text{ kg}$$

**Coordenada  $x$  del centro de masa**

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = -\frac{25}{35} = -\frac{5}{7}$$

**Coordenada  $y$  del centro de masa**

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{75}{35} = \frac{15}{7}$$

ii) **Caso contínuo**

Consideremos ahora una placa delgada con densidad superficial constante  $\delta(x, y) = k$  en todos sus puntos y limitada por las curvas  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ; integrables en cierto intervalo  $[a, b]$ .

Supongamos además que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$

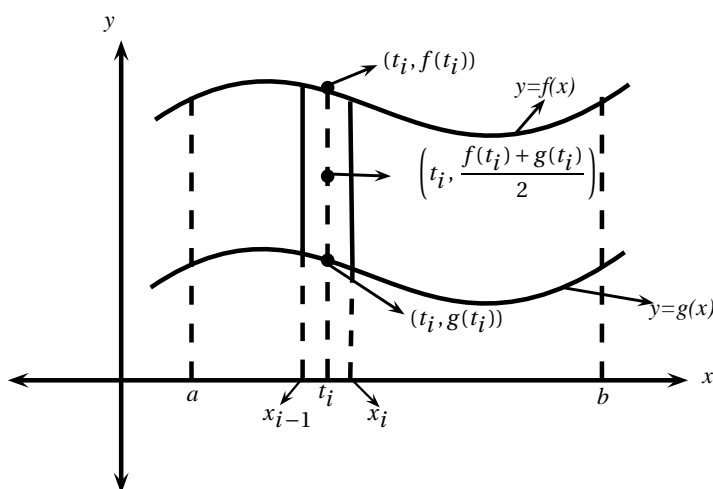


Figura 15

La masa  $\Delta m_i$  del  $i$ -ésimo rectángulo que resulta al efectuar una partición  $P$  sobre  $[a, b]$  será el producto de la densidad  $k$  por el área, esto es,

$$\Delta m_i = k[f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i$$

en donde  $t_i$  es un punto cualquiera de  $[x_{i-1}, x_i]$ .

El momento de masa correspondiente al  $i$ -ésimo elemento, respecto al eje  $y$ , estará dado aproximadamente por

$$t_i \cdot \Delta m_i = t_i k[f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i$$

y el momento de masa total por:

$$M_y = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i = \int_a^b k x [f(x) - g(x)] dx \quad (2.6)$$

Para calcular el momento  $M_x$  respecto al eje  $x$ , basta colocar toda su masa en el punto medio. El  $i$ -ésimo rectángulo de nuestra partición  $P$  se puede asimilar muy bien a una varilla delgada, así que su momento respecto al extremo que se apoya sobre el eje  $x$  estará dado por:

$$\frac{1}{2} [f(t_i) - g(t_i)] \Delta m_i$$

Es decir,

$$\frac{1}{2}[f(t_i) + g(t_i)]k[f(t_i) - g(t_i)]\Delta x_i = \frac{1}{2}k[(f(t_i))^2 - (g(t_i))^2]\Delta x_i$$

Entonces, el momento total podrá escribirse así:

$$M_x = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{k}{2} [f^2(t_i) - g^2(t_i)] \Delta x_i = \frac{k}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx \quad (2.7)$$

La masa total  $m$  estará dada por

$$m = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} k \sum_{i=1}^n [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i = k \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (2.8)$$

Las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centro de masa se pueden obtener así:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} \quad (2.9)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} \quad (2.10)$$

- A las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centro de masa en las ecuaciones (2.9) y (2.10) se llama también el *centroide* de la región y la masa total en la fórmula (2.8), coincide numéricamente con el área de la región.
- De la misma manera, si en las fórmulas (2.6) y (2.7) la densidad  $k = 1$ , los valores resultantes los llamaremos los *momentos* de la región respecto a los ejes coordenados.

**Ejemplo 4:** Encuentre el centroide de la región limitada por la rama de parábola  $y = \sqrt{x}$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 4$ .

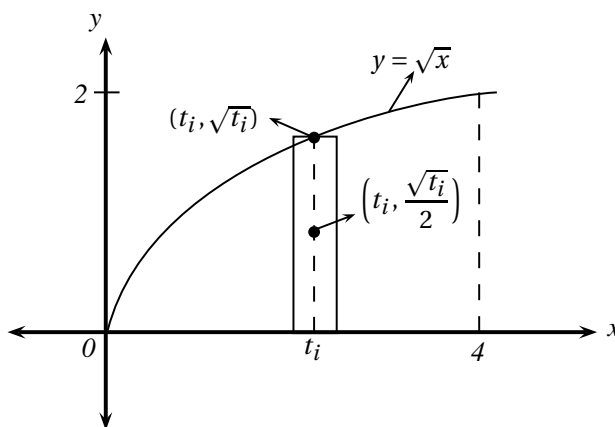


Figura 16

**Solución** En la Figura aparece el  $i$ -ésimo rectángulo indicando el punto medio en el cual se asume que se concentra la masa total. El momento respecto al eje  $x$  del  $i$ -ésimo rectángulo es el producto de su área por la distancia del punto medio al eje  $x$ . Esto es,

$$\frac{1}{2} \sqrt{t_i} \cdot \sqrt{t_i} \Delta x_i$$

Entonces, el momento total  $M_x$  será:

$$M_x = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sqrt{t_i} \cdot \sqrt{t_i} \Delta x_i = \frac{1}{2} \int_0^4 x dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{2} \left[ \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{16}{4} = 4$$

El momento total respecto al eje  $y$ ,  $M_y$ , será:

$$M_y = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i \sqrt{t_i} \Delta x_i = \int_0^4 x \sqrt{x} dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[ \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \left[ \frac{2}{5} 4^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} 0^{\frac{5}{2}} \right] = \left[ \frac{2}{5} (1024)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{2}{5} \cdot 32 = \frac{64}{5}$$

El área de la región está dada por:

$$A = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \left[ \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} \cdot 64^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Las coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  del centroide serán entonces:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{64}{5}}{\frac{16}{3}} = \frac{12}{5}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}$$

**Ejemplo 5:** Halle el centroide de la región limitada por la curva  $y = x^2$  y la recta  $y = x + 2$

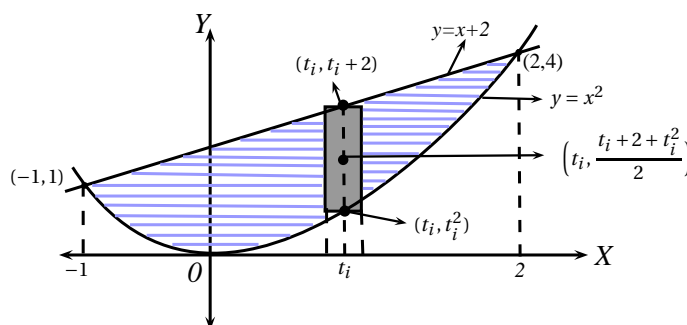


Figura 17

**Solución:** Los puntos de intersección de la parábola y la recta se obtienen igualando las ecuaciones que representan dichas curvas:

$$x^2 = x + 2, \quad \text{esto equivale a } 0 = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

de donde  $x = 2$  y  $x = -1$ . Luego los puntos de corte son:  $(-1, 1)$  y  $(2, 4)$ .

Entonces el momento total será:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 ((x+2) + x^2)((x+2) - x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^2 x^2 dx + 4 \int_{-1}^2 x dx + 4 \int_{-1}^2 dx - \int_{-1}^2 x^4 dx \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^3}{3} + 2 \cdot x^2 + 4x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - \frac{2^5}{5} - \left[ \frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - \frac{(-1)^5}{5} \right] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5} + \frac{1}{3} - 2 + 4 - \frac{1}{5} \right] = \frac{36}{5} \end{aligned}$$

El momento respecto al eje  $y$  es:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-1}^2 (x^2 + 2x - x^3) dx = \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^2 2x dx - \int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^2 \\ &= \left[ \frac{2^3}{3} + 2^2 - \frac{2^4}{4} - \left[ \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 - \frac{(-1)^4}{4} \right] \right] = \frac{8}{3} + 4 - 4 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

El área de la región es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 dx - \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left[ \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Por tanto las coordenadas del centroide serán:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{9}{2}} = \frac{8}{5}$$

**Ejemplo 6:** Si la figura plana  $A$  de la siguiente gráfica respecto al eje  $x$ , entonces su centroide se encuentra también sobre el eje  $x$ .

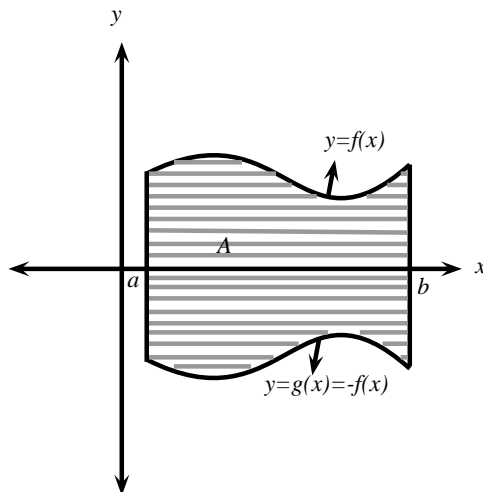


Figura 18

**Solución** En la Figura 18, la región  $A$  está limitada por arriba con la curva  $y = f(x)$ , entre  $x = a$  y  $x = b$ . Por simetría la curva que la limita inferiormente debe ser  $y = -f(x)$ , entre las mismas rectas verticales.

Para calcular la ordenada  $\bar{y}$  del centroide utilizemos la fórmula (2.10), en donde  $g(x)$  es la función  $y = -f(x)$ . Por tanto,

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b [f^2(x) - (-f^2(x))] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} = 0$$

y en consecuencia el centroide está sobre el eje  $x$ , o sea que está localizado sobre el eje de simetría. De manera similar puede demostrarse que si la región plana es simétrica con respecto al eje  $y$ , su

centroide estará localizado sobre dicho eje.

**Ejemplo 7:** El centroide de un círculo se encuentra en su centro, pues cualquier diámetro que se trace es un eje de simetría en el círculo, en consecuencia, el centroide se debe encontrar localizado sobre dicho eje. Si trazamos dos diámetros diferentes, el centroide pertenece simultáneamente a los dos, luego pertenece a su intersección, que en este caso coincide con el centro.

**Ejemplo 8:** Determine el centro de masa de un alambre delgado de densidad constante  $\delta$  y que tiene forma de una semicircunferencia de radio  $a$ .

**Solución:** Supongamos que el alambre tiene la forma de la semicircunferencia  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  como aparece en la primera figura.

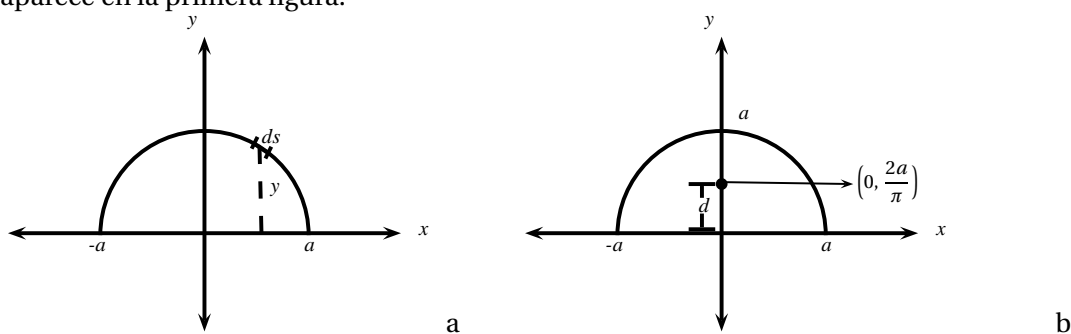


Figura 19

Como el alambre es homogéneo, la distribución de masa es simétrica con respecto al eje  $y$ ; en consecuencia,  $\bar{x} = 0$ .

Pero

$$y' = \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

así que,

$$dm = \delta ds = \delta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \delta \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = \delta \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx = \delta \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Luego

$$\begin{aligned} m &= \int_{-a}^a \frac{\delta a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \delta a \int_{-a}^a \frac{dx}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \delta a \left[ \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-a}^a \\ &= \delta a \left[ \text{sen}^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) - \text{sen}^{-1}\left(-\frac{a}{a}\right) \right] = \delta a \left[ \text{sen}^{-1}(1) - \text{sen}^{-1}(-1) \right] \\ &= \delta a \left[ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \delta a \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \pi \delta a \end{aligned}$$

También, si denotamos por  $dM_x$  el diferencial de momento con respecto al eje  $x$ , del diferencial  $ds$ , entonces:

$$dM_x = \delta ds \cdot y = \delta \sqrt{a^2 - x^2} ds$$

Luego

$$M_x = \int_{-a}^a \delta \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a\delta \int_{-a}^a dx = a\delta [x]_{-a}^a = a\delta(a - (-a)) = 2a^2\delta$$

Reemplazando en  $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$  se obtiene:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{2a^2\delta}{\pi a\delta} = \frac{2a}{\pi}$$

Por tanto, el centroide  $(\bar{x}, \bar{y})$  del alambre esta localizado en el punto  $(0, \frac{2a}{\pi})$

Note que el centroide no está sobre el alambre sino sobre el eje de simetría.

**Ejemplo 9:** Determine el centro de masa de la lámina delgada de densidad constante  $\delta$  y que tiene la forma de un semicirculo de radio  $a$ .

**Solución:** Supongamos que la lámina tiene la forma de la región plana limitada por  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  y el eje  $x$  (figura a)

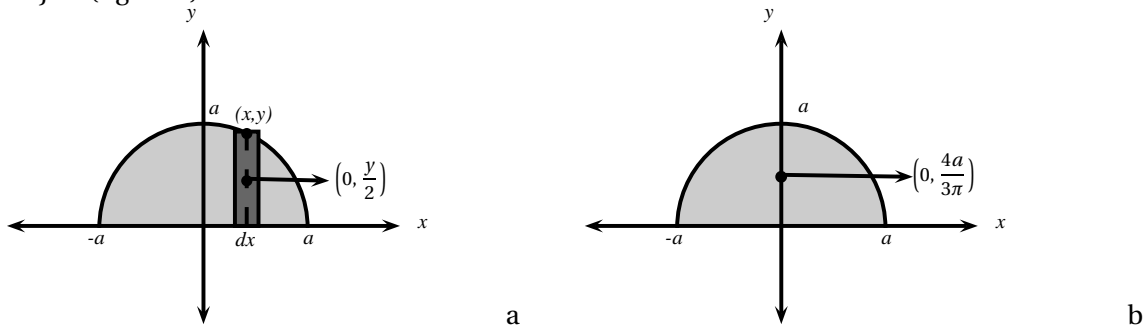


Figura 20

Como la lámina es homogénea, la distribución de masa es simétrica con respecto al eje  $y$ , y en consecuencia  $\bar{x} = 0$ . Ahora

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} \quad (2.11)$$

Pero

$$dm = \delta dA = \delta[f(x)]dx = \delta\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Luego

$$\begin{aligned} m &= \int_{-a}^a \delta \sqrt{a^2 - x^2} dx = \delta \int_{-a}^a \frac{1}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \delta \left[ \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right]_{-a}^a \\ &= \delta \left[ \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) + \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - a^2} - \left( \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1}\left(-\frac{a}{a}\right) + \left(-\frac{a}{2}\right) \sqrt{a^2 - (-a)^2} \right) \right] \\ &= \delta \left[ \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1}(1) - \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1}(-1) \right] = \frac{\delta a^2}{2} [\text{sen}^{-1}(1) - \text{sen}^{-1}(-1)] \\ &= \frac{\delta a^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\delta a^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi a^2 \delta}{2} \end{aligned}$$

Si denotamos ahora por  $dM_x$  el diferencial de momento con respecto al eje  $x$ , del diferencial de área  $dA$ , entonces:

$$dM_x = \delta dA \cdot \frac{y}{2} = \frac{\delta}{2} y \cdot y dx = \frac{\delta}{2} (a^2 - x^2) dx$$

$$M_x = \int_{-a}^a \frac{\delta}{2} (a^2 - x^2) dx = \delta \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \delta \left[ a^2 \int_0^a dx - \int_0^a x^2 dx \right] = \delta \left[ a^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \delta \left[ a^3 - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \delta a^3 \quad (2.12)$$

Reemplazando en (2.11) se obtiene:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{2\delta a^3}{3}}{\frac{\pi a^2 \delta}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

Por tanto, el centroide  $(\bar{x}, \bar{y})$  de la lámina semicircular y homogénea está localizado en el punto  $(0, \frac{4a}{3\pi})$ .

## 2.4. Centro de masa de un sólido de revolución

El procedimiento que seguiremos para encontrar el centro de masa de un sólido de revolución es análogo al utilizado para encontrar el centro de masa de una lámina homogénea.

Dado que para un sólido de revolución el eje de giro es un eje de simetría, el centro de masa está sobre dicho eje; por tanto, si el eje de revolución fuera el eje  $x$ , las coordenadas  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  del centro de masa serían cero y en tal caso la única coordenada que se debe buscar sería  $\bar{x}$ . Si el eje de revolución fuera el eje  $y$ , las coordenadas  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  son cero y la única coordenada que se necesita buscar es  $\bar{y}$ .

### Caso contínuo

Supongamos ahora que  $f(x) \geq 0$  es una función continua sobre  $[a, b]$ . Tomemos una partición de  $[a, b]$  tal que,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$$

y un  $t_i$  en  $[x_{i-1}, x_i]$  para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

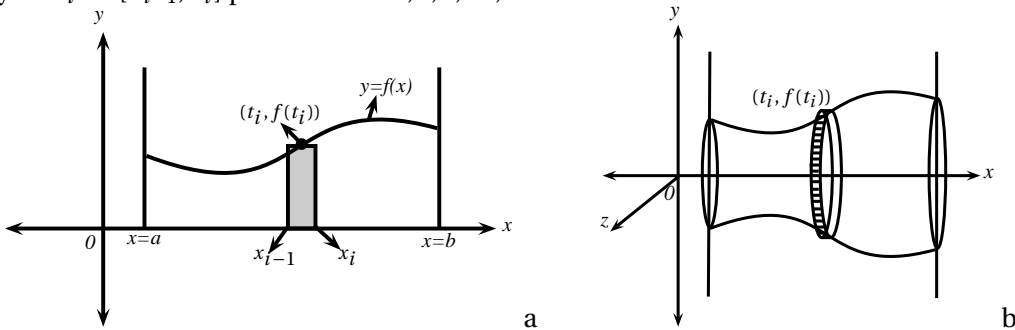


Figura 21

Como se nota en la gráfica (21.a) se formarán  $n$  rectángulos con altura  $f(t_i)$  y ancho  $\Delta x_i$ . Si se rota la región definida por  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  alrededor del eje  $x$ , se genera el sólido de revolución de la Gráfica (21.b) y cada rectángulo  $i$ -ésimo generará un disco.

El volumen de cada disco está dado por

$$\Delta V_i = \pi [f(t_i)]^2 \Delta x_i$$



Si el sólido de revolución es homogéneo de densidad de volumen constante  $\delta = k$ , la masa para cada disco está dada por:

$$m_i = k\pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i \quad (2.13)$$

El centro de masa de cada disco está sobre el eje de revolución y en el centro del disco, o sea aproximadamente en el punto  $(t_i, 0, 0)$ .

Como el momento con respecto a un plano es el producto de la masa por la distancia al plano, entonces el momento de cada disco con respecto al plano  $yz$  está dado por:

$$\Delta_i M_{yz} = t_i(\pi k[f(t_i)]^2 \Delta x_i) \quad (2.14)$$

De (2.13) La masa total  $m$  está dada por:

$$m = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\pi[f(t_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b k\pi[f(x)]^2 dx$$

Similarmente de (2.14) el momento del sólido con respecto al plano  $yz$  está dado por:

$$M_{yz} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k\pi t_i [f(t_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b k\pi x [f(x)]^2 dx$$

El centro de masa del sólido es el punto  $(\bar{x}, 0, 0)$  tal que

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{k\pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx}{k\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx} = \frac{\int_a^b x [f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Para estos sólidos en los cuales la densidad de la masa es constante el centro de masa se llama *centroide*.

### Método de la Corteza Cilíndrica:

Consideremos una región limitada por el eje  $x$ , las rectas  $x = a$ ,  $x = b$  y una función  $f(x) \geq 0$  continua sobre  $[a, b]$ . Al hacer rotar alrededor del eje  $y$  ésta región según la Figura 22; el rectángulo  $i$ -ésimo da origen a la corteza cilíndrica de la Figura 23.

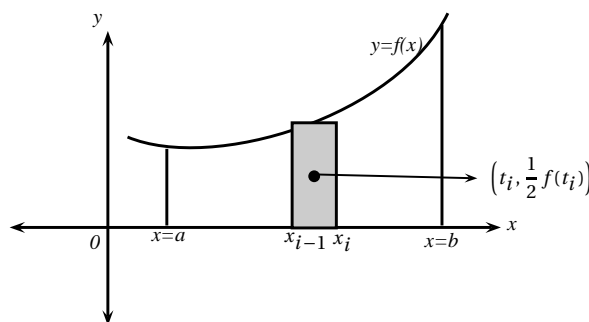


Figura 22

El centroide del sólido resultante está en el punto  $(0, \bar{y}, 0)$ ; y que además el centroide de cada corteza cilíndrica está en el centro de la corteza, el cual es el punto  $(0, \frac{1}{2} f(t_i), 0)$

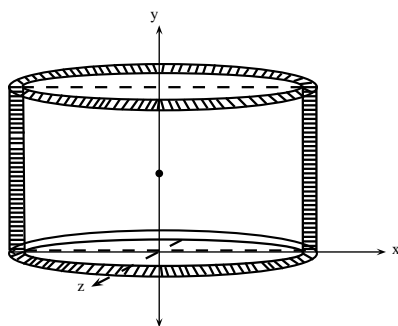


Figura 23

Por tanto, el momento de cada corteza con respecto al plano  $xz$  según la Figura 23 está dado por:

$$\Delta_i M_{xz} = \frac{1}{2} f(t_i) 2k\pi t_i f(t_i) \Delta x_i$$

El momento total del sólido es

$$M_{xz} = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{k}{2} f(t_i) 2\pi t_i f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b k\pi x [f(x)]^2 dx$$

y la masa del sólido es:

$$m = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2k\pi t_i f(t_i) \Delta x_i = \int_a^b 2k\pi x f(x) dx$$

De donde,

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{k\pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx}{2k\pi \int_a^b x f(x) dx} = \frac{\int_a^b x [f(x)]^2 dx}{2 \int_a^b x f(x) dx}$$

Cuando el cuerpo es homogéneo, esto es, de densidad constante, el centro de masa coincide con el centroide o centro geométrico

**Ejemplo 10:** Encuentre el centro de masa del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje  $x$  la región limitada por la parábola  $y = \frac{1}{2}x^2$ , el eje  $x$  y la recta,  $x = 4$ .

**Solución** La Figura (24.a) muestra la región y el elemento rectangular de área y la Figura (24.b) muestra el sólido de revolución y el elemento de volumen.

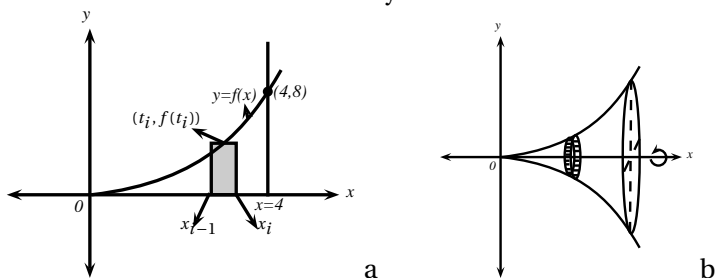


Figura 24

Como la región gira alrededor del eje  $x$ , el centro de masa es de la forma  $C(\bar{x}, 0, 0)$ , donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$$

El momento con respecto al plano  $yz$  está dado por:

$$M_{yz} = \int_a^b k\pi x [f(x)]^2 dx = \int_0^4 k\pi \cdot x \cdot \frac{x^4}{4} dx = \frac{k\pi}{4} \int_0^4 x^5 dx = \frac{k\pi}{4} \frac{4^6}{6} = \frac{k\pi}{4} \frac{x^6}{6} \Big|_0^4 = \frac{k\pi}{4} \frac{4^6}{6} - \frac{k\pi}{4} \frac{0^6}{6} = \frac{4^5}{6} k\pi = \frac{512}{3} \cdot k\pi$$

La masa del sólido es:

$$m = \int_a^b k\pi [f(x)]^2 dx = \int_0^4 k\pi \frac{x^4}{4} dx = \frac{k\pi}{4} \frac{4^5}{5} = \frac{k\pi}{4} \frac{x^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{k\pi}{4} \frac{4^5}{5} - \frac{k\pi}{4} \frac{0^5}{5} = \frac{k\pi}{5} 4^4 = \frac{256}{5} \cdot k\pi$$

De donde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{512}{3} \cdot k\pi}{\frac{256}{5} \cdot k\pi} = \frac{10}{3}$$

Así que el centro de masa está localizado en el punto  $(\frac{10}{3}, 0, 0)$

**Ejemplo 11:** Encuentre el centro de masa del sólido de revolución del ejemplo 10, tomando el elemento rectangular de área paralelo al eje  $x$ .

**Solución** La Figura (25.a) muestra el elemento rectangular de área y el centro del mismo. El centroide del sólido está en el punto  $(\bar{x}, 0, 0)$  (Figura (25.b)).

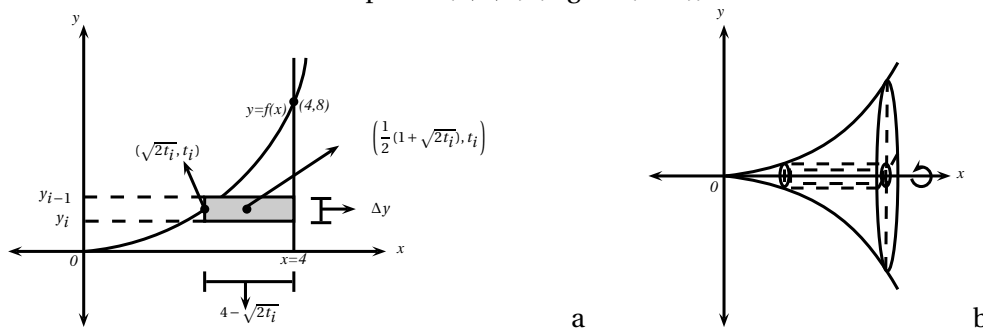


Figura 25

Para calcular  $\bar{x}$  se requiere conocer el momento con respecto al plano  $yz$ . Puesto que se va a utilizar el método de la corteza cilíndrica, el centroide de cada corteza está en el centro de ella, o sea en el punto  $(0, \frac{1}{2}(4 + \sqrt{2}t_i), 0)$ . Luego,

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \int_0^8 \frac{k}{2} (4 + \sqrt{2}y) 2\pi y (4 - \sqrt{2}y) dy \\ &= k\pi \int_0^8 (16 - 2y)y dy = k\pi \left[ 16 \int_0^8 y dy - 2 \int_0^8 y^2 dy \right] = k\pi \left[ 8y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^8 = 8 \cdot 8^2 - \frac{2 \cdot 8^3}{3} \\ &= \frac{k\pi 8^3}{3} = \frac{512k\pi}{3} \end{aligned}$$

Ahora, la masa del sólido esta dada por:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^8 k \cdot 2\pi y(4 - \sqrt{2y}) dy = k \cdot 2\pi \left[ 4 \int_0^8 y dy - \int_0^8 \sqrt{2y} \cdot y dy \right] \\ &= 2k\pi \left[ 2y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^8 = 2k\pi \left[ 2 \cdot 8^2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} 8^{\frac{5}{2}} \right] = 2k\pi \left[ 128 - \frac{512}{5} \right] = 2k\pi \left[ \frac{128}{5} \right] = \frac{256 \cdot k\pi}{5} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{Myz}{m} = \frac{\frac{512k\pi}{3}}{\frac{256 \cdot k\pi}{5}} = \frac{10}{3}$$

**Ejemplo 12:** Encuentre el centroide del sólido de revolución del ejemplo 10, si la región gira alrededor del eje  $y$ .

**Solución** La Figura (26.a) muestra el elemento rectangular de área y el centro del mismo. La Figura (26.b) muestra el elemento de volumen, el cual es una corteza. El centroide del sólido está en el punto  $(0, \bar{y}, 0)$ .

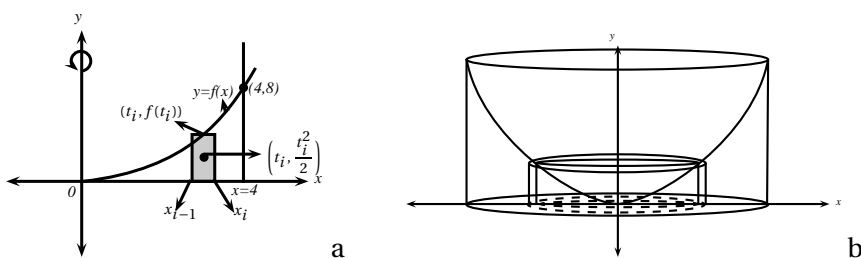


Figura 26

Para calcular  $\bar{y}$  es necesario encontrar el momento con respecto al plano  $xz$ .

El centroide de cada corteza está en el punto  $(0, \frac{1}{2}t_i, 0)$ . Luego,

$$M_{xz} = \int_0^4 \frac{k}{2} x^2 \cdot 2\pi x f(x) dx = k\pi \int_0^4 x^3 \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{k\pi x^6}{12} \Big|_0^4 = \frac{k\pi 4^6}{12} = \frac{1024}{3} \cdot k\pi$$

Ahora, la masa del sólido es:

$$m = \int_0^4 k \cdot 2\pi \cdot x \cdot f(x) dx = 2\pi k \int_0^4 \frac{1}{2} x^3 dx = \frac{k\pi x^4}{4} \Big|_0^4 = k\pi \cdot 4^3 = 64 \cdot k\pi$$

Luego

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{1024}{3} \cdot k\pi}{64 \cdot k\pi} = \frac{16}{3}$$

A finales del siglo III a.C. Pappus de Alejandría descubrió dos fórmulas que relacionan las áreas de superficie con los volúmenes de sólidos de revolución. Dichas fórmulas simplifican y agilizan notoriamente los cálculos que de manera usual serían largos y tediosos.

### 3.1. Pappus de Alejandría

Fué el último gran matemático griego de la escuela alejandrina, vivió aproximadamente entre los años 350 y 290 a.c.; Pappus escribió comentarios a los Elementos de Euclides y a la Gran sintaxis matemática de Ptolomeo, llamada por los árabes “El Almagesto”. Su obra principal llamada “Colección Matemática”, escrita hacia el 340 a.c., reviste una particular importancia desde el punto de vista histórico porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas.

*La Colección*, compuesta por ocho libros, casi todos conservados (excepto el primero y parte del segundo), contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, y los enunciados de muchos teoremas, entre ellos el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución.

En geometría existen varios teoremas que son conocidos con el nombre genérico de “Teorema de Pappus”, atribuidos a él. Entre ellos está el “Teorema del centroide de Pappus”, que dice que el área de una superficie de revolución generada mediante la rotación de una curva plana  $C$  sobre un eje externo es igual a la longitud de  $C$  multiplicada por la distancia recorrida por su centroide. Por ejemplo, el área de la superficie de un toroide de eje menor  $r$  y eje mayor  $R$  es

$$A = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 Rr$$

En la actualidad, podemos observar como la naturaleza nos ofrece una variedad de nociones y aplicaciones geométricas con respecto al área y un ejemplo de ello es la forma en que las abejas forman su colmena; ellas lo hacen en celdillas individuales, de tal manera que formen un mosaico sin huecos ni salientes entre las celdillas; la forma que las abejas optan para guardar su miel en su colmena es hexágono; ya que esto les permite aprovechar el espacio al máximo.

Los matemáticos de la época denominaron esta situación como un problema **Isoperimétrico**, una situación en donde a una figura como la circunferencia se pueda embaldosinar o cubrir completamente con otro polígono, (sin dejar espacios y sin que ese polígono se salga del límite de la circunferencia). Pappus demostró que, entre todos los polígonos regulares con el mismo perímetro, encierran más área aquellos que tengan mayor número de lados.

Es por esto que, la figura que encierra mayor área para un perímetro determinado es el círculo, que posee un número infinito de lados. No obstante, un círculo deja espacios cuando se rodea de otros círculos. Así, de todas las figuras geométricas que cumplen la condición “mayor número de lados y adyacencia sin huecos”, matemáticamente es el hexágono la más óptima.

### 3.2. Teorema 1:

#### Teorema de Pappus para áreas de superficie

El área que genera una curva  $s$  cuando gira alrededor de un eje es igual a la longitud de la circunferencia que recorre su centro de gravedad multiplicado por la longitud de la curva. Es decir,

$$A_s = 2\pi r s \quad (3.1)$$

donde  $A_s$  es el área de superficie,  $r$  es el radio de la circunferencia que recorre el centroide y  $s$  es la longitud de arco. En particular, si el eje de rotación es el eje  $x$ , entonces:

$$A_s = 2\pi \bar{y} s \quad (3.2)$$

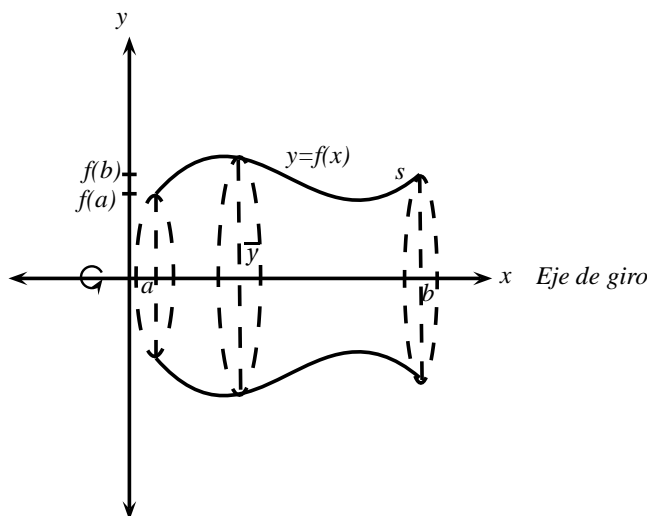


Figura 27

- Donde la función  $y = f(x)$  debe ser continua y con primera derivada continua pues la longitud de arco determinada por la función  $y = f(x)$  está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

#### Demostración:

Supongamos que el arco de curva es el determinado por la función positiva y con derivada continua  $y = f(x)$  desde el punto  $A(a, f(a))$  al punto  $B(b, f(b))$ .

Sabemos que el área de superficie  $A_s$  viene dada por:

$$A_s = \int_a^b 2\pi y ds = 2\pi \int_a^b y ds \quad (3.3)$$

De otro lado, la coordenada  $\bar{y}$  del centroide del arco viene dada por

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \delta_1 y ds}{\int_a^b \delta_1 ds} = \frac{\int_a^b y ds}{s} \quad (3.4)$$

De (3.2) se deduce que

$$\int_a^b y ds = \bar{y} \cdot s \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.3) en (3.1) se obtiene:

$$A_s = 2\pi \bar{y} s$$

Como  $2\pi \bar{y}$  es la distancia recorrida por el centro de gravedad de la región, queda probado el teorema .

**Ejemplo 1** Calcular el área de la superficie de una esfera de radio  $a$ .

**Solución:** En el ejemplo 8 del Capítulo 2, mostramos que el centroide de un alambre delgado homogéneo en forma de una semicircunferencia de radio  $a$  se encuentra en el punto sobre el eje  $y$   $(0, \frac{2a}{\pi})$

Como, el área de la superficie de una esfera puede generarse al rotar alrededor del eje  $x$  la parte superior de la circunferencia cuya longitud es  $s = \pi a$ . De ésta manera, de acuerdo al teorema de Pappus, la superficie de la esfera es:

$$A_s = 2\pi \bar{y} s = 2\pi \left(\frac{2a}{\pi}\right) \pi a = 4\pi a^2$$

### 3.3. Teorema 2

#### Teorema de Pappus para sólidos de revolución

El volumen que genera una superficie cuando gira alrededor de un eje coplanar es igual a la longitud de la circunferencia que recorre su centro de gravedad multiplicado por el área de la figura. Es decir,

$$V = 2\pi r \cdot A \quad (3.6)$$

donde  $r$  es el radio de la circunferencia que recorre el centroide y  $A$  es el área de la región  $R$ .

En particular, si el eje de rotación es el eje  $x$ , entonces:

$$V = 2\pi \bar{y} \cdot A \quad (3.7)$$

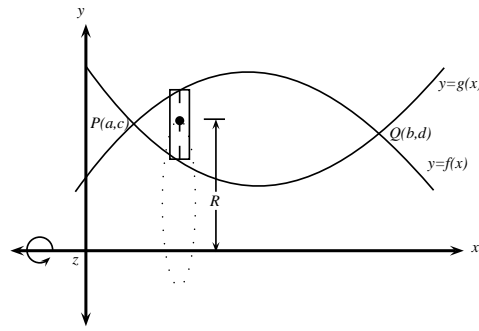


Figura 28

**Demostración:**

Supongamos que la región  $R$  de la figura gira alrededor del eje  $x$ . Sea  $w(y)$  la longitud del elemento diferencial de área. Al girar dicho elemento alrededor del eje  $x$  genera una corteza cilíndrica de radio  $y$  y altura  $w(y)$ . El diferencial de volumen  $dV$  de la corteza viene dado por:

$$dV = 2\pi y w(y) dy$$

Así que:

$$V = 2\pi \int_c^d y w(y) dy \quad (3.8)$$

De otro lado, la coordenada  $\bar{y}$  del centroide es:

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_c^d y w(y) dy}{A}$$

Por lo tanto,

$$\int_c^d y w(y) dy = \bar{y} A \quad (3.9)$$

y sustituyendo (3.9) en (3.8) se tiene:

$$V = 2\pi \bar{y} A$$

**Ejemplo 2:** Una forma alternativa para calcular el volumen de una esfera de radio  $a$  es utilizando el segundo Teorema de Pappus.

**Solución:** En el ejemplo 9 del capítulo 2 encontramos que, el centroide de la lámina homogénea y semicircular de radio  $a$  está en el punto  $(0, \frac{4a}{3\pi})$ .

Como, el volumen de la esfera se genera al rotar alrededor del eje  $x$  un semicírculo como el de dicho ejemplo; y cuya área es  $A = \frac{\pi a^2}{2}$ , además como, el centroide recorre una circunferencia de radio  $\frac{4a}{3\pi}$ , entonces, la longitud que recorre el centroide es  $2\pi (\frac{4a}{3\pi}) = \frac{8}{3} a$  y por lo tanto.

$$V = \frac{8}{3} a \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \frac{4}{3} \pi a^3$$

que corresponde al volumen de una esfera de radio  $a$ .

**Ejemplo 3:** Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor de la recta  $y = x - 2$  la lámina homogénea limitada por la semicircunferencia  $y = \sqrt{4 - x^2}$  y el eje  $x$ .

**Solución** En la siguiente figura aparece sombreada la región y el eje de giro escrito en su forma general



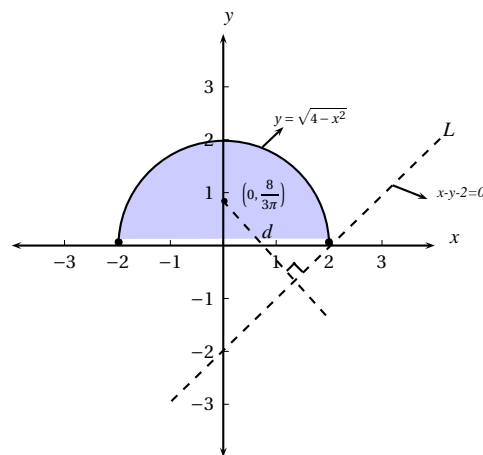


Figura 29

Retomando el ejemplo 9 del capítulo 2, el centroide de la lámina está en el punto  $(0, \frac{8}{3\pi})$ , ahora, al girar la región semicircular sombreada alrededor de la recta  $x - y - 2 = 0$ , el centroide recorre una circunferencia de radio  $d$ . Por lo tanto, si  $l$  denota la longitud de dicha circunferencia, entonces

$$l = 2\pi d \quad (3.10)$$

Pero  $d$  es la distancia del punto  $(0, \frac{8}{3\pi})$  a la recta de ecuación:  $x - y - 2 = 0$ ; y como la distancia del punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  a la recta  $Ax + By + C = 0$  es:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

entonces,

$$d = \frac{|1 \cdot (0) + (-1) \cdot \frac{8}{3\pi} + (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-\frac{8}{3\pi} - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{8 + 6\pi}{3\sqrt{2}\pi} \quad (3.11)$$

Es decir,

$$l = 2\pi \left( \frac{8 + 6\pi}{3\sqrt{2}\pi} \right) = \frac{4}{3\sqrt{2}}(4 + 3\pi)$$

También el área del semicírculo de radio  $r = 2$  es  $A = 2\pi$ .

Por tanto, de acuerdo con el segundo Teorema de Pappus, el volumen del sólido viene dado por:

$$V = l \cdot A = 2\pi \cdot \frac{4}{3\sqrt{2}}(4 + 3\pi) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi(4 + 3\pi)$$

**Ejemplo 4:** Un sólido toroidal o simplemente "toro" se genera al rotar un círculo de radio  $a$ , alrededor de una recta  $l$  situada en su mismo plano a una distancia  $b$  de su centro ( $b > a$ ). Podemos utilizar el segundo Teorema de Pappus para calcular su volumen.

**Solución:** La siguiente figura ilustra la situación en la cual asumimos que el círculo de radio  $a$  gira alrededor del eje  $y$ .

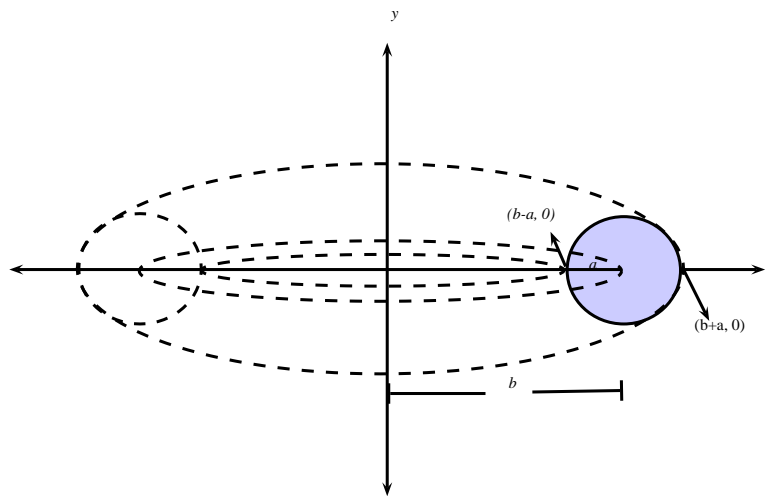


Figura 30

Según ejemplo 7 del capítulo 2 el centroide del círculo que está en su centro, al girar alrededor del eje  $y$ , recorre una circunferencia de radio  $b$ . Entonces la longitud recorrida por el centroide es

$$l = 2\pi b \quad (3.12)$$

De otro lado, el área del círculo es

$$A = \pi a^2 \quad (3.13)$$

De acuerdo con el segundo Teorema de Pappus:

$$V = l \cdot A \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.12) y (3.13) en (3.14) se obtiene finalmente:

$$V = 2\pi^2 a^2 b$$

que corresponde al volumen pedido.

Si se sumerge horizontalmente una placa dentro de un líquido, éste ejerce una fuerza constante en todos los puntos de ella. Al cociente de dividir la magnitud de la fuerza por el área de la placa se le llama *presión del líquido*.

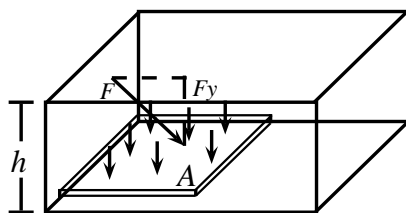


Figura 31

La dirección de la fuerza es normal a la superficie de la placa y la magnitud está dada por  $w \cdot h \cdot a$ , en donde  $w$  es el peso por unidad de volumen del líquido,  $h$  es la profundidad de la placa sumergida y  $a$  es el área de la misma. La presión  $P$  estará entonces dada por la fórmula  $P = \frac{wha}{a} = wh$

Si tenemos una placa sumergida en un líquido y su posición no es horizontal, entonces la presión ya no es uniforme, y es mayor en los puntos que están sobre la misma horizontal. Estamos interesados en calcular la fuerza total que ejerce un líquido sobre una placa vertical sumergida en él.

#### 4.1. Blaise Pascal

Físico, matemático y filósofo francés nació el 19 junio de 1623 en Clermont y falleció el 19 de agosto de 1662 en París. Su padre, Étienne, tenía una educación ortodoxa y decidió educarlo él mismo. Decidió que no estudiara matemáticas antes de los quince años y todos los textos de esta ciencia fueron sacados de su hogar. Pascal, sin embargo, sintió curiosidad por todo esto y comenzó a trabajar en geometría a la edad de doce años. Pronto descubrió que la suma de los ángulos de un triángulo correspondía a dos ángulos rectos, y cuando su padre lo comprobó, se enterneció tanto que le regaló un texto de Euclides.

A la edad de catorce años Pascal acudía a las reuniones con el monje y matemático jesuita Mersenne, cuyo cuarto en París era lugar frecuente de reuniones de Fermat, Gassendi y otros matemáticos famosos de la época. A los dieciséis años presentó, en una de las reuniones de



(Clermont-Ferrand, Francia 1623 - Paris, Francia 1662) Figura 32

Mersenne, un escrito que contenía algunos teoremas de geometría proyectiva y que incluían lo que se ahora se conoce como el hexágono místico de Pascal. En años posteriores trabajó en las secciones cónicas y desarrolló importantes teoremas en la geometría proyectiva. En su correspondencia con Pierre de Fermat dejó establecida la creación de la teoría de la probabilidad.

Pascal inventó la primera calculadora digital en el año 1642. El aparato, llamado “pascalina”, se asemeja a una calculadora mecánica de la década de 1940. También inventó la jeringa y llevó a cabo estudios en geometría, hidrodinámica, hidrostática y presión atmosférica.

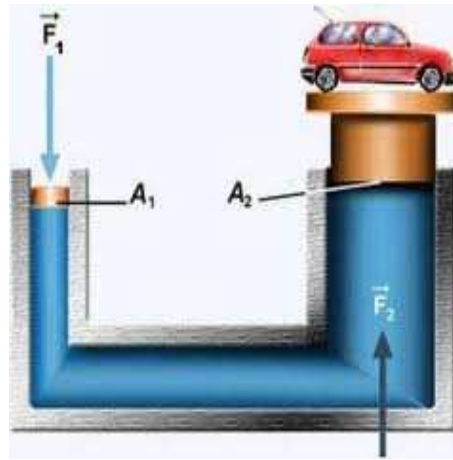
Su más famoso trabajo en filosofía es “Pensées”, una colección de pensamientos personales del sufrimiento humano y la fe en Dios. “Si Dios no existe, uno no pierde nada al creer en él; mientras que si existe, uno pierde todo por no creer”, dijo alguna vez. Su último trabajo fue la “cicloide”, la curva trazada por un punto en la circunferencia de un rollo circular. Pascal murió a la edad de 39 años, después de sufrir un dolor intenso debido al crecimiento de un tumor maligno en su estómago, que luego se le propagó al cerebro.

### **El principio de Pascal y sus aplicaciones**

La presión aplicada en un punto de un líquido contenido en un recipiente se transmite con el mismo valor a cada una de las partes del mismo. Tal enunciado, obtenido a partir de observaciones y experimentos por este genial matemático, se conoce como “principio de Pascal”, y puede ser interpretado como una consecuencia de la ecuación fundamental de la hidrostática y del carácter incompresible de los líquidos.

La prensa hidráulica constituye la aplicación fundamental del principio de Pascal y también un dispositivo que permite entender mejor su significado. Consiste, en esencia, en dos cilindros de diferente sección comunicados entre sí, y cuyo interior está completamente lleno de un líquido que puede ser agua o aceite. Dos émbolos de secciones diferentes se ajustan, respectivamente, en cada uno de los dos cilindros, de modo que estén en contacto con el líquido. Cuando sobre el émbolo de menor sección se ejerce una fuerza la presión que se origina en el líquido en contacto

con él se transmite íntegramente y de forma instantánea a todo el resto del líquido; por tanto, será igual a la presión que ejerce el líquido sobre el émbolo de mayor sección (esto significa que si, por ejemplo, una sección es veinte veces mayor que la otra, la fuerza aplicada sobre el émbolo pequeño se ve multiplicada por veinte en el émbolo grande).



(Prensa Hidráulica) Figura 33

## 4.2. Fuerza Hidrostática

Consideremos la placa que se muestra en la Gráfica 34 y que esta limitada por las rectas  $x = a$ ,  $x = b$  y por las curvas  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  que supondremos integrables en  $[a, b]$  y tales que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , sumergida en un líquido de densidad de peso  $w$ .

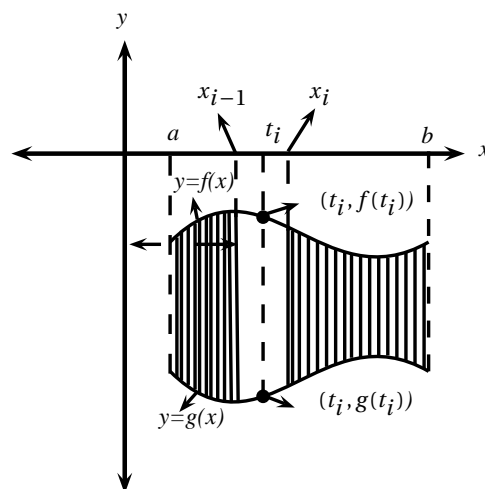


Figura 34

La presión sobre todos los puntos del  $i$ -ésimo elemento de área variará entre  $w x_{i-1}$  y  $w x_i$ , y si se toma  $t_i$  tal que  $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ ,  $w t_i$  variará un valor intermedio entre los dos anteriores.

Un valor aproximado de la magnitud de la fuerza ejercida por el líquido sobre el  $i$ -ésimo elemento de área será  $\Delta F_i = w t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i$ , en donde los dos últimos factores representan el área  $\Delta A_i$

del elemento.

Un valor aproximado de la magnitud de la fuerza ejercida sobre toda la superficie estará dada por:

$$F \approx \sum_{i=1}^n w t_i \Delta A_i = \sum_{i=1}^n w t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i$$

La fuerza total es:

$$F = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w t_i [f(t_i) - g(t_i)] \Delta x_i = \int_a^b w x [f(x) - g(x)] dx$$

**Ejemplo 1:** Calcular la fuerza total ejercida por el agua cuando se sumerge verticalmente una placa en forma de triángulo isósceles de base 6 m y altura 5 m de tal modo que su vértice superior queda a 3 m por debajo del nivel del agua.

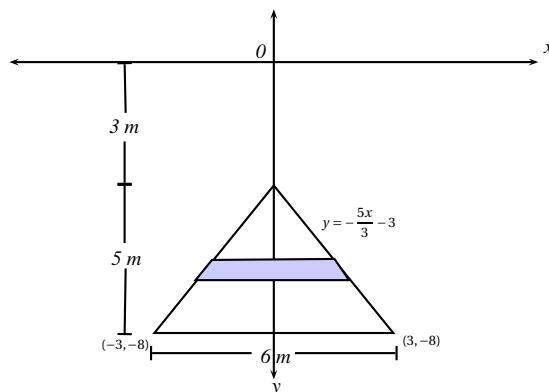


Figura 35

**Solución:** La recta que pasa por los puntos  $(0, -3)$  y  $(3, -8)$  tiene por ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 8}{0 - 3} = -\frac{5}{3}$$

Luego,

$$y + 3 = -\frac{5}{3}x \text{ es decir, } x = -\frac{3}{5}(y + 3)$$

y la que pasa por  $(0, -3)$  y  $(-3, -8)$  tiene como ecuación

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 8}{0 - 3} = \frac{5}{3}$$

Luego,

$$y + 3 = \frac{5}{3}x \text{ así, } x = \frac{3}{5}(y + 3)$$

La fuerza sobre el  $i$ -ésimo elemento de área será:

$$\Delta F_i = w t_i \left[ \left(-\frac{3}{5}\right)(t_i + 3) - \left(\frac{3}{5}\right)(t_i + 3) \right] \Delta y_i$$

y la fuerza total:

$$\begin{aligned} F &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w t_i \left[ \left(-\frac{6}{5}\right)(t_i + 3) \right] \Delta y_i = \int_{-8}^{-3} \left[ w y \left(-\frac{6}{5}\right)(y + 3) \right] dy \\ &= -\left(-\frac{6w}{5}\right) \int_{-8}^{-3} (y^2 + 3y) dy = \left(\frac{6w}{5}\right) \left[ \int_{-8}^{-3} y^2 dy + \int_{-8}^{-3} 3y dy \right] = \left(\frac{6w}{5}\right) \left[ \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} \right]_{-8}^{-3} \\ &= \left(\frac{6w}{5}\right) \left[ \frac{8^3}{3} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \left( \frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) \right] = \frac{6w}{5} \left[ \frac{512}{3} + \frac{192}{2} - \frac{27}{3} - \frac{27}{2} \right] = 293w \end{aligned}$$

Como para el agua  $w = 1 \text{ ton/m}^3$ ,  $F = 293 \text{ ton}$ .

**Ejemplo 2:** Un depósito limitado en sus extremos por dos semicírculos de radio 20 cm está lleno con un líquido cuyo peso  $w$  es de 3 g por centímetro cúbico. Calcule la fuerza total ejercida por el líquido sobre las paredes semicirculares.

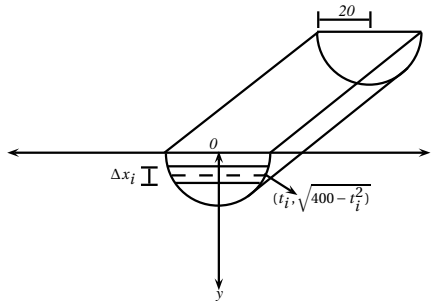


Figura 36

**Solución:** La ecuación de la circunferencia de radio 20 cm y centro en el origen es  $x^2 + y^2 = 20^2$ , así que  $x^2 = 400 - y^2$ , de donde:

$$x = \pm \sqrt{400 - y^2}$$

La fuerza del líquido sobre el elemento de área es:

$$w t_i \cdot \sqrt{400 - t_i^2} \Delta y_i$$

entonces la fuerza total es:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{20} 2wy\sqrt{400 - y^2} dy = 2w \int_0^{20} 2y(400 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy. \\ &\text{Hagamos } u = 400 - y^2, \text{ así } du = -2ydy; \\ &\text{si } y = 0 \text{ } u = 400 \text{ y cuando } y = 20 \text{ } u = 0 \text{ por lo tanto} \\ &= 2w \int_0^{20} 2y(400 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = -2w \int_0^{20} (-2y)(400 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy \\ &= -2w \int_{400}^0 u^{\frac{1}{2}} du = -2w \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_{400}^0 = -\frac{4w}{3} \left[ 0^{\frac{3}{2}} - 400^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= -\frac{4w}{3} [0 - 400(20)] = \frac{4w}{3} \cdot 8000 = \frac{32000}{3} w \end{aligned}$$





## CONCLUSIONES

- A través de diversos ejemplos pudo mostrarse que el centro de masa de un sistema es el punto donde convergen todas las cargas que se aplican al mismo; y éste punto no depende de la posición del plano cartesiano sino de la masa total del sistema y de los momentos que actúan sobre él.
- Los Teoremas de Pappus son de gran utilidad para calcular áreas superficiales y volúmenes de sólidos e involucran regiones cuando la función matemática que las describe se pone a rotar alrededor de un eje de giro.
- Por medio de las integrales se modeló un aspecto de la mecánica de fluidos como la presión hidrostática, de gran aplicación en la ingeniería en dispositivos como la prensa hidráulica.
- A través de los diferentes ejemplos presentados se ha tratado de desarrollar una herramienta que permita a los estudiantes observar algunas aplicaciones de las integrales en aspectos como momentos y centros de masa, cálculo de áreas y volúmenes y la mecánica de fluidos a través de la realización de ejercicios sencillos, pero a la vez clarificadores de los contenidos teóricos.
- Se ha utilizado el lenguaje de programación para la presentación de textos científicos en **LaTeX**; para obtener una mejor presentación de éste trabajo.



- [1 ] C.H. Edwards y J.C. Penney *Cálculo con Geometría analítica*, IV edición, Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., 1996.
- [2 ] Dennis G. Zill, *cálculo con geometría analítica*, International Thomson.
- [3 ] Earl W. Swokowski, *Cálculo con geometría analítica*, segunda edición, Iberoamérica
- [4 ] Francisco Guillermo Mejía Duque, Luis Guillermo Aguilar Maya *Cálculo Integral*, primera edición 2010, Editorial Sello Universidad de Medellín
- [5 ] Frank Ayres, Jr. Ph. D *Serie de Compendios Schaum: Teoría y problemas de Cálculo Diferencial e Integral*, Editorial McGraw-Hill
- [6 ] Iván Castro Chadid y Jesús H. Pérez Alcázar, *Un paseo finito por lo infinito. El infinito en Matemáticas* , Primera Edición, Pontificia Universidad Javeriana 2007.
- [7 ] James Stewart *Cálculo Diferencial e Integral*, segunda edición, Editorial Thomson
- [8 ] Jesús del Valle Sierra, *Elementos básicos de cálculo diferencial*,segunda edición, febrero de 2006, Facultad de Ciencias Exáctas y Naturales, Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas.
- [9 ] Jesús del Valle Sierra, *Elementos básicos de cálculo integral y series*,primera edición, marzo de 2006, Facultad de Ciencias Exáctas y Naturales, Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas.
- [10 ] Larson, Hostetler, y Edwar, *Cálculo con Geometría Analítica*, V edición vol. I, McGRAW-HILL.
- [11 ] Louis Leithold, *El Cálculo*, Oxford University Press, séptima edición, 1998.
- [12 ] Rodrigo De Castro Korgi, *El Universo Latex*, Facultad de ciencias Univ. Nal. de col dep. de Matemáticas, segunda edición, 2008.
- [13 ] Stein Sk, *Cálculo con geometría analítica*, V edición. México: McGraw-Hill, 1995.