Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Problemas de Geometría Euclidiana

Maritza Cuadrado Peraza
Jimmy Sabi Ticora

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Problemas de Geometría Euclidiana

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

Maritza Cuadrado Peraza
2006135827
Jimmy Sabi Ticora
2001100035

Asesor:
Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2012

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Abril de 2012

AGRADECIMIENTOS

Al finalizar esta importante etapa de nuestra vida, queremos expresar un profundo agradecimiento a quienes con su ayuda, apoyo y compresión nos alentaron a lograr esta hermosa realidad. Agradecemos en primer lugar a Dios por todo lo que somos. A nuestros padres, porque no existe forma alguna de retribuirles todos sus sacrificios, esfuerzos y amor, queremos que sientan que la meta alcanzada también es de ellos y que la fuerza que nos ayudó a conseguirla fue su gran apoyo; de igual manera queremos manifestar nuestros sinceros agradecimientos a nuestro asesor de trabajo de grado, por su compromiso y dedicación en el exitoso desarrollo del proceso. A cada uno de los profesores de la Licenciatura en Matemáticas, por su colaboración, solidaridad y compromiso con el programa académico.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Se presume que los egipcios fueron los primeros topógrafos; este calificativo fue atribuido a la cultura debido a sus estrategias desarrolladas para el aprovechamiento del rio Nilo. Cuando las inundaciones del rio dejaban cubiertas las tierras de un productivo sedimento sus riveras, los llamados arquitectos de esta época o “harpedonatas”, median las tierras para repartirlas entre los cultivadores por medio de triángulos y polígonos. Formando con sus cuerdas divididas por nudos de 3, 4, y 5 unidades de longitud, triángulos con ángulos rectos.

Por ende, el presente trabajo, el cálculo de áreas de figuras geométricas se hace útil cuando debemos determinar el área de regiones geométricas; es decir regiones cuya forma es proporcionada como los cuadriláteros, triángulos, círculos y polígonos en general.

El cálculo de áreas y perímetros nos sirve cuando queremos determinar el valor que representa comprar materiales para construcción de edificios, paredes, ventanas, etc. y el material tiene figuras geométricas. De igual forma el área nos determina otras variables como la cantidad y el costo de materiales con los cuales se construye algo como un edificio (pisos, paredes, ventanas, etc), o contenedores (cartón, acrílico, madera, entre otros).

Los contenidos presentados sirven como material de estudio en la preparación en los estudiantes de educación secundaria, igualmente en cursos como la geometría euclidiana en el primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

Si este trabajo que ahora ofrecemos, puede contribuir en algo para que las tareas de enseñar y aprender Geometría se vuelvan más agradables y provechosas, nos daremos por satisfechos.

PRESENTACIÓN

En este trabajo de grado, titulado: ***Problemas de geometría euclidiana,*** presentaremos ilustraciones, específicamente ejercicios y problemas de: aplicación de ángulos, triángulos, cuadriláteros, proporcionalidad, semejanza y sectores circulares entre otros.

Para esto partiremos en el primer capítulo con los conceptos básicos de la geometría, definiciones, teoremas, y axiomas. En el segundo capítulo abordaremos los teoremas especiales para el cálculo de áreas. En el tercer capítulo propondremos problemas especiales de cálculo de áreas, perímetros, ángulos y otros. Los ejercicios los resolvemos en seis secciones. En la primera sección encontraremos ángulos, en la segunda sección triángulos, en la tercera sección cuadriláteros, en la cuarta sección proporcionalidad y semejanza, en la quinta sección sectores circulares y en la sexta sección polígonos regulares y otros. En el cuarto capítulo se dará una serie de indicaciones para resolver los ejercicios propuestos en el tercer capítulo. En el quinto capítulo se presentaran las soluciones de los ejercicios propuestos. En el sexto capítulo se proponen una serie de ejercicios para ayudar al lector a afianzar los conocimientos adquiridos.

De esta manera con este trabajo de grado, tienen un material donde se resalta la importancia de la geometría euclidiana y algunas aplicaciones.

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Desde que nacemos nos enfrentamos a un mundo de figuras y objetos geométricos. Calcular áreas de regiones poligonales es una de las tareas más usuales que se hace en la vida cotidiana. Es suficiente que demos una mirada a nuestro alrededor para observar elementos geométricos; en nuestra casa, aula de clases, en las calles, los parques, las plazas entre otros. En estos elementos podemos identificar: triángulos, rectángulos, círculos, rombos, etc. El cálculo de áreas tiene gran importancia en los saberes matemáticos debido a que esta nació por la necesidad que tenía el hombre a la hora de solucionar problemas de su vida cotidiana. Además su importancia reside en que esta se aplica en una variedad de problemas de la vida diaria.

Para nadie es un secreto los grandes vacíos que presentan los estudiantes de secundaria en el estudio de la geometría. En la medición de perímetros, áreas y volúmenes, los alumnos aplican formulas sin darles un real significado.

Atendiendo a esto realizamos este trabajo como una “guía de estudio”, que sirve de apoyo para las personas interesadas en el aprendizaje o fortalecimiento de este tema.

JUSTIFICACIÓN

El estudio de la geometría euclidiana presenta dificultades a los estudiantes de secundaria y de la Licenciatura en Matemáticas. Debido a esto surgió la necesidad de recopilar, analizar, organizar y producir de manera formal un material completo acerca del cálculo de áreas de regiones poligonales, y otros temas de esta área.

Anexo a esto el presente trabajo busca abordar algunos tópicos de la geometría euclidiana, y reflexionar sobre sus postulados teóricos buscando el sometimiento pedagógico del saber, relacionado para la aplicación cognitiva de los estudiantes que buscan una confrontación intelectual en el campo de la geometría.

Por otro lado este proyecto investigativo propende por la creación de una estrategia alterna que permita la resolución de problemas geométricos, desde una perspectiva euclidiana. Para ello se ha propuesto la creación de una guía de estudio que encierra aspectos conceptuales y operativos que fomentaran el entendimiento, la asociación y la aplicabilidad de la geometría euclidiana.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Elaborar una reflexión teórica sobre los postulados de la geometría euclidiana y hacer algunas aplicaciones cognitivas de los principios y enunciados geométricos planteados por Euclides.

Objetivos Específicos

- Comprender las definiciones básicas, conocer los axiomas fundamentales y los teoremas relacionados con la geometría euclidiana.
- Calcular perímetros y áreas de regiones poligonales.
- Resolver ejercicios y problemas relacionados al cálculo de áreas de regiones desconocidas, transformándolas en regiones conocidas, por descomposición de ellas.
- Comprender y aplicar los conceptos estudiados y ejemplificarlos para resolver problemas de aplicación de triángulos y cuadriláteros, aplicación de sectores circulares, aplicación de proporcionalidad y semejanza, aplicación de ángulos y aplicación de polígonos regulares.

MARCO TEÓRICO

¿Cómo nació la Geometría?

Hay tres problemas tan antiguos como la misma humanidad, que dieron origen a las primeras creaciones matemáticas del hombre. Estos problemas fueron: El problema de contar, que dio origen a la aritmética; y los problemas de medir y construir, que dieron origen a la geometría.

Hace ya 6.000 años que los egipcios se veían obligados a medir las tierras del Valle del Nilo, cada vez con sus inundaciones periódicas, al par que fertilizaba la tierra, borraba los límites de las propiedades. De aquí el origen de la palabra Geometría, compuesta de las palabras griegas geo (tierra) y metro (medida), y cuyo significado es medida de la tierra.

En pergaminos egipcios de épocas antiguas se han encontrado fórmulas geométricas, unas veces exactas y otras veces aproximadas que ellos empleaban para calcular el área de ciertas superficies sencillas.

Otra actividad que llevó al hombre a tener que ocuparse de ciertos problemas geométricos (trazado de paralelas y perpendiculares, dibujo de rectángulos, cuadrados y de ciertos polígonos regulares , cálculo de elementos de prismas, pirámide, etc.) fue la actividad de la construcción.

Es bien sabido que los faraones de Egipto hacían edificar sus tumbas, que eran suntuosas, en forma de pirámide, y esto obligaba a los arquitectos a estudiar ciertas propiedades geométricas de los cuerpos que usaban en la construcción, para lograr la belleza y la estabilidad de los monumentos.

En el panteón de Atenas, templo griego construido en la época Pericles (entre los años 448 al 437 antes de Jesucristo), se observa una buena cantidad de propiedades de figuras geométricas que tenían que conocer aquellos arquitectos y artesanos de la Grecia clásica para lograr una construcción tan bella.

Pasando los tiempos, el hombre perfecciona el arte de la navegación y esto lo obliga de nuevo a estudiar la astronomía. Para fijar su posición y orientarse en medio de los océanos. Y para este estudio necesita también aplicar procedimientos geométricos.

Y de los tiempos antiguos pasamos a los modernos en que vivimos, basta que miremos a nuestro alrededor para que contemplemos la Geometría por todas partes: Los edificios, la fabricas, los ferrocarriles, los barcos, los aviones, los satélites artificiales, etc: Todas estas cosas que nos rodean hoy día, son construidas aplicando las normas de la geometría.

Los Hombres que Hicieron la Geometría

Antes de comenzar el estudio propiamente dicho de la Geometría vamos a presentar a algunos de los hombres más importantes que la crearon. La geometría fue obra de griegos, ellos fueron los primeros en interesarse en las ideas abstractas, y se complacían en pensar sobre estas ideas puras que ellos mismos habían creado: Las ideas de recta, plano, circulo, esfera, poliedro regular, etc;

El primer geómetra más importante del que se tiene noticia es el griego

THALES DE MILETO (Siglo VI antes de J.C.). Se sabe que viajo por Egipto, donde adquirió muchos conocimientos sobre Geometría y Astronomía. Fue uno de los siete sabios de Grecia y a el se deben algunos bellos e importantes teoremas sobre triángulos rectángulos inscritos en una circunferencia y sobre segmentos proporcionales, por lo que se considera el fundador de la teoría de las figuras semejantes.

PITÁGORAS DE SAMOS (Siglo VI antes de J.C.). También viajo por Egipto y devuelta de su viaje fundo en el sur de Italia, en Crotona, una escuela científica, política y religiosa que fue llamada la “Escuela Itálica”, y a sus miembros se les llamaba “los Pitagóricos”. En esta escuela nació la Geometría como ciencia independiente. A ella se debe el descubrimiento del importante y famoso “Teorema de Pitágoras” sobre el triángulo rectángulo. Hicieron también descubrimientos notables en Aritmética y en Música, y eran de la opinión de que “los números gobiernan al mundo”, con lo que querían decir que todos los fenómenos de la Naturaleza se pueden expresar mediante leyes matemáticas.

PLATÓN (Siglo IV antes de J.C.). Fundo en Atenas un centro de estudios superiores y de investigación, llamado la “Academia”, que fue algo análogo a lo que son hoy nuestras facultades universitarias, en el pórtico de la academia se leía: “Nadie entre aquí que no sepa Geometría”.

Se considera como el inventor del Método Analítico para demostrar proposiciones geométricas y resolver problemas.

Su obra es mayor como filosofo que como matemático, pero fomento entre sus discípulos las investigaciones sobre Geometría, hacia la que sentía gran devoción, como se advierte por su frase: “Dios hace Geometría”

EUDOXIO DE CNIDO (Siglo IV antes de J.C.). Contemporáneo de Platón y aunque no goza de gran fama, fue uno de los mayores matemáticos griegos. A él se le deben una teoría geométrica de la proporcionalidad, tan perfecta que puede considerarse como un trabajo actual, y en la que está contenida la teoría geométrica de los números irracionales; multitud de construcciones geométricas ingeniosísimas. Y el “método de exhaución” o método de agotamiento. Para calcular áreas de contorno curvo y volúmenes. Por este descubrimiento se le considera uno de los precursores del cálculo infinitesimal.

EUCLIDES (Siglo III antes de J.C.). Es considerado “ El Padre de la Geometría”. Recopilo y organizó todos los conocimientos geométricos de su época. Su obra fundamental, “Elementos”, se considera como el libro científico más difundido. El historiador Proclo cuenta que en una ocasión el Rey Tolomeo le pregunto a Euclides que si no había otro camino más fácil para emprender Geometría, a lo que respondió: “No existen caminos reales para la Geometría”

Todos los conocimientos sobre Geometría que existen en los programas actuales de Bachillerato en todo el mundo, están contenidos en los “Elementos”, que fueron escritos hace más de 2.300 años.

ARQUÍMEDES (Finales del siglo III antes de J.C.). Nació y vivió en Siracusa, ciudad que resistió durante tres años el asedio de los romanos, gracias a las máquinas de guerra inventadas por

Arquímedes. Fue matemático, físico e ingeniero, y a él se deben las investigaciones más difíciles sobre Geometría: el cálculo de π, (razón de la circunferencia al diámetro) la relación entre el volumen de la esfera y del cilindro circunscrito, además del cálculo de superficies curvas y volúmenes mucho más complicados, que no cabe citar aquí. Murió a manos de un soldado romano en la invasión de Siracusa, en el año 212 antes de J.C., a los 75 años de edad. Fue el matemático más grande de la antigüedad, y uno de los primeros de todos los tiempos.

APOLONIO (Siglo III y II antes de J.C.). Fue el único gran geómetra griego; investigo las propiedades de las cónicas que sirvieron a Kepler para fundamentar sus descubrimientos de astronomía.

CAPÍTULO 1

ELEMENTOS BÁSICOS

A continuación daremos los elementos básicos con los cuales se construye la Geometría Euclidiana plana (el punto, la línea y el plano), las definiciones básicas que utilizaremos en el presente trabajo como también mostraremos algunos teoremas y axiomas que nos van a servir en la solución de los problemas planteados.

Los siguientes conceptos son indefinibles sin embargo es importante tener una idea intuitiva de ellos.

Punto: Se le considera como la intersección de dos líneas y es denotado con una letra mayúscula. Es la expresión de la no extensión y por lo tanto no tiene longitud, ni altura, ni anchura, solo nos indica una posición en el plano.

Línea: Se le considera generada por un punto en movimiento que sigue cierta dirección. Su longitud es indefinida.

Plano: Se le considera generado por una línea recta en movimiento con una dirección determinada.

Por una **recta** entendemos una línea recta sin extremos, de modo que si trazamos una porción de recta con la ayuda de una regla, cualquier extensión de la misma por cualquiera de sus extremos será una porción mayor de la misma recta.

1.1. Axiomas de incidencia

Una *Geometría* (dimensional) está formada por un conjunto π al que llamaremos plano y a cuyos elementos llamaremos puntos junto con una familia no vacía de subconjuntos de π cuyos elementos llamaremos rectas de modo que se cumplan los cinco axiomas indicados más adelante.

Diremos que una recta o plano X pasa por un punto P, o que X incide en el punto P, si $P \in X$.

Axioma I1 Por cada par de puntos distintos P y Q pasa una única recta que representaremos por $\overleftrightarrow{PQ}$.

Axioma I2 Toda recta pasa al menos por dos puntos.

Diremos que tres o más puntos son colineales si hay una recta que pasa por todos ellos.

Axioma I3 Por cada tres punto no colineales P, Q, R pasa el plano al que representaremos por PQR.

Axioma I4 Todo plano contiene tres puntos no colineales.

Axioma I5 Si una recta r tiene dos puntos en común en un plano π, entonces r está contenida en π.

Sí una recta r no pasa por un punto P, diremos que P es un punto exterior a r.

Teorema 1.1 Toda recta tiene un punto exterior contenido en el plano. (Por el Axioma I4)

Teorema 1.2 Si P y Q son puntos de una recta r y R es exterior a r, entonces P, Q y R no son colineales. (Por el Axioma I1)

Teorema 1.3 Dos rectas distintas tienen como máximo un punto en común. (Por el Axioma I1)

Diremos que dos rectas son *coincidentes* si son iguales, *secantes* si su intersección es un punto, y si no tienen puntos comunes diremos que son *paralelas*.

Teorema 1.4 Una recta y un punto exterior a ella están contenidas en el plano. (Por los Axiomas I2, I3 e I5)

1.2. Axiomas de ordenación

Sí fijamos dos puntos A y B en una recta r y establecemos que A está a la izquierda de B, esto determina cuándo un punto cualquiera de r está a la derecha o la izquierda de otro punto r. más aún, tiene sentido decir qué punto está más a la izquierda o más a la derecha de uno dado, es decir, los puntos de la recta quedan ordenados por el criterio de que un punto es menor cuanto más a la izquierda se encuentra. Es importante notar que la noción de izquierda y derecha es relativa, pues si giramos la recta, la izquierda se convierte en derecha y viceversa. Los axiomas siguientes recogen las propiedades necesarias para notar estas nociones intuitivas.

<u>DEFINICIÓN</u>

Una *Geometría* está *ordenada* si cada par ordenado de puntos distintos A y B tiene asociado una relación $\leq_{AB}$ sobre los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ de tal modo que se satisfacen los cinco axiomas siguientes:

Axioma O1 Para todo par de puntos distintos A y B, la relación $\leq_{AB}$ es una relación de orden total sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, es decir, es reflexiva, antisimétrica, transitiva, y todo par de puntos P y Q de $\overleftrightarrow{AB}$ cumple $P \leq_{AB} Q$ o bien $Q \leq_{AB} P$. Además, con este orden, la recta no tiene máximo ni mínimo, y para todo par de puntos $P \leq_{AB} Q$, existe un punto R talque $P \leq_{AB} Q \leq_{AB} R$.

Axioma O2 Para todo par de puntos distintos A y B se cumple $A \leq_{AB} B$.

Axioma O3 Si A y B son dos puntos distintos y P, Q son dos puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces $P \leq_{AB} Q$. si sólo si $Q \leq_{BA} P$.

Axioma O4 Si $A \neq B$ y $C \neq D$ son pares de puntos de una misma recta, entonces $\leq_{AB} = \leq_{CD}$ o bien $\leq_{AB} = \leq_{DC}$.

Los axiomas O3 y O4 afirman que en realidad sólo estamos considerando dos ordenaciones en cada recta, y una es la inversa de la otra. Diremos que un punto P está entre dos puntos A y B si los tres son colineales y $A \leq_{AB} P \leq_{AB} B$.

Axioma O5 Sean A, B, C tres puntos no colineales y r una recta contenida en el plano ABC pero que no pase por ninguno de ellos. Sí r pasa por un punto situado entre A y B, entoces r pasa por un punto entre A y C o bien por un punto entre B y C, y solo se da uno de los dos casos.

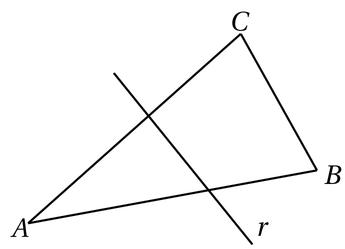


FIGURA 1.5.1

Teorema 1.5 Dados tres puntos A, B, C se cumple que B está entre A y C si y sólo si está entre C y A. (Por O2)

<u>DEFINICIÓN</u>

Dados dos puntos distintos A y B, llamaremos *segmento* de extremos A y B al conjunto de los puntos situados entre A y B. Lo representamos por $\overline{AB}$.

Por el teorema anterior $\overline{AB} = \overline{BA}$. Obsérvese que un segmento s contiene a sus extremos, luego está contenido en una única recta, a la que llamamos *prolongación* de s. Los extremos de s son el máximo y el mínimo para cualquiera de las ordenaciones de su prolongación, luego están determinados por s, es decir, dos segmentos son iguales si sólo si tienen los mismos extremos.

Si a una recta le quitamos un punto, está queda dividida en dos partes. El teorema siguiente caracteriza a cada una de estas partes. Para enunciarlo conviene adoptar el convenio de que $\overline{AA} = \{A\}$, si bien no consideremos como segmentos a estos conjuntos de un solo punto.

Teorema 1.6 Sea r una recta y O un punto de r. Entonces la relación en $r - \{O\}$ dada por $P \backsim Q$ (P se relaciona con Q) si y sólo si $O \notin \overline{PQ}$ es una relación de equivalencia con exactamente dos clases de equivalencia.

DEFINICIÓN

Dado un punto O en una recta r llamaremos *semirrectas* en r con origen en O a cada una de las dos clases de equivalencia descritas en el teorema anterior junto con el punto O.

Claramente, dados dos puntos distintos O y A, existe una única semirrecta de origen O y que pasa por A. La representamos por $\overrightarrow{OA}$. Es fácil ver que $\overrightarrow{OA} = \{P \in \overleftrightarrow{OA} \mid O \leq_{OA} P\}$

Una semirrecta está contenida en una única recta, a la que llamaremos su *prolongación*. Notemos que si s es una semirrecta, entonces el origen de s es el máximo o el mínimo de s respecto a cada una de las dos ordenaciones de su prolongación. Si es el mínimo entonces s no tiene máximo y viceversa. Por consiguiente una semirrecta determina a su origen, de modo que dos semirrectas iguales tienen el mismo origen.

Sí s es una semirrecta, existe una única semirrecta distinta de s con la misma prolongación y el mismo origen. A ésta la llamaremos *semirrecta complementaria* de s. El único punto en común entre una semirrecta y su complementaria es el origen de ambas.

Del mismo modo que un punto divide a una recta en dos semirrectas, una recta divide a un plano en dos semiplanos.

Teorema 1.7 Sea π un plano y r una recta contenida en π. Entonces la relación en $\pi - r$ dada por $P \backsim Q$ si y sólo si r no corta a $\overline{PQ}$ es una relación de equivalencia con exactamente dos clases de equivalencia.

DEFINICIÓN

Sea π un plano y r una recta contenida en π. Llamaremos *semiplanos* en π de frontera r a cada una de las dos clases de equivalencia descritas en el teorema anterior junto con la recta r.

Dada una recta r y un punto exterior a A, existe un único semiplano de frontera r y que contiene a A. Lo representaremos por $\overrightarrow{rA}$, y es el conjunto de todos los puntos X del plano que contienen a r y a A tales que r no corta al segmento AX.

Un semiplano s está contenido en un único plano, al que llamaremos su *prolongación*. La frontera de s está formada por los puntos X con la propiedad de que existe una semirrecta de origen X contenida en s cuya semirrecta complementaria no tiene más punto en s que el propio X. Por lo tanto s determina su frontera, es decir, si dos semiplanos son iguales, sus fronteras son iguales.

Dado un semiplano s, existe un único semiplano distinto de s con la misma prolongación y con la misma frontera, al que llamaremos *semiplano complementario* de s. Los únicos puntos en común entre un semiplano y su complementario son los de la frontera.

DEFINICIÓN

Un conjunto de puntos F es *convexo* si cuando A, B son puntos de F entonces el segmento $\overline{AB}$ está contenido en F.

Es fácil ver que las rectas, los planos, los segmentos, las semirrectas, los semiplanos son conjuntos convexos. Así mismo es claro que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

1.3. Ángulos y triángulos

DEFINICIÓN

Sean l_1 y l_2 dos semirrectas con origen común O y no contenidas en la misma recta. Sean r_1 y r_2 sus respectivas prolongaciones. Sea π el plano que las contiene. Es claro que l_1 está contenido en uno de los semiplanos en que r_2 divide a π y l_2 está contenido en uno de los semiplanos en que r_1 divide a π. Llamaremos *ángulo* de *vértice* O y lados l_1 y l_2 a la intersección del semiplano de π respecto a r_2 que contiene a l_1 con el semiplano π respecto a r_1 que contiene a l_2. Lo representaremos $\angle l_1 l_2$. Los puntos de l_1 y l_2 constituyen la *frontera* del ángulo.

Observése que $\angle l_1 l_2$ contiene más puntos, aparte de los de sus lados. De hecho es un conjunto convexo, pues es la intersección de dos conjuntos convexos. Por lo tanto, si A y B son putos en l_1 y l_2 respectivamente, entonces todos los puntos entre ellos están en el ángulo.

Sí tres puntos A, O y B no son colineales, llamaremos $\angle AOB$ al ángulo de vértice O y lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Un ángulo está contenido en un único plano, llamado su *soporte*. Es fácil ver que un ángulo determina sus vértice y sus lados.

Dos rectas secantes dividen el plano que las contiene en cuatro ángulos con vértice común. Dos ángulos con el mismo vértice, un lado en común y los otros lados formados por semirrectas complementarias se llaman ángulos *adyacentes*. Dos ángulos con el mismo vértice y cuyos lados son semirrectas complementarios se llaman ángulos *opuestos por el vértice*. Cada ángulo tiene exactamentes dos ángulos adyacente s y un ángulo opuesto por el vértice.

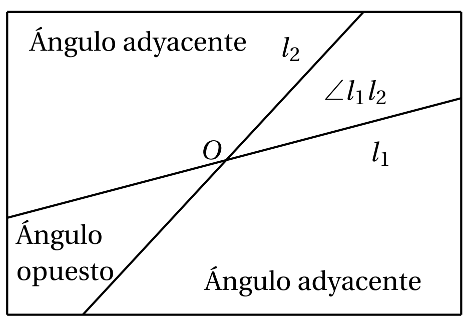


FIGURA 1.6.1

Teorema 1.8 Sean A, O, B puntos no colineales en un plano π. Entonces una semirrecta de origen O y contenida en π está contenida en el ángulo $\angle AOB$ si y sólo si corta al segmento $\overline{AB}$.

Observése que si un punto P está en un ángulo $\angle AOB$ entonces la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ está contenida en $\angle AOB$.

Torema 1.9 Dos ángulos con un lado en común y contenidos en el mismo semiplano respecto a él están contenidos el uno en el otro.

DEFINICIÓN

Sean A, B y C tres puntos no colineales. Llamaremos *triángulo de vértices* A, B y C a la intersección de los ángulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Lo representaremos por $\triangle\ ABC$.

Los ángulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$ se llaman *ángulos del triángulo* $\triangle\ ABC$. Cuando no haya ambigüedad, nos referiremos a ellos como $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, respectivamente (es decir, los nombraremos por sus vértices). Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llaman *lados* del $\triangle\ ABC$. Los tres lados de un triángulo forman su *frontera.*

Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se llaman lados *contiguos* al ángulo $\angle A$, mientras que el lado $\overline{BC}$ es el lado opuesto al ángulo $\angle A$ (Similarmente con los otros dos ángulos)

Normalmente llamaremos a, b y c a los lados de un triángulo $\triangle\ ABC$, de modo que a será el lado opuesto al ángulo $\angle A$, b será el lado opuesto a $\angle B$ y c será el lado opuesto a $\angle C$.

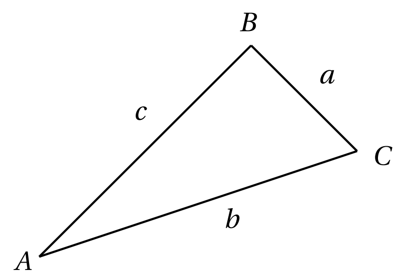


FIGURA 1.6.2

1.4. Axiomas de congruencia

Continuamos introduciendo conceptos geométricos básicos ocupándonos de la congruencia de figuras. La idea subyacente es que dos figuras son congruentes si se diferencian a lo sumo en su posición en el espacio, es decir, si una puede convertirse en la otra mediante un movimiento. Aunque en principio el concepto de congruencia es aplicable a cualquier figura, de momento sólo necesitamos considerar congruencias de segmentos, ángulos y triángulos. Además la congruencia de triángulos puede definirse en términos de las otras dos.

DEFINICIÓN

Una *geometría métrica* es una geometría ordenada junto con dos relaciones, que llamaremos de *congruencia* y las representaremos por $\cong$, definida respectivamente sobre los conjuntos de los segmentos y ángulos que cumplen los axiomas siguientes:

Axioma C1 Las dos congruencias son relaciones de equivalencia, es decir, son reflexivas, simétricas y transitivas.

Axioma C2 Dados tres puntos A, B y A' y una semirrecta s de origen A', existe un único punto B' en s tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

Axioma C3 Sean A, B, C puntos colineales de modo que B esté entre A y C, sean A', B' y C' otros tres puntos en las mismas condiciones. Entonces, si $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$, también $AC \cong A'C'$.

Axioma C4 Sea L un ángulo, s una semirrecta y π un semiplano cuya frontera sea la prolongación de s. Entonces existe un unico ángulo L' contenido en π, con un lado igual a s y tal que $L \cong L'$.

Diremos que dos triángulos T y T' son *congruentes* si existe una correspondencia entre sus vértices para la cual cada par de lados y ángulos correspondientes son congruentes. En lo sucesivo, cuando digamos que dos triángulos $\triangle\ ABC$ y $\triangle\ A'B'C'$ son congruentes, se sobreentenderá que cumple la definición para la correspondencia $A \longrightarrow A', B \longrightarrow B', C \longrightarrow C'$, es decir, que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, etc.

Axioma C5 Dado un triángulo $\triangle\ ABC$, un segmento $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$ y un semiplano π de frontera la prolongación de $\overline{A'B'}$, existe un (único) triángulo $\triangle\ A'B'C'$ contenido en π y congruente con $\triangle\ ABC$.

Observemos que la unicidad del triángulo se sigue del axioma C4, pues las rectas $\overleftrightarrow{A'C'}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$ son únicas, y C' ha de ser su intersección. En el lenguaje tradicional de la geometría es costumbre hablar de ángulos, segmentos y triángulos "iguales" en el sentido de que aquí hemos dado a la palabra "congruentes", mientras que para indicar que dos segmentos, ángulos, o triángulos son iguales en el sentido conjuntista, es decir que contienen los mismos puntos, se suele decir, que son "coincidentes".

Teorema 1.10 Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ existe un segmento $\overline{PQ}$ con la propiedad de que existe un punto R entre P Y Q de modo que $\overline{PR} \cong \overline{AB}$ y $\overline{RQ} \cong \overline{CD}$. La clase de equivalencia de $\overline{PQ}$ sólo depende de las clases de congruencia de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

<u>Definición</u>

En las condiciones del teorema anterior, escribiremos

$$\overline{PQ} \cong \overline{AB} + \overline{CD},$$

entendiendo la expresión como una igualdad entre clases de equivalencia.

De este modo tenemos definida la suma de dos (clases de) segmentos cualesquiera. Esta suma es asociativa y conmutativa. El hecho siguiente no es exactamente una consecuencia inmediata de la definición de suma:

Teorema 1.11 Si $\overline{PQ} \cong u + v$ entonces existe un punto R entre P y Q tal que $\overline{PR} \cong u$ y $\overline{RQ} \cong v$.

Teorema 1.12 Dados tres segmentos u, v y w, si $u + v \cong u + w$ entonces $v \cong w$.

<u>Definición</u>

Diremos que un segmento u es menor que un segmento v (y lo representaremos por $u < v$) si existe un segmento w talque $v \cong u + w$. En tal caso el teorema anterior afirma que w es único (salvo congruencia) y lo llamaremos *resta* o *diferencia* de u y v, y lo representaremos $w \cong v - u$.

De las propiedades de la suma se sigue inmediatamente que la desigualdad de segmentos depende sólo de las clases de equivalencia y es una relación de orden estricto.

Teorema 1.13 Si $\overline{AB} < \overline{AC}$ y ambos segmentos están situados sobre una semirrecta de origen A, entonces B está entre A y C.

Nos ocuparemos ahora de la congruencia de ángulos y triángulos. Comenzaremos con dos criterios de igualdad de triángulos.

Teorema 1.14 (Criterio lado-ángulo-lado) Si dos triángulos $T = \triangle\ ABC$ y $T' = \triangle\ A'B'C'$ cumplen $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'}$ y $\angle A \cong \angle A'$ entonces $T \cong T'$

Teorema 1.15 (Criterio ángulo-lado- ángulo) Si dos triángulos $T \cong \triangle\ ABC$ y $T' \cong \triangle\ A'B'C'$cumplen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$ entonces $T \cong T'$.

Teorema 1.16 Sean l_1, l_2 y l_3 semirrectas de origen O tales que las dos últimas están contenidas en un mismo semiplano con frontera la prolongación de la primera. Sean l_1', l_2' y l_3' semirrectas de origen O' en las mismas condiciones. Supongamos que el ángulo $\angle l_1 l_2$ está contenido en $\angle l_1 l_3$. Si $\angle l_1 l_2 \cong \angle l_1' l_2'$ y $\angle l_2 l_3 \cong \angle l_2' l_3'$ entonces $\angle l_1' l_2'$ está contenido en $\angle l_1' l_3'$ y $\angle l_l l_3 \cong \angle l_1' l_3'$.

DEFINICIÓN

Un triángulo es *equilátero* si sus tres lados son iguales. Un triángulo es *isósceles* si tiene al menos dos lados iguales. Un triángulo es *escaleno* si sus lados son desiguales dos a dos.

Teorema 1.17 (Criterio del triángulo isósceles) Si en un triángulo $\triangle\ ABC$ se cumple $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ entonces $\angle A \cong \angle B$.

Este teorema implica que los triángulos equiláteros tienen también sus tres ángulos iguales.

Teorema 1.18 (Criterio lado-lado-lado) Si $T = \triangle\ ABC$ y $T' = \triangle\ A'B'C'$ cumplen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ entonces $T \cong T'$

1.5. Suma de ángulos

El teorema 1.16 nos permite definir una suma de ángulos de forma similar a como hemos definido la suma de segmentos. Conviene primero definir la ordenación de los ángulos.

DEFINICIÓN

Diremos que un ángulo A es menor que un ángulo B (y lo representamos por $A < B$) si existen ángulos A' y B' congruentes con A y B respectivamente, con un lado en común, situados en un mismo semiplano respecto a dicho lado y de modo que A' está (estrictamente) contenido en B'.

Teorema 1.19 Si L y L' son ángulos iguales, S es un ángulo adyacente a L y S' es un ángulo adyacente a L', entonces S y S' también son iguales.

Teorema 1.20 Los dos ángulos adyacentes a un ángulo dado son iguales entre si. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales entre si.

Dos ángulos opuestos por el vértice son adyacentes a un mismo ángulo.

DEFINICIÓN

Dos ángulos son *suplementarios* si uno es congruente con un ángulo adyacente del otro.

La relación de ser suplementarios depende sólo de las clases de equivalencia de los ángulos. Además: Si dos ángulos suplementarios tienen un lado en común y están en semiplanos opuestos respecto a este, entonces son adyacentes. (Simetria de la relación)

Teorema 1.21 Si un ángulo A es menor a un ángulo B entonces el suplementario de B es menor que el suplementario de A.

DEFINICIÓN

Llamaremos ángulos *llanos* a los semiplanos. Extendemos la congruencia de ángulos a los ángulos *llanos* estipulando que todos ellos son congruentes entre si y no son congruentes con ningún ángulo en sentido estricto. Entendemos la relación de orden estableciendo que un ángulo llano es mayor que cualquier ángulo en sentido estricto.

Notemos que un ángulo llano no tiene definidos un vértice y unos lados. Podemos considerar como tales un punto cualquiera de su frontera y las semirrectas que esté determina, pero hay infinitos ángulos llanos con el mismo vértice y los mismos lados. Los ángulos llanos no tienen suplementarios.

DEFINICIÓN

Diremos que un ángulo $A = \angle l_1 l_2$ es la suma de dos ángulos B y C si existe una semirrecta l_3 de origen el vértice de A y contenida en A tal que $B \cong \angle l_1 l_3$ y $C \cong l_3 l_2$. En tal caso escribimos: $A \cong B + C$

Como en el caso de los segmentos, la relación $A \cong B + C$ puede verse como una igualdad entre clases de equivalencia de los ángulos. Por ejemplo, notemos que si A, B y C cumplen la definición anterior y $A' \cong A$, entonces $B < A$, luego existe un ángulo B' con un lado en común con A y contenido en A. Por el teorema 1.16 los otros lados de B' y A' forman un ángulo C' congruente con C, luego A' también es la suma de B y C. Igualmente se prueba que todas las sumas de B y C son congruentes.

Convenimos en que un ángulo llano A es la suma de dos ángulo B y C si y sólo si estos son suplementarios. Observemos que la definición general de suma es aplicable a este caso tomando como vértices de A cualquier punto de su frontera.

La suma de ángulos presenta una diferencia importante con la de segmentos, y es que no todo par de ángulos tiene una suma. Concretamente:

Teorema 1.22 Dos ángulos B y C admiten una suma si y solo si C es menor o igual que el suplementario de B.

La suma de ángulos es asociativa, es decir, si $A+B$ es sumable con C, entonces A también es sumable con $B+C$ y $(A+B)+C = A+(B+C)$. También es conmutativa y simplificable. Si $B < C$ entonces existe un único ángulo D (salvo congruencia) tal que $C \cong B+D$. Lo representaremos por $D \cong C-B$

1.6. Más propiedadades de segmentos, ángulos y triángulos

Teorema 1.23 Todo segmento $\overline{AB}$ contiene un único punto M que cumple $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Se le llama *punto medio* del segmento.

Teorema 1.24 Dado un ángulo $\angle l_1 l_2$ existe una única semirrecta l contenida en él, tal que $\angle l_1 l \cong \angle l l_2$. se le llama *bisectriz* del ángulo.

Teorema 1.25 Todo ángulo de un triángulo es menor que el suplementario de cualquier otro de sus ángulos.

El teorema siguiente generaliza el criterio del triángulo isósceles

Teorema 1.26 Los ángulos de un triángulo satisfacen las mismas desigualdades que sus respectivos lados opuestos.

En particular tenemos que un triángulo es equilátero si y sólo si tiene sus tres ángulos iguales, es isósceles sí y solo sí tiene dos ángulos iguales y es escaleno si y sólo si tiene sus tres ángulos desiguales.

1.7. Perpendiculares

DEFINICIÓN

Un ángulo es recto si es su propio suplementario

Teorema 1.27 Existen ángulos rectos.

Todos los ángulos rectos son congruentes entre si y todo ángulo congruente con un ángulo recto es recto. La existencia de ángulos rectos generaliza el teorema 1.24 al caso de ángulos llanos.

DEFINICIÓN

Dos rectas son *perpendiculares* si son secantes y uno de los ángulos que forman (por consiguiente los cuatro) es recto. Dos semirrectas o segmentos son perpendiculares si lo son sus prolongaciones.

Un ángulo es *agudo* si es menor que un ángulo recto. Un ángulo es *obtuso* si es mayor que un ángulo recto.

El suplementario de un ángulo agudo es un ángulo obtuso y viceversa. El teorema 1.25 implica que todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos, pues si tiene uno obtuso su suplementario es agudo, y los otros dos son menores que éste. Esto nos permite clasificar los triángulos en *obtusángulos, rectángulos* y *acutángulos* según si tienen, respectivamente, un ángulo obtuso, un ángulo recto o sí todos sus ángulos son agudos. En un triángulo rectángulo los lados perpendiculares se llaman *catetos* y el lado situado bajo el ángulo recto se llama *hipotenusa.*

Teorema 1. 28 Dada una recta r y un punto P contenidos en un plano π, existe una única recta perpendicular a r que pasa por P y está contenida en π.

Teorema 1. 29 Todo lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Ahora pasamos a ocuparnos de la perpendicularidad entre rectas y planos. El resultado básico es el siguiente:

Teorema 1. 30 Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano entonces es perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano y que pasan por el punto de corte.

Teorema 1. 31 La unión de todas las rectas perpendiculares a una recta r que pasa por uno de sus puntos es un plano.

DEFINICIÓN

Diremos que una recta es perpendicular a un plano π si lo corta en un punto P y es perpendicular a todas las rectas contenidas en π que pasan por P.

El teorema anterior prueba que por cada punto de una recta pasa un único plano perpendicular a ella.

Teorema 1.32 Dado un plano π y un punto A, existe una única recta perpendicular a π que pasa por A.

1.8. Elementos notables de un triángulo

Teorema 1.33

1. La suma de lo ángulos interiores de un triángulo es 180^0
2. (Desigualdad del Triángulo) En un triángulo de lados a, b y c las siguientes desigualdades se cumplen: $a+b \geq c$; $a+c \geq b$; $b+c \geq a$. Las igualdades se cumplen si y sólo si los vértices del triángulo son colineales.

DEFINICIÓNES

1. *Mediana.* Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.
2. *Centroide.* Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.
3. *Mediatriz.* Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

4. *Circuncentro.* Punto donde concurren las mediatrices.
5. *Bisectriz interna.* Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.
6. *Incentro.* Punto donde concurren las bisectrices internas.
7. *Altura.* Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.
8. *Ortocentro.* Punto donde concurren las alturas.
9. *Triángulos semejantes.* Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

a. $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

b. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'}$

Teorema 1.34 Criterio de semejanza. Dos triángulos son semejantes si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

1. Tienen sus lados correspondientes proporcionales.
2. Tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.
3. Tienen dos ángulos correspondientes iguales.

DEFINICIÓN

El Triángulo de Reuleaux. es una curva en la cual todos los diámetros tienen la misma longitud. La construcción de este triángulo se hace a partir de un triángulo equilátero ABC, dibujando los arcos BC usando como centro el vértice A, CA con centro en B, y AB con centro en C.

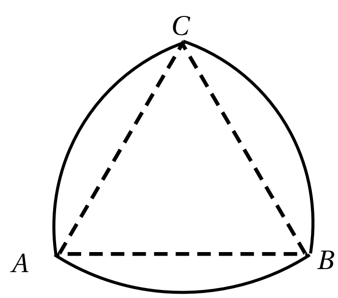


FIGURA 1.6.3

Teorema 1.35 Teorema de Thales. Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre AB y CA respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si sólo si $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$

Teorema 1.36 Teorema de Ceva. Tres rectas que pasan por los vértices de un triángulo son concurrentes si y solo si el producto de las razones en que divide los lados opuestos es igual a 1. Es decir, $\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = \dfrac{(COA)}{(COB)} \cdot \dfrac{(AOB)}{(AOC)} \cdot \dfrac{(BOC)}{(BOA)} = 1$

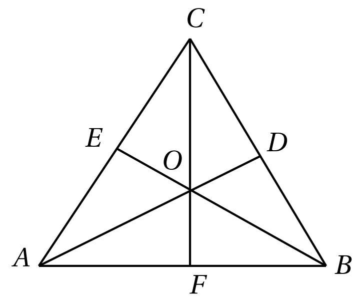


FIGURA 1.6.4

Teorema 1.37 Teorema de Ptolomeo. En todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia (cíclico), la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

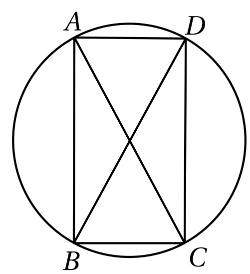


FIGURA 1.6.5

Teorema 1.38 Teorema de Menelao. Tres puntos sobre las rectas BC, AC y AB son colineales si y solo si el producto de las razones en que divide a los lados del triángulo ABC es 1, es dcir,
$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$

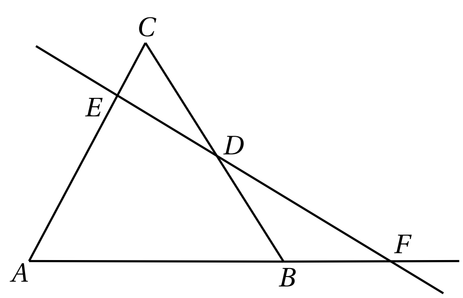


FIGURA 1.6.6

Teorema 1.39 Teorema de Pitágoras. Si ABC es un triángulo con ángulo recto en C, entonces $AB^2 = BC^2 + CA^2$. El reciproco del teorema de Pitágoras también es cierto, es decir, si en un triángulo ABC se cumple que $AB^2 = BC^2 + CA^2$, entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto en C

1.9. El Axioma de Continuidad, círculos y circunferencias

Axioma C Supongamos que una recta r está dividida en dos partes disjuntas no vacías s_1 y s_2 con la propiedad de que si P y Q son puntos en s_i, entonces $\overline{PQ} \subset s_i$. Entonces s_1 y s_2 son semirrectas complementarias (salvo que a una de ellas le falta el origen, que solo pertenece a la otra).

DEFINICIÓN

Dado un plano π, un punto O en π y un segmento r, llamaremos círculo de centro O y radio r al conjunto de todos los puntos P de π tales que $\overline{OP} \leq r$. Llamaremos circunferencia de centro O y radio r en π al conjunto de todos los puntos P de π tales que $\overline{OP} \cong r$.

Cada círculo tiene asociada una circunferencia (del mismo centro y radio), a la que llamamos también su *frontera*. Los puntos del círculo que no pertenecen a la circunferencia se llaman *interiores*, mientras que los puntos que no pertenecen al círculo se llaman puntos *exteriores* a él.

También se llama *radio* de un círculo o circunferencia a cualquier segmento que una su centro con uno de los puntos de la circunferencia. Es claro que todos los radios son congruentes entre sí. Un segmento que une dos puntos de una circunferencia se llama *cuerda* de la misma. Una cuerda que pase por el centro se llama *diámetro*. Un diámetro es igual a dos veces el radio.

Cada círculo o circunferencia contiene al menos tres puntos no colineales, con lo que determina el plano que lo contiene, al que llamaremos su *soporte*. Veamos que también determinan su centro y su radio (éste último salvo congruencia):

Dados dos puntos A y B en un plano π, la perpendicular (en π) al segmento $\overline{AB}$ por su punto medio se llama *mediatriz* de $\overline{AB}$. Es inmediato comprobar que la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ contiene exactamente a los puntos que equidistan de sus extremos, es decir, que cumplen $\overline{AX} \cong \overline{BX}$. Por lo tanto, si unimos dos puntos de una circunferencia y trazamos la mediatriz del segmento obtenido, ésta pasa por su centro. Si tomamos tres puntos (no colineales) en la circunferencia y hacemos lo mismo con dos pares de ellos, las rectas que se obtienen se cortaran precisamente en el centro, luego éste está unívocamente determinado por la circunferencia. Así mismo, el radio es congruente con cualquier segmento que una el centro con un punto de la circunferencia, luego también está determinado.

Por otra parte, un círculo determina su circunferencia (un punto P de un círculo está en su circunferencia si y sólo si hay un segmento $\overline{AB}$ que lo contiene de modo que los puntos de $\overline{AP}$ son interiores al círculo y los restantes son exteriores). Concluimos que dos círculos o circunferencias (en un mismo plano) son iguales si y sólo si tienen el mismo centro y sus radios son congruentes. Estudiamos ahora las intersecciones entre rectas y circunferencias.

Teorema 1.40 Sea w un círculo y una recta contenida en el plano soporte de w y que pase por un punto interior de w. Entonces s corta a w en un segmento $\overline{PQ}$, y la circunferencia de w sólo en los puntos P y Q.

Dada una recta s y un círculo w de centro O y radio r (ambos en el mismo plano), consideremos el punto A donde la perpendicular a s por O corta a s. Como ya hemos notado antes, $\overline{OA} < \overline{OP}$ para todo punto P de s distinto de A. Por lo tanto, si $\overline{OA} < r$ tenemos que la intersección de s con w es un segmento $\overline{PQ}$, de modo que P y Q son los únicos puntos en común entre s y la circunferencia de w;

si $\overline{OA} = r$ entonces A está en la circunferencia de w y todos los demás puntos de s son exteriores; y si $\overline{OA} > r$, todos los puntos de s son exteriores.

DEFINICIÓN

Diremos que una recta r es *secante* a una circunferencia w si tienen dos puntos en común. Diremos que r es *tangente* si tiene un punto en común y diremos que r es *exterior* a w si no tienen puntos en común.

Teorema 1.41 Por un punto de una circunferencia pasa una única recta tangente. Ésta es concretamente la perpendicular al radio con extremo dicho punto.

Veamos ahora la intersección entre dos circunferencias:

Teorema 1.42 Sean w_1 y w_2 circunferencias contenidas en un mismo plano, de centros respectivos O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2 (con $r_1 \leq r_2$). Entonces:

1. Si $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ entonces w_1 y w_2 no tienen puntos en común ni sus círculos tampoco.
2. Si $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ entonces w_1 y w_2 tienen un único punto en común, al igual que sus círculos.
3. Si $r_2 - r_1 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ entonces w_1 y w_2 tienen dos puntos en común.
4. Si $\overline{O_1O_2} = r_2 - r_1$ entonces w_1 y w_2 tienen un único punto en común, y el circulo de w_1 está contenido en el de w_2.
5. Si $\overline{O_1O_2} < r_2 - r_1$ entonces w_1 y w_2 no tienen puntos en común y el círculo de w_1 está contenido es el de w_2.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el resultado siguiente sobre la existencia de triángulos.

Teorema 1.43 Sean r_1, r_2 y r_3 tres segmentos que cumplan las desigualdades $r_2 \leq r_3$ y $r_3 - r_2 < r_1 < r_2 + r_3$ (o simplemente $r_1 < r_2 + r_3$ si $r_2 = r_3$). Entonces existe un triángulo de lados r_1, r_2 y r_3.

1.10. Más sobre círculos, secantes y tangentes

Teorema 1.44 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.

Teorema 1.45 En un círculo, o en círculos congruentes, los arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes.

Teorema 1.46 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas congruentes equidistan del centro.

Teorema 1.47 En un círculo, o en círculos congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

Teorema 1.48 La mediatriz a una cuerda contiene al centro del círculo.

Teorema 1.49 Si una recta que pasa por el centro de un círculo es perpendicular a una cuerda que no es un diámetro, entonces biseca a la cuerda y a su arco menor.

Teorema 1.50 Si una recta que pasa por el centro de un círculo biseca a una cuerda que no es un diámetro, entonces es perpendicular a la cuerda.

Teorema 1.51 Si una recta es perpendicular a un radio en un punto del círculo, entonces la recta es tangente al círculo.

Teorema 1.52 Si una recta es tangente a un círculo, entonces el radio trazado hasta el punto de contacto es perpendicular a la tangente.

Teorema 1.53 Si una recta es perpendicular a una tangente en un punto del círculo, entonces la recta contiene al centro del círculo.

Teorema 1.54 Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une al centro con el punto.

Teorema 1.55 La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

Teorema 1.56 Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.

Teorema 1.57 Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados.

Teorema 1.58 La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda trazada al punto de contacto es igual a la mitad del arco interceptado.

Teorema 1.59 La medida de un ángulo formado por dos tangentes a un círculo que se intersecan, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

Teorema 1.60 La medida de un ángulo formado por una tangente y una secante, o por dos secantes desde un punto exterior a un círculo, es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.

Teorema 1.61 Si se traza un segmento tangente y un segmento secante desde un punto exterior a un círculo, entonces el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante por su segmento secante externo.

Teorema 1.62 Si dos cuerdas se intersecan en un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de la segunda cuerda.

Teorema 1.63 Si se trazan dos segmentos secantes a un círculo desde un punto exterior, entonces el producto de las longitudes de un segmento secante y un segmento secante externo es igual al producto de las longitudes del otro segmento secante y su segmento secante externo.

CAPÍTULO 2

ÁREAS

2.1. Área de una superficie

Igual que para medir la longitud de un segmento se elegía un segmento como unidad, por ejemplo en cm., y para medir la amplitud de un ángulo se toma un ángulo como unidad, por ejemplo el grado sexagesimal, para medir la extensión de una superficie se elige otra superficie como unidad, que suele ser la superficie de un cuadrado.

Por razones de universalidad y sencillez en la mayoría de los casos, se ha optado, como unidad de superficie, la extensión superficial de un cuadrado de lado la unidad de longitud.

Una vez elegida la unidad, por ejemplo el metro cuadrado, el número de unidades de superficie contenidas en una superficie dada (número que puede ser entero, fraccionario o irracional) se llama el área de dicha superficie.

El área de una superficie es la medida de su extensión superficial con una unidad prefijada.

El área (número de veces que la unidad está contenida en la extensión superficial) depende de la unidad elegida, mientras que la extensión superficial es una propiedad fija de la superficie. Admitimos que una vez fijada la unidad, todas las superficies equivalentes tienen la misma área.

Área de los polígonos

La operación de llevar el cuadrado unidad directamente sobre una superficie para medir su extensión, o sea, para obtener su área, es muy complicada y, en la mayoría de los casos, irrealizable; por esta razón, desde la época de los griegos se descubrieron métodos indirectos para calcular las áreas de las superficies más notables (polígonos, círculos, cilindros, conos, esferas, etc). Con estos métodos indirectos lo único que hay que medir directamente son longitudes, y efectuando ciertos cálculos, con estas medidas, indicados por una fórmula, se obtiene el área de la superficie en cuestión.

A continuación presentaremos algunos teoremas definiciones y fórmulas para el cálculo de áreas.

2.2. Teoremas de área para triángulos

Teorema 2.1 El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de las longitudes de sus catetos.

Teorema 2.2 El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquier base y su correspondiente altura.

Teorema 2.3 Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la relación de sus áreas es igual a la relación de sus bases.

Teorema 2.4 Si dos triángulos tienen la misma base, entonces la razón de sus áreas es la razón de sus alturas correspondientes.

Teorema 2.5 Si dos triángulos tienen la misma base b y la misma altura h, entonces tienen áreas iguales.

Teorema 2.6 El área de un triángulo en terminos de sus lados a, b y c, está dada por la fórmula: $A = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$, donde p es el semiperimetro del triángulo (Fórmula de HERÓN).

Teorema 2.7 El área A, de un triángulo equilátero de lado l está dada por la fórmula: $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

2.3. Teoremas de área para cuadrilateros

Teorema 2.8 El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura.

Teorema 2.9 El área de un paralelogramo es el producto de cualquier base por su altura correspondiente.

Teorema 2.10 El área de un trapezoide es la mitad del producto de la altura y la suma de sus bases.

Teorema 2.11 El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales

Teorema 2.12 Teorema de Piene Varigum. La figura formada cuando se unen en el orden dado los puntos medios de un cuadrilátero convexo es un paralelogramo, y el área es la mitad de la del cuadrilátero original.

2.4. Áreas de regiones circulares

Área de un círculo

El área de una región circular determinada por una circunferencia de radio r, es πr^2

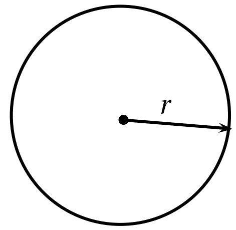


FIGURA 2.5.1

Área de un sector circular

El área A de un sector circular que es la región limitada por un arco de circunferencia y dos radios, es:

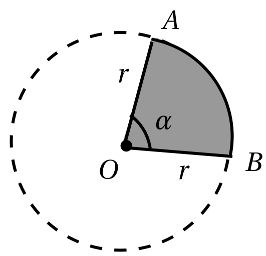


FIGURA 2.5.2

$A = \frac{\pi r^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{\alpha r^2}{2}$, donde el ángulo es la abertura entre sus dos radios.

Área del segmento circular

El área A del segmento circular que es la región limitada por un arco de circunferencia y la cuerda correspondiente esta dada por $A =$ área (sectorAOB) $-$ área ($\triangle\ AOB$)

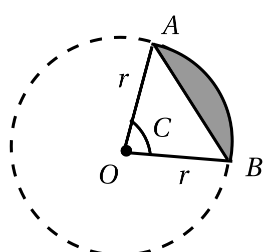


FIGURA 2.5.3

Área de la corona circular

El área A de la corona circular que es la región comprendida entre dos circunferencias concéntricas, esta dada por $A = \pi\left(R^2 - r^2\right)$, donde R es el radio del circulo mayor y r es el radio del círculo menor.

Una fórmula equivalente puede calcularse de la siguiente manera:

Sea $\overline{AB}$ una cuerda, tangente en el punto M a la circunferencia menor. Entonces $MA = MB$, además $AM^2 + r^2 = R^2$, de donde $R^2 - r^2 = AM^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{4}$ por lo tanto

$A = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(\dfrac{AB^2}{4}\right) = \dfrac{\pi\,(AB)^2}{4}$

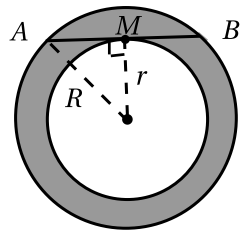


FIGURA 2.5.4

Área de un trapecio circular

El trapecio circular es la región de la corona circular comprendido entre radios. Su área A esta dada por $A = \dfrac{\pi\alpha}{2\pi}\left(R^2 - r^2\right) = \dfrac{\alpha}{2}\left(R^2 - r^2\right)$

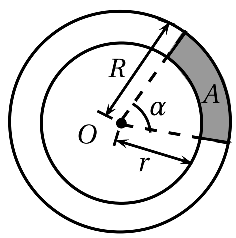


FIGURA 2.5.5

Área de una zona circular

Una zona circular es la región comprendida entre dos cuerdas paralelas de una circunferencia.
Sea A el área de la zona circular comprendida entre las cuerdas paralelas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. A estará dada por la diferencia de áreas entre los segmentos circulares AB y CD, es decir,
$A_{Zona} = A_{\text{Segmento}ACBD} - A_{\text{Segmento } CD}$.
$A_{\text{Segmento}ACDB} = A_{\text{Sector}OACDB} - A_{\triangle OAB}$.
$A_{\text{Segmento } CD} = A_{\text{Sector } OCDB} - A_{\triangle OCD}$.

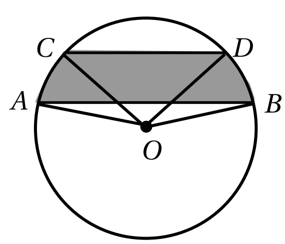


FIGURA 2.5.6

Área de un triángulo

El área de un triángulo ABC, denotada por $A_\triangle$, de lados a, b, c y alturas $h_a,\ h_b,\ h_c$ (donde h_i es la altura trazada sobre el lado i) es

$A_\triangle = \dfrac{ah_a}{2} = \dfrac{bh_b}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$. También $A_\triangle = Sr = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \dfrac{abc}{4R}$, donde, $S = \dfrac{a+b+c}{2}$, R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y r es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC. (la circunferencia inscrita es la que tiene como centro al punto de intersección de las bisectrices internas (incentro) y es tangente a los tres lados).

CAPÍTULO 3

PROBLEMAS PROPUESTOS

3.1. Problemas de aplicación de ángulos

Problema 3.1.1. *Si $\overline{LM} \parallel \overline{NO}$, ¿Qué valor tiene el ángulo x?*

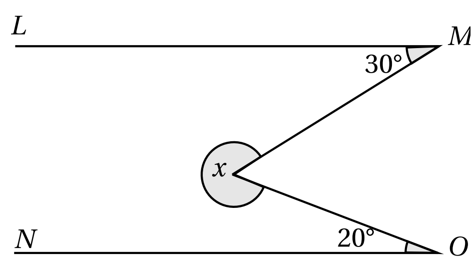


FIGURA 3.1.1

Problema 3.1.2. *En la figura 3.1.2 el triángulo ABC es isósceles y el triángulo DEF es equilátero y está inscrito en el triángulo ABC. ¿Qué relación se cumple entre los ángulos α, β y δ?*

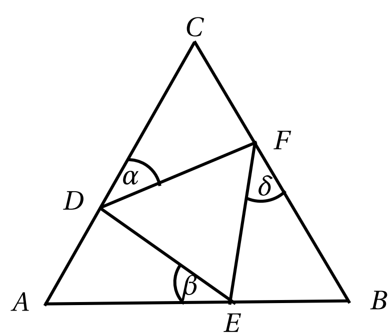


FIGURA 3.1.2

Problema 3.1.3. *Sea $ABCD$ un rectángulo con $BC = 2AB$ y sea BCE un triángulo equilátero. Si M es el punto medio de $\overline{CE}$ ¿Cuánto mide el ángulo CMD?*

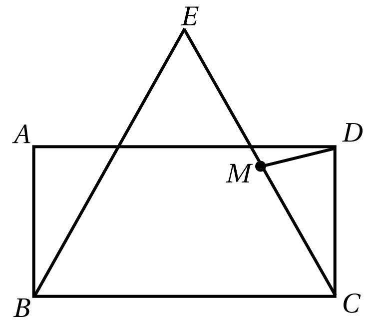


FIGURA 3.1.3

Problema 3.1.4. *Calcular el valor de x si $L_1 \| L_2$*

FIGURA 3.1.4

Problema 3.1.5. *Calcular el valor de x sabiendo que $AB = 3x, BD = 7x - 2; BE = x$ y $BC = 2x$.*

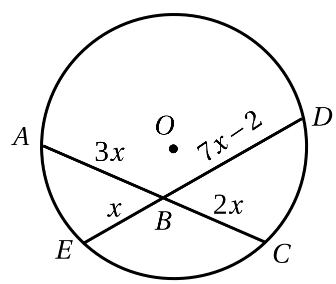


FIGURA 3.1.5

Problema 3.1.6. *En la figura 3.1.6, $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{PC}$ es igual al radio $\overline{OD}$. Calcular la razón de las medidas de los ángulos BPD y BOD.*

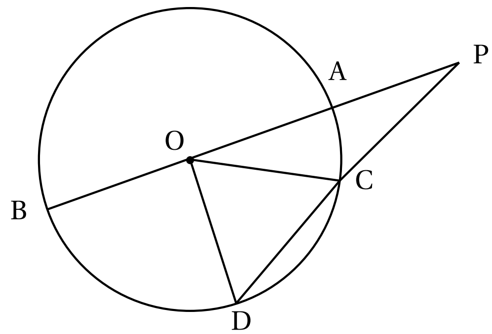


FIGURA 3.1.6

Problema 3.1.7. *¿Cuál es la medida del ángulo en H?*

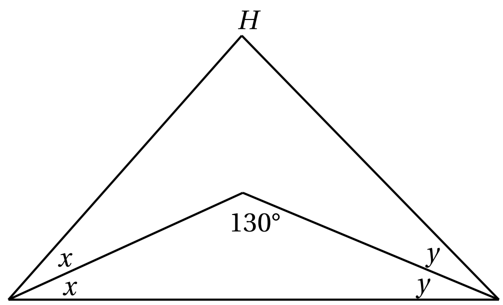


FIGURA 3.1.7

3.2. Problemas de aplicación de triángulos

Problema 3.2.1. *¿Cuál es en m^2, el área del triángulo ABC?*

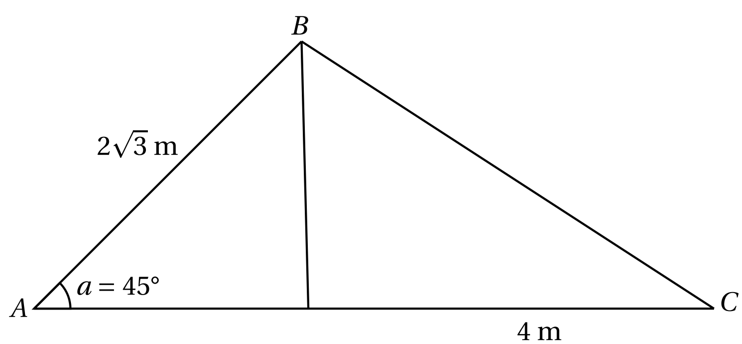


FIGURA 3.2.1

Problema 3.2.2. *En un triángulo rectángulo de hipotenusa 8 cm y área 9 cm^2 ¿cuál es su perímetro?*

Problema 3.2.3. *La longitud de la circunferencia es igual a 6π m. ¿Cuál es, en metros, el perímetro del triángulo equilátero inscrito a la circunferencia?*

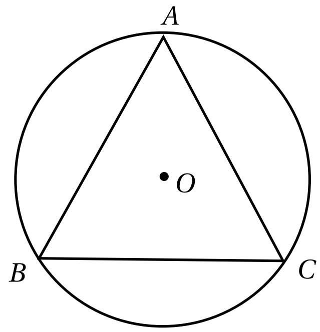


FIGURA 3.2.2

Problema 3.2.4. *$ABCD$ es un cuadrado de 8 metros de lado, sobre el lado $\overline{CB}$ se dibuja el triángulo equilátero CEB y luego se traza el segmento $\overline{AE}$ ¿Cuál es el área del triángulo ABE?*

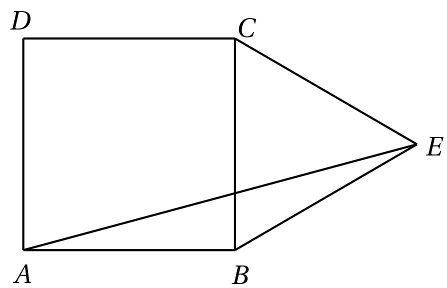


FIGURA 3.2.3

Problema 3.2.5. *En el triángulo ABC, AD es una altura, $EF = 4, DF = 6$ y sobre la mediana AF se encuentra el centroide o baricentro E. Qué valor tiene la altura AD?*

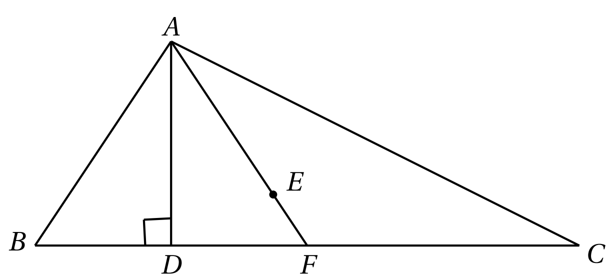


FIGURA 3.2.4

Problema 3.2.6. *Sea h la longitud de la altura de un triángulo equilátero $\triangle\ ABC$ y sea P cualquier punto en el interior del triángulo. Sean R, S, T los pies de las perpendiculares desde P hasta los lados AB, BC y CA, respectivamente.*

Demostrar que $PR + PS + PT = h$.

Problema 3.2.7. *El punto P está en el interior de un triángulo equilátero $\triangle\ ABC$ de lado 3. La distancia de P a AB es a, la distancia de P a AC es $2a$ y la distancia de P a CB es $3a$. Hallar a.*

Problema 3.2.8. *Se tiene un segmento $\overline{AB}$ de longitud 10 y un punto P en él tal que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{2}$ se construye sobre el mismo lado del segmento, un triángulo equilátero de lado $\overline{AP}$ y otro de lado $\overline{PB}$ ¿Cuál es la distancia entre los vértices, de los triángulos equiláteros que están fuera del segmento $\overline{AB}$?*

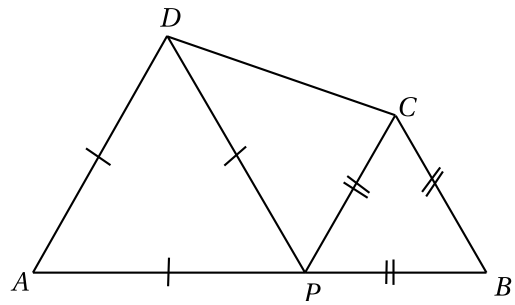


FIGURA 3.2.5

Problema 3.2.9. *Calcular en función del radio r del círculo, el área sombreada en la figura 3.2.6.*

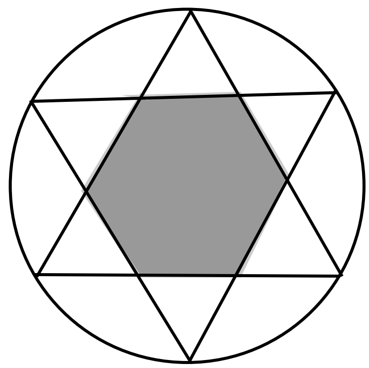


FIGURA 3.2.6

3.3. Problemas de aplicación de proporcionalidad y semejanza

Problema 3.3.1. *Usando el teorema de Thales en la figura 3.3.1, calcular el valor de x.*

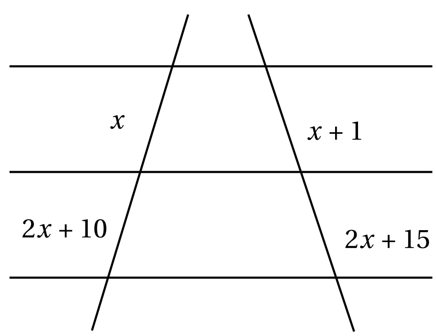


FIGURA 3.3.1

Problema 3.3.2. *Tres lotes se extienden desde la Calle Blas de Lezo hasta la Liborio Mejía, los linderos laterales son segmentos perpendiculares a la Calle Liborio Mejía. Si el frente total de los lotes en la Calle Blas de Lezo mide 22,5 metros.*

¿Cuál es la longitud del lote central sobre la calle Blas de Lezo?

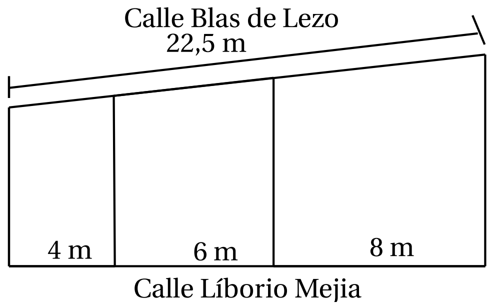


FIGURA 3.3.2

3.4. Problemas de aplicación de cuadrilateros

Problema 3.4.1. *Sí el perímetro de un rectángulo es p y su diagonal d. Calcular la diferencia entre el largo y el ancho del rectángulo.*

Problema 3.4.2. *La suma de las longitudes de dos segmentos es igual a 13 m y 41,44 m^2 es el área del rectángulo contenido en ellos como lados. ¿Cuál es la longitud del segmento menor?*

Problema 3.4.3. *Dos cuadrados congruentes se sitúan como indica la figura 3.4.1, de modo que el centro del uno es vértice del otro. Cada cuadrado tiene 6 metros de lado. ¿Cuántos metros cuadrados corresponden a la región común?*

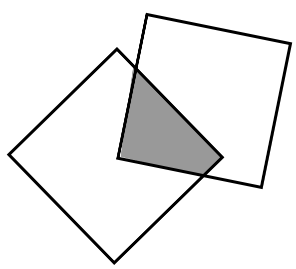


FIGURA 3.4.1

Problema 3.4.4. *El área de la región sombreada es 4 m^2 ¿cuántos metros mide el lado del cuadrado?*

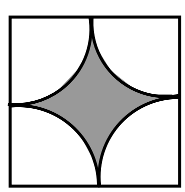


FIGURA 3.4.2

Problema 3.4.5. *Tres cuadrados con lados de longitudes: 10 cm, 8 cm, y 6 cm, respectivamente, se colocan uno al lado del otro como se muestra en la figura 3.4.3*

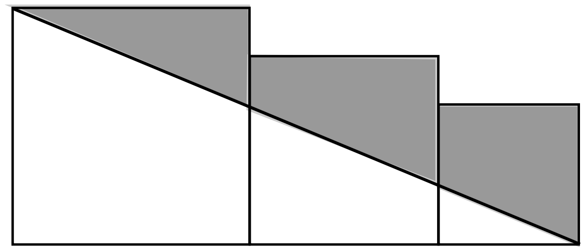


FIGURA 3.4.3

¿Cuál es el área de la parte sombreada?

Problema 3.4.6. *¿Cuánto mide el área de un cuadrado inscrito en una semicircunferencia de radio 1.?*

Problema 3.4.7. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, miden 3, 4, 12 y 13 respectivamente, además $\angle CBA$ es recto. Calcular el área del cuadrilátero $ABCD$.*

Problema 3.4.8. *Se construye un rectángulo a partir de uno dado, de tal forma que la base del nuevo rectángulo es igual a la suma de la diagonal y el lado mayor; la altura igual a la diferencia de la diagonal y el lado mayor. Calcular el área del nuevo rectángulo.*

Problema 3.4.9. *El área de un campo trapecial es de 1400 metros cuadrados. Si la altura es de 50 metros, hallar las dos bases sabiendo que el número de metros en cada base es un número entero divisible por 8.*

3.5. Problemas de aplicación de sectores círculares

Problema 3.5.1. *Los semicírculos de la figura 3.5.1 tienen sus diámetros perpendiculares y cada diámetro mide 2 metros. ¿Cuántos metros cuadrados (m^2) corresponde al área sombreada?*

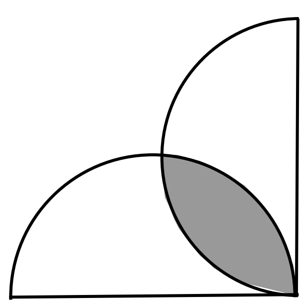


FIGURA 3.5.1

Problema 3.5.2. *Tres círculos de radio r son mutuamente tangentes, como se muestra en la figura 3.5.2*

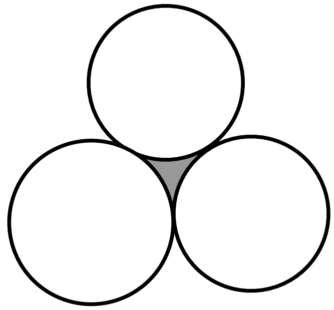


FIGURA 3.5.2

¿Cuál es el área de la región sombreada?

Problema 3.5.3. *Si el cuadrado tiene nueve metros de lado ¿Cuántos metros cuadrados tiene el área sombreada?*

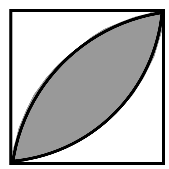


FIGURA 3.5.3

Problema 3.5.4. *Calcular el área sombreada en la figura 3.5.4.*

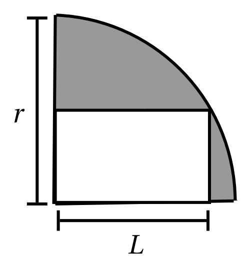


FIGURA 3.5.4

Problema 3.5.5. *Un cuadrado tiene 2 metros de lado; con centro en dos vértices opuestos y radio igual a la mitad de la diagonal, se describen los arcos $\widehat{AD}$ y $\widehat{BC}$, y enseguida, se trazan los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.*

¿Calcular, el valor del área sombreada.

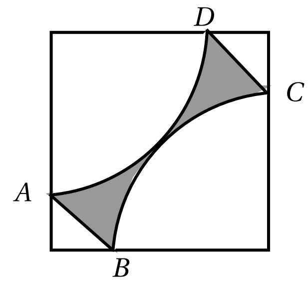


FIGURA 3.5.5

Problema 3.5.6. *Un triángulo rectángulo de catetos 12 y 16 está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es el radio de dicha circunferencia?*

Problema 3.5.7. *El arco AB es un cuarto de una circunferencia de centro O y de radio* 10 *cm.*

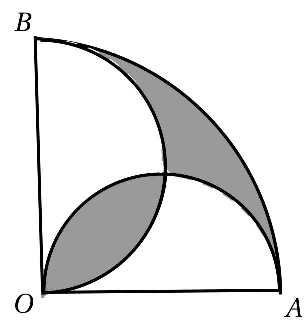


FIGURA 3.5.6

Los arcos OA y OB son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la región sombreada de la figura 3.5.6?

Problema 3.5.8. *Un triángulo de Reuleux es la figura obtenida al trazar arcos de radio r con centro en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de lado r, cada arco de 60°, como se muestra en la figura 3.5.7*

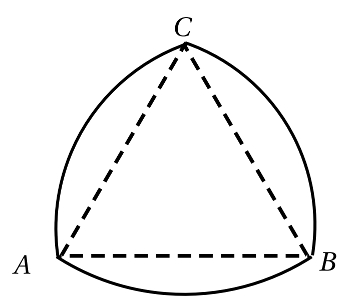


FIGURA 3.5.7

Hallar el perímetro y el área de un triángulo de Reuleux.

Problema 3.5.9. *El $\triangle\ ABC$ es equilátero, de lado a. Dos círculos tangentes con centro en A y B respectivamente se trazan como en la figura 3.5.8. Mostrar que el perímetro del área sombreada es*

$a + \frac{\pi a}{3}$ y por lo tanto independiente de los radios de los círculos. Demostrar además que el área de esta región es $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\left(R^2 + r^2\right)$, donde R y r son los radios de los círculos.

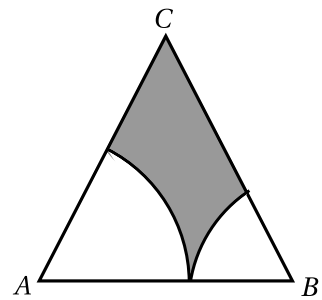


FIGURA 3.5.8

Problema 3.5.10. *Calcular el área sombreada de la figura 3.5.9.*

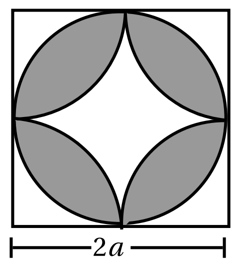


FIGURA 3.5.9

Problema 3.5.11. *En la figura 3.5.10, el rectángulo $ABCD$ está en el interior de la circunferencia de tal manera que el vértice B es el centro de la circunferencia. Si $AC = 6$ y $\angle ACB = 30°$. ¿Cuánto mide su diámetro?*

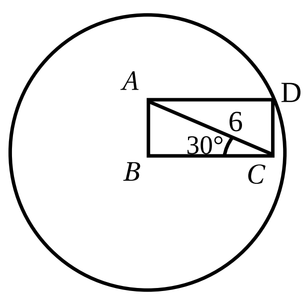


FIGURA 3.5.10

Problema 3.5.12. *En un círculo de 8 centímetros de radio, se dibujan dos cuerdas iguales y paralelas separadas entre si 8 centímetros. Calcular el área de la parte del círculo comprendida entre las dos cuerdas.*

Problema 3.5.13. *Calcular el área sombreada sabiendo que* $\overline{SR}$ *y* $\overline{PQ}$ *son diámetros.*

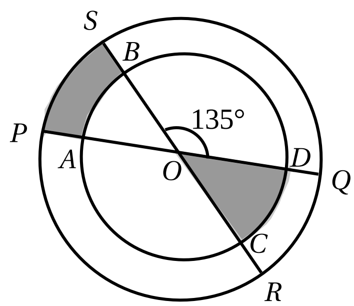


FIGURA 3.5.11

Problema 3.5.14. *El lado* $\overline{OA}$ *mide 5 cm, calcular el área y el perímetro de la parte circular sombreada.*

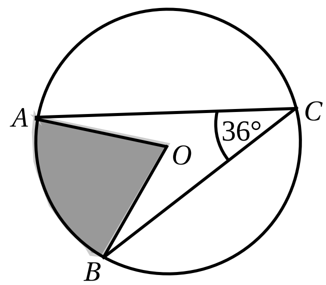


FIGURA 3.5.12

Problema 3.5.15. *Un aro está formado por dos circunferencias concéntricas que distan 10 centímetros. ¿En cuánto difieren las circunferencias de los dos círculos?*

Problema 3.5.16. *Los diámetros de dos círculos son 8 y 12 centímetros respectivamente. ¿Cuál es la razón entre el área del círculo menor y la del mayor?*

Problema 3.5.17. *Si el radio de círculo mayor mide 6 cm y el radio de los círculos pequeños mide 2cm. ¿Cuánto vale el área de la parte sombreada?*

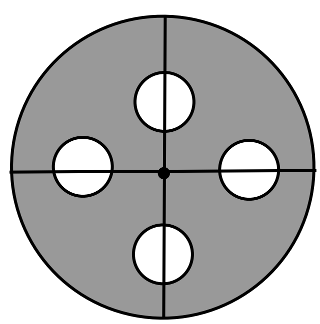


FIGURA 3.5.13

Problema 3.5.18. *En una circunferencia una cuerda de 48 cm dista 7 cm del centro. ¿Cuánto vale el área del círculo?*

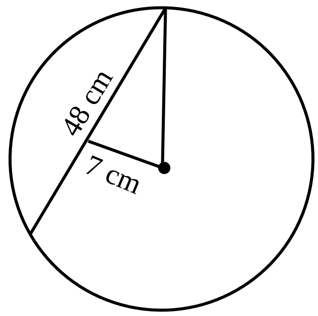


FIGURA 3.5.14

Problema 3.5.19. *Cada vértice de la figura es el centro del arco opuesto, si r es el radio de cada arco, ¿cuál es el área de la figura?.*

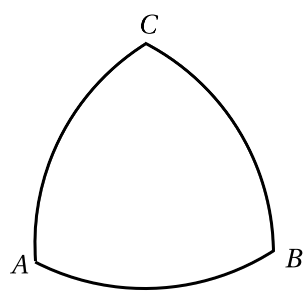


FIGURA 3.5.15

3.6. Problemas de aplicación variados

Problema 3.6.1. *¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular, si la suma de sus ángulos interiores es igual a 1620°?*

Problema 3.6.2. *En el siguiente hexágono regular, el punto O es el centro. ¿Cuál es la razón entre el área del hexágono y de la región sombreada?*

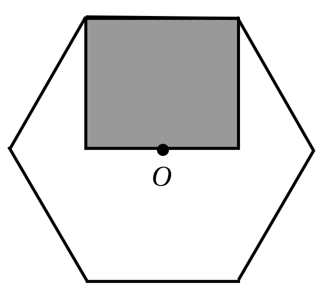


FIGURA 3.6.1

Problema 3.6.3. *Un círculo y un cuadrado tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es la relación entre sus áreas?*

Problema 3.6.4. *El lado del cuadrado mide 4 metros. ¿Cuántos* m^2 *tiene el área sombreada?*

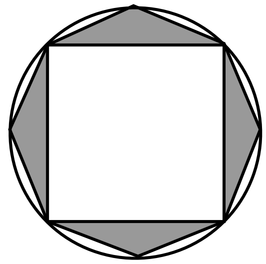


FIGURA 3.6.2

Problema 3.6.5. *¿Cuál es el área sombreada, siendo el cuadrado de lado 6?*

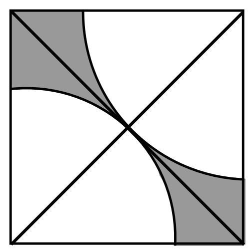


FIGURA 3.6.3

Problema 3.6.6. *El triángulo* ABC *es equilátero de lado 12. Siendo* P, M, *y* N *los puntos medios de sus lados. ¿Cuánto vale el área de la parte sombreada?*

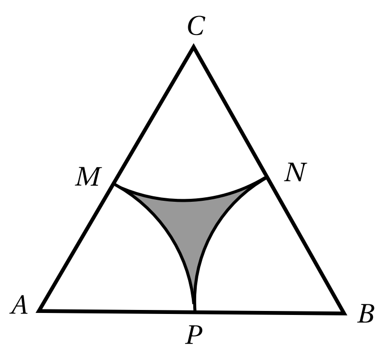


FIGURA 3.6.4

Problema 3.6.7. *En la figura 3.6.5,* a *y* a' *son rectas paralelas y* b *es una transversal a ellas. ¿Cuántos puntos hay que estén a la misma distancia de las tres rectas?*

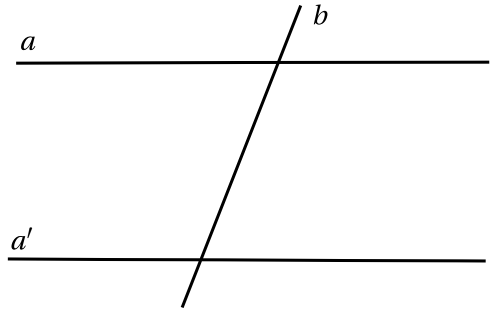


FIGURA 3.6.5

Problema 3.6.8. *¿Cuánto vale el área sombrada de la figura 3.6.6, siendo el cuadrado de lado 10?*

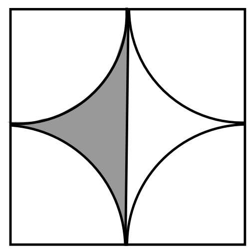


FIGURA 3.6.6

CAPÍTULO 4

AYUDA PARA PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas propuestos del capítulo anterior son de la forma 3.a.b, donde a nos indicaba el número de la sección y b es el número del problema. Aquí los indicaremos como 4.a.b, correspondientes a lo dicho anteriormente.

4.1. Problemas de aplicación de ángulos

Problema 4.1.1. *Prolongue los lados oblicuos hasta que corte a* $\overline{LM}$ *y a* $\overline{NO}$.

Problema 4.1.2. *Tenga en cuenta que el triángulo* $\triangle DEF$ *es equilátero y* $\triangle ABC$ *es isósceles.*

Problema 4.1.3. *Tenga en cuenta que* $CM = CD$.

Problema 4.1.4. *Lo mismo que para el problema 4.1.1.*

Problema 4.1.5. *Recuerde que si dos cuerdas se intersecan en un círculo, el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de la longitud de la segunda cuerda.*

Problema 4.1.6. *Nombre cada ángulo y determine el valor de ellos, sabiendo que los triángulos formados son isósceles.*

Problema 4.1.7. *Recuerde que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es* 180^0.

4.2. Problemas de aplicación de triángulos

Problema 4.2.1. *En un triángulo rectángulo, si un ángulo mide* 45^0*, el otro ángulo agudo también mide* 45^0.

Problema 4.2.2. *Aplique el teorema de Pitágoras.*

Problema 4.2.3. *Si la altura del triángulo es* h *y el radio del circulo es* r *entonces* $r = \dfrac{2h}{3}$.

Problema 4.2.4. *Observe la situación del punto* E.

Problema 4.2.5. *Recuerde que el punto donde concurren las medianas está dado a una razón de* $\dfrac{2}{3}$.

Problema 4.2.6. *Considere el área del triángulo de la forma tradicional y como descomposición del triángulo de otra forma.*

Problema 4.2.7. *Aplíquese el problema anterior.*

Problema 4.2.8. *Los dos triángulos son equivalentes.*

Problema 4.2.9. *Obsérvese que la estrella tiene 6 puntas.*

4.3. Problemas de aplicación de proporcionalidad y semejanza

Problema 4.3.1. *Aplique el teorema de Thales.*

Problema 4.3.2. *Establezca proporciones.*

4.4. Problemas de aplicación de cuadrilateros

Problema 4.4.1. *Establezca un par de ecuaciones y en una de ellas utilice el teorema de Pitágoras.*

Problema 4.4.2. *Igual que el anterior.*

Problema 4.4.3. *Haga un giro conveniente para que pueda deducir el resultado.*

Problema 4.4.4. *Haga una diferencia de áreas.*

Problema 4.4.5. *Igual que el problema anterior.*

Problema 4.4.6. *Ilustre con un dibujo.*

Problema 4.4.7. *Un buen dibujo le sugiere que hacer.*

Problema 4.4.8. *Utilice el teorema de Pitágoras.*

Problema 4.4.9. *Un número entero a es divisible entre un entero m si existe un entero n tal que $a = m \cdot n$.*

4.5. Problemas de aplicación de sectores círculares

Problema 4.5.1. *Mírelo como diferencia de áreas.*

Problema 4.5.2. *Igual que el problema anterior.*

Problema 4.5.3. *Igual que el problema anterior.*

Problema 4.5.4. *Diferencia de áreas.*

Problema 4.5.5. *Diferencia de áreas.*

Problema 4.5.6. *El centro de la circunferencia es el punto medio de la hipotenusa.*

Problema 4.5.7. *Descomponga y recomponga la figura para hacer una diferencia de áreas más sencilla.*

Problema 4.5.8. *Fíjese en la información que le están dando.*

Problema 4.5.9. *Diferencia de áreas.*

Problema 4.5.10. *Diferencia de áreas.*

Problema 4.5.11. *El segmento AC es un radio de la circunferencia.*

Problema 4.5.12. *Teorema de Pitágoras.*

Problema 4.5.13. *Halle el área equivalente al área del sector COD.*

Problema 4.5.14. *Utilice el teorema 1.52.*

Problema 4.5.15. *La longitud una circunferencia es $2\pi r$, donde r es el radio.*

Problema 4.5.16. *El área de un circulo es πr^2 donde r es el radio.*

Problema 4.5.17. *Diferencia de áreas.*

Problema 4.5.18. *Teorema de Pitágoras.*

Problema 4.5.19. *Construir el triángulo ABC.*

4.6. Problemas de aplicación variados

Problema 4.6.1. *Hacer conteo.*

Problema 4.6.2. *Triangular la figura.*

Problema 4.6.3. *Razón entre áreas.*

Problema 4.6.4. *Véase una de las partes sombreadas como un triángulo.*

Problema 4.6.5. *Área de figura sombreada.*

Problema 4.6.6. *Área de figura sombreada.*

Problema 4.6.7. *Un buen gráfico ayuda a entender el problema.*

Problema 4.6.8. *Área de figura sombreada.*

CAPÍTULO 5

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. Problemas de aplicación de ángulos

Problema 5.1.1. *Si* $\overline{LM} \parallel \overline{NO}$*, ¿Qué valor tiene el ángulo* x*?*

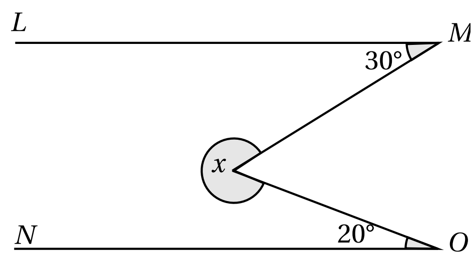


FIGURA 5.1.1

Solución.

La figura puede ser reconstruida de la siguiente manera:

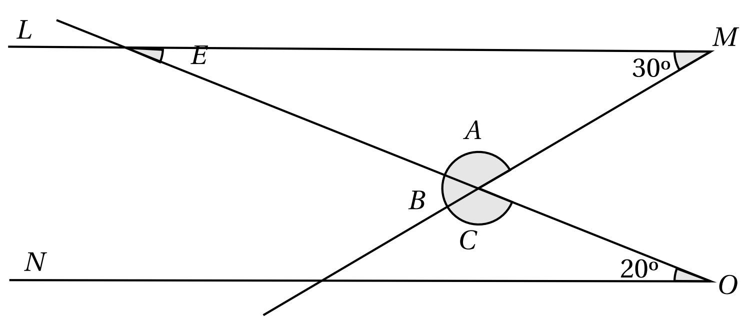


FIGURA 5.1.2

La medida del ángulo x es igual a $m\angle C + m\angle B + m\angle A$, pero $m\angle C = m\angle A$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Así que $m\angle x = 2m\angle A + m\angle B$. Sabemos que $m\angle E = 20^0$ por ser ángulo alterno interno con $\angle O$. Luego $m\angle A = 180^0 - (20^0 + 30^0) = 130^0$ y $m\angle B = 180^0 - m\angle A = 180^0 - 130^0 = 50^0$ de donde $m\angle x = 2(130^0) + 50^0 = 160^0 + 50^0 = 310^0$.

Problema 5.1.2. *En la figura 5.1.3 el triángulo ABC es isósceles y el triángulo DEF es equilátero y está inscrito en el triángulo ABC. ¿Qué relación se cumple entre los ángulos α, β y δ?*

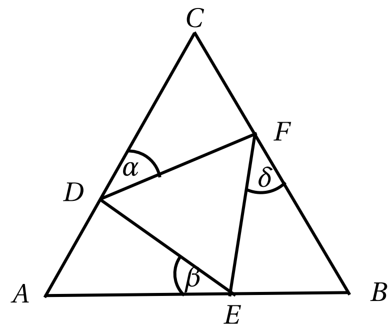


FIGURA 5.1.3

Solución.

Sean β el $\angle AED$, α el $\angle CDF$ y δ el $\angle EFB$. Tenemos que $m\angle BAC = m\angle ABC$ por que el triángulo es isósceles. También $\alpha+60 = \beta+A$, $\beta+60 = \delta+B$, y $\delta+60 = \alpha+C$. De donde $\alpha-\beta = \beta+A-\delta-B = \beta-\delta$, por lo tanto $\dfrac{\alpha+\delta}{2} = \beta$.

Problema 5.1.3. *Sea $ABCD$ un rectángulo con $BC = 2AB$ y sea BCE un triángulo equilátero. Si M es el punto medio de $\overline{CE}$ ¿Cuánto mide el ángulo CMD?*

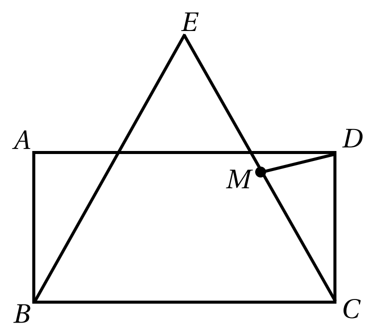


FIGURA 5.1.4

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.1.5.

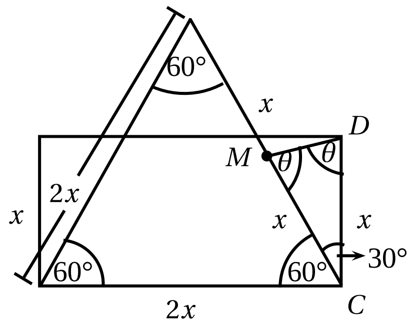


FIGURA 5.1.5

Tenemos que el triángulo MCD es isósceles, y $2\theta = 150°$, así que $\theta = 75°$. Por lo tanto el ángulo CMD mide 75°.

Problema 5.1.4. *Calcular el valor de x si $L_1 \| L_2$*

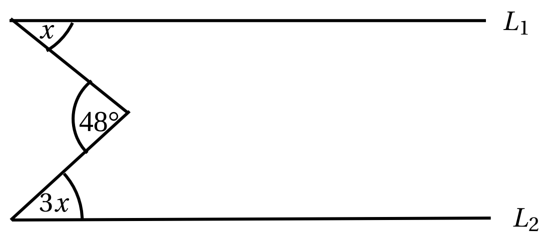


FIGURA 5.1.6

Solución.

La figura puede ser reconstruida de la siguiente manera:

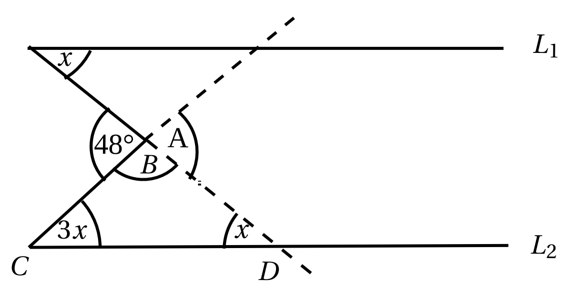


FIGURA 5.1.7

Tenemos que $m\angle A = 48^0$ por ser opuesto por el vértice, y $m\angle B = 132^0$ por ser ángulo complementario, entonces, $m\angle 3x + m\angle x + m\angle B = 180^0$, es decir $3x + x + 132^0 = 180^0$ por lo tanto $4x + 132^0 = 180^0$ y así $4x = 48^0$, de donde $x = 12^0$

Problema 5.1.5. *Calcular el valor de x sabiendo que $AB = 3x, BD = 7x - 2;\ BE = x$ y $BC = 2x$.*

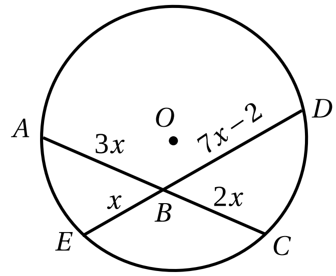


FIGURA 5.1.8

Solución.

Para hallar el valor de x, igualamos el producto de AB y BC con EB y BD, así que, $AB \cdot BC = EB \cdot BD$, de modo que, $6x = x(7x-2)$ entonces, $x = 2$.

Problema 5.1.6. *En la figura 5.1.9, $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{PC}$ es igual al radio $\overline{OD}$. Hallar la razón de las medidas de los ángulos BPD y BOD.*

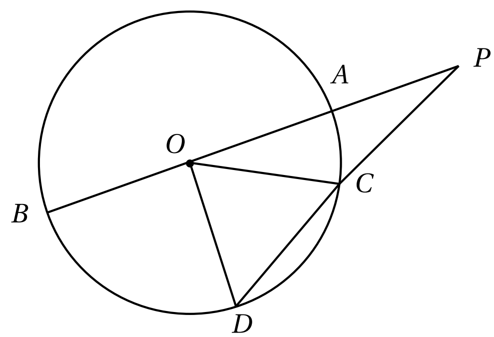


FIGURA 5.1.9

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.1.10.

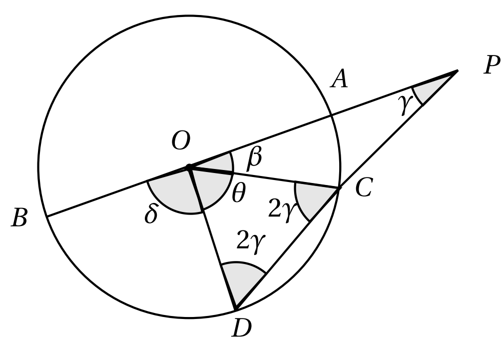


FIGURA 5.1.10

Como $\overline{OC} = \overline{PC}$, entonces $\gamma = \beta$, luego $\theta + 4\gamma = 180^0$ o sea $\theta = 180^0 - 4\gamma$. Además, tenemos que $\delta + \theta + \beta = \delta + \theta + \gamma = \delta + 180^0 - 4\gamma + \gamma = 180^0$, luego $\delta - 3\gamma = 0$ así que $\delta = 3\gamma$ ó $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\gamma}{\delta}$

Problema 5.1.7. *¿Cuál es la medida del ángulo en H?*

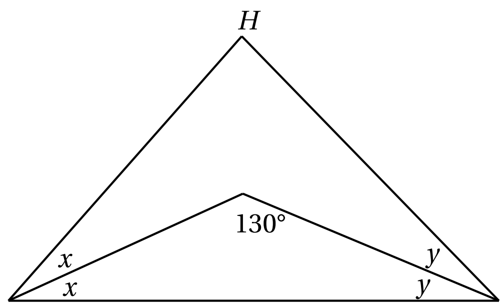


FIGURA 5.1.11

Solución.

Tenemos que $x + y = 50^0$. Por consiguiente, $2x + 2y = 100^0$, así que $\angle H = 180^0 - 100^0 = 80^0$.

5.2. Problemas de aplicación de triángulos

Problema 5.2.1. *¿Cuál es en m^2, el área del triángulo ABC?*

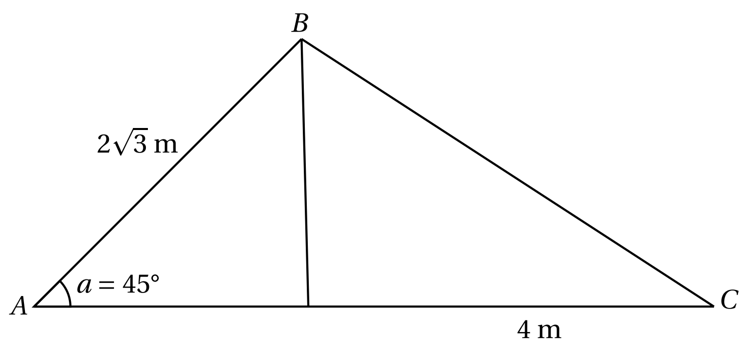


FIGURA 5.2.1

Solución.

Puesto que el ángulo A es de 45°, elaboramos la siguiente figura.

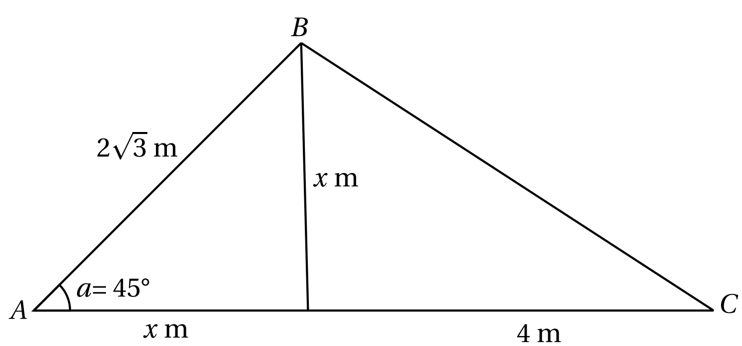


FIGURA 5.2.2

El área del triángulo ABC es igual a $\dfrac{x(x+4)}{2}$ m^2. Así que el problema es determinar el valor de x. Por el teorema de Pitágoras tenemos que: $x^2+x^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ de lo cual $x=\sqrt{6}$. Luego el área del triángulo ABC es:

$$A\,\triangle=\frac{\left[\left(\sqrt{6}+4\right)\cdot\sqrt{6}\right]}{2}\ \mathrm{m}^2=\frac{\left[6+4\sqrt{6}\right]}{2}\ \mathrm{m}^2=\left(3+2\sqrt{6}\right)\ \mathrm{m}^2$$

Problema 5.2.2. *En un triángulo rectángulo de hipotenusa 8 cm y área 9 cm^2 ¿cuál es su perímetro?*

Solución.

Con la información dada hacemos la figura 5.2.3

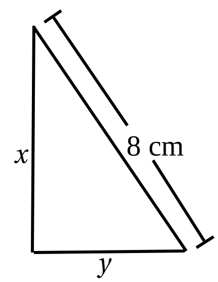


FIGURA 5.2.3

Tenemos que $x^2+y^2=64$, por el teorema de Pitágoras, y, $xy=18$ así que, $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ donde, $64+2(18)=100$, entonces $x+y=10$, luego el perímetro es $P=(x+y+8)=10+8=18$ cm.

Problema 5.2.3. *La longitud de la circunferencia es igual a $6\,\pi$ m. ¿Cuál es, en metros, el perímetro del triángulo equilátero?*

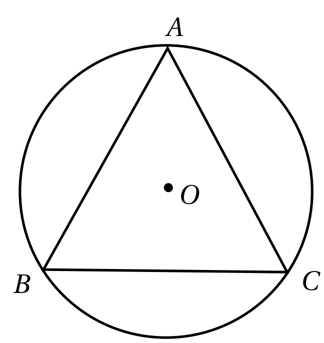


FIGURA 5.2.4

Solución.

Llamemos L la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia y construyamos la siguiente figura:

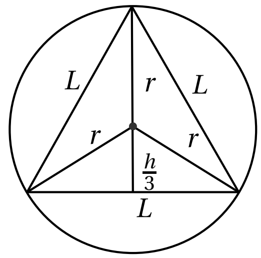


FIGURA 5.2.5

Así que el problema es determinar el valor de L, puesto que el perímetro del círculo es 6 πm, entonces, $6\pi = 2\pi r$, de lo cuál $r = 3$.

Así que $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^3 = 3^2$, es decir, $\frac{L^2}{4} + \frac{h^2}{9} = 9$. Por otra parte,
$L^2 - \frac{L^2}{4} = h^2 = \frac{3}{4}L^2$. De donde $9 = \frac{L^2}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{3}{4}L^2\right) = \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{12} = \frac{4L^2}{12} = \frac{L^2}{3}$,
así que $L = \sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ por lo tanto el perimetro del trángulo $P = 3L = 9\sqrt{3}$.

Problema 5.2.4. *$ABCD$ es un cuadrado de 8 metros de lado, sobre el lado $\overline{CB}$ se dibuja el triángulo equilátero CEB y luego se traza el segmento $\overline{AE}$ ¿Cuál es el área del triángulo ABE?*

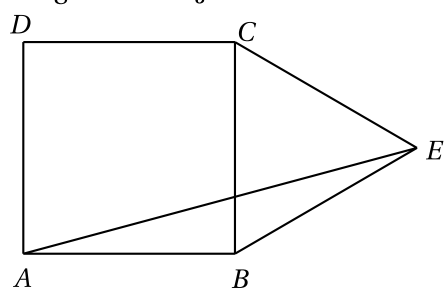


FIGURA 5.2.6

Solución.

Con la información dada construimos la siguiente figura

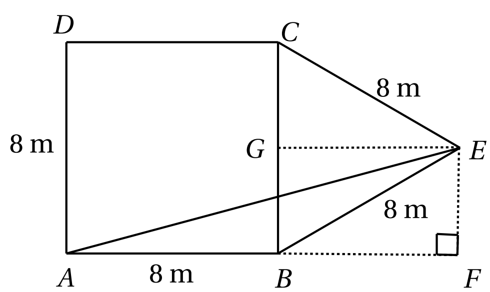


FIGURA 5.2.7

Puesto que el triángulo BCE es equilátero, al proyectar el punto E como altura del triángulo BCE en $\overline{BC}$, se obtiene $EF = 4$ m, así que, $A_{\triangle ABE} = \frac{8\text{ m} \cdot 4\text{ m}}{2} = 16\text{ m}^2$

Problema 5.2.5. *En el triángulo ABC, AD es una altura, $EF = 4, DF = 6$ y sobre la mediana AF se encuentra el centroide o baricentro E. ¿Qué valor tiene la altura AD?*

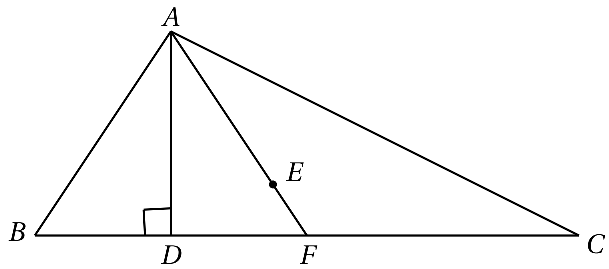


FIGURA 5.2.8

Solución.

Hagamos la construcción auxiliar con la información dada.

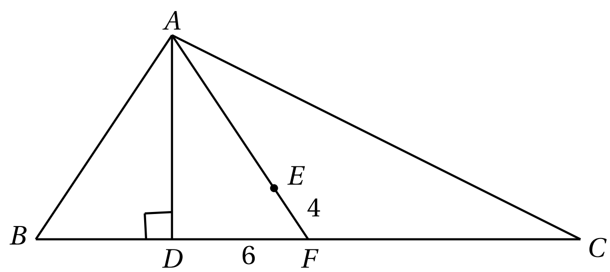


FIGURA 5.2.9

Como E es el baricentro entonces $AE = \dfrac{2}{3}AF$, $EF = \dfrac{1}{3}AF$, luego $AF = 3EF = 3 \cdot 4 = 12$. Así que $AD = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = \sqrt{36}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Problema 5.2.6. *Sea h la longitud de la altura del triángulo equilátero $\triangle ABC$ y sea P cualquier punto en el interior del triángulo. Sean R, S, T los pies de las perpendiculares desde P hasta los lados AB, BC y CA, respectivamente. Demostrar que $PR + PS + PT = h$.*

Solución.

La figura 5.2.10 ilustra la situación.

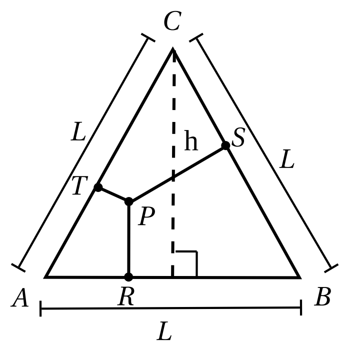


FIGURA 5.2.10

$$A_{\triangle} = \frac{L \cdot h}{2} = \frac{L \cdot \left(\sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}}\right)}{2} = \frac{L \cdot \sqrt{\frac{3L^2}{4}}}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

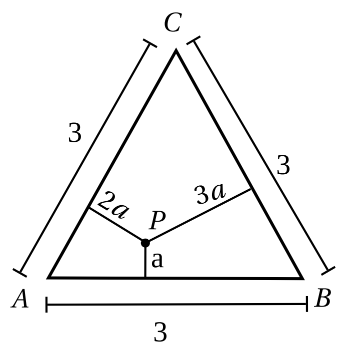
$$A_{\triangle} = A_{\triangle APC} + A_{\triangle APB} + A_{\triangle BPC} = \frac{1}{2}L \cdot PT + \frac{1}{2}L \cdot RP + \frac{1}{2}L \cdot SP$$

$$= \frac{1}{2}L(PT + RP + SP) = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}. \text{ De aquí } PT + PR + PS = \frac{L\sqrt{3}}{2} = h$$

Problema 5.2.7. *El punto P está en el interior del triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado 3. La distancia de P a AB es a, la distancia de P a AC es $2a$ y la distancia de P a CB es $3a$. Hallar a.*

Solución.

La figura 5.2.11 ilustra la situación.



5.2.11

Por el problema anterior tenemos que: $a + 2a + 3a = h = 6a$, así que $a = \frac{h}{6} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{6}$, es decir $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Problema 5.2.8. *Se tiene un segmento $\overline{AB}$ de longitud 10 y un punto P en él tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$ se construye sobre el mismo lado del segmento, un triángulo equilátero de lado $\overline{AP}$ y otro de lado $\overline{PB}$ ¿Cuál es la distancia entre los vértices, de los triángulos equiláteros que están fuera del segmento $\overline{AB}$?*

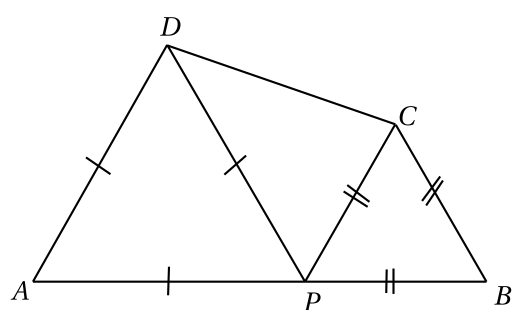


FIGURA 5.2.12

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.2.13.

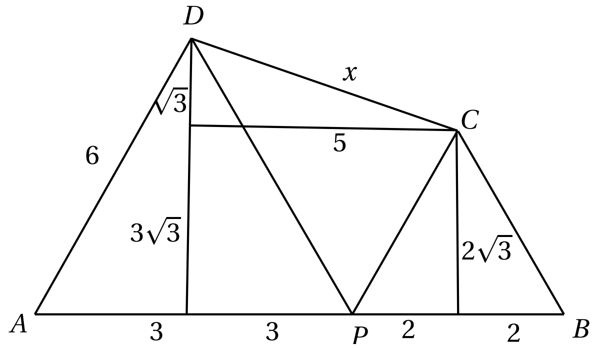


FIGURA 5.2.13

Así que tenemos que hallar el valor de x, entonces: $x^2 = 3 + 25 = 28$, de donde $x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Por lo tanto la distancia entre los vértices de los triángulos equiláteros que están fuera del segmento $\overline{AB}$ es $2\sqrt{7}$ cm.

Problema 5.2.9. *En función del radio r del círculo, hallar el área sombreada.*

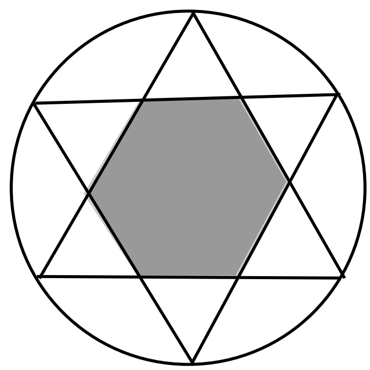


FIGURA 5.2.14

Solución.

Con la información dada construimos la siguiente figura.

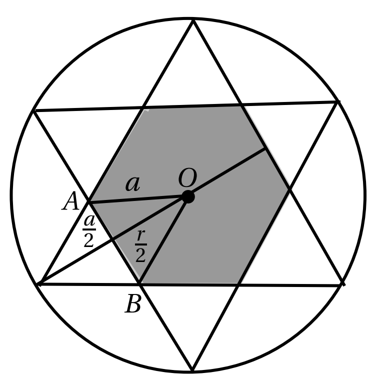


FIGURA 5.2.15

El área de la parte sombreada es 6 veces el área del triángulo OAB, para hallar el área del triángulo OAB debemos hallar el valor de a, pero tenemos $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2=a^2$ por el teorema de Pitágoras, por lo tanto $a=\frac{\sqrt{3}}{3}r$. Luego, el área de la parte sombreada es: $A_S=6\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)\left(\frac{r}{2}\right)}{2}=\frac{r^2}{2}\sqrt{3}$

5.3. Problemas de aplicación de proporcionalidad y semejanza

Problema 5.3.1. *Teniendo en cuenta el teorema de Thales en la figura 5.3.1. Hallar el valor de x.*

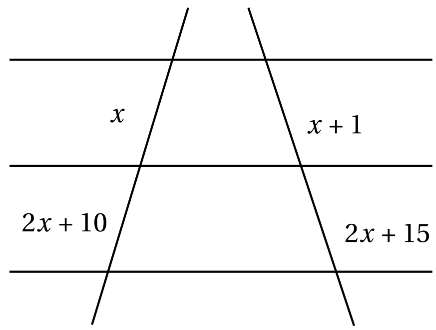


FIGURA 5.3.1

Solución.

Por el teorema de Thales tenemos la siguiente proporción: $\frac{x}{2x+10}=\frac{x+1}{2x+15}$, por consiguiente, $2x^2+15x=2x^2+12x+10$, de donde $3x=10$ y así $x=\frac{10}{3}$.

Problema 5.3.2. *Tres lotes se extienden desde la Calle Blas de Lezo hasta la Liborio Mejía, los linderos laterales son segmentos perpendiculares a la Calle Liborio Mejía. Si el frente total de los lotes en la Calle Blas de Lezo mide 22,5 metros. ¿Cuál es la longitud del lote central sobre la Calle Blas de Lezo?*

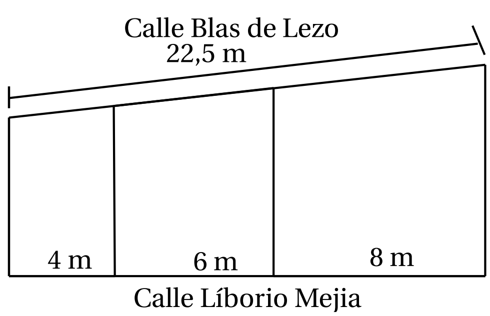


FIGURA 5.3.2

Solución.

Llamemos x la longitud del lote central sobre la Calle Blas de Lezo y hagamos la siguiente gráfica.

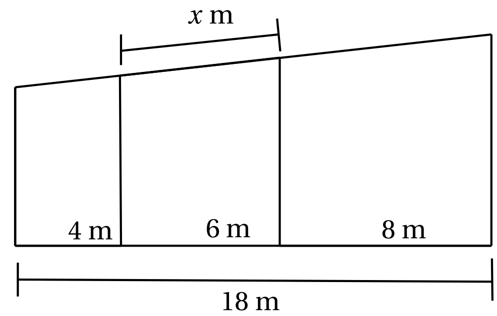


FIGURA 5.3.3

Por proporcionalidad tenemos que la relación $\frac{6}{18} = \frac{x}{22,5}$; es valida, de donde $x = \frac{22,5}{3} = 7,5$ m.

5.4. Problemas de aplicación de cuadrilateros

Problema 5.4.1. *Si el perímetro del rectángulo es p y su diagonal d, hallar la diferencia entre el largo y el ancho del rectángulo.*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.4.1

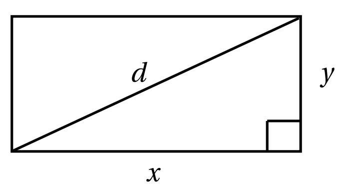


FIGURA 5.4.1

Tenemos que $x^2 + y^2 = d^2$ y $x + y = \frac{p}{2}$, luego $\frac{p^2}{4} = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = d^2 + 2xy$, de donde, $2xy = \frac{p^2}{4} - d^2$. Por otra parte $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = d^2 - \frac{p^2}{4} + d^2 = 2d^2 - \frac{p^2}{4}$. Por lo tanto $x - y = \sqrt{2d^2 - \frac{p^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8d^2 - p^2}$.

Problema 5.4.2. *La suma de las longitudes de dos segmentos es igual a 13 m y 41,44 m² es el área del rectángulo contenido en ellos como lados. ¿Cuál es la longitud del segmento menor?*

Solución.

Construyamos el rectángulo con lados x, y, y como se muestra en la figura 5.4.2.

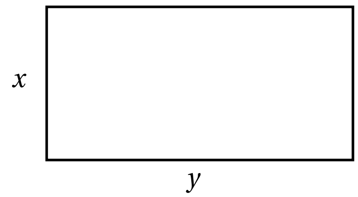


FIGURA 5.4.2

Tenemos que $x+y=13$ m, y, $x\cdot y=41,44$ m^2. Luego 41,44 = $x(13-x)$, así que $x^2=13x+41,44=0$, por lo tanto $x=\dfrac{13\pm\sqrt{169-4(41,44)}}{2}=\dfrac{13\pm\sqrt{169-165,76}}{2}=\dfrac{13\pm\sqrt{3,24}}{2}=\dfrac{13\pm 1,8}{2}=6,5\pm 0,9$. De esto tenemos que $x=7,4$, y, $y=5,6$ o $x=5,6$, y, $y=7,4$. Luego la longitud del segmento menor es 5,6 m.

Problema 5.4.3. *Dos cuadrados congruentes se sitúan como indica la figura 5.4.3, de modo que el centro del uno es vértice del otro. Cada cuadrado tiene 6 metros de lado. ¿Cuántos metros cuadrados corresponden a la región común?*

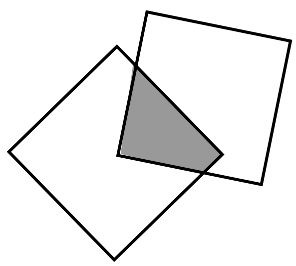


FIGURA 5.4.3

Solución:

La figura puede ser reacomodada como aparece en la figura 5.4.4.

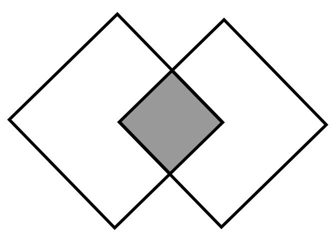


FIGURA 5.4.4

El área común corresponde a un cuarto del área de cada uno de los cuadrados. Así,

$A_{\text{común}}=\dfrac{36}{4}$ m^2 = 9 m^2

Problema 5.4.4. *El área de la gráfica sombreada es 4 m^2 ¿cuántos metros mide el lado del cuadrado?*

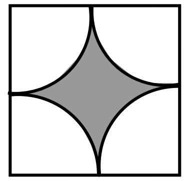


FIGURA 5.4.5

Solución.

Con la información dada construimos la siguiente figura:

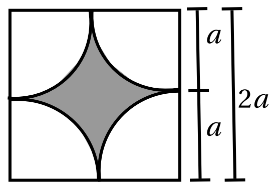


FIGURA 5.4.6

El área sombreada es igual al área del cuadrado menos el área de un círculo de radio a, así que hay que hallar el valor de a. Puesto que $4 = 4a^2 - \pi a^2 = a^2(4-\pi)$, entonces, $a = \sqrt{\dfrac{4}{4-\pi}} = \dfrac{2\sqrt{4-\pi}}{4-\pi}$, luego, $2a = 2\left(\dfrac{2\sqrt{4-\pi}}{4-\pi}\right) = \dfrac{4\sqrt{4-\pi}}{4-\pi}$ m.

Problema 5.4.5. *Tres cuadrados con lados de longitudes: 10 cm, 8 cm, y 6 cm, respectivamente, se colocan uno al lado del otro como se muestra en la figura 5.4.7.*

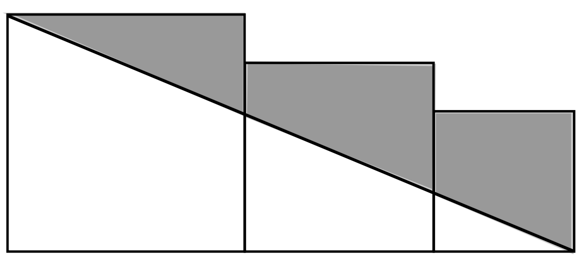


FIGURA 5.4.7

¿Cuál es el área de la parte sombreada?

Solución.

La figura 5.4.8 ilustra la información dada en el problema.

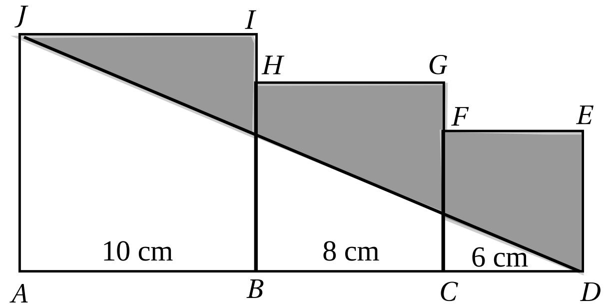


FIGURA 5.4.8

La suma de las áreas de los cuadrados es: 100 cm^2 + 64 cm^2 + 36 cm^2 = 200 cm^2 luego el área sombreada es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menos el área del triángulo, es decir, 200 cm$^2 - \dfrac{10 \cdot 24}{2}$ cm^2 = 200 cm^2 - 120 cm^2 = 80 cm^2.

Problema 5.4.6. *¿Cuánto mide el área de un cuadrado inscrito en una semicircunferencia de radio 1.?*

Solución.

Para obtener el área del cuadrado inscrito en la circunferencia de radio 1 construimos la figura 5.4.9.

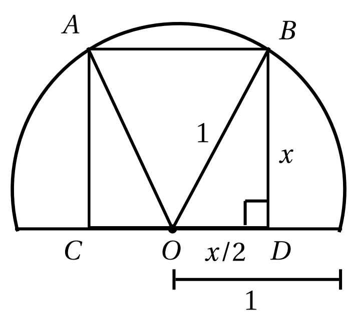


FIGURA 5.4.9

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $1^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{5x^2}{4}$, así que $x^2 = \dfrac{4}{5}$, luego el área del cuadrado inscrito en la circunferencia es $\dfrac{4}{5}$.

Problema 5.4.7. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, miden 3, 4, 12 y 13 respectivamente, además $\angle CBA$ es recto. Hallar el área de $ABCD$.*

Solución.

Con la información dada tenemos la siguiente figura:

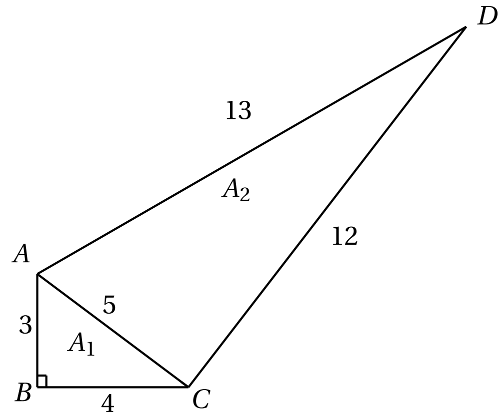


FIGURA 5.4.10

El área de $ABCD$ es igual al área A_1 mas el área A_2. Tenemos $AC = 5$, y, $A_1 = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ m^2. Por otra parte $A_2 = \sqrt{P(P-13)(P-12)(P-5)}$. Donde $P = \dfrac{13+12+5}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$, por consiguiente $A_2 = \sqrt{15(2)(3)(10)} = \sqrt{900} = 30$ cm^2, entonces $A_{ABCD} = 6$ cm$^2 + 30$ cm$^2 = 36$ cm^2.

Problema 5.4.8. *Se construye un rectángulo a partir de uno dado, de tal forma que la base del nuevo rectángulo es igual a la suma de la diagonal y el lado mayor; la altura igual a la diferencia de la diagonal y el lado mayor. Hallar el área del nuevo rectángulo.*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.4.11 con su diagonal igual a $\sqrt{x^2+y^2}$. A partir de esta figura construimos el rectángulo de la figura 5.4.12.

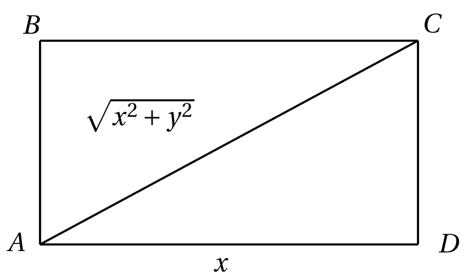


FIGURA 5.4.11

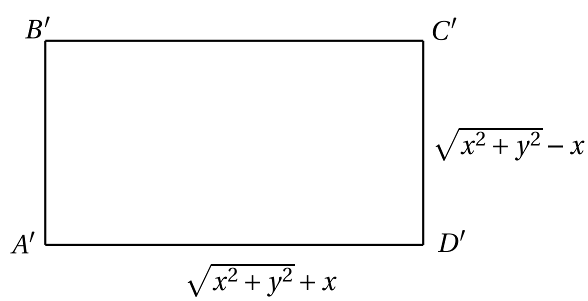


FIGURA 5.4.12

Así que el área del nuevo rectángulo es:

$$A_{\square A'B'C'D'} = \left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 - x^2 = x^2+y^2-x^2 = y^2.$$

Problema 5.4.9. *El área de un campo trapecial es de 1400 metros cuadrados. Si la altura es de 50 metros, hallar las dos bases sabiendo que el número de metros en cada base es un número entero divisible por 8.*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.4.13.

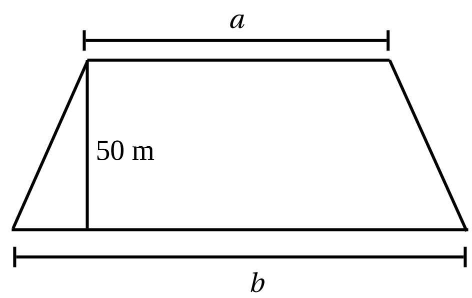


FIGURA 5.4.13

Tenemos que $a = 8 \cdot m$, $\quad b = 8 \cdot n$ donde b es la base mayor y a es la base menor, así que el área del campo trapecial es $\dfrac{(a+b)\cdot 50}{2} = 1400$, luego $a + b = 56$, es decir, $8 \cdot m + 8 \cdot n = 56$ de donde $m + n = 7$. Así que tenemos las siguientes posibilidades

1. $m = 1$ y $n = 6$, de donde $a = 8$ y $b = 48$
2. $m = 2$ y $n = 5$, de donde $a = 16$ y $b = 40$
3. $m = 3$ y $n = 4$, de donde $a = 24$ y $b = 32$

5.5. Problemas de aplicación de sectores círculares

Problema 5.5.1. *Los semicírculos de la figura 5.5.1 tienen sus diámetros perpendiculares y cada diámetro mide 2 metros ¿cuántos metros cuadrados (m^2) corresponde al área sombreada?*

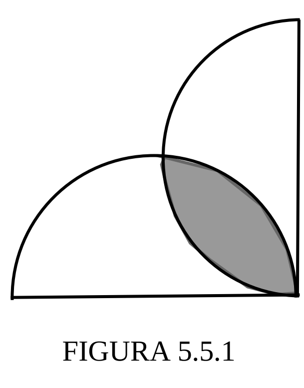


FIGURA 5.5.1

Solución:

Con la información dada construimos la figura 5.5.2.

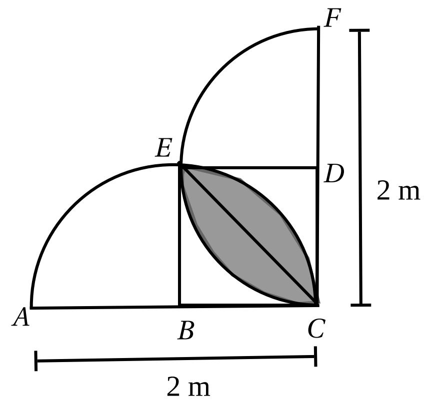


FIGURA 5.5.2

El área sombreada corresponde a 2 veces el área de un cuarto de círculo de radio 1 menos el área del triángulo CDE, así que $A_S = 2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

Problema 5.5.2. *Tres círculos de radio r son mutuamente tangentes, como se muestra en la figura 5.5.3*

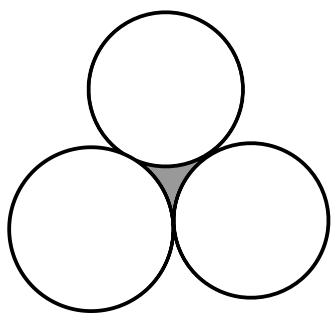


FIGURA 5.5.3

¿Cuál es el área de la región sombreada?

Solución.

En la figura unimos los centros de los tres círculos. Esto nos forma un triángulo equilátero de lado 2 r, hagamos la construcción de la figura con su información (Figura 5.5.4)

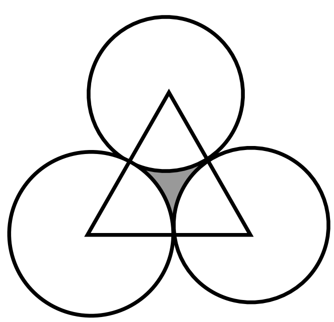


FIGURA 5.5.4

El área sombreada corresponde al área del triángulo equilátero, menos el área de un semicírculo de radio r. (Figura 5.5.5)

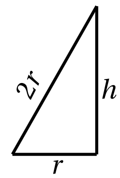


FIGURA 5.5.5

Por el teorema de Pitágoras tenemos: $h^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$, así que $h = r\sqrt{3}$. Luego $A_S = A_\triangle - \dfrac{1}{2}A_\bigcirc$.
Por lo tanto $A_S = \dfrac{2r \cdot r\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{2r^2\sqrt{3} - \pi r^2}{2} = \dfrac{r^2\left(2\sqrt{3} - \pi\right)}{2}$.

Problema 5.5.3. *Si el cuadrado tiene nueve metros de lado ¿cuántos m^2 tiene el área sombreada?*

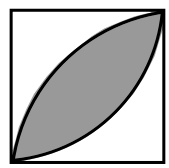


FIGURA 5.5.6

Solución.

Con la información dada construimos la siguiente figura.

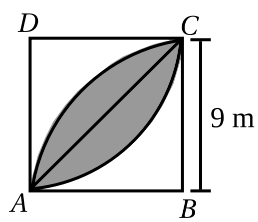


FIGURA 5.5.7

El área sombreada corresponde a 2 veces al área de un cuarto de circulo de radio 9 m, menos el área del triángulo ABC; así que:

$$A_S = 2\left(\frac{81\pi}{4} - \frac{81}{2}\right)\text{m}^2 = 81\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\text{m}^2 = 81\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)\text{m}^2.$$

Problema 5.5.4. *Hallar el área sombreada de la figura 5.5.8.*

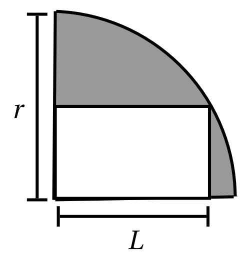


FIGURA 5.5.8

Solución.

El área sombreada es un cuarto de un círculo, menos el área de un cuadrilátero, así que, observemos la siguiente figura.

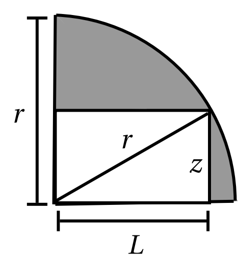


FIGURA 5.5.9

El problema es hallar el valor de z. Tenemos $z = \sqrt{r^2 - L^2}$, entonces,

$$A_S = \frac{\pi r^2}{4} - L\sqrt{r^2 - L^2} = \frac{\pi r^2 - 4L\sqrt{r^2 - L^2}}{4}$$

Problema 5.5.5. *El cuadrado tiene 2 metros de lado; con centro en dos vértices opuestos y radio igual a la mitad de la diagonal, se describen los arcos* $\widehat{AD}$ *y* $\widehat{BC}$*, y enseguida, se trazan los segmentos* $\overline{AB}$ *y* $\overline{DC}$.

¿Cuál es en m^2*, el valor del área sombreada?*

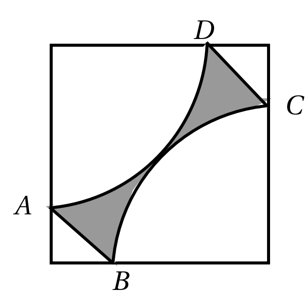


FIGURA 5.5.10

Solución.

Con la información dada hacemos la figura 5.5.11.

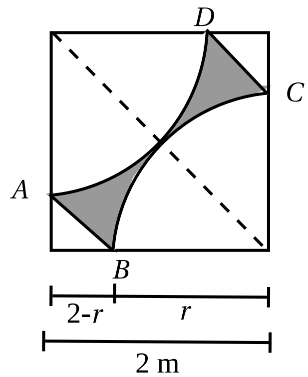


FIGURA 5.5.11

Por lo tanto el área sombreada es igual al área del cuadrado de lado 2 metros menos el área de un semicírculo de radio $\sqrt{2}$ y la de un cuadrado de lado $2-\sqrt{2}$, entonces:

$$A_S = \left(2^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{2}\right)^2\right) \text{ m}^2 = \left[4-\pi-\left(6-4\sqrt{2}\right)\right] \text{ m}^2 = \left[4\sqrt{2}-\pi-2\right] \text{ m}^2$$

Problema 5.5.6. *Un triángulo rectángulo de catetos 12 y 16 está inscrito en una circunferencia ¿cuál es el radio de dicha circunferencia?*

Solución.

Puesto que el triángulo rectángulo está inscrito en una circunferencia tenemos que la hipotenusa coincide con el diámetro; Ilustramos la situación en la figura 5.5.12

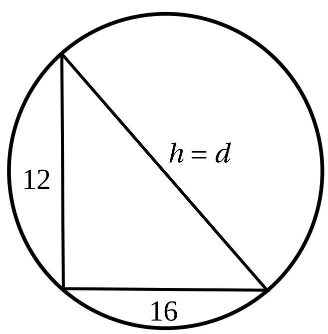


FIGURA 5.5.12

Por el Teorema de Pitágoras tenemos que $16^2 + 12^2 = h^2 = 256 + 144 = 400$, así que $h = \sqrt{400} = 20$; por lo tanto el radio es igual a $r = \dfrac{h}{2} = 10$.

Problema 5.5.7. *El arco AB es un cuarto de una circunferencia de centro O y de radio* 10 *cm.*

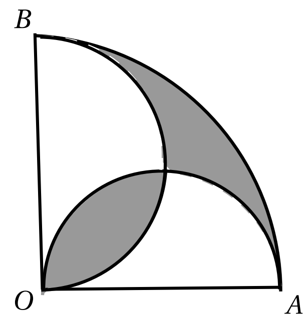


FIGURA 5.5.13

Los arcos OA y OB son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la región sombreada de la figura 5.5.13?

Solución.

Con la información dada realizamos una translación de áreas; para ello trazamos la hipotenusa AB como se muestra en la figura 5.5.14-A

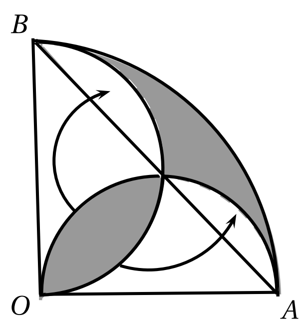


FIGURA 5.5.14-A

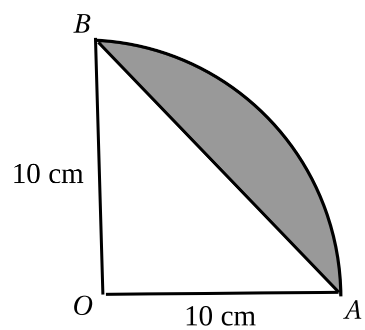


FIGURA 5.5.14-B

Luego de hacer la translación el área sombreada se reduce a una resta de áreas, es decir,

$$A_S = A_{\frac{1}{4}\bigcirc} - A_{\triangle OAB} = \frac{1}{4}\left(\pi \cdot 10^2\right) - \frac{1}{2}\left(10^2\right) = (25\pi - 50)\text{cm}^2 = 25\,(\pi - 2)\text{cm}^2.$$

Problema 5.5.8. *Un triángulo de Reuleux es la figura obtenida al trazar arcos de radio r con centro en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero de lado r, cada arco de 60°, como se muestra en la figura 5.5.15.*

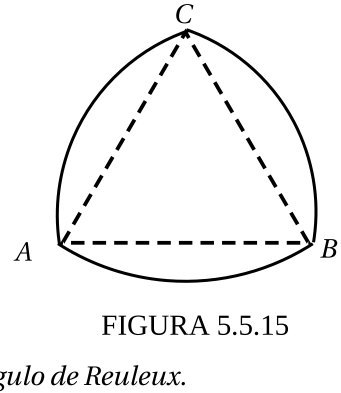


FIGURA 5.5.15

Hallar el perímetro y el área de un triángulo de Reuleux.

Solución.

Con la información dada trazamos la figura 5.5.16.

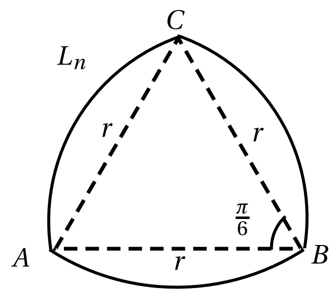


FIGURA 5.5.16

Puesto que $L_n = r\theta = r\dfrac{\pi}{3}$, entonces $3L_n = 3r\dfrac{\pi}{3} = \pi r$. Luego el perímetro del triángulo de Reuleux es, $P = \pi r$. Por otra parte el área del triángulo punteado es $A_{\triangle ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$. Si dividimos una circunferencia en seis partes iguales, el área de cada parte es igual a $\dfrac{\pi r^2}{6}$ entonces el área de un segmento circular la hallamos asi: $A_{\widehat{AB}} = \dfrac{\pi r^2}{6} - \dfrac{r^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$, luego tenemos $A_{\triangle ABC} = 3 \cdot A_{\widehat{AB}} = 3\,\dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$. Por lo tanto el área del triángulo de Reuleux es $3\,\dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.

Problema 5.5.9. *El $\triangle$ ABC es equilátero, de lado a. Dos círculos tangentes con centro en A y B respectivamente se trazan como en la figura 5.5.17. Mostrar que el perímetro del área sombreada es $a + \dfrac{\pi a}{3}$ y por lo tanto independiente de los radios de los círculos. Demostrar además que el área de esta región es $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi}{6}\left(R^2 + r^2\right)$, donde R y r son los radios de los círculos.*

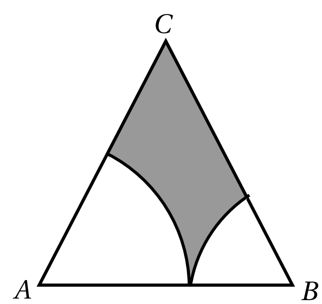


FIGURA 5.5.17

Solución.

Con la información dada hacemos la figura 5.5.18.

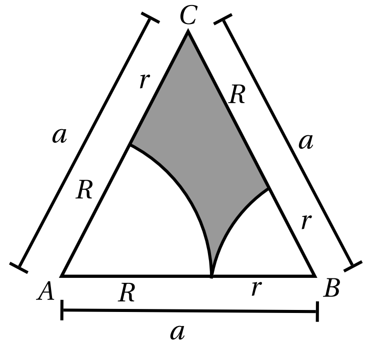


FIGURA 5.5.18

Como cada uno de los ángulos interiores del $\triangle ABC$ mide $\frac{\pi}{3}$, el perímetro de la parte sombreada de la figura 5.5.18 es:

$P = R + \left(a - R\right) + \frac{1}{6} L_{\bigcirc R} + \frac{1}{6} L_{\bigcirc a-R} = a + \frac{1}{6}\left(2\pi R + 2\pi\left(a - R\right)\right) = a + \frac{2\pi}{6}\left(R + a - R\right) = a + \frac{\pi}{3}(a) = a + \frac{a\pi}{3}$

El área de la región sombreada es igual al área del triángulo ABC menos la suma de las áreas de los sectores circulares de ángulo $\frac{\pi}{3}$ así que:

$$A_S = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} - \left(\frac{1}{6}\pi R^2 + \frac{1}{6}\pi (a - R)^2\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{6}\pi\left(R^2 + r^2\right).$$

Problema 5.5.10. *Hallar el área sombreada de la figura 5.5.19.*

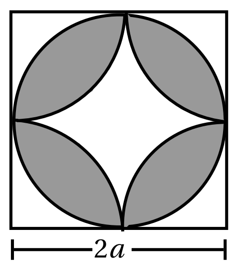


FIGURA 5.5.19

Solución.

Con la información dada construimos las figuras 5.5.20 y 5.5.21.

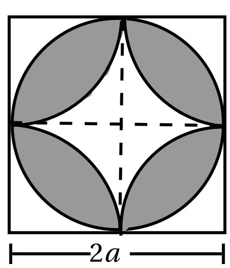


FIGURA 5.5.20

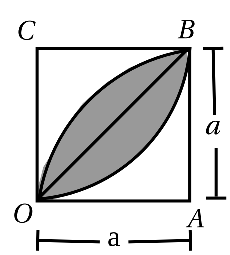


FIGURA 5.5.21

Para calcular el área de la region sombreada la figura 5.5.19 la dividimos en 4 partes iguales como se muestra en la figura 5.5.20. El área sombreada de la figura 5.5.21 es 2 veces la diferencia entre el área del sector OB menos el área $\triangle\, OAB$, es decir, $A_S = 2\left(\frac{1}{4}A_{\bigcirc_{r=a}} - \frac{1}{2}a^2\right) = \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, así que el área sombreada es igual a $4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

Problema 5.5.11. *En la figura 5.5.22, el rectángulo $ABCD$ está en el interior de la circunferencia de tal manera que el vértice B es el centro de la circunferencia. Si $AC = 6$ y $\angle ACB = 30°$ ¿cuánto mide su diámetro?*

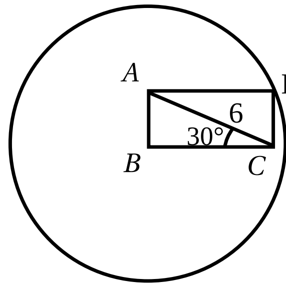


FIGURA 5.5.22

Solución.

El diámetro del círculo es dos veces el radio y como la diagonal AC del rectángulo tiene la misma medida que la diagonal BD y es igual al radio del círculo, se tiene que el diámetro del círculo es de 12 cm.

Problema 5.5.12. *En un círculo de 8 centímetros de radio, se dibujan dos cuerdas iguales y paralelas separadas entre si 8 centímetros. Hallar el área de la parte del círculo comprendida entre las dos cuerdas.*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.5.23.

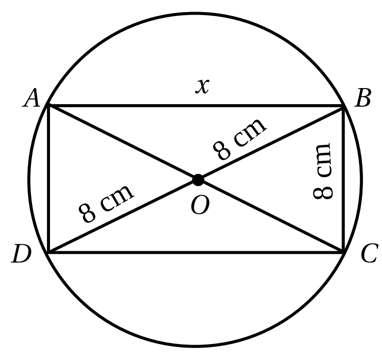


FIGURA 5.5.23

El área comprendida entre las dos cuerdas es igual al área del rectángulo mas dos veces el área del segmento circular AOD. El área del rectángulo $ABCD$ es: $8x$. Ahora $\overline{BD}$ es la diagonal, por Pitágoras tenemos que: $x = AB = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{3}\sqrt{8}\sqrt{8} = 8\sqrt{3}$. Entonces $A_{\square} = 8\left(8\sqrt{3}\right)$ cm^2 = $64\sqrt{3}$ cm^2. El área del segmento circular AOD esta dada por: $A_{\text{Segmento}\,AOD} = A_{\text{Sector}\,AOD} - A_{\triangle AOD}$.

$A_{\text{Segmento}AOD} = \dfrac{60\cdot 8^2}{2}\text{cm}^2 - \dfrac{8\cdot 4\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2 = (1920 - 16\sqrt{3})\text{cm}^2 = 16\left(120 - \sqrt{3}\right)\text{cm}^2$. Por consiguiente el área comprendida es: $A_C = \left(64\sqrt{3} + 32\left(120 - \sqrt{3}\right)\right)\ \text{cm}^2$.

Problema 5.5.13. *Calcular el área sombreada sabiendo que $\overline{SR}$ y $\overline{PQ}$ son diámetros.*

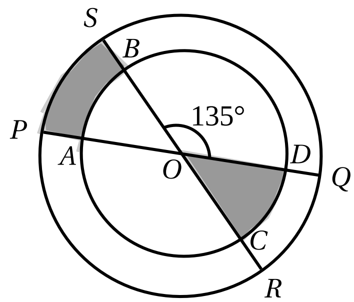


FIGURA 5.5.24

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.5.25, teniendo en cuenta que el área del sector COD es igual al área del sector AOB.

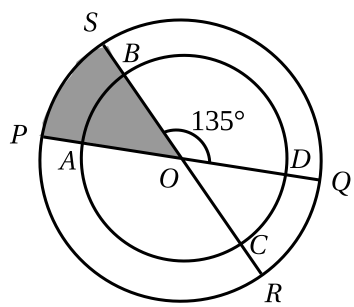


FIGURA 5.5.25

El área sombreada es igual a un octavo del área de de un círculo de radio r, así que $A_S = \dfrac{1}{8}\pi r^2$, donde $r = \dfrac{PQ}{2}$.

Problema 5.5.14. *El lado $\overline{OA}$ mide 5 cm, calcular el área y el perímetro de la parte circular sombreada.*

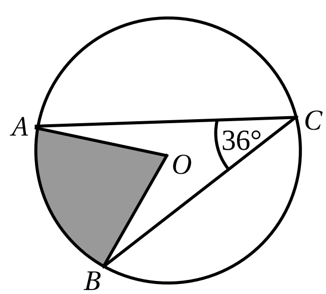


FIGURA 5.5.26

En la figura 5.5.26, la $m\angle AOB = 72°$, entonces el área del sector circular es un quinto del área de un círculo de radio 5 cm, así que $A_S = \frac{1}{5}\pi\left(5\text{ cm}\right)^2 = 5\pi\text{ cm}^2$.

El perímetro es igual a $AO + BO + m\widehat{AB} = 10cm + 2\pi$ cm.

Problema 5.5.15. *Un aro está formado por dos circunferencias concéntricas que distan 10 centímetros; ¿en cuánto difieren las circunferencias de los dos círculos?*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.5.27.

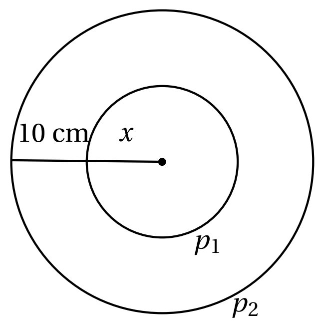


FIGURA 5.5.27

De donde el radio de p_1 es igual a x cm y de p_2 es igual a $(x+10)$ cm , así que, la diferencia de las dos circunferencias es igual a $2\pi(x+10) - 2\pi x = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$.

Problema 5.5.16. *Los diámetros de dos círculos son 8 y 12 centímetros. ¿Cuál es la razón entre el área del círculo menor y la del mayor?*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.5.28 y la figura 5.5.29

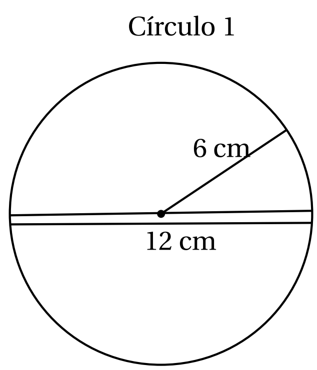


FIGURA 5.5.28

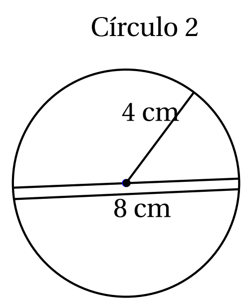


FIGURA 5.5.29

La razón del área del circulo de radio 4 y el área del círculo de radio 6 es: $\frac{A_{\bigcirc_2}}{A_{\bigcirc_1}} = \frac{16\pi}{36\pi} = \frac{4}{9}$.

Problema 5.5.17. *Si el radio del círculo mayor mide 6 cm y el radio de los círculos pequeños mide 2cm. ¿Cuánto vale el área de la parte sombreada?*

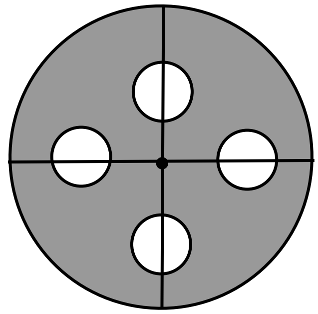


FIGURA 5.5.30

Solución.

El área sombreada es igual al área del círculo mayor menos cuatro veces el área de un círculo pequeño, así que, $A_S = (36\pi - 4(4\pi))\ \text{cm}^2 = (36\pi - 16\pi)\ \text{cm}^2 = 20\pi\ \text{cm}^2$.

Problema 5.5.18. *En una circunferencia una cuerda de 48 cm dista 7 cm del centro. ¿Cuánto vale el área del círculo?*

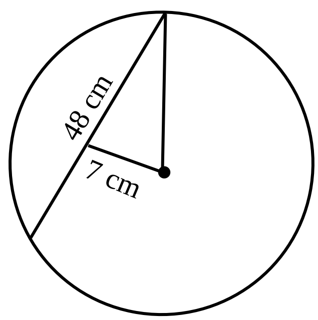


FIGURA 5.5.31

Solución.

Hacemos una construcción auxiliar con la información dada.

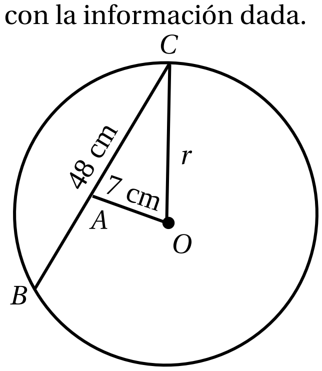


FIGURA 5.5.32

El segmento OA corta al segmento BC en dos partes congruentes así por el teorema de Pitágoras tenemos que $r = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$ cm, por lo tanto el área del círculo es: $A_{\bigcirc} = 625\pi\ \text{cm}^2$

Problema 5.5.19. *Cada vértice de la figura es el centro del arco opuesto, si r es el radio de cada arco, ¿cuál es el área de la figura?.*

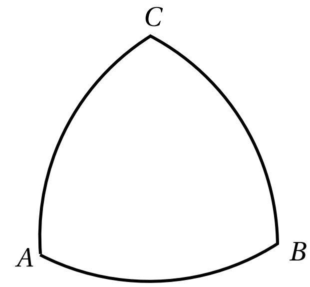


FIGURA 5.5.33

Solución.

Hacemos la siguiente construcción auxiliar.

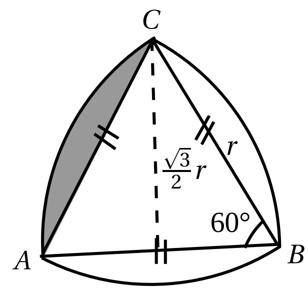


FIGURA 5.5.34

El área de la figura es 3 veces el área de la región sombreada más el área del triángulo, es decir,

$$3A_S + A_\triangle = 3\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)$$

5.6. Problemas de aplicación variados

Problema 5.6.1. *¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular, si la suma de sus ángulos interiores es igual a 1620°?*

Solución.

En un polígono regular de n lados, sí tomamos el centro y construimos triángulos isósceles con vértice en el centro y uno de los lados, el lado del polígono, tenemos que la suma de sus ángulos es $180n$. la suma de los ángulos internos del polígono es $180n - 360 = 180\ (n-2)$. Pero esta suma es 1620, así que $180(n-2) = 1620$, de donde $n - 2 = 9$, por lo tanto $n = 11$.

Dado un vértice cualquiera se pueden trazar $n-3$ diagonales.

Desde otro vértice contiguo se pueden trazar $n-3$ diagonales, desde otro vértice contiguo diferente a los otros dos, puedo trazar $n-4$ diagonales y así sucesivamente hasta llegar a 1, es decir el número de diagonales está dado por:

$$D = n-3+(n-3)+(n-4)+\ldots+1 = n-3+\frac{(n-3)(n-2)}{2} = (n-3)\left(1+\frac{n-2}{2}\right) = (n-3)\left(\frac{2+n-2}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n-3)}{2} \text{ puesto que } n=11, \text{ tenemos que, } D = \frac{11(11-3)}{2} = \frac{11(8)}{2} = 44$$

Problema 5.6.2. *En el hexágono regular de la figura 5.6.1, el punto O es el centro ¿Cuál es la razón entre el área del hexágono y de la región sombreada?*

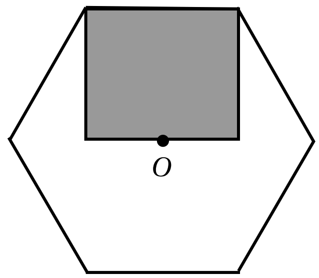


FIGURA 5.6.1

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.6.2.

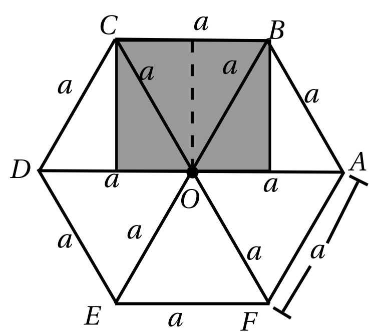


FIGURA 5.6.2

Dividimos el hexágono en 6 triángulos iguales de lado a, el área de la parte sombreada es 2 veces el área del triángulo BOC y el área del hexágono es 6 veces el área del triángulo AOB así que la razón de las áreas es $\dfrac{6A_{\triangle AOB}}{2A_{\triangle BOC}} = 3$.

Problema 5.6.3. *Un círculo y un cuadrado tienen el mismo perímetro; ¿Cuál es la razón entre sus áreas?*

Solución.

Con la información dada construimos la figura 5.6.3 y la figura 5.6.4.

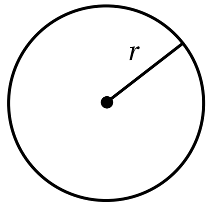


FIGURA 5.6.3

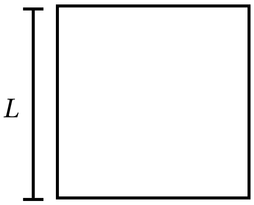


FIGURA 5.6.4

El perímetro del círculo es $2\pi r$ y el del cuadrado es $4L$, así $2\pi r = 4L$ es decir $r = \dfrac{2L}{\pi}$, luego el

$A_{\bigcirc} = \pi\left(\dfrac{2L}{\pi}\right)^2$ y $A_{\square} = L^2$ de esto $\dfrac{A_{\bigcirc}}{A_{\square}} = \dfrac{\frac{4L^2}{\pi}}{L^2} = \dfrac{4}{\pi}$, es decir $A_{\bigcirc} = \dfrac{4}{\pi} A_{\square}$.

Problema 5.6.4. *El lado del cuadrado mide 4 metros ¿Cuántos m^2 tiene el área sombreada?*

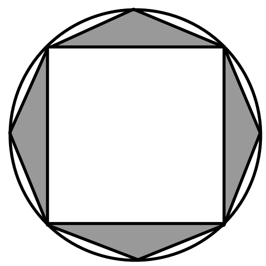


FIGURA 5.6.5

Solución

Con la información dada hacemos la figura 5.6.6

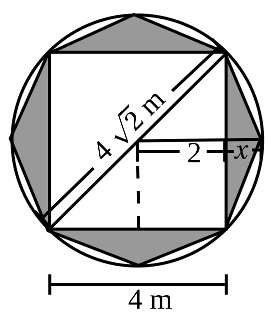


FIGURA 5.6.6

El área sombreada es igual a 4 veces el área de un triángulo de la región sombreada como se ilustra en la figura 5.6.6. Así $A_S = 4\left(\dfrac{4x}{2}\right) = 8x$ donde el radio del circulo es $2\sqrt{2}$, y, $x = 2\sqrt{2} - 2$, luego $A_S = 8\left(2\sqrt{2} - 2\right)\ \mathrm{m}^2 = 16\left(\sqrt{2} - 1\right)\ \mathrm{m}^2$

Problema 5.6.5. *¿Cuánto vale el área sombreada en la figura 5.6.7, si el cuadrado tiene 6 metros de lado?*

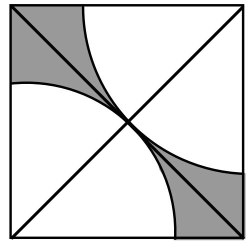


FIGURA 5.6.7

Solución.

Con la información dada construimos la siguiente figura:

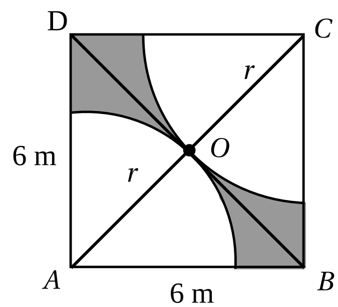


FIGURA 5.6.8

Tenemos que O es el centro del cuadrado de lado 6.

Entonces el área de la región sombreada es igual al área del cuadrado de lado 6 menos el área de la semicircunferencia. Como no sabemos cuál es el radio de dicha semicircunferencia lo hallamos de la siguiente manera: $2r = 6\sqrt{2}$, luego $r = 3\sqrt{2}$ así que,

$$A_S = A_{\square ABCD} - A_{\text{Semicircunferencia}} = 36 - \frac{\pi(3\sqrt{2})^2}{2} = 36 - 9\pi$$

Problema 5.6.6. *El triángulo ABC es equilátero de lado 12. Siendo P, M, y N los puntos medios de los lados. ¿Cuánto vale el área de la parte sombreada?*

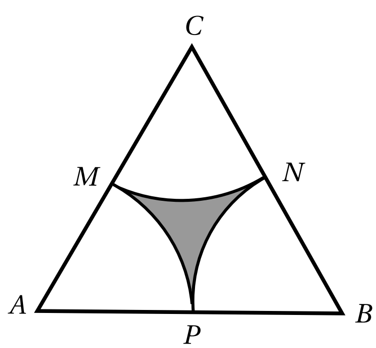


FIGURA 5.6.9

Solución.

En este caso hacemos una resta de áreas es decir $A_S = A_{ABC} - A_{\text{Región no sombreada}}$

Si colocamos los tres sectores circulares de 60°, uno a continuación del otro, se forma un semicírculo, por lo tanto, el área de la región no sombreada es igual al área del semicírculo de radio 6.

Calculamos cada una de las áreas parciales: $A_{\triangle ABC} = \dfrac{(12)^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$, $A_{\text{Semicirculo}} = \dfrac{\pi 6^2}{2} = 18\pi$.

Remplazando tenemos: $A_S = 36\sqrt{3} - 18\pi$

Problema 5.6.7. *En la figura 5.6.10, a y a′ son rectas paralelas y b es una transversal a ellas. ¿Cuántos puntos hay que estén a la misma distancia de las tres rectas?*

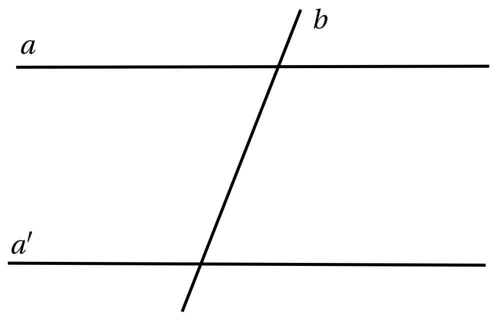


FIGURA 5.6.10

Solución.

Con la información dada hacemos la siguiente construcción auxiliar.

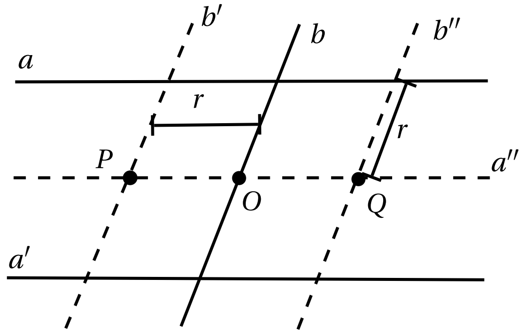


FIGURA 5.6.11

Los puntos deben pertenecer a una recta paralela a'' tal que la distancia a'' a a sea igual a la distancia de a'' a a'. Sea dicha distancia igual a r. Esta recta corta a la transversal b en el punto O. A partir de este punto tomamos la distancia r y a la derecha de O y marcamos el punto Q y la misma distancia la tomamos a la izquierda de O y la marcamos como P. Luego hay dos puntos que cumplen la condición pedida.

Problema 5.6.8. *¿Cuál es el área sombreada en la figura 5.6.12, siendo el cuadrado de lado 10?*

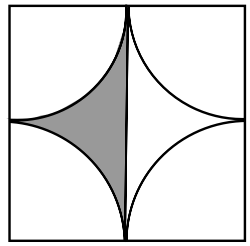


FIGURA 5.6.12

Con la información dada construimos la siguiente figura:

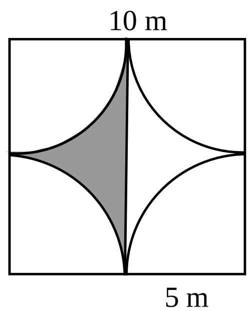


FIGURA 5.6.13

Tenemos que el área de la región sombreada es igual al área del cuadrado de lado 10 cm menos 2 veces el área de un cuarto de círculo de radio 5, es decir $A_{\square} = 10^2 = 100\ \text{cm}^2$.
$A_{\frac{1}{4}\bigcirc} = \dfrac{\pi 5^2}{2} = \dfrac{25\pi}{2}\ \text{cm}^2$, por lo tanto $A_S = A_{\square} - 2A_{\frac{1}{4}\bigcirc} = \left[10^2 - 2\left(\dfrac{\pi \cdot 5^2}{4}\right)\right]\text{cm}^2 = \left[100 - \dfrac{25}{2}\pi\right]\text{cm}^2$.

CAPÍTULO 6

PROBLEMAS PROPUESTOS PARA EL LECTOR

6.1. Problemas propuestos

Problema 6.1.1. *Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, demostrar que :*

a. *Los triángulos resultantes son semejantes entre si y semejante al triángulo dado.*

b. *La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divide.*

c. *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección sobre ella.*

d. *La altura correspondiente a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.*

Problema 6.1.2. *Dada la figura:*

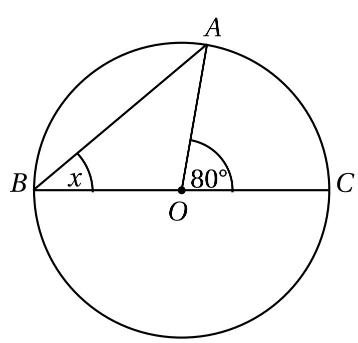


FIGURA 6.1.1

¿Cuánto vale el ángulo x?

Problema 6.1.3. *Un círculo, de 5 unidades de radio, tiene los diámetros $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ perpendiculares. Una cuerda $\overline{CH}$ de 8 unidades corta a $\overline{AB}$ en K; el diámetro $\overline{AB}$ queda dividido en dos segmentos. ¿Cuáles son sus medidas?*

Problema 6.1.4. *En la figura 6.1.2 el arco $\widehat{DB}$ mide 10° y el arco $\widehat{EA}$ mide 80°. ¿Cuánto vale el ángulo x?*

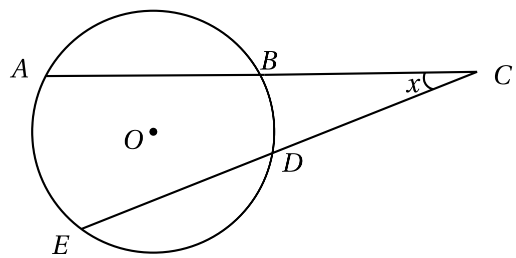


FIGURA 6.1.2

Problema 6.1.5. *Demostrar las siguientes propiedades sobre circunferencias.*

a. *En dos circunferencias exteriores la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

b. *En dos circunferencias tangentes exteriormente la distancia de los centros es igual a la suma de los radios.*

c. *En dos circunferencias secantes la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia.*

d. *En dos circunferencias interiores la distancia entre los centros es mayor que la diferencia de sus radios.*

Problema 6.1.6. *Si $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia, O es su centro, $AB = 4$ y $AO = 5$. ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia?*

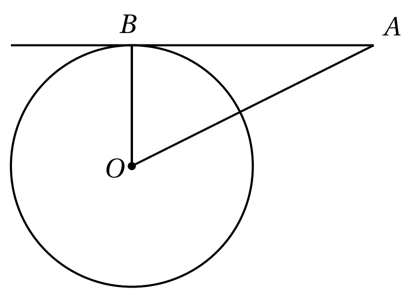


FIGURA 6.1.3

Problema 6.1.7. *¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un octágono?*

Problema 6.1.8. *Si los radios de una sucesión de círculos son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ centímetros. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los círculos?*

Problema 6.1.9. *La base de un triángulo es de 15 centímetros, dos rectas paralelas a la base cortan los lados dividiendo el triángulo en tres partes con áreas iguales. ¿Cuánto vale la longitud del segmento paralelo más cercano a la base?*

Problema 6.1.10. *Se tiene un cuadrado y un octágono inscrito en una circunferencia de radio r, tal como se muestra en la figura 6.1.4. ¿Cuánto mide el lado del octágono inscrito?*

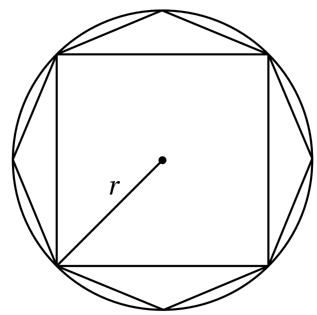


FIGURA 6.1.4

Problema 6.1.11. *En la figura 6.1.5 el ángulo central vale 100°. ¿Cuánto mide el ángulo y?*

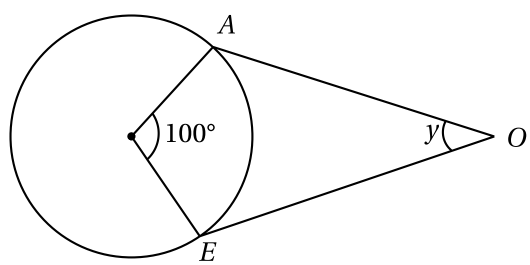


FIGURA 6.1.5

Problema 6.1.12. *En la figura 6.1.6 $AB = 4$ cm, $EC = 10$ cm y $CB = 5$ cm, ¿cuál es el valor de CD?*

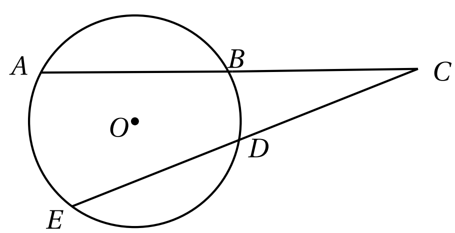


FIGURA 6.1.6

Problema 6.1.13. *Si se aumentan en 2 cm los lados de un cuadrado, su área aumenta en 20 cm^2. ¿Cuál es el lado del cuadrado?*

Problema 6.1.14. *¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal es* $6\sqrt{2}$*?*

Problema 6.1.15. *Un rectángulo tiene 12 m^2 de área y 16 m de perímetro. ¿Cuáles son las dimensiones de la base y la altura respectivamente?*

Problema 6.1.16. *En la figura 6.1.7, si* $AC = 8$ *cm y* $AC' = 10$ *y el área del* $ABC = 40\ m^2$. *¿Cuál es el área del triángulo* $AB'C'$*?*

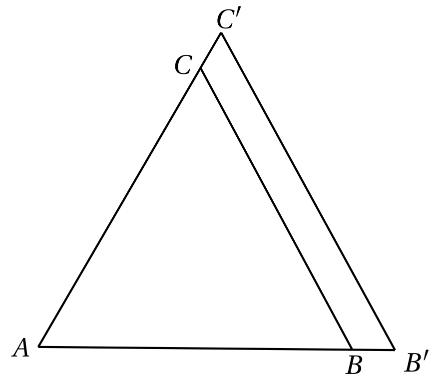


FIGURA 6.1.7

Problema 6.1.17. *En un triángulo* ABC*, el ángulo* A *es dos veces mayor que el* B*, hallar el lado* a *en función de* b *y* c.

Problema 6.1.18. *En el triángulo de la figura 6.1.8, el ángulo* x *vale 120°, entonces, ¿Cuánto vale el ángulo* y*?*

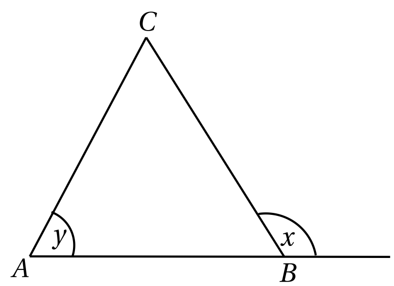


FIGURA 6.1.8

Problema 6.1.19. *En la siguiente figura* $\overline{OP} \parallel \overline{AB}$. *El ángulo* α *mide 50°, entonces, ¿Cuánto mide el ángulo* β*?*

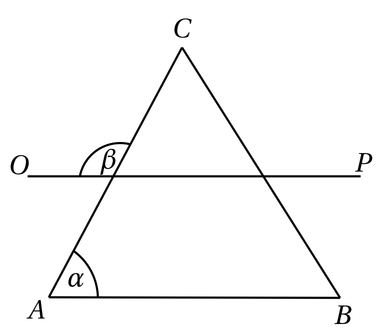


FIGURA 6.1.9

Problema 6.1.20. *El perímetro de un cuarto rectangular es 18 m y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. ¿Cuánto miden las diagonales del cuarto?*

Problema 6.1.21. *Exprese el área sombreada de la figura 6.1.10 en términos del parámetro a.*

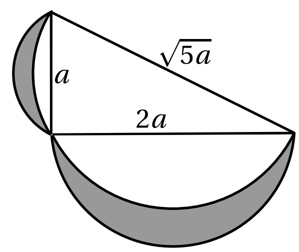


FIGURA 6.1.10

Problema 6.1.22. *Al hacer variar el ángulo α, la altura h, el lado x, el área y el perímetro del trapecio cambian.*

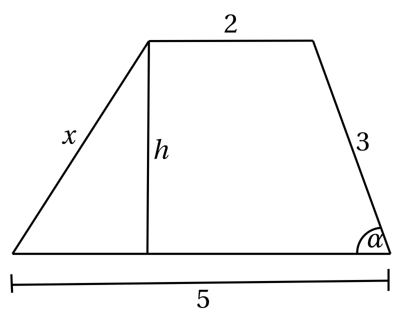


FIGURA 6.1.11

a. *¿Cuál es el valor de α para que el área el trapecio sea máxima?*

b. *¿Cuál es el valor de α para que el perímetro sea máximo?*

c. *¿Cuál es el valor de x que corresponde al área máxima?*

Problema 6.1.23. *En la figura 6.1.12 el arco BD mide 10° y el ángulo ABE mide 40°, entonces, ¿Cuánto mide el ángulo x?*

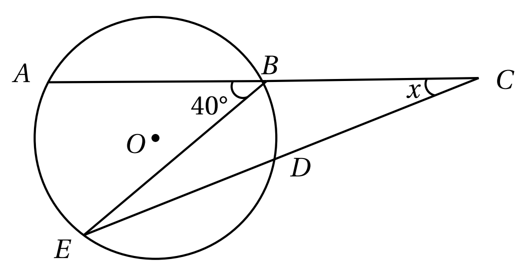


FIGURA 6.1.12

Problema 6.1.24. *¿Cuál es la menor longitud de una varilla de acero que se puede dividir en pedazos de 8 cm o en pedazos de 9 cm o de a 15 cm exactamente?*

Problema 6.1.25. *¿Cuál es la altura del trapecio de la figura 6.1.13?*

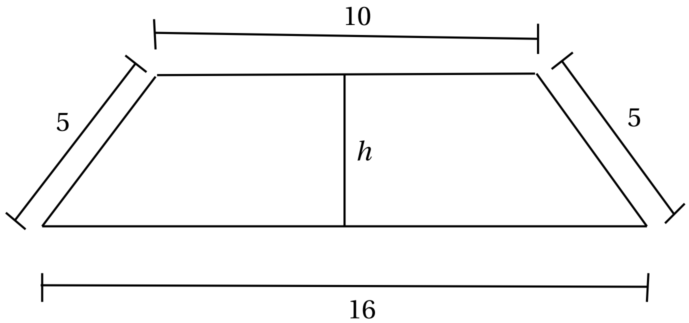


FIGURA 6.1.13

Problema 6.1.26. *En la figura 6.1.14,* $\widehat{AB} = 120^0$, $\widehat{CD} = 80^0$, *¿Cuánto vale el ángulo* $\angle BEA$*?*

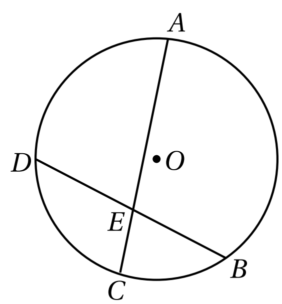


FIGURA 6.1.14

Problema 6.1.27. *En la figura 6.1.15,* $\overline{AB} \| \overline{CD}, \overline{OC}$ *es bisectriz del ángulo* α; *el ángulo* 4 *vale 120°; ¿Cuánto valen los ángulos 3 y 1 respectivamente?*

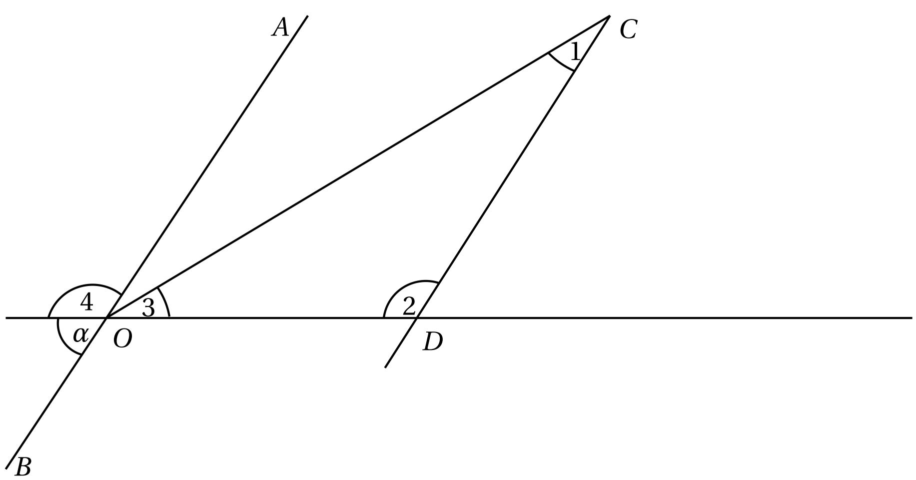


FIGURA 6.1.15

Problema 6.1.28. *En la figura 6.1.16, $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{BC} \perp \overline{CD}$ y $\overline{BC}$ es tangente al círculo con centro O y diámetro $\overline{AD}$. ¿En cuál (es) casos el área de $ABCD$ es un entero?*

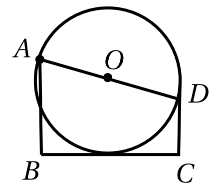


FIGURA 6.1.16

Problema 6.1.29. *Los triángulos ABC y BCD son isósceles y el ángulo BAC mide 30°. ¿Cuánto mide el ángulo AEC?*

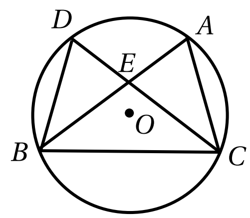


FIGURA 6.1.17

Problema 6.1.30. *La base de un triángulo mide 8 m. Dos segmentos paralelos a la base dividen al triángulo en tres sectores con áreas iguales. ¿Cuántos metros mide el segmento $\overline{AB}$?*

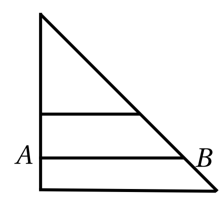


FIGURA 6.1.18

Problema 6.1.31. *Una de las diagonales de un rombo mide 20 cm y un lado 26 cm. ¿Cuál es su área?*

Problema 6.1.32. *Una parcela de tierra de 500 m^2 tiene forma rectangular, uno de los lados constituye el 80 por ciento del otro. ¿Cuánto miden sus lados?*

Problema 6.1.33. *Habiendo recorrido en auto los $\frac{3}{8}$ y los $\frac{4}{7}$ de la distancia entre los pueblos A y B, me faltan 9 km para llegar a B. ¿Cuál es la distancia en kilómetros entre los dos pueblos?*

Problema 6.1.34. *En un triángulo con lados a, b y c se ha inscrito una circunferencia cuyo diámetro se encuentra sobre el lado C. Hallar el radio de esta semicircunferencia.*

Problema 6.1.35. *Los catetos de un triángulo rectángulo son b y c respectivamente. Hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto.*

Problema 6.1.36. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo, y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, miden 3, 4, 12 y 13 respectivamente, además $\angle CBA$ es recto. ¿Cuál es el área de $ABCD$?*

Problema 6.1.37. *Determine el radio de la circunferencia en la figura 6.1.19, si el área sombreada es igual a 3 cm^2*

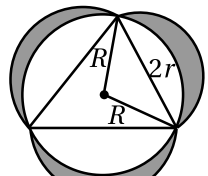


FIGURA 6.1.19

Problema 6.1.38. *En la figura 6.1.20, ¿cuál es la longitud de la bisectriz?*

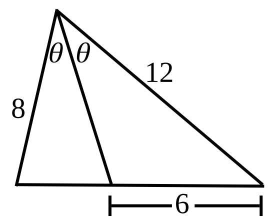


FIGURA 6.1.20

Problema 6.1.39. *En la figura 6.1.21, $\overline{BX}$ es una bisectriz y las longitudes de los lados del triángulo ABC son respectivamente 6, 12, y 16, ¿cuál es la distancia entre el punto X y el vértice del ángulo menor del triángulo ABC?*

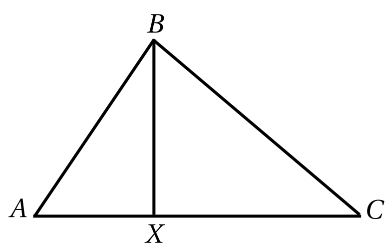


FIGURA 6.1.21

Problema 6.1.40. *La base de un rectángulo es el doble de su altura, si su área es 200 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?*

Problema 6.1.41. *¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal es $2\sqrt{2}$?*

Problema 6.1.42. *Se tienen dos varillas de acero de 48 m y 60 m de longitud que se quieren dividir en pedazos iguales de la mayor longitud posible. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo?*

Problema 6.1.43. *A un hexágono regular de 4 cm de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Hallar el área de la corona circular así formada.*

Problema 6.1.44. *En una circunferencia una cuerda de 48 cm dista 7 cm del centro. Calcular el área del círculo.*

Problema 6.1.45. *Las diagonales de un rombo miden 60 y 80 cm respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del rombo?*

Problema 6.1.46. *El trapecio $ABCD$ tiene 110 m^2 de área y los puntos M y N son los puntos medios de los lados no paralelos. ¿Cuál es en m^2, el área del cuadrilátero $AMNB$?*

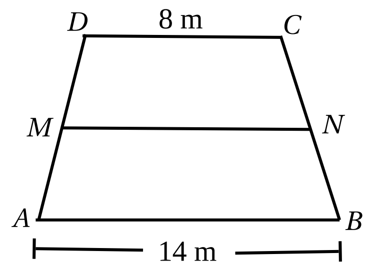


FIGURA 6.1.22

Problema 6.1.47. *En la figura 6.1.23 la región sombreada está formada por cuartos de círculos centrados en los vértices del cuadrado y tangentes en el centro. Hallar el valor de su área.*

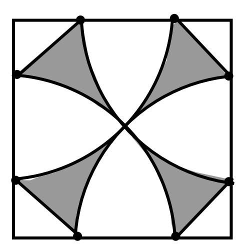


FIGURA 6.1.23

Problema 6.1.48. *En la figura 6.1.24 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AD}$, si $AB = 25$ m, $AD = 15$ m y $BC = 15$ m. ¿Cuál es en m^2 el área del trapecio?*

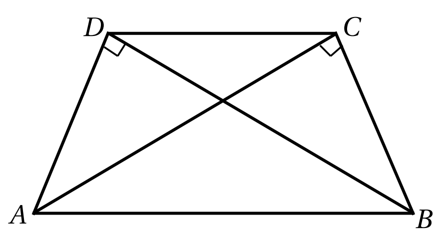


FIGURA 6.1.24

Problema 6.1.49. *El trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $AD = AB = BC = 1$ y $DC = 2$, donde AB es paralelo a DC. ¿Cuánto mide el ángulo CAD?*

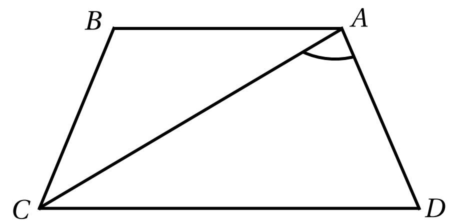


FIGURA 6.1.25

Problema 6.1.50. *Si el cuadrado $PQRS$ es de lado 20 cm, T el punto medio. Hallar el valor del área sombreada.*

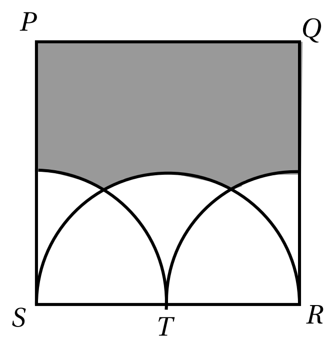


FIGURA 6.1.26

CONCLUSIONES

Tras la realización de este Trabajo de grado, se pueden acotar diversas afirmaciones que se constituyen en el sumario final del proceso cognoscitivo del universo Matemático-Geométrico expuesto a lo largo de este trabajo.

El devenir analítico de los axiomas y de los teoremas geométricos se instaura como un acercamiento teórico trascedente para la aprehensión de los postulados Euclidianos y para la aplicación de procedimientos operativos pragmáticos en la resolución de situaciones numéricas que involucran cálculos de perímetros, polígonos y áreas de regiones conocidas y desconocidas.

Todo este acervo académico, se proyectó en el presente trabajo como una posibilidad de aportar en el campo del saber y en la consecución de documentos que se constituyan en guías coherentes y dirigidas en la didáctica del mundo geométrico y su respectiva enseñanza. No obstante, resulta imprescindible afirmar que la consecución de cada uno de los objetivos planteados en el presente trabajo, fue conquistado junto a los aciertos correctivos de cada uno de los asesores que contribuyeron al desarrollo de este propósito.

Finalmente, es nuestro deseo señalar que el mundo geométrico es diverso y nutrido en su composición teórica; de ahí que resulta necesario que próximos estudios reflexivos, conduzcan al encuentro con enunciados históricos que enriquezcan la visión intelectual del mundo de la Geometría. Es así, como para nosotros resultó satisfactorio la ejecución de este proyecto que se instituye como un nuevo paradigma para la comprensión teórica y pragmática de la geometría, especialmente, de la Geometría Euclidiana.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Moise Edwin E. *Elementos de Geometría Superior*. Compañía Editorial Continental, S. A. Mexico,1968

[2] Moise Edwin E y Downs Floyd. *Geometría Moderna*. Editorial Addison-Wesley, México, 1966

[3] Baldor Aurelio. *Geometría y Trigonometría*. Editorial Publicaciones Cultural, México, 2004.

[4] Viedma C, Juan A. *Lecciones de Geométria Intuitiva*. Editorial Norma, Cali-Colombia.

[5] Stanley. R. Clemens y Phares G. O'Daffer *Geometria*. Editorial Addison Wesley Longman de México, S.A de C.V. 1998.

[6] Ivorra Castillo Carlos. *Geometría*. http://www.freelibros.com/2009/02/geometria-carlos-ivorra-castillo.html. 10:07 AM, 12 de Abril de 2012.

[7] De Castro Korgi, Rogrigo. *El universo del Latex*. Ed. Universidad Nacional de Colombia, 2004.