Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Teoría Espectral de Operadores Normales y Operadores Autoadjuntos en Espacios de Hilbert

Geany Soto Mañosca

Neiva, Huila
2012

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Teoría Espectral de Operadores Normales y Operadores Autoadjuntos en Espacios de Hilbert

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de licenciado en matemáticas

Geany Soto Mañosca
Código: 2007165911

Asesor:
Msc. Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2012

AGRADECIMIENTOS

"Dando siempre gracias por todo al Dios y Padre, en el nombre de nuestro Señor Jesucristo"; Efesios 5:20. A Dios gracias porque cada triunfo es POR su ayuda. A mi madre Deyanira Mañosca y mi padre Betuel Soto que han sido un apoyo incondicional, a mis hermanos, familiales en general. Al profesor Osmin Ferrer muchas gracias.

A mis compañeros porque esto no es un triunfo que se logra de la noche a la mañana sino con esfuerzo y dedicación, y que además cada persona a nuestro alrededor aporta su granito de arena, a todos mil gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Teoría espectral de operadores normales y operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert es el título del presente trabajo de grado, realizado por la estudiante Geany Soto Mañosca código 2007165911, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana, en el cual se ilustra el recorrido por una de las ramas más fructíferas del análisis matemático, como es la teoría de operadores, haciendo una breve reseña de la evolución y grandes aportes científicos conseguidos; en este recorrido muchos fueron los seres humanos que contribuyeron a la estructuración y consolidación de esta rama del análisis matemático, entre ellos Hilbert (1862-1943), Toeplitz (1881-1940), Calderon (1920-1998), Cotlar (1912-2007) entre otros.

Consideramos indispensable abrir un espacio para presentar conceptos y resultados previos que son fundamentales para el posterior desarrollo de algunos tipos de operadores, que siguen siendo muy importantes en el desarrollo científico en la actualidad.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Exponer los fundamentos teóricos e históricos sobre los cuales se sustentan los desarrollos conceptuales de la Teoría de operadores.

Objetivos Específicos

- Presentar una breve reseña histórica del desarrollo de la teoría de operadores.
- Enunciar y estudiar definiciones y resultados básicos del análisis funcional.
- Mostrar los primeros conceptos elementales de la Teoría de operadores.
- Realizar un estudio cualitativo de algunos tipos especiales de operadores en espacios de Hilbert.
- Demostrar el teorema espectral.
- Relacionar el teorema espectral con el desarrollo histórico de algunos modelos matemáticos.

JUSTIFICACIÓN

Afortunadamente para la humanidad nacio David Hilbert, personaje capaz de brindar otras formas de pensamiento, implicando con ello otras formas de observar las realidades.

Dentro del ámbito del conocimiento matemático es crucial cuando surge una teoria capaz de generalizar muchas otras alrededor de ella, sobretodo porque con ello se generaliza todo un lenguaje capaz de mostrar claramente la solución de muchos problemas y de agilizar la solución de ellos. También se abren muchas posibilidades de visionar la solución de problemas no resueltos y de generalizar muchos resultados.

Precisamente esto sucede con el Análisis Funcional, que como tal fue surgiendo a principios del siglo XX como el marco abstracto adecuado para solucionar una serie de problemas del Análisis muy importantes en esos momentos. Desde entonces ha experimentado un gran desarrollo y en este momento es una herramienta muy sofisticada útil para abordar una amplia variedad de problemas.

Desde el desarrollo del Cálculo Diferencial, al considerar las soluciones de una ecuación diferencial, se vio que en ocasiones era necesario considerar propiedades del espacio (o conjunto) de soluciones de la ecuación, pero no estaba claro cuál era la estructura que poseía dicho espacio de soluciones. Los trabajos de D. Bernouilli (1700-1782), Lagrange (1736-1813) y sobre todo Fourier (1772-1837) acerca de la resolución de ecuaciones diferenciales se empiezan a enfrentar a cuestiones que anticipan lo que será el desarrollo posterior del Análisis Funcional. Una de las características comunes a varios de estos procesos era el paso de un problema finito, por ejemplo la solución de un sistema finito de ecuaciones lineales, a la versión infinita del problema, lo que les fuerza a enfrentarse a situaciones de convergencia que en esa época no eran entendidos. Afortunadamente en una serier de esfuerzos de grandes matemáticos del momento se da la creación de la teoría de operadores como una herramienta sofisticada de resolver dichos problemas.

Esperamos que esta revisión, motive a quien generosamente lea este trabajo a profundizar en el tema, puesto que la gran variedad de problemas interesantes ligados a esta teoría es de gran interés y belleza.

CAPÍTULO 1

TOPOLOGÍA DE ESPACIOS MÉTRICOS

1.1. Espacios métricos

Definición: Sean X un conjunto no vacío, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se dice una ***métrica*** (o *una distancia*) si para todo $x, y, z \in X$ se cumple que:

(1) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x);\ \forall x, y \in X$ (Simetría)

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);\ \forall x, y, z \in X$ (Desigualdad Triangular)

Al par (X, d) se le llama ***espacio métrico***.

Observación:

Sean (X, d) un espacio métrico $M \subset X$ y $\tilde{d} : M \times M \to \mathbb{R}$ con $\tilde{d} = d \mid M$ entonces $(M, \tilde{d})$ es un espacio métrico.

Ejemplos:

1. **Recta Real $\mathbb{R}$.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define una métrica en $\mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|; \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. **Espacio Euclidiano.** Sea el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$; el espacio se obtiene si se toma el conjunto de todas las n-upla de números reales, con

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_j), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_j)$$

y la métrica Euclidiana definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \quad \geq 0.$$

3. **Espacio unitario n-dimencional**. $\mathbb{C}^n$ es el espacio de todas las n-upla de números complejos con la métrica definida

$$d(x,y)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+\ldots+|x_n-y_n|^2}\quad \geq 0.$$

4. **Espacio métrico discreto**. Sean X un conjunto no vacío y $d: X\times X\to\mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\neq y\\ 0 & \text{si } x=y\end{cases}$$

entonces (X,d) es un espacio métrico el cual se llama ***espacio métrico discreto***.

Así todo conjunto no vacío se puede convertir en un espacio métrico con la métrica discreta.

1.2. Espacio Sucesión ℓ^∞.

Sea ℓ^∞ el conjunto de todas las sucesiones de números complejos,

$$\ell^\infty(\mathbb{C}) \ = \ \left\{x : x=(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}};\ \xi_j\in\mathbb{C}\right\}$$

para todo $j=1,2,\ldots$ se tiene $|\xi_j|\leq C_x$,

$$d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j-\eta_j|;\qquad x=\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}},\ \ y=\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$$

1.3. Espacio Funcional $C[a,b]$

Sea X el conjunto de todas las funciones a valores reales de una variable real t independiente y continua en un intervalo cerrado $J=[a,b]$. Se define la métrica:

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|$$

Ejercicio: Si (X,d) es un espacio métrico, se prueba que $(X,\tilde{d})$ dado por

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\ \text{ es una métrica}$$

Prueba.

i. Se quiere probar que:

$$\tilde{d}(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0$$

como $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ por ser d una métrica en X, entonces:

Si $x=y\to d(x,y)=0\ \wedge\ 1+d(x,y)>0$ luego $\tilde{d}(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}=0$

ii. Como $d(x,y)=d(y,x)\ \ \forall x,y\in X$ por ser d una métrica en X, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,y)=&\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\\ =&\frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}\\ =&\tilde{d}(y,x)\end{aligned}$$

iii. Veamos que $\tilde{d}(x,z) \leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z) \;\; \forall x,y,z \in X$ es decir

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \quad \forall x,y,z \in X$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\
\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,z)} \\
&\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,z)} \\
&\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\
&\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\
\tilde{d}(x,z) &\leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)
\end{aligned}$$

1.4. Ejemplos adicionales de Espacios Métricos

1.4.1. Espacio secuencial S

Se considera el conjunto $S = \{x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} : \xi_j \in \mathbb{C}\}$ y una mética definida

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|}$$

con $x = (\xi_j)$, $y = (\eta_j)$ entonces (S,d) es un espacio métrico.

Prueba.
Definace $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$ con $t \geq 0$ derivando se tiene, $f'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0, \;\; \forall t \geq 0$, luego f es creciente. Secuencialmente

$$\begin{aligned}
|a+b| &\leq |a| + |b|, \;\; \text{entonces} \\
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a+b|} + \frac{|b|}{1+|a+b|} \\
&\leq \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\
&\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}
\end{aligned}$$

En la desigualdad, $a = \xi_j - \gamma_j$ y $b = \gamma_j - \eta_j$, donde $z = (\gamma_j)$. Entonces $a + b = \xi_j - \eta_j$, luego

$$\frac{|\xi_j - \eta_j|}{1+|\xi_j - \eta_j|} \leq \frac{|\xi_j - \gamma_j|}{1+|\xi_j - \gamma_j|} + \frac{|\gamma_j - \eta_j|}{1+|\gamma_j - \eta_j|}$$

Si se multiplica a ambos lados por $\frac{1}{2^j}$ y se suma j al lado de 1 hasta ∞, se obtiene $d(x,y)$ sobre el lado izquierdo y la suma de $d(x,z)$ y $d(z,y)$ sobre el lado derecho,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Por tanto S es un espacio métrico.

1.4.2. Espacio $B(A)$ de funciones acotadas

Sean $B(A) = \{x : x : A \to \mathbb{R},\ \ x \text{ acotada}\}$ y

$$d(x,y) = \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)|$$

entonces $(B(A), d)$ es un espacio métrico.

Prueba.

Si $S, W \subset \mathbb{R}$ tal que $s \leq w,\ \forall s \in S, \forall w \in W$ entonces $\sup S \leq \sup W$.
Donde $S = \{|x(t) - y(t)|,\ t \in A\}$ y $W = \{|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|,\ t \in A\}$

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)| &\leq \sup_{t\in A} |x(t) - z(t)| + \sup_{t\in A} |z(t) - y(t)| \end{aligned}$$

1.4.3. Espacios ℓ^p

Sea $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$, se define cada elemento del espacio ℓ^p como

$$\ell^p = \left\{ x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \middle/ \ \xi_j \in \mathbb{R},\ \text{ y, } \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}$$

y una métrica

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p}$$

donde $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}},\ \ y = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$, se tiene que (ℓ^p, d) es un espacio métrico. Para la prueba primero se necesita una desigualdad auxiliar (Lema 1), y luego la desigualdad de Hölder y Minkowski.

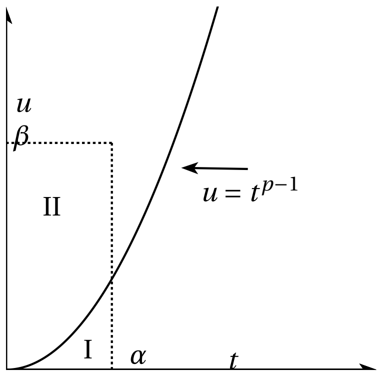
1.4.4. Lema 1:

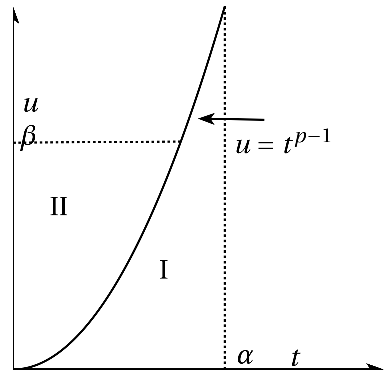
Sea $p \geq 1$ y q tal que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, entonces $\alpha\beta \leq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q};\ \ \forall \alpha, \beta \geq 0$

Prueba.

Si $\dfrac{p+q}{pq} = 1$ entonces $p + q = pq$, luego $(p-1)(q-1) = 1$ de donde $\dfrac{1}{p-1} = q - 1$, como

$$u = t^{p-1} \text{ lo cual equivale a } t = u^{\frac{1}{p-1}} = u^{q-1}$$





$$I=\int_0^{\alpha} t^{p-1}dt \qquad II=\int_0^{\beta} u^{q-1}du$$

$$\alpha\beta \le I+II, \quad \text{por tanto}$$

$$\alpha\beta \le \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

1.4.5. Desigualdad de Hölder

Si $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, para $p>1$ entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j| \le \left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}$$

Prueba.

Si $\xi_j=0;\ \forall j$ ó $\eta_j=0;\ \forall j$, listo.
Supongase que existe j,k tal que $\xi_j\neq 0$ y $\eta_j\neq 0$, se toma:

$$\overline{\xi_j}=\frac{|\xi_j|}{\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}} \qquad \text{y} \qquad \overline{\eta_j}=\frac{|\eta_j|}{\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}}$$

por el **Lema 1**

$$|\overline{\xi_j}\,\overline{\eta_j}| \le \frac{|\overline{\xi_j}|^p}{p}+\frac{|\overline{\eta_j}|^q}{q}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\overline{\xi_j}\,\overline{\eta_j}| \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|}{\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}} \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j| \le \left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}$$

1.4.6. Desigualdad de Minkowski

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right]^{1/p}$$

para todo $p \geq 1$ fijo.

Prueba.

Si $p = 1$, se tiene la desigualdad triangular.
Si $p > 1$, se toma $w_j = \xi_j + \eta_j$. Por la desigualdad triangular:

$$|w_j|^p = |\xi_j + \eta_j||w_j|^{p-1} \leq (|\xi_j| + |\eta_j|)|w_j|^{p-1}; \text{ sumando}$$

$$\sum_{j=1}^{N} |w_j|^p \leq \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|\,|w_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{N} |\eta_j|\,|w_j|^{p-1}$$

$$\leq \left[\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{j=1}^{N} |w_j|^{(p-1)q}\right]^{1/q} + \left[\sum_{j=1}^{N} |\eta_j|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{j=1}^{N} |w_j|^{(p-1)q}\right]^{1/q}$$

con $p = (p-1)q$

$$= \left\{\left[\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{j=1}^{N} |\eta_j|^p\right]^{1/p}\right\} \left[\sum_{j=1}^{N} |w_j|^p\right]^{1/q}$$

Si $w_j = 0$; $\forall j$, se tiene la igualdad. Supóngase que $w_j \neq 0$ para algún j,

$$\left[\sum_{j=1}^{N} |w_j|^p\right]^{1-1/q} \leq \left[\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{j=1}^{N} |\eta_j|^p\right]^{1/p}$$

Si $N \longrightarrow \infty$, queda

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right]^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p\right]^{1/p} \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left\{|\xi_j - \alpha_j| + |\alpha_j - \eta_j|\right\}^p\right]^{1/p} \\
&\leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \alpha_j|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j - \eta_j|^p\right]^{1/p} \\
d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}$$

Por tanto ℓ^p con $p \geq 1$ es un espacio métrico.

1.5. Bola y Esfera

Definición: Sean (X,d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Se definen tres tipos de conjuntos:

$i)$ $B_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0,x) < r\}$; bola abierta.

$ii)$ $\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0,x) \leq r\}$; bola cerrada.

$iii)$ $S_r(x_0) := \{x \in X : d(x_0,x) = r\}$; esfera.

En cada caso x_0 es el centro y r el radio.

Observación: La definición implica que, $S_r(x_0) = \check{B}_r(x_0) - B_r(x_0)$.

Ejemplo 1:
Sea (X,d) un espacio métrico discreto, y dado $x_0 \in X$ y $r = 1$, entonces

$$d(x,x_0) < 1 \Rightarrow x = x_0 \text{ por tanto } B_1(x_0) = \{x_0\}$$

Ejemplo 2:
Dado el conjunto $X = \mathbb{R}$, y $r = 1$, entonces

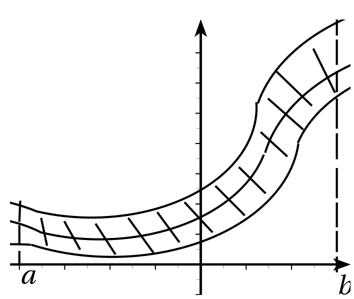
$$\begin{aligned} B_r(x_0) = B_1(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < 1\} \\ &= (x_0 - 1, x_0 + 1) \end{aligned}$$

Ejemplo 3:
Sea $X = \mathbb{C}$, y $r = 1$, luego

$$\begin{aligned} B_r(x_0) = B_1(x_0) &= \{x \in \mathbb{C} / |x - x_0| < 1\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / [(a-a_0)^2 + (b-b_0)^2] < 1\} \end{aligned}$$

Ejemplo 4:
Sea $X = C[a,b]$, y $r = 1$, por tanto

$$B_1(x_0) = \{x \in C[a,b] / |x(t) - x_0(t)| < 1; \ \forall\, t \in C[a,b]\}$$



1.5.1. Conjunto Abierto, Conjunto Cerrado

Definición: Sean (X,d) un espacio métrico. Se define:

$i)$ $M \subset X$, es ***abierto*** si para todo $x_0 \in M$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset M$.

$ii)$ $A \subset X$ es ***cerrado***, si A^C con respecto a X es abierto.

$iii)$ Una ***vecindad*** de x_0, es un conjunto abierto que contiene a x_0.

$iv)$ x_0 es un ***punto interior*** de un conjunto $M \subset X$, si existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset M$.

$v)$ Para $M \subset X$, sea $int(M) = \{x / x$ es un punto interior de $M\}$ (Es el conjunto abierto más grande contenido en M).

1.5.2. Proposición

Una bola abierta es un conjunto abierto:
Sea $x \in B_r(x_0)$, tal que existe $0 < \delta < r - d(x_0, x)$ entonces $B_\delta(x) \subset B_r(x_0)$. Dado $y \in B_\delta(x)$, luego:

$$\begin{aligned} d(y, x_0) &\leq d(y, x) + d(x, x_0) \\ &\leq \delta + d(x, x_0) \\ &< r - d(x_0, x) + d(x, x_0) = r \end{aligned}$$

por tanto $y \in B_r(x_0)$.

1.5.3. Funciones Continuas

Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $T : X \longrightarrow Y$ es continua en un punto $x_0 \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$d_X(x_0, x) < \delta \longrightarrow d_Y(Tx_0, Tx) < \varepsilon$$

equivalente a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \big/$ si $x \in B_\delta(x_0) \longrightarrow T(x) \in B_\varepsilon(T(x)_0)$.
T es continua en X si es continua para todo $x \in X$

1.5.4. Teorema: Funciones Continuas

Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si para todo $A \subset Y$ abierto en Y, se tiene que $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$ es abierto en X

Prueba.

$i.$ Sea $A \subset Y$, A abierto en $(Y, \check{d})$. Veamos que $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, d). Si $f^{-1}(A) = \phi$ es abierto. Supongamos que $f^{-1}(A) \neq \phi$. Sea $x_0 \in f^{-1}(A)$ entonces $x_0 \in X$ y $f(x_0) \in A$. Como $f(x_0) \in A$ es un punto interior de A. Existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset A$. Como f es continua en X en particular lo es en $x_0 \in X$; Así, $f(B_\varepsilon(x_0, \delta)) \subset B_X(f(x_0), \varepsilon) \subset A$ entonces $f(B_\varepsilon(x_0, \delta)) \subset A$ luego $B_\varepsilon(x_0, \delta) \subset f^{-1}(A)$; Donde (x_0) es punto interior de $f^{-1}(A)$, por tanto $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, d).

$ii.$ Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(x_0)) \subset Y$ como $B_\varepsilon(f(x_0))$ es abierto, entonces $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ es abierto en X, esto es si $d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.

1.5.5. Punto de Acumulación, Clausura

Sean (X, d) un espacio métrico, $M \subset X$ y $x_0 \in X$ es un ***punto de acumulación*** de M ($x_0 \notin M$ ó $x_0 \in M$), si dado $r > 0$ existe $x \in M$ con $x \neq x_0$ tal que $x \in B_r(x_0)$.
Al conjunto $\overline{M} = M \bigcup \{x \in X / x$ punto de acumulación de $M\}$ se le llama ***la clausura*** de M.

1.5.6. Conjunto Denso, Espacio Separable

Sean (X,d) un espacio métrico, $M \subset X$ es ***denso*** en X, si $\overline{M} = X$.

M es ***contable*** si existe $f : \mathbb{N} \to M$, biyectiva ó si M es finito.

X se llama ***separable*** si contiene un conjunto denso en X que es contable.

Ejemplos:

(1) El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) es separable.

Prueba. El conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ es contable, además $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(2) El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$) es separable.

Prueba. $S = \{x + yi / x, y \in \mathbb{Q}\}$ entonces $\overline{S} = \mathbb{C}$ y S es contable.

(3) Un espacio métrico discreto (X,d) es separable si y solo si X es contable.

Prueba. Sea $D \subset X$, D denso en X, y $x_0 \in X = \overline{D}$, existe $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D$ tal que $x_k \to x_0$ pero si $x_k \neq x_0$, $d(x_k, x_0) = 1$, $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geq N$, $x_k = x_0 \ \wedge \ x_0 \in D \Rightarrow X \subset D$ y $D \subset X$ luego $D = X$.

(4) El espacio ℓ^{∞} no es separable.

$$f : \{y = (y_i) : y_i = 0 \text{ ó } 1\} \longrightarrow \{x \in [0,1] : x = 0, x_1 x_2 \ldots\}.$$

Prueba. Sea $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ una sucesión de ceros y unos, entonces $y \in \ell^{\infty}$ para este

$$\begin{aligned} y \longrightarrow \hat{y} &= \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \end{aligned}$$

luego $\{y : \hat{y} \in [0,1]\}$ no es contable. Si $x \neq y$, $d(x,y) = 1$; $x, y = 0,1,\ldots$ se toma $B_{\frac{1}{3}}(x)$, $x = 1,0,\ldots$ $B_{\frac{1}{3}}(x) \bigcap B_{\frac{1}{3}}(y) = \phi$; $\forall x \neq y$, estos conjuntos no son contables. Si M es denso en ℓ^{∞}, cada bola de estas contiene un punto de M, entonces M no es contable.

(5) El espacio ℓ^p es separable, con $1 \leq p < +\infty$.

Prueba. Sea $M = \{y = (\eta_j) \ / \ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, 0, 0, \ldots)\}$ donde $k \in \mathbb{N}$, $\eta_k \in \mathbb{Q}$. M es contable. Sea $x = (\xi_j) \in \ell^p$, entonces para $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \dfrac{\varepsilon^p}{2}$, como los racionales son densos en $\mathbb{R}$. Para cada ξ_j existe η_j "cerca de él". Por tanto $y = (\eta_j)$ que satisface $\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p < \dfrac{\varepsilon^p}{2}$

$$[d(x,y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p, \qquad \text{de aquí } d(x,y) < \varepsilon$$

1.6. Sucesión Convergente

Definición: Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X,d) se dice ***convergente*** (o que converge) si existe $x \in X$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0; \ \exists K \in \mathbb{N}; \ \forall n \geq K; \ d(x_n, x) < \varepsilon$$

A x se llama el límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ó simplemente } x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Un conjunto $M \subset X$ es acotado si su diametro es finito, es decir, $d(M) = \sup\{d(x,y) : x, y \in M\} < \infty$.
Se dice que una ***sucesión es acotada*** si su rango es acotado.
Obviamente M es acotado sii existe $r > 0$ tal que $M \subset B_r(x_0)$ donde $x_0 \in X$.

1.6.1. Lema: Cota, límite

Sea (X,d) un espacio métrico:

(a) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión convergente, entonces es acotada y su límite es único.

Prueba. Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión convergente, entonces existe $x_0 \in X$ tal que, dado $\varepsilon = 1 > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < 1$ para todo $n \geq K$. Sea $r = \max\{1, d(x_1,x_0), d(x_2,x_0), ..., d(x_{N-1},x_0)\}$ así que $d(x_n,x_0) < r; \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x_n \to x_1, \; x_n \to x_2$

$$0 \leq d(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_n) + d(x_n,x_2) < \varepsilon; \;\; \forall \varepsilon > 0$$

Luego $d(x_1,x_2) = 0$, así que $x_1 = x_2$.

(b) Si $x \to y$, y $y_n \to y$, entonces $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$

Prueba.

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$$

$$d(x_n,y_n) - d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(y,y_n)$$

$$|d(x_n,y_n) - d(x,y)| < d(x_n,x) + d(y,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

1.6.2. Sucesión de Cauchy

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X,d), es de ***Cauchy***, si

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists K \in \mathbb{N} \; / \; m,n \geq K \to d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

1.6.3. Completo

Un espacio métrico (X,d) se dice ***Completo*** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.

Ejemplos

- $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son espacios métricos completos.
- $\mathbb{R} - \{x_0\}$ es incompleto.
  Sea $a_n = \frac{1}{n}$, en $\mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, luego la sucesión es de cauchy pero no es convergente a $\mathbb{R} - \{0\}$ por tanto es incompleto.
- $(0,1)$ es incompleto.
  Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$, en $(0,1)$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, luego la sucesión es de cauchy pero no es convergente a $(0,1)$ por tanto es incompleto.

1.6.4. Teorema: Sucesión Convergente

Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.

Prueba. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión convergente, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq K$ entonces $d(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pero si $m, n \geq K$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

1.6.5. Teorema: Subespacio Completo

Sea (X, d) un espacio métrico completo, $M \subset X$.

$i)$ Si M es completo, entonces M es cerrado.

$ii)$ Si M es cerrado, entonces M es completo.

Prueba.

$i)$ Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que $x_n \to x$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y M es completo, entonces $x \in M$. Luego $\overline{M} = M$.

$ii)$ Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ una sucesión de Cauchy, como X es completo, existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \to x_0$, luego x_0 es un punto de acumulación de M, entonces $x_0 \in M$.

1.6.6. Teorema: Funciones continuas

Una función $T : X \to Y$ con un espacio métrico (X, d) y un espacio métrico $(Y, \check{d})$, es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si $x_n \to x_0$ implica $Tx_n \to Tx_0$

Prueba.

$i)$ Asumir que T es continuo en x_0. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $d(x_n, x_0) < \delta$, luego para $n \geq N$, $d(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$.

$ii)$ Asumiendo que $x_n \to x_0$ implica $Tx_n \to Tx_0$. Supongase que T no es continuo en x_0, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, si $d(x, x_0) < \delta \ \wedge d(Tx, Tx_0) \geq \varepsilon$ pero $d(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n} = \delta$ ya que $x_n \to x_0 \ \wedge \ d(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$, luego es una contadicción, por tanto T es continuo en x_0.

1.7. Ejemplos. Pruebas de Completez

1.7.1. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son completos

Prueba.

Veamos que $\mathbb{R}^n$ es completo. Sea $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ con $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \ldots, \xi_n^m)$ una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $r, m \geq N$ implica que:

$$d(x_m, x_r) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^m - \xi_j^r)^2\right]^{1/2} < \varepsilon$$

Por tanto $(\xi_j^m - \xi_j^r)^2 < \varepsilon^2$ para $r, m \geq N$; $\forall j = 1, ..., n$, luego si $r, m \geq N$, $|\xi_j^m - \xi_j^r| < \varepsilon$; $\forall j = 1, ..., n$ por tanto $(\xi_j^1, \xi_j^2, ...)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$; $\forall j = 1, ..., n$. Como $\mathbb{R}$ es completo existe $\xi_j \in \mathbb{R}$ tal que $\xi_j^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \xi_j$. Usando estos $n-$límites se define $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, claramente $x \in \mathbb{R}^n$. Luego

$$\left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^m - \xi_j^r)^2\right]^{1/2} < \varepsilon$$

haciendo que $r \to \infty$, queda

$$d(x_m, x) = \left[\sum_{j=1}^{n} (\xi_j^m - \xi_j)^2\right]^{1/2} \leq \varepsilon$$

La completez de $\mathbb{C}$ es similar.

1.7.2. ℓ^∞ es completo

Prueba.

Sea $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞ con $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, ...)$, por tanto dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $r, m \geq N$ entonces

$$\begin{aligned} d(x_m, x_r) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j^m - \xi_j^r| < \varepsilon, \text{ entonces} \\ |\xi_j^m - \xi_j^r| < \varepsilon;\ \forall j \in \mathbb{N};\ m, r \geq N \end{aligned}$$

Así que $(\xi_j^m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$; $\forall j \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ son completos, existe $\xi_j \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ tal que $\xi_j^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \xi_j$; $\forall j \in \mathbb{N}$; se define $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ como

$$|\xi_j^m - \xi_j^r| < \varepsilon;\ \forall j \in \mathbb{N}, \text{ si } r \to \infty, \text{ queda}$$

$$|\xi_j^m - \xi_j| \leq \varepsilon;\ \forall j \in \mathbb{N}, \text{ y } m \geq N$$

Como $x_n \in \ell^\infty$, existe K_m constante tal que $|\xi_j^m| \leq K_m$; $\forall j \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned} |\xi_j| = |\xi_j - \xi_j^m + \xi_j^m| &\leq |\xi_j - \xi_j^m| + |\xi_j^m| \\ &\leq \varepsilon + K_m \end{aligned}$$

por tanto $x \in \ell^\infty$, además

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j^m - \xi_j| \leq \varepsilon \text{ y } m \geq N$$

así que $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$

1.7.3. Completez de $\mathbb{C}$

Sea $C = \{x = (\xi_j)\ /\ \xi_j \in \mathbb{C} \text{ con } x \text{ convergente}\} \subset \ell^\infty$

1.7.4. Completez de ℓ^p

ℓ^p con $1 \leq p \leq \infty$ es completo.
Prueba.
Sea $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p, donde $x_m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \ldots)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, r \geq N$ entonces

$$d(x_m, x_r) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m - \xi_j^r|^p \right]^{1/p} < \varepsilon$$

Por tanto, para $r, m \geq N$ se tiene $|\xi_j^m - \xi_j^r| < \varepsilon$; $\forall j \in \mathbb{N}$, luego $(\xi_j^m)_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números, así que existe $\xi_j \in \mathbb{C}$ tal que $\xi_j^m \to \xi_j$, usando dichos límites se define $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$, veamos que $x \in \ell^p$ y $x_m \to x$, luego

$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^m - \xi_j^r|^p < \varepsilon^p, \text{ si } r \to \infty$$
$$\sum_{j=1}^{k} |\xi_j^m - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p$$

Si $k \to \infty$, $\quad \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^m - \xi_j|^p \leq \varepsilon^p, \; m \geq N.$
Por tanto $x_m \to x$.
Esto muestra que $x_m - x = (\xi_j^m - \xi_j) \in \ell^p$, luego $x = x - x_m + x_m$, entonces

$$\begin{aligned} \| x \|_{\ell^p} &= \| x - x_m + x_m \|_{\ell^p} \\ &\leq \| x - x_m \|_{\ell^p} + \| x_m \|_{\ell^p} < \infty \end{aligned}$$

1.7.5. Completez de $C[a, b]$

$C[a, b]$ es completo con la métrica del máximo
Prueba.
Sea $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C[a, b]$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, r \geq N$ se tiene

$$d(x_m, x_r) = \max_{t \in [a,b]} |x_m(t) - x_r(t)| < \varepsilon$$

Por tanto para $t_0 \in [a, b]$ fijo y

$$m, r \geq N; \; |x_m(t_0) - x_r(t_0)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Por tanto $(x_m(t_0))_{m=1}^{\infty}$, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo existe $\lim_{m\to\infty} x_m(t_0)$, se define:

$$\begin{aligned} X : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t) \end{aligned}$$

Ahora $x \in C[a, b]$ y $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$.
De (1), $|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon$; $\forall t \in [a, b]$, $(r \to \infty)$ por tanto $\max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon$, así que $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x$, uniformemente en $[a, b]$, por tanto $x \in C[a, b]$.

1.7.6. Teorema: Convergencia Uniforme

Si $x_m \to x$ en $C[a,b]$ entonces $x_m \to x$ de manera uniforme en $[a,b]$

1.8. Ejemplos de Espacios Métricos Incompletos

1.8.1. Espacio $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ con métrica $d(x,y) = |x-y|$ es incompleto

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$$

1.8.2. Polinomiales

$P = \{P(x) \ / \ P \text{ es un polinomio en } [a,b]\}$ y

$$d(P_1,P_2) = \max_{x\in[a,b]} |P_1(x) - P_2(x)|;$$

(P,d) no es completo.

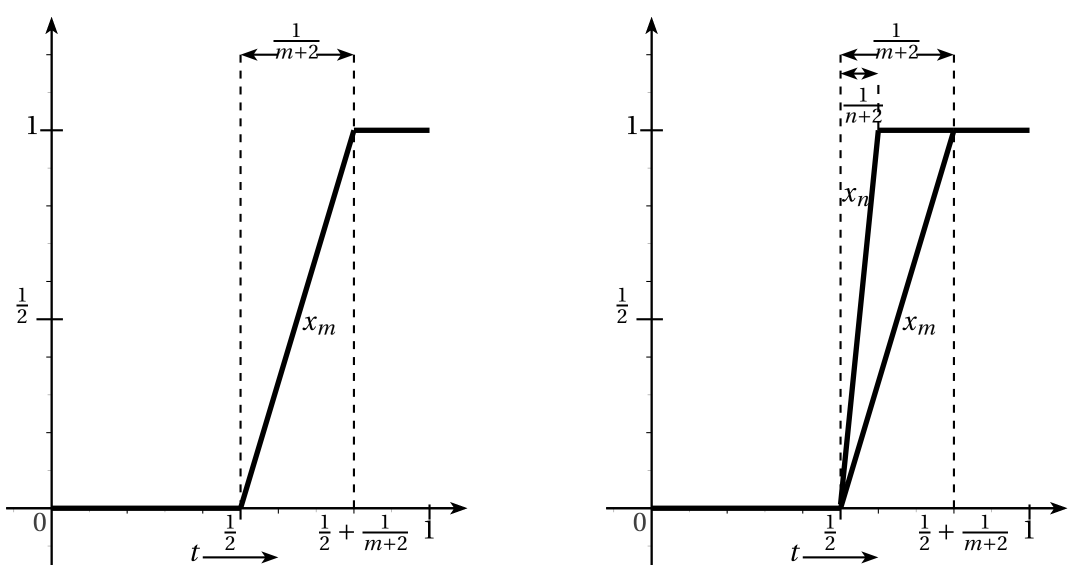
1.8.3. Funciones Continuas

$$C[0,1] \text{ y } d(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|dt; \ \ (C[0,1],d) \text{ no es completo}$$

Prueba.

Sea $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dado de la siguiente forma

$$m(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \\ (m+2)x - \frac{m}{2} - 1 & \text{si} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}\right] \\ 1 & \text{si} \quad t \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}, 1\right] \end{cases}$$



$$A_T = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).(1) = \frac{1}{m+2} - \frac{1}{n+2} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

$$d(x_m, x_n) = \frac{1}{m+2} - \frac{1}{n+2}$$

Si $\varepsilon > 0$, existe $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Si $m > n \geq N$; $\quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$, es de Cauchy en $C[0,1]$. Sea $x \in C[0,1]$ con $x_m \to x$.

$$\begin{aligned} d(x_m, x) &= \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|dt \\ &= \int_0^{1/2} |x(t)|dt + \int_{1/2}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}} |x_m(t) - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}^1 |1 - x(t)|dt \\ &\int_0^{1/2} |x(t)|dt \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \text{ porque } x(t) = 0 \text{ en } [0,1/2) \\ &\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}}^1 |1 - x(t)|dt \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \text{ entonces } x(t) = 1, \ x \in (1/2, 1] \\ &\int_{1/2}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}} |x_m(t) - x(t)|dt \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

$x(t) = 0$; $\forall t \in [0,1/2)$ y $x(t) = 1$; $\forall t \in (1/2, 1]$ tal que $x \notin C[0,1]$

CAPÍTULO 2

ESPACIOS NORMADOS. ESPACIOS DE BANACH

2.1. Espacio Vectorial

Un conjunto no vacío X sobre un cuerpo K, junto con dos operaciones $+, \cdot$ es un ***espacio vectorial*** (o espacio lineal), si satisface los siguientes axiomas

1. La operación suma, asocia a cada par de vectores x, y de X un vector $x+y$ de X y además se tiene las siguientes propiedades

   $i)$ Conmutativa: $x+y=y+x$

   $ii)$ Asociativa: $x+(y+z)=(x+y)+z$

   $iii)$ Existe un único vector 0 de X, llamado vector nulo: $x+0=x$

   $iv)$ Para cada vector $x\in X$, existe un único vector $-x\in X$: $x+(-x)=0$

2. La operación multiplicación por escalar, asocia a cada escalar $\alpha\in K$ y cada $x\in X$ un vector $\alpha x\in X$ y tiene las siguientes propiedades

   $i)$ $1x=x$ para todo $x\in X$

   $ii)$ $(\alpha_1\alpha_2)x=\alpha_1(\alpha_2 x)$

   $iii)$ $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

   $iv)$ $(\alpha_1+\alpha_2)x=\alpha_1 x+\alpha_2 x$

2.2. Espacios Normados.

Definición: Sea X un espacio vectorial sobre K ($\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$), una norma en X es una función

$$\|\cdot\|: X\longrightarrow\mathbb{R}$$

tal que:

(a) $\|x\|\geq 0;\ \forall x\in X$

(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(c) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|;\ \alpha\in K$

(d) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

Un espacio vectorial en el cual se ha definido una norma es un ***espacio normado***.

Ejercicio:
En un espacio vectorial, toda norma induce una métrica. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado entonces (X, d) es un espacio métrico, donde

$$\begin{aligned} d :& X \times X \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto d(x, y) = \| x - y \| \end{aligned}$$

Prueba.

$$\begin{aligned} i)\ \ d(x,y) = 0 &\leftrightarrow \| x - y \| = 0 \\ &\leftrightarrow x - y = 0 \\ &\leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ \ d(x,y) &= \| x - y \| \\ &= \| (-1)(y-x) \| \\ &= |-1| \, \| y - x \| \\ &= \| y - x \| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii)\ \ d(x,y) &= \| x - y \| \\ &= \| (x-z) + (z-y) \| \\ &\leq \| x - z \| + \| z - y \| = \qquad d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

2.2.1. Espacio de Banach

Definición: Un ***espacio vectorial normado*** X, el cual es completo con relación a la métrica inducida por la norma, se denomina un espacio de Banach.

2.2.2. Proposición

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces

$i)$ $| \| x \| - \| y \| | \leq \| x - y \|$

$ii)$ $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Prueba.

$i)$ $\| x \| = \| x - y + y \| \leq \| x - y \| + \| y \|$,
luego $\| x \| - \| y \| \leq \| x - y \|$; cambiando $x \to y$; $y \to x$, se obtiene
$\| y \| - \| x \| \leq \| y - x \|$

$ii)$ De acuerdo a $i)$, la función $\|\cdot\|$ es continua; pues por cada elemento que se toma del espacio, su imagen cae en los números reales.

Ejemplos:

2.2.3. Espacio $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios de Banach con normas dadas por

$$\| x \| = \left(\sum_{K=1}^{n} | \xi_K |^2 \right)^{1/2}$$

luego, la métrica inducida por la norma

$$d(x,y) = \| x - y \| = \left(\sum_{K=1}^{n} | \xi_K - \eta_K |^2 \right)^{1/2}$$

2.2.4. Espacio ℓ^p

ℓ^P, $1 \leq P < \infty$ es de Banach con norma

$$\| x \|_P = \left(\sum_{K=1}^{\infty} | \xi_K |^P \right)^{1/P}$$

esta norma induce la métrica

$$d(x,y) = \| x - y \| = \left(\sum_{K=1}^{\infty} | \xi_K - \eta_K |^P \right)^{1/P}$$

2.2.5. Espacio ℓ^∞

ℓ^∞, es un espacio de Banach con

$$\| x \|_\infty = \sup_{K \in \mathbb{N}} | \xi_K |$$

2.2.6. Espacio $C[a,b]$

$C[a,b]$ es Banach con

$$\| x \| = \max_{t \in [a,b]} | x(t) |$$

2.2.7. $C[0,1]$

$C[0,1]$ con $\| x \| = \int_0^1 | x(t) | \, dt$, no induce la métrica, por tanto no es Banach.

2.2.8. Lema: Traslación Invariante

Si d es una métrica inducida por una *norma* en un espacio normado X, entonces

(a) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = | \alpha | \, d(x,y), \quad \alpha \in K$

Prueba.

(a) $d(x+a, y+a) = \| x+a-(y+a) \| = \| x-y \| = d(x,y)$

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = \| \alpha x - \alpha y \| = |\alpha| \, \| x-y \| = |\alpha| \, d(x,y)$

Observación: Existen métricas que no son inducidas por una norma,

Ejemplo:

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|}$$

con $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (\eta_k) \in S$.

Veamos que existe $\alpha \in k$ tal que $d(\alpha x, \alpha y) \neq |\alpha| \, d(x,y)$.

Supongamos que $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\xi_k - \eta_k| \, |\alpha|}{1+|\alpha| \, |\xi_k - \eta_k|} = |\alpha| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|}$$

Si $|\alpha| = 0$ ó $|\alpha| = 1$ se cumple la igualdad, pero si $|\alpha| \neq 0$ y $|\alpha| \neq 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{-k} \frac{|\alpha| \, |\xi_k - \eta_k|}{1+|\alpha| \, |\xi_k - \eta_k|} - |\alpha| \, 2^{-k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |\alpha||\xi_k - \eta_k| \cdot \left(\frac{1}{1+|\alpha| \, |\xi_k - \eta_k|} - \frac{1}{1+|\xi_k - \eta_k|} \right)$$

luego

$$\text{si } |\alpha| < 1 \qquad \frac{1}{1+|\alpha| \, |\xi_k - \eta_k|} < \frac{1}{1+|\xi_k - \eta_k|}$$

Por tanto no se tiene la suposición,

$$\text{si } |\alpha| > 1 \qquad \frac{1}{1+|\alpha| \, |\xi_k - \eta_k|} > \frac{1}{1+|\xi_k - \eta_k|}$$

y tampoco se tiene la igualdad

2.2.9. Teorema: Subespacio de un Espacio de Banach

Sea X un espacio de Banach, $Y \subset X$ es Banach si y sólo si Y es cerrado en X

2.2.10. Proposición

A continuación se define sucesión convergente y sucesión de Cauchy similar que en espacios métricos.

$i)$ Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, es ***convergente*** si

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$$

para algún $x \in X$

$ii)$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de ***Cauchy*** en X, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N^* \in \mathbb{N}$ tal que si $n; m \geq N^*$ entonces

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon.$$

2.2.11. Series Infinitas

Dada una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, podemos definir

$$s_n = \sum_{K=1}^{n} x_k \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

Si (s_n) converge, se dice $s_n \longrightarrow s$, esto es

$$\| s_n - s \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Entonces la serie infinita o serie $\sum x_k$ es convergente o converge. s es llamada la suma de la serie y se escribe $\sum^{\infty} x_k = s$.
Si $\sum^{\infty} \| x_k \|$ converge se dira que $\sum x_k$ es absolutamente convergente.

En un espacio normado X, la *Convergencia absoluta* implica Convergencia si y sólo si X es completo.

2.2.12. Bases de Schauder:

Sea X un espacio normado y $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X tales que para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \| x - (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) \| = 0$$

Entonces se dice que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una ***base de Schauder*** para X.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ es llamado expansión de x con respecto a $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se escribe

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

Ejemplo:

En ℓ^P una base de Schauder es $e_n = \left(\delta_{nj}\right)_{j=1}^{\infty}$ y donde $(\delta_{nj}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = j \\ 0 & \text{si } n \neq j \end{cases}$ es decir

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\ldots) \\ e_2 & = & (0,1,0,\ldots) \\ e_3 & = & (0,0,1,\ldots) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Sea $x \in \ell^P$ con $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\| x - (\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) \| = \left(\sum_{K=n+1}^{\infty} | \xi_K |^P \right)^{1/P} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ya que $\left[\sum_{K=1}^{\infty} | \xi_K |^P \right]^{1/P}$ converge.

2.3. Espacios Normados Finito - dimensionales y subespacios.

2.3.1. Lema: Combinación Lineal

Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio normado X. Entonces existe un número $C > 0$ tal que para cualquier colección de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tenemos

$$\| \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \| \geq c\, (\mid \alpha_1 \mid + \mid \alpha_2 \mid + \ldots + \mid \alpha_n \mid) \qquad (1)$$

$$\left\| \sum^n \alpha_K x_K \right\| \geq C \sum^n \mid \alpha_K \mid$$

Prueba.
Supongase que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Definamos

$$K = \left\{ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \Big/ \sum_{K=1}^{n} \mid \beta_K \mid = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

K es compacto en $\mathbb{R}^n$; por ser cerrado y acotado. Sea

$$\begin{aligned} f : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\beta_1, \ldots, \beta_n) &\rightarrow f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \| \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_n X_n \| \end{aligned}$$

f es continua y $f > 0$. Como f es continua y K es compacto, existe $C > 0$ tal que

$$\min_{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K} f\,(\beta_1, \ldots, \beta_n) = C$$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, cualquier colección de escalares si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ la solución sería combinación de ceros.

Supongase que $\alpha_j \neq 0$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \mid \alpha_j \mid > 0$$

sea

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{j=1}^{n} \mid \alpha_j \mid}$$

$(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K$ de aquí $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) \geq C$, por tanto

$$\frac{\| \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \|}{\sum_{j=1}^{n} \mid \alpha_j \mid} \geq C.$$

2.3.2. Teorema:

Todo subespacio finito dimensional Y de un espacio normado X es completo. En particular todo espacio normado finito dimensional es completo.

Prueba.

Sean $\dim Y = n$ y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de Schauder para Y. Tomemos $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y. Donde cada $y_m = \alpha_1^m e_1 + \ldots + \alpha_n^m e_n$ con α_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ escalares.
Como (y_m) es una sucesión de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, r \geq N$ se tiene $\| y_m - y_r \| < \varepsilon$, entonces.

$$\varepsilon > \| y_m - y_r \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^m - \alpha_k^r) e_K \right\| \geq C \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k^m - \alpha_k^r |$$

Por tanto $| \alpha_k^m - \alpha_k^r | < \frac{\varepsilon}{C}; \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

Luego $(\alpha_k^m)_{m=1}^{\infty}$, k fijo, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ son completos existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ tal que $\alpha_k^m \xrightarrow[m\to\infty]{} \alpha_k$, definamos $y = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in Y$.

$$\| y_m - y \| = \left\| \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k^m - \alpha_k | e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} | \alpha_k^m - \alpha_k | \| e_k \| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Por tanto $y_m \longrightarrow y$, la cual muestra que Y es completo.

2.3.3. Teorema: Conjunto Cerrado

Todo subespacio finito dimensional Y de un espacio normado X es cerrado en X.

Nota: Subespacios infinitos dimencionales no necesariamente son cerrados.

Ejemplo:

En ℓ^{∞} sea Y el subconjunto de sucesiones las cuales tienen un número finito de términos distintos de cero. Y es un subespacio de ℓ^{∞} que no es cerrado en ℓ^{∞}.

2.3.4. Normas Equivalentes

Definición: Una norma $\| \cdot \|_1$ en un espacio vectorial X se dice ***equivalente*** a otra norma $\| \cdot \|_2$ en X si existe $a, b > 0$ tales que

$$a \| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq b \| x \|_2 \quad \forall x \in X$$

2.3.5. Teorema: Normas Equivalentes

En un espacio vectorial de dimensión finita X, dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ son equivalentes.

Prueba.

Sean $n = \dim X$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X. Tomemos $x \in X$, entonces $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ por el `Lema de combinación Lineal`, existe $C > 0$ tal que:

$$\| x \|_1 = \| \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \|_1 \geq C \left(\sum_{j=1}^{n} | \alpha_j | \right) \qquad (1)$$

Por otro lado, por desigualdad triangular

$$
\begin{aligned}
\| x \|_2 &= \| \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \|_2 \\
&\leq | \alpha_1 | \| e_1 \|_2 + \ldots + | k_n | \| e_n \|_2; \qquad \text{con } k = \max_{1 \leq k \leq n} \| e_k \|_2 > 0 \\
&\leq k \sum_{j=1}^{n} | \alpha_j | \qquad\qquad (2) \\
&\leq \frac{C}{k} \| x \|_1
\end{aligned}
$$

Por tanto $\frac{k}{C} \| x \|_2 \leq \| x \|_1$ intercambiando $\| \cdot \|_1$ por $\| \cdot \|_2$ tenemos lo que se quiere probar.

2.4. Operadores Lineales

Definición: Dados X, Y espacios vectoriales no vacíos y $T : D \subset X \to Y$ un operador, se dice lineal si:

(i) El dominio D es un espacio vectorial y el rango $R(T)$ cae sobre un espacio vectorial sobre el mismo campo.

(ii) $T(x + y) = T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in D$
$T(\alpha x) = \alpha T(x) \qquad \forall x \in X,\ \forall \alpha \in K$

Ejemplos:

2.4.1. Ejemplo 1: Operador Lineal Identidad

El operador identidad $I : X \to X$ se definido por $Ix = x; \ \forall x \in X$.

2.4.2. Ejemplo 2: Operador Lineal Cero

El operador cero $0 : X \to X$ es definido por $0x = 0; \ \forall x \in X$.

2.4.3. Ejemplo 3: Operador Lineal Diferenciación

Sean $X = \{x : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{donde} x \text{ es un polinomio de coeficientes reales}\}$ y un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ dado por $T(x(t)) = x'(t),\ \forall t \in [a, b]$

2.4.4. Ejemplo 4: Operador Lineal Integración

Sean $X = C[a, b]$ y un operador lineal T definido por

$$
\begin{aligned}
T : &X \to X \\
&x \to Tx
\end{aligned}
$$

dado por $T(x(t)) = \int_a^t x(s) ds; \ t \in [a, b]$

2.4.5. Ejemplo 5: Multiplicación por t

Sean $X = C[a,b]$ y un operador lineal T definido por

$$\begin{aligned} T : & X \to X \\ & x \to Tx \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} T : & [a,b] \to \mathbb{R} \\ & t \to Tx(t) = tx(t) \end{aligned}$$

2.4.6. Ejemplo 6: Operador de una Matriz

Sea $A = [a_{i_j}]$ una matriz real de tamaño $r \times n$,

$$\begin{aligned} T : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r \\ & x \to Tx = Ax \end{aligned}$$

2.4.7. Núcleo

Definición: Si T es un operador lineal se define el ***núcleo*** de T, denotado $N(T)$ por

$$N(T) = \{x \in D : T(x) = 0\}$$

2.4.8. Teorema: Rango y Nucleo

Sea T un operador lineal; entonces

$i)$ $Ran(T)$ es un espacio vectorial.

$ii)$ Si $\dim D(T) = n < \infty$ entonces $\dim R(T) \leq n$

$iii)$ $N(T)$ es un espacio vectorial

Prueba.

$i)$ Sean $y_1, y_2 \in R(T)$ y $\alpha, \beta \in K$ veamos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$, como $y_1, y_2 \in R(T)$ existe $x_1, x_2 \in D(T)$ tales que $T(x_1) = y_1, \quad T(x_2) = y_2$, luego

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

con $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$, luego $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$

$ii)$ Veamos que cualquier conjunto $\{y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1}\} \subset R(T)$ es linealmente dependiente. Existen $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in D(T)$ tales que

$$T(x_1) = y_1, ..., T(x_n) = y_n, T(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

como $\dim D(T) = n, \quad x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ es linealmente dependiente entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ no todos nulos tales que $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + \alpha n + 1 x_{n+1} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1}) &= 0 \\ \alpha_1 T(x_1) + ... + \alpha_{n+1} T(x_{n+1}) &= 0 \\ \alpha_1 y_1 + ... + \alpha_{n+1} y_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

con algún α_j no nulo, por tanto $\{y_1, ..., y_n, y_{n+1}\}$ es linealmente dependiente.

iii) Sean $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$, entonces $Tx_1 = Tx_2 = 0$, veamos que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathcal{N}(T)$, en efecto

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) = 0$$

$T : D(T) \subset X \to R(T) \subset Y$ es uno a uno o inyectivo $Tx = Ty$ implica $x = y$, si T es uno a uno podemos definir un operador

$$\begin{aligned} T^{-1} : R(T) &\to D(T) \\ y &\to T^{-1}(y) = x \text{ donde } Tx = y \end{aligned}$$

nótese que

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(x)) &= x; \quad \forall x \in D(T) \\ T(T^{-1}(y)) &= y; \quad \forall y \in R(T) \end{aligned}$$

2.4.9. Teorema: Operador Inverso

Sean X, Y espacios vectoriales ambos sobre $\mathbb{R}$ o ambos sobre $\mathbb{C}$ y $D(T) \subset X$, $R(T) \subset Y$ con $T : D(T) \to R(T)$ un operador lineal

i) T^{-1} existe si y sólo si $Tx = 0$ entonces $x = 0$.

ii) Si T^{-1} existe, T^{-1} es un operador lineal.

iii) Si $\dim D(T) = n < \infty$ y T^{-1} existe, entonces $\dim R(T) = \dim D(T)$.

Prueba.

i) Como $T(0) = 0$ y $T(x) = 0$ entonces $x = 0$.

Sean $Tx_1 = Tx_2$, como T es lineal $T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0$, tal que $x_1 - x_2 = 0$ por la hipotesis. Entonces $T(x_1) = T(x_2)$ implica $x_1 = x_2$ y T^{-1} existe. Luego si $x_2 = 0$ obtenemos que $Tx_1 = T0$ entonces $x_1 = 0$

ii) El dominio de T^{-1} es $R(T)$ un espacio vectorial y $D(T) \subset X$, sean $y_1, y_2 \in R(T)$ y $\alpha, \beta \in K$. Existen $x_1, x_2 \in D(T)$ tal que $Tx_1 = y_1$ y $Tx_2 = y_2$

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$$

por tanto

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

iii) Se probó que $\dim R(T) \leq \dim D(T)$ por el teorema de rango y espacio nulo, como

$$\dim R(T^{-1}) \leq \dim D(T^{-1}) \quad \text{entonces} \quad \dim D(T) \leq \dim R(T)$$

2.4.10. Lema: Productos de Inversos

Sean $T : X \to Y$ y $S : Y \to Z$ operadores lineales biyectivos, donde X, Y, Z son espacios vectoriales. Entonces la inversa $(ST)^{-1} : Z \to X$ existe y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

Prueba.
El operador $ST : X \to Z$ es biyectivo, entonces $(ST)^{-1}$ existe.

$$\begin{aligned} (ST)(ST)^{-1} &= I_z \\ S^{-1}ST(ST)^{-1} &= S^{-1}I_z \\ T(ST)^{-1} &= S^{-1} \\ T^{-1}T(ST)^{-1} &= T^{-1}S^{-1} \\ (ST)^{-1} &= T^{-1}S^{-1} \end{aligned}$$

2.5. Operadores Lineales Acotados Continuos

Definición: Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\| T(x) \| \leq C \| x \| \qquad \forall x \in D(T)$$

Observación: De la anterior definición se puede decir que

$$\frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq C \qquad \forall x \in D(T)\backslash\{0\}$$

Sea

$$A = \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \Big/ x \in D(T)\backslash\{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

A es acotado superiormente por C, por tanto existe el sup A, el cual notaremos $\| T \|$ y se le llama la norma del operador T.

Esto es, $\sup \left\{ \frac{\| T(x) \|}{\| x \|} \Big/ x \in D(T)\backslash\{0\} \right\} := \| T \|$

Si $D(T) = \{0\}$ entonces $\| T \| = 0$.

Escribimos $\| T \| = \sup\limits_{x \in D(T)\backslash\{0\}} \frac{\| T(x) \|}{\| x \|}$

Nótese que $\| Tx \| \leq \| T \| \| x \|, \quad \forall x \in D(T)$

2.5.1. Lema: Norma

Sean X un espacio normado y $T \in \mathscr{L}(X)$, entonces

(a) $\| T \| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \| Tx \|$

(b) $\| \cdot \|_S$ es una norma en $\mathscr{L}(X)$

Prueba.

(a) Sea $B = \{\| Tx \| : \| x \| = 1,\ x \in D(T)\} \subseteq \mathbb{R}$ y $A = \left\{ \dfrac{\| Tx \|}{\| x \|} : x \in D(T) \backslash \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$.

Nótese que $B \subset A$ luego, $\sup B \leq \sup A$, entonces

$\sup\{\| Tx \| : \| x \| = 1,\ x \in D(T)\} \leq \sup \left\{ \dfrac{\| Tx \|}{\| x \|} : x \in D(T) \backslash \{0\} \right\}$ luego,

$$\sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \| Tx \| \leq \sup_{x \in D(T) \backslash \{0\}} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} = \| T \| \qquad (1)$$

Sea $\hat{x} \in X,\ \hat{x} \in D(T) \backslash \{0\}$ entonces $\left\| \dfrac{1}{\| \hat{x} \|} \hat{x} \right\| = \dfrac{1}{\| \hat{x} \|} \| \hat{x} \| = 1$ luego,

$$\frac{\| T\hat{x} \|}{\| \hat{x} \|} = \frac{1}{\| \hat{x} \|} \| T\hat{x} \| = \left\| \tfrac{1}{\|\hat{x}\|} T\hat{x} \right\| = \left\| T\left(\tfrac{1}{\|\hat{x}\|} \hat{x} \right) \right\| \leq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \| Tx \|$$

por tanto $\displaystyle\sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \| Tx \|$ es cota superior de A, entonces

$$\| T \| = \sup_{x \in D(T) \backslash \{0\}} \frac{\| Tx \|}{\| x \|} = \sup A \leq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \| Tx \| \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que

$$\| T \| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \| Tx \|$$

(b) (i) $\|T\| \geq 0$ por definición de supremo.

(ii) Veamos que $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = 0$ si y sólo si $T = 0$. Entonces $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{\|x\|=1} \| T \| \ \|x\|$, por tanto $T = 0$.

(iii) $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha| \, \|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|;\ x \in D(T)$

(iv) $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x + T_2 x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|;\ x \in D(T)$

Ejemplos:

2.5.2. Ejemplo 1: Operador Neutro

Sean X un espacio normado y $\mathbf{0} : X \to X$ un operador lineal acotado, $\| \mathbf{0} \| = 0$

2.5.3. Ejemplo 2: Operador Diferenciación

Sea $X = \left\{ x : [0,1] \to \mathbb{R} \middle/ x \text{ es un polinomio} \right\}$ con

$$\| x \| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

y un operador diferencial definido

$$\begin{aligned} T : X &\to X \text{ donde } T(x(t)) = x'(t), \ t \in [0,1] \\ x &\to Tx \end{aligned}$$

T es lineal y T no es acotado.
Para $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n(t) = t^n$, $\| x_n \| = 1$,

$$T(x_n(t)) = x_n'(t) = n t^{n-1}$$

luego $\| T x_n \| = n$ así que

$$\frac{\| T x_n \|}{\| x_n \|} = n$$

como n es arbitrario no existe $C > 0$ tal que

$$\frac{\| T x_n \|}{\| x_n \|} \leq C$$

El conjunto $A = \left\{ \frac{\| T x_n \|}{\| x_n \|} \middle/ x_n \in D(T) \setminus \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ no es acotado superiormente, por tanto no tiene supremo, en este caso se dice que la longitud del operador es indeterminada.

2.5.4. Ejemplo 3: Matrices

Sea $A = (\alpha_{jk})$ una matriz real $r \times n$, se define

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^r \qquad T \text{ es lineal y } T \text{ es acotado} \\ x &\to Tx = Ax \end{aligned}$$

Sean $x = (\xi_k)_{k=1}^n$, $y = (\eta_j)_{j=1}^r$ con $y = Tx$ entonces

$$\eta_j = y e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \| Tx \|^2 = \| y \|^2 = \sum_{j=1}^{r} |\eta_j|^2 &= \sum_{j=1}^{r} \left| \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \xi_k \right)^2 \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk} \xi_k| \right)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right) \\ &= \| x \|^2 \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{j_k}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \| x \|^2 C^2 \end{aligned}$$

con $C = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^2$, luego $\| Tx \| \leq C \ \| x \|$.

2.5.5. Teorema: Dimensión Finita

Sea X un espacio normado, si $\dim X < \infty$, entonces todo operador lineal en X es acotado.

Prueba.

Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base para X, luego dado $x \in X$ existe $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ tales que $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, y sea T un perador lineal en X, entonces

$$\| Tx \| = \| T\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right) \| = \| \sum_{j=1}^n \alpha_j Te_j \| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \| Te_j \|$$
$$\leq \max_{r \leq j \leq n} \| Te_j \| \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leq \frac{M}{C} \| x \| \quad \text{con } C > 0,$$

luego $\| Tx \| \leq C_0 \| x \|$, entonces $\frac{\| Tx \|}{\| x \|} \leq C$

2.6. Funcionales Lineales

Definición: Un ***funcional lineal*** f, es un operador lineal con dominio en un espacio vectorial X y rango en $K(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ es decir, $f : D(f) \subset X \to K$

2.6.1. Teorema: Continuidad y Cota

Un funcional lineal $f : D(f) \subset X \to K$ es continuo si y sólo si f es acotado.

Es un caso particular de operadores lineales $T : X \to Y = K$

Ejemplos.

(1) Sea $\delta \in \mathbb{R}^n$ fijo, se define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \delta \cdot x$, f es claramente lineal.

$$|f(x)| = |x \cdot \delta| \leq \| x \| \| \delta \|$$

se hace $x = \delta$ entonces $f(\delta) = \delta \cdot \delta = \delta^2$

$$\| f \| > \frac{|f(\delta)|}{\| \delta \|} = \frac{\| \delta \|^2}{\| \delta \|} = \| \delta \|$$

luego $\| f \| = \| \delta \|$

(2) Sean $X = (C[a,b], \| \cdot \|_\infty)$ y $f : X \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \int_a^b x(t)dt$. f es lineal y

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq \int_a^b |x(t)| dt \leq (b-a) \| x \|_\infty$$

entonces $\frac{|f(x)|}{\|x\|_\infty} \leq b-a$, luego $\| f \| \leq b-a$ haciendo el supremo para todo x de norma 1, entonces

$$b - a = \int_a^b dt = \int_a^b 1 dt = f(x_0) \leq \sup_{\substack{x \in D \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \| f \|$$

Por tanto $\| f \| = b - a$.

(3) Sea $X = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ y $t_0 \in [a,b]$ fijo. Se define $f : X \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x(t_0)$, f es lineal y

$$|f(x)| = |x(t_0)| \leq \| x \|_\infty \quad \text{esto implica que} \quad \| f \| \leq 1$$

$$1 = |x(t_0)| \leq \| f \| \quad \text{luego} \quad \| f \| = 1$$

(4) Sea $\delta = (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^2$ fijo. Se define $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \delta \cdot x = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j \xi_j$, f es lineal y acotado con $\| f \| = \| \delta \|$ tenemos:

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j \xi_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} = \| \delta \|_{\ell^\infty} \| x \|_{\ell^\infty}$$

Por tanto $\| f \| \leq \| \delta \|$

$$|f(a)| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \| \delta \|^2$$

$$\| f \| = \| \delta \|$$

2.6.2. Dual algebraico

Definición: Sea X un espacio vectorial sobre K y $X^* = \left\{ f \big/ f : X \to K \text{ es un funcional lineal} \right\}$, X^* se denomina el ***dual algebraico*** de X.

2.6.3. Proposición

Sea X^* un espacio vectorial sobre K, entonces
$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x); \quad \forall x \in X$
$(\alpha f)(x) = \alpha f(x); \quad \forall \alpha \in K, \ \forall x \in X$

2.6.4. El Segundo Espacio Dual Algebraico

Definición: Sea X un espacio vectorial y $C : X \to X^{**}$, dado por $C_x = g_x$, donde

$$\begin{aligned} g_x : X^* &\to K \\ f &\to (g_x)(f) = f(x). \end{aligned}$$

Aplicación canónica de X en X^{**} se obtiene

$$(g_x)(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = (g_x)(f_1) + (g_x)(f_2)$$

$$(g_x)(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha (g_x)(f)$$

luego C es lineal. Entonces

$$(C(\alpha x + \beta y))(f) = (g_{\alpha x + \beta y})(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha g_x(f) + \beta g_y(f) = \alpha C x(f) + \beta C y(f)$$

2.6.5. Inmersión Canónica

Definición: Sean X, Y espacios vectoriales, si X es isomorfo a un subespacio de un espacio vectorial Y, se dice que X es inmersible en Y. Por tanto X es inmersible en X^{**} y C se llama la ***inmersión canónica*** de X en X^{**}.
Si C es sobre, entonces $R(C) = X^{**}$ y es este caso se dice que X es ***algebraicamente reflexivo***.

Ejemplos:

2.6.6. Ejemplo 1: Espacio $\mathbb{R}^n$

El espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^{n*} \cong (\mathbb{R}^n)$

Prueba.

Sea $T : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ dado por $T_f = C$; con $C = (f(e_k))_{k=1}^n$. T es lineal y biyectivo.
$T_{\alpha f+\beta g} x = \alpha(f(e_k))_k + \beta(g(e_k))_k$, ya que

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)x &= \alpha f x + \beta g x \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k) + \beta \sum_{k=1}^{n} \xi_k g(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\alpha f(e_k) + \beta g(e_k))\end{aligned}$$

Luego $T_{\alpha f+\beta g} = \alpha T_f + \beta T_g$.
Hace falta ver que $\|f\| = \|T_f\| = \|C\|$. Dado $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$; con $(e_k)_{k=1}^n$ la base canonica, y $f x = \sum_{k=1}^n \xi_k \gamma_k$ con $\gamma_k = f(e_k)$

$$|f x| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \gamma_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2\right)^{1/2} = \|x\| \|C\|$$

Si $x \neq 0$, se tiene $\|f\| \leq \|C\| = \|T_f\|$ (1)

$$\|C\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2\right)^{1/2} = |f(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|^{1/2} = \frac{|f(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|}{\|(\gamma_1, \dots, \gamma_n)\|} \leq \|f\|$$

Por tanto $\|C\| \leq \|f\|$ (2). De (1) y (2) se hace que $\|f\| = \|T_f\|$.

2.6.7. Ejemplo 2: Espacio ℓ^1

El dual de ℓ^1 es ℓ^∞, $\ell^{1*} \cong \ell^\infty$).

Prueba.

Se define $T : (\ell^1)^* \to \ell^\infty$ por $T_f = C$ con $C = (f(e_k))_k$ donde $(e_k)_k$ es una base de Schauder para ℓ^1. Ahora veamos que T está bien definido $|f(e_k)| \leq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} |f x| = \|f\|$, luego $\sup_k |f(e_k)| \leq \|f\|$

Luego $\|C\|_\infty \le \|f\| < \infty$ (1)

$$\begin{aligned} T(\alpha f_1 + \beta f_2) &= (\alpha f_1(e_k) + \beta f_2(e_k))_k \\ &= \alpha (f_1(e_k))_k + \beta (f_2(e_k))_k \\ &= \alpha T_{f_1} + \beta T_{f_2} \end{aligned}$$

Luego T lineal. Y veamos que T es inyectivo, si $T(f_1) = T(f_2)$ entonces $f_1(e_k) = f_2(e_k)$, luego

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j f_1(e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j f_2(e_j) = f_2(x); \quad \forall x \in \ell^1$$

así que $f_1 = f_2$. Ahora veamos que T es sobre:

Sea $C_0 = (C_k)_k \in \ell^\infty$, entonces $\sum_k |C_k| < \infty$, definimos $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k$ con $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell^1$.

f es lineal,

$$|f(x)| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k C_k| \le \sup_k |C_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = M\|x\|_{\ell^1}$$

Luego $\|f\| \le \|C\|_\infty$ por (1), entonces $\|f\| = \|C\|_\infty = \|T(f)\|$

2.6.8. Ejemplo 3: Espacio ℓ^p

El espacio dual de ℓ^p es ℓ^q; así $1 < p < \infty$ y q es el conjugado de p, que es, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$

Prueba.

Se define $T : (\ell^p)^* \to \ell^q$ por $T(f) = (f(e_k))_k$ donde $e_k = (\delta_{jk})_j$ Veamos que T está bien definido, tenemos $\gamma_k = f(e_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se consideramos la siguiente sucesión $x_n = (\xi_k^n)_k$ con

$$\xi_k^n = \begin{cases} \frac{|\gamma_k|^q}{\gamma_k} & \text{si} \quad k \le n \quad \text{y} \quad \gamma_k \ne 0 \\ 0 & \text{si} \quad k > n \quad \text{ó} \quad \gamma_k = 0 \end{cases}$$

luego

$$|f(x_n)| = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^n f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^n \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |f(x_n)| \le \|f\|\|x_n\| &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^n|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Usando $1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$, tenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|$$

Si $n \to \infty$ $\|(\gamma_k)_k\|_q \leq \|f\| < \infty$. (1) T es lineal, y T es inyectivo, ya que si $T(f_1) = T(f_2)$, entonces $f_1(e_k) = f_2(e_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_1(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_2(e_k) = f_2(x) \ \ \forall x \in \ell^1$$

T es sobre,
Sea $b = (b_k) \in \ell^q$, luego $\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q < \infty$, se define $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k b_k$,
$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k b_k| \leq \|x\|_{\ell^p} \|b\|_{\ell^q}$, luego $\|f\| \leq \|b\|$, $f \in (\ell^1)^*$ y $T(f) = (f(e_k))_k = (b_k)_k = b$.

2.7. Operadores y Funcionales Lineales en espacios de Dimensión finita

Sean X, Y espacios vectoriales de dimensión finita y $T : X \to Y$ un operador lineal sobre el mismo cuerpo K. Tomamos $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X y $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base para Y; si $x \in X$ existe $(\xi_j)_{j=1}^n$ tal que $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$ ①. Entonces

$$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k \quad ②$$

Como $y \in Y$ y $Te_k \in Y$. Se puede escribir,

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_i b_j, \quad Te_k = \sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j \quad ③.$$

Entonces ③ en ②

$$y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j b_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left(\sum_{j=1}^{r} \tau_{jk} b_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k\right) b_j$$

como los b_j son linealmente independientes, entonces

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} \xi_k \qquad j = 1, 2, \ldots, r \qquad ④$$

los coeficientes en ④ forman una matriz $T_{EB} = (\tau_{jk})_{j=1}^{r}{}_{k=1}^{n}$, con r filas y n columnas. T_{EB} representa el operador T en las bases E, B de ④, $T_{EB} \check{x} = \check{y}$.

Volviendo a los funcionales lineales:
Cuando $\dim X = n$, se toma $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X, los funcionales lineales forman el dual algebraico X^* de X. Sean $f \in X^*$ y $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \in X$, entonces

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_k f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \alpha_j \quad \text{con } \alpha_j = f(e_j); \quad j = 1, \ldots, n \quad ⑤$$

f está univocamente determinado por sus valores α_j en los n vectores de la base de X.

Recíprocamente cada n-tupla de escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ determina un funcional lineal en X de acuerdo a ⑤. En particular

$$\begin{matrix} (1\ , & 0,\dots,0) \\ \vdots & \vdots \\ (0\ , & 0,\dots,1) \end{matrix}$$

se obtiene n-funcionales con valores

$$f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } & j = k \\ 0 \text{ si } & j \neq k \end{cases}$$

al conjunto $\{f_1,\dots,f_n\}$ se llama ***base dual*** de $\{e_1,\dots,e_n\}$ de X.

2.7.1. Teorema: Dimensión de X^*

Sean X un espacio n-dimensional y $E = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base para X, Entonces $\{f_1,\dots,f_n\}$ dado por $f_k(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$ es una base para el dual X^* y $\dim X^* = \dim X = n$.

Prueba.

F es un conjunto linealmente independiente, entonces $\sum_{k=1}^{n} \beta_k f_k = 0$; si $e_j = x \in X$, se tiene $\beta_j = 0$, luego

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(e_j), \qquad f_k(x) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \xi_k \\ f(x) &= \sum_{j=1}^{n} f_k(x) f(e_j), \qquad \alpha_j = f(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_k(x)\alpha_j. \end{aligned}$$

2.7.2. Lema: Vector Cero

Sea X un espacio vectorial de dimensión finita. Si $x_0 \in X$ tiene la propiedad que $f(x_0) = 0 \ \ \forall f \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.

Prueba.

Dado que $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, entonces

$$0 = f_k(x_0) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f_k e(j) = \xi_k$$

Por tanto, $x_0 = 0$.

2.7.3. Teorema: Algebraicamente Reflexivo.

Un espacio vectorial de dimensión finita es algebraicamente reflexivo.

Prueba.
Se considera $C : X \to X^{**}$, si $Cx_0 = 0$ entonces $\forall f \in X^*$ se tiene que $(Cx_0)(f) = f(x_0) = 0$, luego $x_0 = 0$. Entonces $C^{-1} : R(C) \to X$ existe. Se tiene que $\dim R(C) = \dim X$, y a la vez $\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X = \dim R(C)$, como $R(C) \subset X^{**}$, entonces $R(C) = X^{**}$.

2.8. Proposición

Dados los espacios normados X, Y entonces $B(X,Y) = \left\{T : X \to Y \big/ T \text{ es lineal y acotado}\right\}$ es un espacio vectorial normado con norma

$$\|T\| = \sup_{x\in D(T)\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in D(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

2.8.1. Teorema

Si Y es un espacio de Banach, entonces $B(X,Y)$ es un espacio de Banach.

Prueba.

Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(X,Y)$. Luego para $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N_0$, entonces $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Para todo $x \in X \setminus \{0\}$ y $m, n \geq N_0$

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}\|x\| = \varepsilon$$

Luego $(T_n x)_n$ es una sucesión de Cauchy en Y, como Y es completo existe $y \in Y$ tal que $T_m x \to y$, se define

$$\begin{aligned} T : X &\to Y \\ x &\to Tx = \lim_{m\to\infty} T_m x \end{aligned}$$

T es lineal. Si $m \geq N_0$

$$\begin{aligned} \|T_m x - Tx\| &= \|T_m x - \lim_{n\to\infty} T_n x\| = \lim_{n\to\infty} \|T_m x - T_n x\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon\|x\| = \varepsilon\|x\| \end{aligned}$$

así $-\|T_m x\| + \|Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ implica que

$$\|Tx\| \leq \varepsilon\|x\| + \|T_m x\| \leq \varepsilon\|x\| + \|T_m\||x\| = (\varepsilon + \|T_m\|)\|x\|$$

luego $T \in B(X,Y)$ y además si $m \geq N_0$ entonces $\|T_m - T\| \leq \varepsilon$

2.8.2. Teorema: Espacio Dual

El espacio dual X^* de un espacio normado X es un espacio de Banach.

2.9. Espacio con Producto Interno. Espacios de Hilbert

2.9.1. Espacio con Producto Interno

Sea X un espacio vectorial sobre K, un producto interior en X es un función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to K$ que satisface: $\forall x, y, z \in X$ y $\forall \alpha \in K$

(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$ $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Un espacio con ***producto interno*** es un espacio vectorial con un producto interno definido en él.

Observación: Un producto interno en X, induce una norma en X dada por

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

y una métrica dada por

$$d(x, y) = \| x - y \| = \langle x - y, x - y\rangle^{1/2}$$

2.9.2. Espacios de Hilbert

Un ***espacio de Hilbert*** es un espacio con producto interno el cual es completo con relación a la métrica inducida por el producto interno.

En lo que sigue, la letra $\mathscr{H}$ denotará un espacio de Hilbert; el producto interno en este espacio será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Con $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ indicaremos a todos los operadores lineales acotados T sobre el espacio de Hilbert $\mathscr{H} \neq \{0\}$, con

$$\| T \| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \Big/ x \in \mathscr{H} \right\}$$

2.9.3. Proposición

$i)$ $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

$ii)$ $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$

$iii)$ $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$

Nota: Si una norma proviene de un producto interno, entonces $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

2.9.4. Ortogonalidad

Definición: Sean X un espacio producto interno, $x, y \in X$, $A, B \subset X$

$i)$ $x \perp y$ si, y sólo si $\langle x, y\rangle = 0$

$ii)$ $x \perp A$ si, y sólo si $\langle x, a\rangle = 0$, $\forall a \in A$

$iii)$ $A \perp B$ si, y sólo si $\langle a, b\rangle = 0$ $\forall a \in A, b \in B$

Ejemplos:

2.9.5. Ejemplo 1: El Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Es un espacio de Hilbert con producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{con} \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \ \ y = (y_1, \ldots, y_n)$$

2.9.6. Ejemplo 2: El Espacio $\mathbb{C}^n$

Es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k \quad \text{con} \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \ \ y = (y_1, \ldots, y_n)$$

2.9.7. Ejemplo 3: Espacios $\ell^2(\mathbb{R})$, $\ell^2(\mathbb{C})$

Son espacios de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \text{en} \quad \ell^2(\mathbb{R})$$
$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k \quad \text{en} \quad \ell^2(\mathbb{C})$$

2.9.8. Proposición: Desigualdad de Schwarz

Sea X un espacio producto interno, entonces para todo $x, y \in X$ $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$
donde $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, y la igualdad se da si x, y son linealmente dependientes.

Prueba.

Si $y = 0$, se tiene. Si $y \neq 0$ se toma $\alpha \in K$ por lo tanto

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\left\{\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\langle y, y\rangle\right\}$$

sea $\overline{\alpha} = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle}$,

$0 \leq \|x\|^2 - \dfrac{\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \dfrac{\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle}}{\|y\|^2}$, por tanto $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$, sacando raíz cuadrada se obtiene el resultado.

2.9.9. Proposición: Continuidad del Producto Interno

Sea X un espacio producto interno, si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Prueba.

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle + \langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

2.9.10. Teorema: Subespacio

Sean $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y Y un subespacio de $\mathscr{H}$, entonces:

a) Y es completo si y sólo si Y es cerrado en $\mathscr{H}$

b) Si Y es finito dimensional, entonces Y es completo.

c) Si $\mathscr{H}$ es separable, entonces Y es separable.

Más generalmente todo subconjunto de un espacio con producto interno es separable.

2.9.11. Segmento y Convexo.

Definición: Sea X un espacio vectorial sobre K, el conjunto $\{z \in X : \ z = \alpha x + (1-\alpha)y, \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$ se llama el ***segmento*** que une a x e y. Un conjunto M se dice ***convexo*** si para cada $x, y \in M$ el segmento que une a x e y está contenido en M.

2.9.12. Teorema: Vector Minimizador

Un conjunto convexo, cerrado y no vacío C de un espacio de Hilbert X, contiene un vector de norma mínima, es decir, que $\exists! \check{x} \in C$ tal que

$$\|\check{x}\| = \inf_{x\in C} \|x\|$$

Prueba.

Sean $M = \inf\limits_{x\in C} \|x\|$ y $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en C tal que $\|x_n\| \to M$, Probar que (x_n), es una sucesión de Cauchy en C, por la ley del paralelogramo

$$
\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \\
&= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4M^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

Luego $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en C, como C es cerrado, entonces C es completo; Por tanto existe $\check{x} \in C$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \check{x}$. Como la norma es continua,

$$\|x_n\| \to \|\check{x}\|.$$

Por la unidad del límite $\|\check{x}\| = M = \inf_{x\in C}\|x\|$.
Unicidad: Sean $x_1, x_2 \in C$ tales que $\|x_1\| = \|x_2\| = M$.
Por la ley del paralelogramo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x_1 - x_2\|^2 &= 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - 4\left\|\frac{x_1 + x_2}{2}\right\|^2 \\ &\leq 4M^2 - 4M^2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $x_1 = x_2$.

2.9.13. Corolario:

Si C es un conjunto convexo, cerrado y no vacío con $C \subset \mathscr{H}$ donde $\mathscr{H}$ es Hilbert, entonces $\forall x \in \mathscr{H}$ existe un único $u \in C$ tal que

$$\|x - u\| = \inf_{y\in C}\|x - y\| \tag{2.1}$$

Además si el espacio de Hilbert es real, u está caracterizado por la propiedad

$$\begin{cases} u \in C \\ \langle x - u, y - u\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C \end{cases} \tag{2.2}$$

Prueba.
Para (2,1) sólo basta aplicar el teorema anterior al conjunto convexo, cerrado y no vacíos $\mathscr{H} \setminus C$.

Probar que (2,1) si y sólo si (2,2)

(i) (2,1) entonces (2,2). Sean $u \in C$ que cumple (2,1) y $y \in C$.
$v := (1-t)u + ty \in S$ si $t \in [0,1]$ ya que C es convexo

$$\begin{aligned} \|x - v\| &= \|(x-u) - t(y-u)\|, \quad \text{Por (2,1) } \|x-u\| \leq \|x - v\| \\ \|x-u\|^2 &\leq \|(x-u) - t(y-u)\|^2 \\ \|x-u\|^2 &= \langle (x-u) - t(y-u), (x-u) - t(y-u)\rangle \\ \|x-u\|^2 &= \|x-u\|^2 - 2t\langle x-u, y-u\rangle + t^2\|y-u\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t\langle x-u, y-u\rangle &\leq t^2\|y-u\|^2 \\ \langle x-u, y-u\rangle &\leq \frac{t}{2}\|y-u\|^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

Luego $\langle x-u, y-u\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$

(ii) (2,2) entonces (2,1).

$$\begin{aligned} \|y-x\|^2 &= \|(u-x) - (u-y)\|^2 \\ &= \|u-x\|^2 - 2\langle x-u, y-u\rangle + \|u-y\|^2 \end{aligned}$$

Por hipótesis

$$\|u-x\|^2 - \|y-x\|^2 = 2\langle x-u, y-u\rangle - \|u-y\|^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \|u-x\| &\leq \|y-x\| \qquad \forall y \in C, \qquad \text{entonces} \\ \|u-x\| &\leq \inf_{y\in C}\|x-y\| \qquad \text{y como} \quad u \in C \end{aligned}$$

$$\inf_{y\in C}\|x-y\| \leq \|x-y\|$$

2.9.14. Proyección

Definición: El vector u del corolario anterior se denomina la ***proyección*** de x en C y se denota $P_C x$

2.9.15. Suma Directa

Definición: Un espacio vectorial X, se dice la ***suma directa*** de los dos subespacios Y y Z de X, escrito $X = Y \oplus Z$ si $\forall x \in X, \quad \exists! y \in Y \;\; \exists! z \in Z$ tal que $x = y + z$.

2.9.16. Complemento Ortogonal

Definición: Sea Y un subconjunto de un espacio producto interno X, el ***complemento ortogonal*** $Y^\perp$ de Y es el conjunto $Y^\perp = \{z \in X : z \perp Y\}$

Ejercicio:

$i)$ $Y^\perp$ es un subespacio cerrado de X.

$ii)$ $\overline{Y} \subset Y^{\perp\perp}$, donde $Y^{\perp\perp} = (Y^\perp)^\perp$.

2.9.17. Teorema: Suma Directa

Si Y es un subespacio cerrado, no vacío de un espacio de Hilbert X, entonces $X = Y \oplus Y^\perp$

Prueba.
Como Y es convexo, cerrado y no vacío, dado $x \in X$; sea $y = P_C x$ la proyección de x sobre Y; la cual existe por el *corolario 2.9.13*, y $z = x - y$.
Se prueba que $z \in Y^\perp$. Supongase que no, es decir, supongase que existe $y_1 \in Y \quad (y_1 \neq 0)$ tal que $\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$. Se tienen que $\alpha \in K$.

$$\|z - \alpha y_1\|^2 = \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle = \|z\|^2 - \overline{\alpha}\langle z, y_1 \rangle - \alpha \left[\langle y_1, z \rangle - \overline{\alpha}\langle y_1, y_1 \rangle \right]$$

Si $\overline{\alpha} = \dfrac{\langle y_1, z \rangle}{\|y_1\|^2}$, se tiene $\|z - \alpha y_1\|^2 = \|z\| - \dfrac{|\langle z, y_1 \rangle|^2}{\|y_1\|^2} < \|z\|^2$, por tanto $\|x - y - \alpha y_1\| < \|x - y\|$, luego como $y + \alpha y_1 \in Y$ entonces $\|x - y\| \leq \|x - (y + \alpha y_1)\| < \|x - y\|$ y así $\|x - y\| < \|x - y\|$ lo cual es absurdo, por tanto $z \in Y^\perp$, y así $x = y + z$ con $y \in Y$ y $z \in Y^\perp$.
Como $Y \cap Y^\perp = \{0\}$ y $y - y' = z' - z$, si no fuera único $(y + z = y' + z')$, luego $y - y' \in Y$ y $z' - z \in Y^\perp$, lo cual es absurdo.

2.9.18. Proyección Ortogonal

Definición: Para $x \in X$ el único $y \in Y$ tal que $x = y + z$, con $z \in Y^\perp$ es llamado la ***proyección ortogonal*** de x en Y. $P : X \longrightarrow Y$ dado por $Px = y$ es lineal e idempotente $P^2 = P$.

2.9.19. Lema: Espacio Nulo

Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, entonces $Y^\perp = N(Py)$.

2.9.20. Lema: Subespacio Cerrado.

Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, entonces $Y = Y^{\perp\perp}$

Prueba.

Es claro que $Y \subset Y^{\perp\perp}$, veamos que $Y^{\perp\perp} \subset Y$. Sea $x \in Y^{\perp\perp}$, entonces $x = y + z$ con $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ y $z \in Y^{\perp}$, como $y \in Y^{\perp\perp}$, $x \in Y^{\perp\perp}$, entonces $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$, por ser $Y^{\perp\perp}$ un subespacio. Luego $z \perp Y$, pero $z \in Y^{\perp}$ así que $z = 0$, luego $x = y \in Y$, por tanto $Y^{\perp\perp} \subset Y$.

2.9.21. Lema: Conjunto Denso

Sea $M \neq \phi$ con $M \subset \mathscr{H}$ donde $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert, entonces $\overline{genM} = \mathscr{H}$ si y sólo si $M^{\perp} = \{0\}$

Prueba.

i) Sea $x \in M^{\perp}$ entonces existe $(x_n) \subset genM$ tal que, $x_n \to x$ como $M^{\perp} \perp genM$ entonces $< x_n, x >= 0$, por la continuidad del producto interior $< x_n, x > \to < x, x >$ por tanto $< x, x >= 0$, así que $x = 0$, luego $M^{\perp} \subset \{0\}$ y la otra contenencia es trivial.

ii) Como $\overline{genM}$ es cerrado en $\mathscr{H}$, $\mathscr{H} = \overline{genM} + \overline{genM}^{\perp}$, así dado $h \in \mathscr{H}$ $\exists x, y$ tales que $h = x + y$ con $x \in \overline{genM}$ $y \in \overline{genM}^{\perp}$, ver que $y = 0$ como $y \in \overline{genM}^{\perp}$, entonces $y \perp M$, así que $y \in M^{\perp}$, luego $y = 0$ $\therefore$ $\mathscr{H} \subset \overline{genM}$ y la otra contenencia es fácil.

2.9.22. Conjuntos Ortonormales y Sucesiones

Definición: Un conjunto ortonormal en un espacio producto interno X es un subconjunto M de X cuyos elementos son mutuamente ortogonales. Un ***conjunto ortonormal*** $M \subset X$ es un conjunto ortogonal en X cuyos elementos tienen norma 1 es decir $\forall x, y \in M$

$$< x, y > = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Si el conjunto ortogonal u ortonormal es contable se puede hablar de sucesiones ortogonales u ortonormales. De manera más general, dada una familia $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ de elementos de X se dice ortogonal si $x_\alpha \perp x_\beta$ $\forall \alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in I$. La familia se dice ortonormal si es ortogonal y $\| x_\alpha \| = 1$ $\forall \alpha \in I$

2.9.23. Proposición

1. Si $\{x_1, ..., x_n\}$ es ortogonal, entonces $\| x_1 + ... + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + ... + \| x_n \|^2$
2. $M \subset X$, $M \neq \phi$ y ortonormal, entonces M es linealmente independiente.

Ejemplos:

2.9.24. Ejemplo 1: Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$ los $\{e_1, ..., e_n\}$ con $e_k = (o, ..., 1, ..., 0)$ $1 \leq k \leq n$ forman un conjunto ortonormal.

2.9.25. Ejemplo 2: Espacio ℓ^2

En ℓ^2 los vectores $e_k = (0,0,...,1,..,0,...)$ $k \in \mathbb{N}$ forman un conjunto ortonormal.

2.9.26. Ejemplo 3: Funciones Continuas

Sea $X = C[-\pi,\pi]$ con producto interior definido por $< x, y > = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt$. El conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, ...\right\}$$

es ortogonal.

2.9.27. Proposición

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en un espacio producto interno, entonces:

$i)$ Si $x \in gen\{e_1,...,e_n\}$ entonces $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > \ e_i$ y $\| x \| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2$

$ii)$ $\forall x \in X$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \| x \|^2$ desigualdad de Bessel.

Prueba.

$i)$ $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, $\langle x, e_k\rangle = \left\langle \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k \right\rangle = \alpha_k$ por tanto $\alpha_k = \langle x, e_k\rangle$ luego $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$

$$\begin{aligned}
\| x \|^2 = \langle x, x\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > \overline{< x, e_i >} < e_i, e_i > \\
&= \sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2
\end{aligned}$$

$ii)$ Para $n \in \mathbb{N}$ sean $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$, $z_n = x - y_n$. Afirmación : $z_n \perp y_n$

$$\begin{aligned}
\langle x - y_n, y_n\rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k, \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k\rangle}\ \langle x, e_k\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\overline{\langle x, e_k\rangle} = 0
\end{aligned}$$

por tanto $x = y_n + z_n$ luego $\| x \|^2 = \| y_n \|^2 + \| z_n \|^2$ así $\| y_n \|^2 \le \| x \|^2$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \| x \|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \to \infty \\
&\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \| x \|^2
\end{aligned}$$

2.9.28. Teorema: Representación de Riesz

Sea X un espacio de Hilbert y $f \in X'$. Entonces existe un único $y \in X$ tal que $f(x) =< x, y > \quad \forall x \in X$ y $\| f \|_{X'} = \| y \|_X$

Prueba.

i) Si $f = 0$, se toma $y = 0$, y se tiene. Supongase que existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$. Sea $N = \ker f$. N es un subespacio cerrado y $N \neq X$.Como $X = N \oplus N^{\perp}$, sea $w \in N^{\perp}$ tal que $f(w) \neq 0$. Se define $z = \dfrac{w}{f(w)}$, $\quad z \in N^{\perp}$ y $f(z) = 1$, $\quad x - f(x)z \in N \quad \forall x \in X$ entonces $\langle x - f(x)z, z\rangle = 0 \quad \forall x \in X$

$$\begin{aligned} \langle x, z\rangle - \langle f(x)z, z\rangle &\longrightarrow \langle x, z\rangle - f(x)\langle z, z\rangle = 0 \\ &\longrightarrow f(x) = \left\langle x, \frac{z}{\| z \|^2} \right\rangle \qquad \forall x \in X; \; y = \frac{z}{\| z \|^2} \end{aligned}$$

ii) $|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \| y \|$ entonces $\| f \| \leq \| y \|$ ahora

$$\| f \| \geq \frac{f(y)}{\| y \|} = \frac{\langle y, y\rangle}{\| y \|} = \frac{\| y \|^2}{\| y \|} = \| y \| \therefore \qquad \| f \| = \| y \|$$

iii) Sean $y_1, y_2 \in X$, con $f(x) = \langle x, y_1\rangle$ y $f(x) = \langle x, y_2\rangle$ tal que

$$\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x, y_1 - y_2\rangle &= 0 \qquad \forall x \\ \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle &= 0 \\ \| y_1 - y_2 \| &= 0 \qquad \text{entonces } \; y_1 = y_2 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

OPERADORES NORMALES Y AUTOADJUNTOS EN ESPACIOS DE HILBERT

3.1. Teorema

Sean $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio producto interno de dimensión finita y $T \in \mathscr{L}(X)$, entonces existe un único operador lineal T_1 sobre X tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T_1 y\rangle$$

para todo x, y de X.

Prueba.

Sea T un operador cualquiera de X. Entonces $x \to \langle Tx, y\rangle$ es una función lineal sobre X. Por el *teorema de Representación de Riezs* existe un único vector y' en X tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y'\rangle$ para todo x en X. Sea T_1 la aplicación $y \to y'$:

$$y' = T_1 y$$

T_1 es un operador lineal.

En efecto, sean y, z en X y sea α un escalar, entonces para cualquier $x \in X$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle x, T_1(\alpha y + z)\rangle &= \langle Tx, \alpha y + z\rangle \\
&= \langle Tx, \alpha y\rangle + \langle Tx, z\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle Tx, y\rangle + \langle Tx, z\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x, T_1 y\rangle + \langle x, T_1 z\rangle \\
&= \langle x, \alpha T_1 y\rangle + \langle x, T_1 z\rangle \\
&= \langle x, \alpha T_1 y + T_1 z\rangle
\end{aligned}$$

Así, $T_1(\alpha y + z) = \alpha T_1 y + T_1 z$, y T_1 es lineal.
La unicidad de T_1 es inmediata. En efecto, para cualquier y en X, el vector $T_1 y$ está unívocamente determinado como el vetor y' tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y'\rangle \quad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

3.2. Operador Adjunto

Definición. Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Existe un único operador lineal $T_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T_1 y\rangle$ para todo $x,\ y$ en $\mathscr{H}$. Dicho operador le llamaremos el ***adjunto*** de T y lo notaremos como T^*. Por lo tanto $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$.

3.3. Teorema

Sea X un espacio producto interno de dimensión finita. Si T_1 y T_2 son operadores lineales sobre X y α es un escalar, entonces

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;

(ii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$;

(iii) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$;

(iv) $(T^*)^* = T$.

Prueba.

(i) Sean $x,\ y$ vectores en X. Entonces

$$\begin{aligned}\langle (T_1+T_2)x, y\rangle &= \langle T_1 x + T_2 x, y\rangle \\ &= \langle T_1 x, y\rangle + \langle T_2 x, y\rangle \\ &= \langle x, T_1^* y\rangle + \langle x, T_2^* y\rangle \\ &= \langle x, T_1^* y + T_2^* y\rangle \\ &= \langle x, (T_1^* + T_2^*) y\rangle.\end{aligned}$$

De la unicidad del adjunto se tiene que $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(ii) Para todo $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle (\alpha T)x, y\rangle &= \langle \alpha T x, y\rangle \\ &= \alpha \langle Tx, y\rangle \\ &= \alpha \langle x, T^* y\rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha} T^* y\rangle \\ &= \langle x, (\overline{\alpha} T^*) y\rangle\end{aligned}$$

(iii) Para todo $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle T_1 T_2 x, y\rangle &= \langle T_2 x, T_1^* y\rangle \\ &= \langle x, T_2^* T_1^* y\rangle\end{aligned}$$

(iv) Sean $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \langle x, T^* y\rangle \\ &= \langle \overline{T^* y, x}\rangle \\ &= \langle \overline{y, (T^*)^* x}\rangle \\ &= \langle (T^*)^* x, y\rangle\end{aligned}$$

Luego la relación $(T^*)^* = T$.

3.4. Operador Autoadjunto

Definición. Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, es llamado ***autoadjunto*** (o ***hermítico***) si coincide con su adjunto.

$$T^* = T$$

3.5. Teorema

Un operador T es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todo $\langle x, y\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$

Prueba.

(i) Sea $T = T^*$ entonces

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle =& \langle x, T^* y\rangle \\ =& \langle x, Ty\rangle\end{aligned}$$

(ii) Como $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ entonces $T = T^*$

3.6. Lema

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilber complejo. Si $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ y $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$, entonces $T = 0$

Prueba.

Observemos que para todo $\langle x, y\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle T(x+y), (x+y)\rangle - \langle T(x-y), (x-y)\rangle =& 0 \\ 2(\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle) =& 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle T(ix+y), (ix+y)\rangle - \langle T(ix-y), (ix-y)\rangle =& 0 \\ 2(\langle Tix, y\rangle + \langle Ty, ix\rangle) =& 0.\end{aligned}$$

Por consiguiente $\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0$, $\langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = 0$ y $\langle Tx, y\rangle = 0$ para todo $\langle x, y\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$. Si $y = Tx$ entonces $\| Tx \|^2 = 0$ y por tanto $Tx = 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$.

3.7. Operador Isométrico

Sean X y Y espacios producto interno sobre el mismo cuerpo y sea T una trasformación lineal de X en Y. Se dice que T es una ***isometría*** si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo x, y de X.

3.8. Operador Unitario

Definición. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice que U es ***unitario*** si es una isometría sobreyectiva

(i) $R(U) = \mathscr{H}$;

(ii) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$; $\forall x, y \in \mathscr{H}$.

3.9. Proposición

Un operador unitario tiene norma uno.

Prueba.

Sea X un espacio normado y $U \in \mathscr{L}(X)$, entonces

$$\begin{aligned} \| U \| &= \sup\left\{\frac{\| Ux \|}{\| x \|}, x \in D(T) \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\| x \|}{\| x \|}, x \in D(T) \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\{1\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.9.1. Ejemplo 1: El operador identidad

Sean $X \neq \{0\}$ un espacio normado e $I : X \to X$ el operador identidad, el cual es acotado y $\| I \| = 1$, por ser unitario.

3.10. Teorema

Sea U un operador lineal sobre un espacio producto interno X. Entonces U es unitario si y sólo si, el adjunto U^* de U existe y $UU^* = U^*U = I$

Prueba.

Supóngase que U es unitario. Entonces U es invertible

$$\begin{aligned} \langle Ux, y\rangle &= \langle Ux, Iy\rangle \\ &= \langle Ux, UU^{-1}y\rangle \\ &= \langle x, U^{-1}y\rangle. \end{aligned}$$

para todo x, y. Luego $U^{-1} = U^*$. Por tanto $I = UU^{-1} = UU^*$

Recíprocamente, supóngase que existe U^* y que $UU^* = U^*U = I$ y además U es inversible, con $U^* = U^{-1}$. De modo que solo se necesita demostrar que U preserva productos internos

$$\begin{aligned} \langle Ux, Uy\rangle &= \langle x, U^*Uy\rangle \\ &= \langle x, Iy\rangle \\ &= \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

para todo x, y. Por tanto U es unitario.

3.11. Operador Normal

Definición. Sea X un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre X. Se dice que T es ***normal*** si conmuta con su adjunto; es decir

$$TT^* = T^*T$$

Observación:

(i) Todo operador autoadjunto es normal;

(ii) Todo operador unitario es normal;

Sin embargo, las sumas y productos de operadores normales no son en general normales.

Prueba.

(i) Sea TT^* entonces T^*T,

$$\langle TT^*x, y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle = \langle x, TT^*y\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle$$

Ahora si T^*T entonces TT^*,

$$\langle T^*Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, TT^*y\rangle$$

(ii) Como U es un operador unitario,

$$\langle Ux, Ux\rangle \ = \ \langle U^*Ux, x\rangle \qquad \text{y} \qquad \langle U^*x, U^*x\rangle \ = \ \langle UU^*x, x\rangle$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle U^*Ux, x\rangle + \langle -UU^*x, x\rangle \ &= 0 \\ \langle (U^*U - UU^*)x, x\rangle \ &= 0 \\ U^*U - UU^* \ &= 0. \end{aligned}$$

luego $U^*U = UU^*$, por tanto U es normal.

3.12. Operador Positivo

Definición. Un operador $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice ***positivo*** si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Denotaremos en este caso $T \geq 0$.

En el espacios $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ de todos los operadores acotados, y T_1, T_2 estan en $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ diremos que,

$$T_1 \leq T_2 \ \text{ si } \ T_2 - T_1 \geq 0$$

3.13. Proposición.

$i)$ Si $T \leq S$ y $k > 0$, entonces $kT \leq kS$.

$ii)$ Si $T_1 \leq T_2$ y $S_1 \leq S_2$, entonces $T_1 + S_1 \leq T_2 + S_2$.

Prueba.

$i)$ Sea $x \in \mathscr{H}$ entonces, $\langle (S-T)x, x\rangle \geq 0$. Ahora $k\langle (S-T)x, x\rangle \geq 0$ por lo tanto $\langle k(S-T)x, x\rangle \geq 0$ así que $\langle (kS - kT)x, x\rangle \geq 0$ de donde $kS - kT \geq 0$ obteniendo $kS \geq kT$.

$ii)$ Sea $x \in \mathscr{H}$ entonces, $\langle (T_2 - T_1)x, x\rangle + \langle (S_2 - S_1)x, x\rangle \geq 0$, de esto $\langle [(T_2 - T_1) + (S_2 - S_1)]x, x\rangle \geq 0$, por lo cual $(T_2 - T_1) + (S_2 - S_1) \geq 0$, así que $(T_2 + S_2) - (T_1 + S_1) \geq 0$ finalmente $T_2 + S_2 \geq T_1 + S_1$.

Observación.
En particular el conjunto $\mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ de todos los operadores positivos tiene las siguientes propiedades:

(i) $T \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$, $k > 0$ entonces $kT \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$,

(ii) $T, S \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$, $0 \le k \le 1$ entonces $kT + (1-k)S \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$.

(iii) $T, S \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ si $TS = ST$, entonces $TS \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$

Prueba.

(i) Sea $x \in \mathscr{H}$ entonces, $\langle Tx, x\rangle \ge 0$, de donde $k\langle Tx, x\rangle \ge 0$, y de esto $\langle kTx, x\rangle \ge 0$, así que $kT \ge 0$.

(ii) Como $T \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ y $k \ge 0$ entonces $kT \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$; Ahora, $S \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$ y $(1-k) \ge 0$ entonces $(1-k)S \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$. Por tanto $[kT + (1-k)S] \in \mathscr{L}^+(\mathscr{H})$.

(iii) Si $S = 0$ se tiene. Si $S \ne 0$, se define la sucesión $S_1 = \dfrac{S}{\|S\|}$, $S_{n+1} = S_n - S_n^2$; $n = 1, 2, \ldots$
Se prueba por inducción que $0 \le S_n \le I$. Como $S \ge 0$, $S_1 \ge 0$. Además $S_1 \le I$. En efecto, para $x \in \mathscr{H}$
$\langle S_1 x, x\rangle = \left\langle \dfrac{S}{\|S\|} x, x \right\rangle = \dfrac{1}{\|S\|}\langle Sx, x\rangle \le \dfrac{\|Sx\|\|x\|}{\|S\|} \le \dfrac{\|S\|\|x\|\|x\|}{\|S\|} = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Ix, x\rangle$
de aqui $\langle S_1 x, x\rangle \le \langle Ix, x\rangle$; entonces $S_1 \le I$.

Se hace la hipótesis inductiva de que $0 \le S_k \le I$, es decir, $0 \le I - S_k \le I$. Como S_k es autoadjunto, $\forall x \in \mathscr{H}$, $y = S_k x$

$$\begin{aligned} \langle S_k^2 (I - S_k)x, x\rangle &= \langle (I - S_k)S_k x, S_k x\rangle \\ &= \langle (I - S_k)x, x\rangle \ \ge \ 0 \end{aligned}$$

Luego $S_k^2(I - S_k) \ge 0$. Análogamente se prueba que $S_k(I - S_k)^2 \ge 0$

$$0 \ \le \ S_k^2(I - S_k) + S_k(I - S_k)^2 \ = \ S_k - S_k^2 \ = \ S_{k+1}$$

Por otra parte, como $S_k^2 \ge 0$, $I - S_k \ge 0$. Sumando:

$$0 \ \le \ S_k^2 + I - S_k \ = \ I - S_{k+1} \qquad \text{entonces} \qquad 0 \ \le \ S_{k+1} \ \le \ I$$

Veamos por último que $\langle STx, x\rangle \ge 0$, $\forall x \in \mathscr{H}$. Como $S_k - S_k^2 = S_{k+1}$ entonces $S_k = S_k^2 + S_{k+1}$

$$S_1 \ = \ S_1^2 + S_2 \ = \ S_1^2 + S_2^2 + S_3 \ = \ \ldots \ = \ S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2 + S_{n+1}$$

Como $S_{n+1} \ge 0$, $S_1^2 + \ldots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \le S_1$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} \|S_j x\|^2 \ = \ \sum_{j=1}^{n} \langle S_j x, S_j x\rangle \ = \ \sum_{j=1}^{n} \langle S_j^2 x, x\rangle \ = \ \langle S_1 x, x\rangle$$

Esto implica que $\sum_n \|S_n x\|^2$ es una serie convergente, de donde $\|S_n x\| \to 0$ así como $S_n x \longrightarrow 0$. Entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{n} S_j^2\right) x \ = \ (S_1 - S_{n+1})x \to S_1 x$$

Todos los S_j conmutan con T pues son combinaciones lineales de $S_1 = \|S\|^{-1}S$, y por la continuidad del producto escalar se deduce que, para todo $x \in \mathscr{H}$, si se llama $y_j = S_j x$,

$$\begin{aligned}\langle STx, x\rangle &= \|S\|\langle TS_1x, x\rangle\\ &= \|S\| \lim_n \sum_{j=1}^{n} \langle TS_j^2 x, x\rangle = \|S\| \lim_n \sum_{j=1}^{n} \langle Ty_j, y_j\rangle \geq 0\end{aligned}$$

3.14. Raíz Cudrada de un Operador

Definición. Sea T un operador positivo y acotado en $\mathscr{H}$. ***La raíz cuadrada*** de T es un operador acotado y autoadjunto A tal que $A.A = A^2 = T$. Si además $A \geq 0$, decimos que A es la raíz cuadrada positiva de T y lo notaremos $T^{1/2}$.

3.15. Ejemplo

Sea X un espacio producto interno de dimensión finita. Si T_1 y T_2 son operadores lineales sobre X, se escribe $T_1 < T_2$ si $T_2 - T_1$ es un operador positivo. Demostrar lo siguiente:

i) $T_1 < T_2$ y $T_2 < T_1$ es imposible.

Prueba.

Sea, $\langle (T_2 - T_1)x, x\rangle > 0 \wedge \langle (T_1 - T_2)x, x\rangle > 0$ entonces $0 < \langle [(T_2 - T_1) + (T_1 - T_2)]x, x\rangle = \langle 0x, x\rangle$, luego $\langle 0, x\rangle = 0$, por lo tanto $0 < 0$ es absuro.

ii) Si $T_1 < T_2$ y $T_2 < T_3$, entonces $T_1 < T_3$.

Prueba.

Sea $\langle (T_2 - T_1)x, x\rangle + \langle (T_3 - T_2)x, x\rangle > 0$ entonces $0 < \langle [(T_2 - T_1) + (T_3 - T_2)]x, x\rangle = \langle (T_3 - T_1)x, x\rangle$, lo cual implica que $T_3 - T_1 > 0$ y de aquí $T_3 > T_1$

iii) Si $T_1 < T_2$ y $0 < T_3$, no necesariamente $T_3T_1 < T_3T_2$.

3.16. Operador Simétrico

Definición. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, se dice ***simétrico*** si su dominio $D(T)$ es denso en $\mathscr{H}$ y para todo par x, y en $D(T)$ se tiene

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

3.17. Operador Compacto

Definición. Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \to Y$ es ***compacto*** si para cualquier subconjunto acotado $A \subseteq X$, su imagen $T(A) \subseteq Y$ es pre-compacto, es decir, si el cierre $\overline{T(A)} \subseteq Y$ es compacto.

3.18. Subespacio Invariante

Definición: Dado un operador $T : X \to X$, decimos que un subespacio $Y \subset X$ es ***invariante*** bajo T si $T(Y) \subset Y$.

3.19. Teorema

Sea $\mathscr{H}$ un espacio producto interno de dimensión finita y sea T un operador lineal sobre $\mathscr{H}$. Supóngase que Y es un subespacio de $\mathscr{H}$ invariante por T. Entonces el complemento ortogonal de W es invariante por T^*

Prueba.

Sea
$$y \in Y^{\perp} \to T^* y \in Y^{\perp}.$$
Como $y \in Y^{\perp}$ entonces $\langle x, y\rangle = 0, \forall x \in Y$, luego $\langle Tx, y\rangle = 0$, para $Tx \in Y$, así que $\langle x, T^* y\rangle = 0, \forall x \in Y$, por tanto $T^* y \in Y^{\perp}$.

3.20. Teoría Espectral.

3.20.1. Valor Propio.

Definición. Sean X un espacio vectorial y $T \in \mathscr{L}(X)$, se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$, es un ***valor propio*** de T si existe un $x \in X \backslash \{0\}$ tal que $T(x) = \lambda x$.
Al vector x se le llama ***vector propio*** de T asociado a λ. Si λ es un valor propio de T, entonces

$i)$ cualquier x tal que $Tx = \lambda x$ se llama ***vector propio*** de T asociado al valor propio λ;

$ii)$ la colección de todos los x tales que $Tx = \lambda x$ se llama espacio ***propio asociado*** a λ.

$iii)$ al conjunto de valores propios se le llama ***espectro***.

3.20.2. Teorema

Sean X un espacio de dimensión finita, T un operador lineal sobre X y λ un escalar. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

$i)$ λ es un valor propio de T.

$ii)$ El operador $(T - \lambda I)$ es singular (no inversible).

$iii)$ $\det(T - \lambda I) = 0$.

3.20.3. Teorema

Sean X un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador normal sobre X. Supóngase que x es un vector de X. Entonces x es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio para T^* con valor propio $\bar{\lambda}$.

Prueba.

Supóngase que T_1 es un operador normal en X. Entonces $\| T_1 x \| = \| T_1^* x \|$. En efecto, usando la condición de que $T_1 T_1^* = T_1^* T_1$, se tiene

$$\begin{aligned} \| T_1 x \|^2 = \langle T_1 x, T_1 x\rangle &= \langle x, T_1^* T_1 x\rangle \\ &= \langle x, T_1 T_1^* x\rangle = \langle T_1^* x, T_1^* x\rangle = \| T_1^* x \|^2 . \end{aligned}$$

Si λ es un escalar cualquiera, el operador $T_1 = T - \lambda I$ es normal. En efecto, $(T-\lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$, con lo que se puede verificar que $T_1 T_1^* = T_1^* T_1$, entonces

$$\begin{aligned} T_1^* T_1 &= (T^* - \overline{\lambda} I) T_1 \\ &= T^* T_1 - \overline{\lambda} T_1 \\ &= T^*(T-\lambda I) - \overline{\lambda} T_1 \\ &= T^* T - \lambda T^* - \overline{\lambda} T_1 \\ &= T T^* - \lambda T^* - \overline{\lambda} T_1 \\ &= (T-\lambda I) T^* - \overline{\lambda} T_1 \\ &= T_1 T^* - \overline{\lambda} T_1 \\ &= T_1 (T^* - \overline{\lambda} I) \\ &= T_1 T_1^* . \end{aligned}$$

Así,

$$\| (T-\lambda I) x \| = \| (T^* - \bar{\lambda} I) x \|$$

de modo que $(T-\lambda I)x = 0$ si, y sólo si, $(T^* - \bar{\lambda} I)x = 0$.

3.20.4. Teorema Espectral

Sean X un espacio producto interno complejo de dimensión finita, $T \in \mathscr{L}(X)$ normal y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios de T distintos. X_j el espacio propio asociado a λ_j y P_j la proyección ortogonal de X sobre X_j. Entonces

$i)$ X_j es ortogonal a X_i si $i \neq j$,

$ii)$ X es la suma directa de $X_1, \ldots, X_k$ y

$iii)$ T se descompone en forma espectral así,

$$T = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k. \tag{3.1}$$

La ecuación se le llama ***descomposición espectal*** de T.

Prueba.

$i)$ Sean $x \in X_i$, $y \in X_j$ con $i \neq j$. Luego $\lambda_i \langle x, y\rangle = \langle \lambda_i x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\lambda_j} y\rangle$.

Entonces $\lambda_i \langle x, y\rangle - \lambda_j \langle x, y\rangle = 0$, pero $(\lambda_i - \lambda_j)\langle x, y\rangle = 0$, como $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, se tiene que $\langle x, y\rangle = 0$, es decir que $x \perp y$, Así $X_i \perp X_j$ si $i \neq j$.

ii) X tiene una base ortonormal de vectores propios, $X = X_1 + \ldots + X_k$. Si $x_j \in X_j$ $(1 \le j \le k)$ y $x_1 + \ldots + x_k = 0$, entonces

$$0 = \left\langle x_i, \sum_{j=1}^{k} x_j \right\rangle = \langle x_i, x_1 + x_2 + \ldots + x_k \rangle = \langle x_i, x_1 \rangle + \langle x_i, x_2 \rangle + \ldots + \langle x_i, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle x_i, x_j \rangle$$

para todo i, con lo que X es la suma directa de $X_1, \ldots, X_k$.

iii) Se tiene que, $P_1 + \ldots + P_k = I$ y

$$\begin{aligned} T &= TP_1 + \ldots + TP_K \\ &= \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k \end{aligned}$$

Es importante observar que las proyecciones ortogonales $P_1, \ldots, P_k$ están asociada canónicamente con T; en realidad son polinomios en T.

Ejemplo

El operador de traslación (Shift). En $\ell_2(\mathbb{Z})$ consideremos el operador S definido:

$$S(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Sean $x, y \in \ell_2(\mathbb{Z})$ entonces

$$\langle x, S^*(y) \rangle = \langle S(x), y \rangle = \langle \{x_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_{n-1} \overline{y_n} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \overline{y_{k+1}}$$

Por lo tanto S^* es el operador en $\ell_2(\mathbb{Z})$ definido por:

$$S^*(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{y_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Ahora vemos que S es normal

$$S^*S(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = S^*(\{x_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Además

$$SS^*(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = S(\{x_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Luego

$$S^*S = SS^*$$

Por lo tanto S es normal.

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. Akhiezer and I. Glazman. Theory of linear operators in Hilbert space. Transl. from the Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl. New York, NY: Dover Publications. xiv, 147, iv, 1993.

[2] R. Douglas. Banach algebra techniques in operator theory. Academic press, 1972.

[3] W. Rudin. Fourier analysis on groups. Interscience, 1962.

[4] B. Sz.-Nagy, C. Foias. Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North Holland Publishing Co. 1970.

[5] K. Hoffman y R. Kunzze. Algebra Lineal. 1973