Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas y Física

JUEGOS MATEMATICOS
"Una Herramienta para el Docente de Matemáticas en el Aula de Clase"

Elvis Jarol Galindo Méndez

Wbeymar Ramírez Gil

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas y Física

JUEGOS MATEMÁTICOS
Una Herramienta para el Docente de Matemáticas en el Aula de Clase.

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en Matemáticas y Física

Elvis Jarol Galindo Mendez
1999200430
Wbeymar Ramírez Gil
1995100351

Asesor:
Mg. Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Enero de 2013

AGRADECIMIENTOS

De antemano dar gracias a Dios, quien nos doto de sabiduría y paciencia para poder entender el maravilloso mundo de las Matemáticas.

Agradecer a cada uno de nuestros progenitores, quienes con sus palabras alentadoras, nos dieron fuerzas para no desfallecer en el intento de culminar esta etapa de nuestras vidas.

También agradecemos a nuestro asesor de trabajo de grado, Ricardo Cedeño Tovar, quien con su paciencia y profesionalismo, nos motivo siempre a seguir adelante y a no abandonar nuestro proyecto de vida.

Es nuestro deseo como sencillo gesto de agradecimiento, dedicarle nuestra humilde obra de Trabajo de Grado plasmada en el presente escrito, a los docentes que nos han acompañado durante el largo camino, brindándonos siempre su orientación con profesionalismo ético en la adquisición de conocimientos y afianzando nuestra formación como estudiantes universitarios.

Agradecemos por supuesto, a nuestros docentes en cada Escuela de los rincones más apartados de nuestro país, quienes laboran con la materia más valiosa de nuestra patria, las mentes, la personalidad, la formación integral de nuestros niños y niñas, y, son en definitiva, formadores de los hombres y mujeres del mañana, sobre la bases de valores morales, éticos y de mucho humanismo, quienes con mucha paciencia y bondadoso amor cincelan los corazones de los más pequeños.

A todos ellos infinitas gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La preparación académica para el ejercicio profesional de la docencia ha sido reconocida como una condición fundamental en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Como es evidente, actualmente hay un aumento de educandos en cantidad, pero no se puede decir lo mismo en calidad. Desgraciadamente, esto hace que muchas escuelas se transformen en máquinas de dar clases, volcándose hacia una insuficiente instrucción, con mínima preocupación por educar. Vale la pena pensar en lo que podemos hacer, en la situación actual, para tornar la acción escolar más eficiente, esto amerita una ayuda al estudiante para que se realice, se encuentre a sí mismo, y aprenda a conocer su medio. Sólo será posible hacer algo cuando nos dispongamos a cambiar el comportamiento didáctico, buscando comprender, amparar y orientar.

En el capítulo I de este trabajo de grado, trataremos de abordar de una manera rápida y significativa las estrategias de solución de problemas, teniendo como referente principal el trabajo de George Polya. Este autor nos muestra una estrategia de solución de problemas que está al alcance de todos nuestros estudiantes.

El trabajo de Polya se basa en la solución de problemas partiendo de la siguiente estrategia

a) Entender el problema.

b) Configurar un plan.

c) Ejecutar el plan.

d) Una mirada retrospectiva.

En el capítulo II trataremos sobre el trabajo de Martin Gardner, enfatizándonos en la Matemática recreativa, pues bien es cierto, que para que nuestros estudiantes pierdan el temor por la matemática es bueno buscar estrategias de juego para el aprendizaje.

Jugar con números, figuras e ideas puede llegar a ser la mejor manera de empezar a conocer la Matemática y, más en general de mejorar nuestra capacidad de pensar con lógica y creatividad.

Martin Gardner ha buscado propuestas que fueran inusuales y divertidas que solo requiera del lector el más elemental conocimiento, pero que al mismo tiempo proporcionara una mirada estimulante a los niveles más fecundos del pensamiento matemático.

En el capítulo III, trataremos del trabajo de Miguel de Guzmán “Juegos Matemáticos en la Enseñanza” donde el autor plantea: ¿Dónde termina el juego y donde comienza la Matemática? Es una pregunta capciosa que admite varias respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, la encuentran mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego, en cambio para quienes se encuentran en el maravilloso mundo de las Matemáticas, ésta nunca deja de ser un juego, aunque además puedan ser muchas cosas más.

El juego bueno, el que no dependa de la fuerza o mañas físicas, el juego que tiene bien definida sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático.

En el capítulo IV, trataremos del trabajo de Jean Pierre Alem “Juegos de Ingenio y Entretenimiento Matemático” , allí mostraremos una serie de ingeniosos relatos, enigmas de manera insólita o pintoresca, y siempre atrayente al lector, pues su trabajo presenta los juegos más divertidos de entretenimiento numérico que reúnen las leyes fundamentales de la lógica, criptografía, ajedrez y todas las bases primordiales de las ciencias exactas.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Crear un espacio de reflexión y estudio sobre las Matemáticas, en cuanto objeto de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos de índole general que la Didáctica de las Matemáticas está generando como campo de investigación.
- Ofrecer al profesional en Matemáticas una herramienta que le permita hacer de su enseñanza una labor lúdica y recreativa, y que al mismo tiempo potencie en sus estudiantes el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Objetivos Específicos

- Brindar al profesional en Matemáticas estrategias metodológicas en la resolución de problemas.
- Ofrecer al maestro una amplia gama de ejercicios y problemas de ingenio, lógica y juegos para despertar el interés de sus estudiantes por la matemática.
- Brindar al estudiante por medio de su maestro una perspectiva diferente en cuanto al aprendizaje y modelación de situaciones problema que brinda la Matemática.

JUSTIFICACIÓN

La Matemática juega un papel importante en el curriculum escolar, al proporcionar instrumentos que permiten analizar diversas situaciones que ocurren en el mundo real. Esta utilidad queda reflejada en la solución de situaciones problemáticas, puesto que permite desarrollar en los estudiantes su pensamiento lógico, y las habilidades sobre cuándo y cómo aplicar sus conocimientos.

La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento y toma los contenidos matemáticos, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaz; además, desarrollan en los estudiantes una actividad crítica y flexible ante el uso de las Matemáticas, despiertan la creatividad, fomentan la capacidad de análisis y de organización de la información, sin olvidar que son un puente que contribuye a la mejor comprensión de las Matemáticas abstractas y facilita la creación de modelos.

Una de las grandes dificultades que se presentan a la hora de solucionar problemas aritméticos, es que no se trabaja de manera adecuada con el significado de las operaciones aritméticas y, en consecuencia, se abusa de la búsqueda de palabras claves en los textos, logrando con esto que los estudiantes traten mediante ellas de “adivinar” qué operación u operaciones deben realizar y cometan muchos errores, unido al poco desarrollo que ésta práctica provoca.

Para aprender a solucionar problemas es necesario proporcionar a los estudiantes instrumentos, técnicas específicas y pautas generales de solución de problemas que les permitan enfrentarse a los enunciados sin miedo y con ciertas garantías de éxito.

FORMULACIÓN Y DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Hoy las expectativas sobre la educación indican que la escuela debe contribuir al desarrollo de la capacidad de utilizar conceptos, representaciones y procedimientos matemáticos para interpretar y comprender el mundo real, tanto en lo referido a la vida en el entorno social inmediato, como a los ámbitos de trabajo y de estudio. Muchos documentos curriculares plantean, de forma explícita, la necesidad de formar un ciudadano autónomo, que pueda desplegar prácticas Matemáticas adecuadas a distintas situaciones y justificar la validez tanto de los procedimientos utilizados como de los resultados obtenidos.

La actual tendencia a extender la obligatoriedad de la enseñanza requiere pensar esta formación con una mayor diversidad en el capital cultural de los estudiantes. Esto involucra diferentes relaciones con el conocimiento y con el sentido que éste tiene en la formación de su proyecto de vida. Cabe aquí señalar que las condiciones de vulnerabilidad económica, social y cultural que afectan a un gran porcentaje de estudiantes y de docentes configuran un escenario que parece desafiar la posibilidad de una educación de calidad para todos. Así, hoy resulta imprescindible la discusión en el ámbito de la escuela acerca de qué Matemática se enseña, para qué, y para quiénes.

Desde esta perspectiva, ya no es posible sostener una formación Matemática que ponga el acento en la disponibilidad de un repertorio de resultados y técnicas que, seguramente, podrá ser modificado. Es necesario buscar el desarrollo de capacidades, valores y actitudes que permitan a los estudiantes hacer frente a distintas situaciones; tomar decisiones utilizando la información disponible y resolver problemas, pudiendo defender y argumentar sus puntos de vista.

Y para ello, hay que plantear una educación de calidad que abarque los conocimientos de base, valores, comportamientos y habilidades que correspondan a las necesidades de la vida actual. Lo anterior implica extender la convicción de que todos pueden aprender esta ciencia y asumir el compromiso de una enseñanza que los habilite a avanzar desarrollando sus potencialidades y los prepare para enfrentar los escenarios cada vez más complejos y cambiantes que los interpelarán.

A la inversa, cuando la enseñanza apunta únicamente al dominio de técnicas, algunos alumnos obtienen buenos resultados en sus evaluaciones si los instrumentos utilizados remiten directamente al uso de esa(s) técnica(s) conocida(s). Sin embargo, esos mismos estudiantes fracasan cuando las situaciones que se les presentan son diferentes de aquellas que abordaron en la escuela.

Por eso, no solo resultará necesario enriquecer los modos de presentación y la variedad de problemas a ser resueltos sino también, y fundamentalmente, sostener un trabajo de reflexión sobre lo realizado exigiendo siempre la explicitación, el reconocimiento y la sistematización del conocimiento implicado en la resolución de los problemas, así como de las formas de obtenerlo y validarlo.

La enseñanza de la Matemática en la escuela básica está condicionada, fundamentalmente, por dos características esenciales que determinan sus funciones y objetivos: por un lado es enseñanza y, como tal, parte del proceso de formación integral de los alumnos; es decir, parte del proceso de educación que tiene lugar en las escuelas; por otro, es enseñanza de la Matemática y por ello participa de los modos de hacer y de pensar propios de esta ciencia.

Como ocurre con otras producciones culturales, el conocimiento Matemático se transforma en su interacción con los distintos entornos sociales. Así, la actividad de los Matemáticos está ligada fuertemente a la resolución de problemas, y a un modo particular de razonar y comunicar los resultados de esa tarea.

Resolver los problemas “del mundo natural, del social o de la misma Matemática” implica construir modelos nuevos o utilizar modelos Matemáticos conocidos, que permitan anticipar el resultado de algunas acciones sin realizarlas efectivamente. En ambos casos, son analizadas las conclusiones para determinar si responden o no a las preguntas planteadas.

También forma parte de la acción de los Matemáticos mejorar los modelos en uso y las formas de comunicar los resultados; así como relacionar lo nuevo con lo ya conocido, articulando los conocimientos en una estructura cada vez más amplia y coherente.

Justamente esta forma de trabajar es la que se busca sea desarrollada en las escuelas; con las restricciones necesarias e invitando a los alumnos a entrar en el juego Matemático.

Esto es, producir conocimientos nuevos (para ellos) frente a los problemas que se les plantean, argumentando acerca de la validez de los resultados y de los procedimientos usados, reconociendo luego “con la ayuda del maestro” el lugar de esos saberes en una estructura más amplia.

Es posible sostener que estudiar Matemática es hacer Matemática en su sentido más amplio, porque requiere involucrarse en la resolución de un problema, indagar las condiciones particulares y generales que implica, generar conjeturas, identificar modelos con los que abordar el problema y reconocer el campo de validez de un cierto procedimiento o de una afirmación producida en el marco de este proceso.

El alumno que sólo repite lo que le transmite el maestro se somete al aprendizaje de técnicas sin conocer su sentido, o cree que es él quien no se lo encuentra porque no es “bueno para la Matemática”.

Claramente, este es un proceso a largo plazo, en el que cada etapa aporta elementos diferentes.

Un aspecto central en este proceso es el desarrollo de la racionalidad propia de la Matemática, a partir de los modos de los alumnos de concebir sus objetos y de elaborar justificaciones acerca de su naturaleza y sus propiedades.

En los primeros grados de la escuela primaria, los niños se apoyan en el uso de ejemplos o en comprobaciones empíricas con materiales para justificar los resultados que obtienen o los procedimientos que eligen. Pero, al finalizar la escolaridad obligatoria tendrían que poder argumentar usando propiedades.
Por ejemplo, en geometría es posible avanzar desde comprobar que las diagonales de un rectángulo son iguales plegando y cortando para obtener dos recortes que coinciden cuando se superponen, hasta explorar las relaciones entre rectángulos inscritos en circunferencias para determinar que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

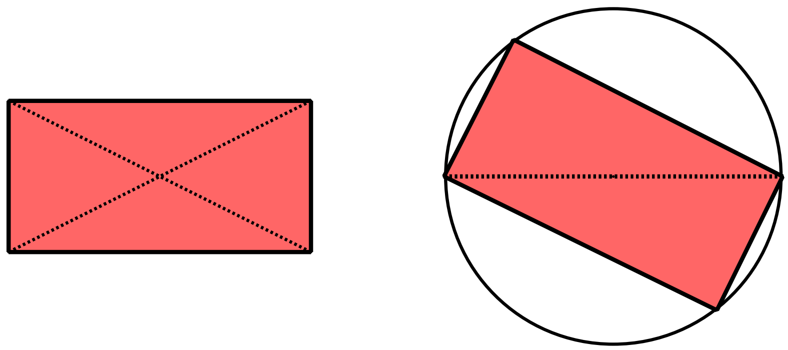

Figura 0.1

Asi mismo, la enseñanza de la Matemática es un ámbito propicio para contribuir a la formación de un ciudadano crítico y responsable, capaz de debatir con otros defendiendo sus puntos de vista y respetando aquellos de los demás; así como para desarrollar cualidades de la personalidad que caracterizan al ser humano.

0.1. Selección de problemas y Construcción de significados

La enseñanza de la matemática, pretende centrarse tanto en la resolución de problemas como la reflexión y sistematización de procedimientos y resultados, respetando las reglas generales que de este proceso se deriven y planteando el desafío para el maestro en cuanto a la selección de la situacion problema adecuada para construir el significado matemático que el docente desee enseñar. Surge luego el interrogante: *¿cuáles son los problemas que favorecen la construcción de sentido de las nociones elegidas para la educación media y básica?*

Cuando el conjunto de problemas elegidos para tratar una noción Matemática en clase no es suficientemente representativo de la diversidad abordable en el año escolar correspondiente, es probable que los alumnos sólo puedan utilizarla en contextos limitados, haciendo uso de representaciones estereotipadas, y en situaciones muy similares a las que estudiaron en la escuela.

Esto puede derivar en que, cuando en una evaluación aparece alguna modificación en el enunciado, el alumno no puede vincularlo con lo que sabe. Por esta razón, es muy importante

tener en cuenta cuáles son los contextos, significados y representaciones que elegimos al planificar la enseñanza de una noción.
El término noción refiere aquí al estado del saber de un alumno en relación a un concepto matemático transpuesto como objeto de enseñanza, y busca llamar la atención acerca de la polisemia de su enunciación formal cuando se lo analiza en términos de los procesos de los sujetos que están aprendiendo.

Estos contextos pueden estar ligados a la información que aparece en los medios de comunicación, a la vida cotidiana, o al ámbito específico de distintas disciplinas, incluyendo "claro" la misma Matemática. El uso en distintos contextos, y el análisis posterior de ese uso nombrando las nociones del modo en que son empleadas en la disciplina, reformulando las conclusiones con representaciones más ajustadas a las convencionales, permitirá la progresiva generalización de la noción, ampliando el campo de problemas que los alumnos pueden resolver con ella.

Al interactuar en su vida social, los niños aprenden las prácticas habituales de cada comunidad y construyen, entre otros, conocimientos ligados a la Matemática, los que no siempre son recuperados por la escuela. Por ejemplo, en algunos primeros grados únicamente se trabaja con los números hasta el 9 en la primera parte del año, sin tener en cuenta que hay niños que ayudan a sus padres en la venta de distintos productos y que realizan cálculos sencillos aún siendo muy pequeños; o se "presenta" el 2000, sin advertir que es un número ya conocido por los niños. Otras veces, los enunciados de problemas escolares no requieren ser leídos, pues basta descubrir que dice "total" para decidir que es necesario sumar.

Al elegir los problemas, es esencial revisar los enunciados pues muchas veces son incluidas preguntas inverosímiles y que sólo encuentran respuesta en el ámbito de la escuela. Por ejemplo, si se pide calcular la cantidad "total" de mosquitos que picaron a un perro, sabiendo cuántos lo picaron en dos ocasiones diferentes, podríamos preguntarnos quién contó los mosquitos y para qué, o quién necesita el resultado de tal suma. Muchos niños, "suman por sumar", sin preocuparse por el sentido de lo que hacen, guiados por indicios aparecidos en los enunciados para orientar la operación que hay que hacer. Así basta descubrir que dice "total" para decidir que ¿hay que sumar?.
Entonces, para involucrar a los alumnos en la comprensión de un problema será esencial proponer enunciados que requieran ser leídos una o más veces, para comprender la situación planteada e involucrarse en su resolución, sin que el texto anticipe un único procedimiento. En este sentido, los contextos de los problemas deberán ser significativos para los alumnos; es decir, implicar un desafío que puedan resolver en el marco de sus posibilidades cognitivas y de sus experiencias sociales y culturales previas.

Cabe aclarar aquí que esto no significa que todas sus experiencias deban referirse al entorno inmediato. Es más, el trabajo en contextos intramatemáticos "al comparar y analizar distintos procedimientos de cálculo" es central para la explicitación y sistematización de propiedades.
Hay que tener presente que un conjunto bien elegido de cuentas presentadas para descubrir una estrategia de cálculo mental, también puede dar lugar a verdaderos problemas, ya sean dos afirmaciones opuestas sobre las que hay que decidir su validez, una construcción geométrica con determinados instrumentos o determinadas condiciones, un juego numérico, o un interrogante que deba ser respondido a partir de una información publicada en el diario o en la publicidad de una revista.

Aparte de los distintos contextos, para cada noción matemática es posible encontrar distintos significados. Por ejemplo, los números racionales pueden ser utilizados en situaciones referidas a

la relación parte-todo, a la razón entre dos cantidades del mismo tipo o de distinto tipo, al resultado de una división, al de una transformación multiplicativa o de una probabilidad.
Cada uno de estos significados exige y pone en funcionamiento diversos aspectos del concepto, así como distintos niveles de complejidad, lo que lleva a discutir y articular cómo será su abordaje en cada grado escolar.

En el conjunto de problemas seleccionados también es necesario tener en cuenta las diferentes representaciones posibles de la noción enseñada, ya que la posibilidad de avanzar en la comprensión de una noción implica reconocerla en todas sus representaciones, pudiendo elegir la más conveniente y pasar de una a otra en función del problema a resolver.

Durante la resolución de problemas debe esperarse que sean los alumnos los que tomen decisiones acerca de las formas de registrar y comunicar sus procedimientos, y que el debate posterior sobre la pertinencia y economía de estas representaciones permita su articulación con las representaciones convencionales.

Así por ejemplo, en una evaluación encontramos un dibujo de 3/4 taza de harina realizado por una alumna que así recupera su experiencia de representar fracciones en rectángulos.

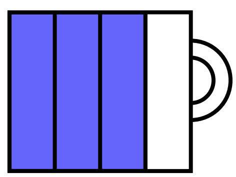

Figura 0.2

Este aprendizaje requiere de un proceso a largo plazo, ya que primero son resueltos problemas que involucran un sentido particular de una noción en un contexto, con alguna representación también ligada a ese uso; luego, son incluidos otros contextos con la misma representación o se presenta una nueva que resulte más adecuada; más tarde es ampliado su uso a nuevos contextos, tanto extra como intramatemáticos, y se comparan y analizan los distintos procedimientos y representaciones empleadas para explicitar sus características y reglas de uso en cada registro (gráfico, numérico, geométrico), avanzando así en un proceso de generalización de la noción.

En conclusión, las situaciones trabajadas debieran ofrecer variedad de tipos de respuestas, pues es frecuente que los niños piensen que hay que usar todos los números que aparecen en un enunciado, o que basta hacer una cuenta y que su resultado es la respuesta del problema. Es posible dar lugar a verdaderos problemas a partir de un conjunto bien elegido de preguntas que admitan más de una respuesta ó presentar información compleja que le permita analizar datos y usar ó variar los soportes gráficos para presentar la información. Con este proceso podemos potenciar en los estudiantes las competencias matemáticas y desarrollar habilidades en su pensamiento lógico-matemático.

0.2. Trabajo en clase y tipo de práctica Matemática

Desde la perspectiva propuesta, el trabajo de resolución de problemas requiere de algunas condiciones para la gestión de la clase.

Al presentar un problema es necesario asegurarse de que todos hayan comprendido cuál es el desafío planteado, para que cada alumno acepte ocuparse de él, intentando resolver por sí solo, sin orientarlos acerca de cómo deben hacerlo.

Luego, habrá que dar lugar a un intercambio del que participen todos los alumnos y en el que el maestro vaya explicando las diferentes aproximaciones al conocimiento que desea enseñar, y debatir sobre ellas.

Al dar lugar a la presentación y explicación de los procedimientos utilizados por los alumnos, es necesario valorizar de igual modo todas las producciones, ya sea que permitan o no arribar a una respuesta al problema planteado; así como animar a los alumnos a dar las razones de lo realizado, a explicar por qué lo hicieron de cierta forma, y a argumentar sobre la validez de sus producciones.

Esto les permitirá volver sobre lo que han pensado para analizar aciertos y errores y controlar, de este modo, el trabajo.

Este trabajo incorpora a los alumnos en procesos de evaluación en un lugar diferente del habitual, en qué quedan a la espera de la palabra del docente quien les ratifica de inmediato si lo que hicieron está bien o mal. Pero, si han asumido como propia la tarea de resolución, querrán saber si lo obtenido es o no una respuesta a la pregunta que organizó el quehacer matemático en el aula.

En el debate, el conjunto de la clase validará o no una respuesta, lo que llevará a la modificación de los procedimientos que conducen a errores; y, con la intervención del maestro, serán reconocidos y sistematizados los saberes descubiertos por el grupo-curso.

Esta tarea de establecer relaciones entre las conclusiones de la clase y el conocimiento matemático al que se pretende llegar, introduciendo las reglas y el lenguaje específicos, y entre los conocimientos ya conocidos y los nuevos, es una tarea que está siempre a cargo del maestro y que resulta imprescindible para que los alumnos identifiquen qué han aprendido.

0.3. Estudiar Matematica en clase y fuera de ella

Promover la diversidad de producciones es un modo de incluir a todos en el aprendizaje, de generar confianza en las propias posibilidades de aprender y de poner en evidencia la multiplicidad de formas de pensar frente a una misma cuestión, así como la necesidad de acordar cuáles son consideradas adecuadas en función de las reglas propias de la matemática.

Es así como es posible lograr que los niños vayan internalizando progresivamente que la matemática es una ciencia cuyos resultados y avances son obtenidos como consecuencia necesaria de la aplicación de ciertas relaciones y del debate entre quienes las plantean, y no como una práctica de la adivinación o del azar o un saber que no sufre transformaciones.

La revisión de las producciones realizadas de lo aprendido para modificarlas, sistematizarlas, enriquecer su vocabulario es fundamental para que los niños se involucren en su propio aprendizaje.

CAPÍTULO 1

EL TRABAJO DE GEORGE POLYA

George Pólya (Pólya György en húngaro) fue un matemático que nació el 13 de diciembre de 1887 en Budapest, Hungría y murió el 7 de septiembre de 1985 en Palo Alto, EUA. Trabajó en una gran variedad de temas matemáticos, incluidas las series, la teoría de números, geometría, álgebra, análisis matemático, la combinatoria y la probabilidad.

En sus últimos años, invirtió un esfuerzo considerable en intentar caracterizar los métodos generales que usa la gente para resolver problemas, y para describir cómo debería enseñarse y aprender la manera de resolver problemas. Escribió tres libros sobre el tema: *Cómo plantear y resolver problemas (How to solve it), Matemáticas y razonamiento plausible, Volumen I: Inducción y analogía en matemáticas, y Matemáticas y razonamiento plausible, Volumen II: Patrones de inferencia plausible.*

En 1945 el insigne matemático y educador George Polya, en su libro propone una metodología basada en cuatro etapas para resolver problemas. A cada etapa le asocia una serie de preguntas y sugerencias que aplicadas adecuadamente ayudarían a resolver el problema. Las cuatro etapas y las preguntas a ellas asociadas se detallan a continuación:

Etapa I: Comprensión del problema

i *¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?*

ii *¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?*

Etapa II: Concepción de un plan.

i *¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?*

ii *¿Conoce un problema relacionado con este? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.*

iii *He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo? ¿Podría emplear su resultado? ¿Podría utilizar su método? ¿Podría utilizarlo introduciendo algún elemento auxiliar?*

iv *¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.*

v *Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general?. ¿Un problema más particular?. ¿Un problema análogo?, ¿Puede resolver una parte del problema?. Considere solo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada?, ¿en qué forma puede variar?, ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos?, ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita?, ¿Puede cambiar la incógnita?, ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?*

vi *¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha empleado toda la condición?, ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?*

Etapa III. Ejecución del plan.

i *Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos.*

ii *¿Puede ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarlo?*

Etapa IV. Visión retrospectiva.

i *¿Puede usted verificar el resultado?, ¿Puede verificar el razonamiento?*

ii *¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿Puede verlo de golpe?, ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?*

En el libro en mención, *Polya* propone una serie de estrategias que el maestro de matemáticas podría emplear en el salón de clases.
Estos son los propósitos:

1.1. Ayudar Al Alumno

De las más importantes tareas del maestro es ayudar a sus alumnos. Tarea nada fácil, requiere de tiempo, práctica, dedicación y buenos principios.

El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Pero si se le deja solo frente a su problema sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese. Por otra parte, si el maestro le ayuda demasiado, nada se le deja al estudiante. El maestro debe ayudarle, pero no mucho ni demasiado poco, de suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo.

Si el estudiante no esta en condiciones de hacer gran cosa, el maestro debe mantenerle al menos la ilusión del trabajo personal. Para tal fin, el maestro debe ayudar al estudiante discretamente, sin imponerse. Lo mejor es, sin embargo, ayudar al alumno en forma natural. El maestro deberá ponerse en su lugar, ver desde el punto de vista del alumno, tratar de comprender lo que le pasa por la mente, y plantear una pregunta o indicar algún camino que pudiese ocurrírsele al propio alumno.

1.2. Preguntas, Recomendaciones, Operaciones Intelecuales

Tratar de ayudar al estudiante en forma efectiva y natural, sin imponérsele, el maestro puede hacer la misma pregunta e indicar el mismo camino una y otra vez. Así, en innumerables problemas, tenemos que hacer la pregunta: ¿Cuál es la incógnita?. Podemos cambiar el vocabulario y hacer la misma pregunta en diferente formas: ¿Qué se quiere?; ¿Qué quiere usted determinar?; ¿Qué se le pide a usted que encuentre?, el propósito de estas preguntas es concentrar la atención del estudiante sobre la incógnita. A veces se obtiene el mismo resultado de modo más natural sugiriendo: mire atentamente la incógnita.
Preguntas y sugerencias tienen el mismo fin; tienden a provocar la misma operación intelectual.
Nos ha parecido que podría ser interesante el juntar y agrupar las preguntas y sugerencias particularmente útiles en la discusión de problemas con los estudiantes. En las etapas I a IV al inicio del capítulo, presentamos una lista de preguntas y sugerencias cuidadosamente elegidas y clasificadas; estas pueden ser igualmente útiles a aquellas personas que trabajen solas en la resolución de problemas.

1.3. Generalidad

Una de las características importantes de las preguntas y sugerencias es que son aplicables en general, podemos plantearlas eficazmente en toda clase de problemas. Su uso no está restringido a un determinado tema. Ya sea un problema algebraico o geométrico, matemático o no, teórico o práctico, un problema serio o una mera adivinanza; las preguntas tienen un sentido y ayudan a esclarecer el problema.

De hecho, existe una restricción pero que nada tiene que ve con el problema. Ciertas preguntas y sugerencias de la lista son aplicables exclusivamente a los problemas de determinación y no a los problemas de demostración.

1.4. Sentido Común

Preguntas y sugerencias que se plantearon al comienzo del capítulo, son generales, pero, pese a su generalización, son naturales, sencillas, obvias y proceden del mas simple sentido común. Tómese la sugerencia: mire la incógnita y trate de pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una semejante.
Esta sugerencia le aconseja ser lo que usted haría de todas formas, aun sin consejo, si esta decidido a resolver su problema. ¿Tiene hambre?. Usted quiere procurarse algún alimento y piensa en las formas habituales de procurárselo. ¿Tiene un problema de construcción geométrica?, Quiere construir un triángulo y piensa en las formas habituales de construir un triángulo. ¿Tiene un problema cualquiera?, Quiere encontrar una cierta incógnita y piensa en las formas habituales de encontrar una incógnita de ese tipo o una incógnita similar.

Obrando así usted esta en la línea de las sugerencias mencionadas en la lista que se referencia al comienzo del capítulo.

1.5. Maestro y Estudiante.(Imitación y Práctica)

Cuando el profesor hace a sus alumnos una pregunta o una sugerencia de la lista, puede proponerse dos fines. Primero, el ayudar al alumno a resolver el problema en cuestión. Segundo, el desarrollar la habilidad del alumno de tal modo que pueda resolver problemas por si mismo. La experiencia muestra que las preguntas y sugerencias de la lista, aplicadas adecuadamente con frecuencia ayudan al estudiante.

El resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica como, por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitaremos los movimientos de pies y manos de las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente aprendemos a nadar poniendo en práctica la imitación de estos movimientos.

El profesor que desee desarrollar en sus estudiantes la aptitud de resolver problemas, debe hacerles interesarse en ellos y darles el mayor número posible de casos de imitación y práctica. Si el maestro quiere desarrollar en sus estudiantes el proceso mental que corresponde a las preguntas y sugerencias que inicialmente colocamos en la lista, deben emplearlas tantas veces como sea posible en un modo natural. Además cuando el maestro resuelva un problema ante la clase, debe "dramatizar" un poco sus ideas y hacerse las mismas preguntas que emplea para ayudar a sus estudiantes. Gracias a tales consejos, el alumno descubrirá, sin duda, la manera de utilizar las preguntas y sugerencias y adquirirá así conocimientos más importantes que los de un simple hecho matemático.

A fin de agrupar de forma cómoda las preguntas y sugerencias de la lista que mencionamos, distinguiremos cuatro faces del trabajo.

La primera etapa es obviamente insoslayable: es imposible resolver un problema del cual no se comprende el enunciado. Sin embargo en nuestra práctica como docentes hemos visto a muchos estudiantes lanzarse a efectuar operaciones y aplicar fórmulas sin reflexionar siquiera un instante sobre lo que se les pide. Por ejemplo si en el problema aparece una función comienzan de inmediato a calcularle la derivada, independientemente de lo que diga el enunciado. Si el problema se plantea en un examen y luego, comentando los resultados, el profesor dice que el cálculo de la derivada no se pedía y más aún que el mismo era irrelevante para la solución del problema, algunos le responderían: ¿o sea que no nos va a dar ningún punto por haber calculado la derivada?. Este tipo de respuesta revela una incomprensión absoluta de lo que es un problema y plantea una situación muy difícil al profesor, quien tendría que luchar contra vicios de pensamiento arraigados, adquiridos tal vez a lo largo de muchos años.

La segunda etapa es la más sutil y delicada, ya que no solamente está relacionada con los conocimientos y la esfera de lo racional, sino también con la imaginación y la creatividad. Observemos que las preguntas que Pólya asocia a esta etapa están dirigidas a llevar el problema hacia un terreno conocido. Con todo lo útiles que estas indicaciones son, sobre todo para el tipo de problemas que suele presentarse en los cursos ordinarios, dejan planteada una interrogante: ¿qué hacer cuando no es posible relacionar el problema con algo conocido?. En este caso no hay recetas infalibles, hay que trabajar duro y confiar en nuestra propia creatividad e inspiración.

La tercera etapa es de carácter más técnico. Si el plan está bien concebido, su realización es factible y poseemos los conocimientos y el entrenamiento necesario, debería ser posible llevarlo a cabo sin contratiempos. Sin embargo por lo general en esta etapa se encontrarían dificultades que nos obligaran a regresar a la etapa anterior para realizar ajustes al plan o incluso para modificarlo por completo. Este proceso puede repetirse varias veces.

La cuarta etapa es muchas veces omitida, incluso por solucionistas expertos. Pólya insiste mucho en su importancia, no solamente porque comprobar los pasos realizados y verificar su corrección nos puede ahorrar muchas sorpresas desagradables, sino porque la visión retrospectiva nos puede conducir a nuevos resultados que generalicen, amplíen o fortalezcan el que acabamos de hallar.

1.6. Ejemplos Sencillos

"Resolver un problema es hacer un descubrimiento. Un gran problema significa un gran descubrimiento, pero hay una partícula de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El suyo puede ser modesto, pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, y si lo resuelve por medios propios, puede experimentar la tensión y el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo."
George Pólya

1.6.1. Aritmética y Algebra

Algunos de los problemas más antiguos que se conocen son de tipo aritmético. Es típico que se pida hallar una cantidad determinada por ciertas condiciones, o bien efectuar un reparto cumpliendo ciertos requisitos. Los siguientes problemas pertenecen a esta categoría.

Problema 1.1

Diofanto fue un notable matemático griego que desarrollo su actividad en Alejandría en el siglo III A.C. y del cual se conservan muy pocos datos biográficos. Sin embargo se dice que su epitafio contenía la siguiente inscripción:
Caminante: aquí yacen los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyo su hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte cuando sus mejillas se cubrieron de vello. Luego de una séptima parte se casó, y transcurrido un quinquenio le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito, cuya existencia duro tan solo la mitad de la de su padre. Luego de cuatro años buscando consuelo en la ciencia de los números, descendió Diofanto a la sepultura.
¿Qué edad alcanzo Diofanto?, ¿A qué edad se casó?, ¿Cuantos años vivió su hijo?

Solución. Veamos si comprendemos bien el problema. ¿Cuál es la incógnita? El número de años que vivió Diofanto (las preguntas restantes se responden fácilmente conociendo la respuesta a la primera). ¿Cuáles son los datos?. Una serie de informaciones sobre las etapas sucesivas de su vida, desde su infancia hasta su muerte. Ahora debemos concebir un plan. ¿Se ha encontrado con un problema semejante?. Es de esperar que sí, ya que la mayoría de los problemas resolubles por métodos algebraicos elementales son semejantes. El plan general consiste en escribir ecuaciones que reflejen las condiciones planteadas, resolver el sistema resultante y finalmente interpretar las soluciones obtenidas en el contexto original del problema. Llamemos x al número de años vividos por Diofanto. Esta cantidad debe ser igual a la suma de las duraciones de las etapas de su vida, a saber:su infancia $\left(\frac{x}{6}\right)$, la duodécima parte transcurrida hasta que le salió barba $\left(\frac{x}{12}\right)$, los años transcurridos hasta que contrajo matrimonio $\left(\frac{x}{7}\right)$, los años transcurridos hasta que nació su primogénito (5), los años que este vivió $\left(\dfrac{x}{2}\right)$, y los 4 años que Diofanto le sobrevivió.
Por lo tanto escribimos:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

Agrupando términos semejantes resulta:

$$\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right)x=5+4$$

y simplificando queda:

$$\frac{3}{28}x=9$$

Por lo tanto:

$$x=28*\frac{9}{3}=84$$

Verifiquemos el resultado:

$$\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+5+\frac{84}{2}+4=14+7+12+5+42+4=84$$

Diofanto se casó cuando contaba $\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}=33$. años, y su hijo vivió $\frac{84}{2}=42$ años.

Los documentos matemáticos más antiguos que se conservan son dos rollos de papiro egipcios que datan aproximadamente de la XII dinastía (2078 a 1788 A.C.).Uno de ellos, conocido como el *papiro Rhind*, consta de unos 85 problemas y ejemplos prácticos. El siguiente es uno de ellos:

Problema 1.2

Dividir cien panes entre cinco hombres, de modo que las porciones que reciban esten en progresión aritmética y que la séptima parte de la suma de las tres mayores sea igual a la suma de las dos porciones menores.

Solución. Asegurémonos de comprender bien el problema. ¿Que se nos pide?. Dividir cien panes entre cinco hombres, de modo que se cumplan ciertas condiciones. ¿Cuáles son los datos?. El número total de panes (100), la cantidad de porciones (5) y las condiciones que debe cumplir el reparto. ¿Cuáles son las incógnitas?. Obviamente, la cantidad de panes que le corresponderá a cada uno. ¿Comprendemos la condición?. En primer lugar las porciones deben estar en progresión aritmética; esto significa que si escribimos las porciones en orden creciente de magnitud, la diferencia de cada una de ellas con la siguiente es constante. En otras palabras, si llamamos x a la menor de las porciones y r a la diferencia común o razón de la progresión, entonces las cinco porciones deberán ser.

$$x, x+r, x+2r, x+3r, y\ x+4r$$

Utilizando esta notación podemos describir la última condición del problema mediante la ecuación:

$$\frac{(x+2r)+(x+3r)+(x+4r)}{7}=x+(x+r)$$

¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿Es insuficiente? Estas preguntas vienen muy bien en este momento, ya que nos hacen observar que tenemos dos incógnitas x y r pero una sola ecuación. En general (pero por supuesto hay excepciones) esto significa que el problema es indeterminado, es decir que en vez de una única solución admite varias, tal vez hasta un número infinito de ellas. Pero otra posibilidad a tener en cuenta es que no tengamos suficientes ecuaciones sencillamente por haber pasado por alto algún dato o condición del problema.

Recordemos las preguntas de Pólya: ¿Ha empleado todos los datos?, ¿Ha empleado toda la condición?. Bueno, leyendo una vez más el enunciado del problema vemos que no hemos utilizado el hecho de que los panes a dividir son cien. Este dato nos permite escribir otra ecuación:

$$x+(x+r)+(x+2r)+(x+3r)+(x+4r)=100$$

Bien, ya tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. El plan a seguir es simple: resolver el sistema. Para ello simplificamos primero las ecuaciones anteriores hasta obtener las dos ecuaciones:

$$11x-2r=0 \quad y \quad x+2r=20$$

de donde resulta $x=\frac{5}{3}$, y, $r=\frac{55}{6}$, Las cinco porciones serían entonces:

$$\frac{5}{3}=1\frac{2}{3};\ \frac{5}{3}+\frac{55}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6};\ \frac{65}{6}+\frac{55}{6}=20;\ 20+\frac{55}{6}=\frac{175}{6}=29\frac{1}{6},\ y,\ \frac{175}{6}+\frac{55}{6}=\frac{115}{3}=38\frac{1}{3}$$

Visión retrospectiva: ¿Puede usted verificar el resultado?. Esto es fácil:

$$\frac{5}{3}+\frac{65}{6}+20+\frac{175}{6}+\frac{115}{3}=100$$

¿Puede obtener el resultado en forma diferente?

Bueno, si se tiene cierta experiencia resolviendo problemas con progresiones aritméticas se observa que muchas veces resulta más conveniente representar la progresión de manera simétrica, alrededor de un término central. En nuestro caso, si llamamos z al término central y r a la razón, los cinco términos serán

$$z-2r;\ z-r;\ z;\ z+r;\ z+2r.$$

Ahora la condición de que las partes suman cien se escribe así:

$$(z-2r)+(z-r)+z+(z+r)+(z+2r)=100$$

que se reduce a $5z=100$ y por tanto $z=20$

La otra condición es

$$\frac{20+(20+r)+(20+2r)}{7}=(20-2r)+(20-r),$$

que equivale a

$$60+3r=7(40-3r)$$

de donde tenemos

$$r=\frac{280-60}{24}=\frac{55}{6}$$

Obtenemos por supuesto la misma solución que antes, pero el procedimiento luce más limpio y elegante: en lugar de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas solo tenemos que resolver un par de ecuaciones de primer grado. Esto se debe a que la simetría hace que se cancelen los términos con r en la primera ecuación.

***Problema 1.3**.*

Tres recipientes contienen agua. Si se vierte $1/3$ *del contenido del primer recipiente en el segundo, y a continuación* $1/4$ *del contenido del segundo en el tercero, y por último* $1/10$ *del contenido del tercero en el primero, entonces cada recipiente queda con* 9 *litros de agua. ¿Qué cantidad de agua había originalmente en cada recipiente?*

Solución. Este problema puede tratarse en principio con el mismo método que los anteriores: si llamamos x, y, z a los contenidos iniciales de los recipientes es posible escribir unas ecuaciones que reflejen las condiciones del problema.
Por ejemplo, después de la primera operación el contenido del primer recipiente será $\frac{2}{3}x$, y el del segundo $y+\frac{x}{3}$. Luego de la segunda operación el contenido del segundo recipiente será

$$\frac{3}{4}\left(y+\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{4}+\frac{3}{4}y$$

y el del tercero

$$z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{12}+\frac{y}{4}+z$$

Luego de la tercera operación el contenido del tercer recipiente será

$$\frac{9}{12}\left(\frac{x}{10}+\frac{y}{4}+z\right)$$

y el del primero

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}\left(\frac{x}{12}+\frac{y}{4}+z\right)$$

Igualando ahora el contenido final de cada recipiente con 9 obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)=9 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)=3 \tag{1.1}$$

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}\left(z+\underbrace{\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)}_{3}\right)=9 \;\Rightarrow \frac{2}{3}x+\frac{1}{10}(z+3)=9 \tag{1.2}$$

$$\frac{9}{10}\left(z+\underbrace{\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)}_{3}\right)=9 \;\Rightarrow \frac{9}{10}(z+3)=9 \tag{1.3}$$

de la ecuacion (1.3) se tiene $z=7$
reemplazando el valor de z en (1.2) tendríamos

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}(z+3)=9 \;\Rightarrow \frac{2}{3}x+1=9$$

despejando el valor de x de $\frac{2}{3}x=8$, se tendría $x=12$
ahora reemplazando el valor de x en (1), se tendría

$$\frac{1}{4}\left(y+\frac{12}{3}\right)=3 \;\Rightarrow \frac{1}{4}(y+4)=3 \;\Rightarrow \frac{1}{4}y+1=3, \Rightarrow y=8$$

luego la solucion al sistema sería

$$(12, 8, 7)$$

Visión retrospectiva: No cabe duda de que el método anterior, aunque efectivo, es bastante aburrido y conlleva a errores numéricos en el procedimiento. ¿No habrá otra forma de proceder más apropiada para este tipo de problema?. Sí la hay, y consiste en sustituir el análisis hacia adelante

que realizamos, partiendo de la configuración inicial y estudiando la evolución del contenido de los recipientes con cada operación, por un análisis retrospectivo.
Este tipo de análisis consiste en partir de la configuración final y estudiar cómo se llegó a ella.
En nuestro caso los tres recipientes finalizan con 9 litros, y la última operación consistió en trasvasar 1/10 del contenido del tercer recipiente al primero. Pero si el tercer recipiente, luego de perder la décima parte de su contenido, quedo con 9 litros, es obvio que debía contener diez litros. Y el primero, como quedo con 9 luego de ganar un litro, antes contenía 8 litros.
En otras palabras, después de la segunda operación y antes de la tercera el contenido de los recipientes era 8, 9 y 10 litros, en ese orden. Del mismo modo se ve que antes de la segunda operación el segundo recipiente contenía 12 litros, para poder quedar en 9 al perder la cuarta parte de su contenido. Y el tercero, por consiguiente, tenía 7 litros. Los contenidos antes de la segunda operación eran entonces 8, 12 y 7. Razonando de igual forma llegamos a que inicialmente los recipientes contenían 12, 8 y 10 litros de agua. Este análisis retrospectivo se resume en la siguiente tabla:

1º	2º	3º
9	9	9
8	9	10
8	12	7
12	8	10

1.6.2. Combinatoria

Hay una clase importante de problemas en los cuales tenemos que contar o enumerar configuraciones resultantes de combinar, de alguna manera, un número finito de elementos. La rama de la matemática que se ocupa de esto se conoce como *Combinatoria*. Los siguientes son algunos ejemplos sencillos.

Problema 1.4

Un cubo sólido de madera de lado $20cm$ se pinta de rojo. Luego con una sierra se hacen cortes paralelos a las caras, de centímetro en centímetro, hasta obtener $20^3 = 8000$ cubitos de lado $1cm$. ¿Cuantos de esos cubitos tendrán al menos una cara pintada de rojo?.

Solución. El problema es de fácil comprensión. El primer plan que se nos ocurre es sencillamente contar los cubitos pintados. Por ejemplo: en cada cara del cubo hay $20^2 = 400$ cubitos pintados, por lo tanto en total serán. . . ¿400×6? No, porque estaríamos contando más de una vez los cubitos que están en los vértices y aristas del cubo. Pero al menos esto nos da una pista para mejorar el plan (y una cota superior: el número de cubitos pintados debe ser menor que 2400). Contemos entonces por separado los diferentes tipos de cubitos pintados:

a. Cubitos correspondientes a los vértices del cubo, que tienen tres caras pintadas, son ocho en total.

b. Cubitos correspondientes a las aristas del cubo, excluidos los vértices (tienen exactamente dos caras pintadas). Cada arista tiene contacto con 20 cubitos, pero dos de ellos son vértices (que ya contamos aparte) por lo cual nos quedan 18. Como el cubo tiene 12 aristas, el número total es $18 \times 12 = 216$.

c. Cubitos con exactamente una cara pintada. En cada cara del cubo, las caras pintadas de estos cubitos forman un cuadrado de 18×18, por lo tanto en total serán $18 \times 18 \times 6 = 1944$.

Por consiguiente la respuesta es $8+216+1944=2168$.

Visión retrospectiva: ¿Podemos obtener el resultado en forma diferente?. Una primera alternativa es partir de nuestro primer resultado erróneo, 2400, y efectuar las correcciones necesarias. Como los cubos de los vértices se contaron tres veces cada uno, restemos $8\times 2=16$. Y como los de las aristas se contaron dos veces, restemos 216. El resultado será $2400-16-216=2168$.
Una segunda idea es contar los cubitos de la capa exterior que recubren a los cubitos interiores, por lo tanto el número de cubitos pintados de rojo serían:

$$20\times 20\times 2+20\times 18\times 2+18\times 18\times 2=2(400+360+324)=2\times 1084=2168$$

Otra idea (posiblemente la más elegante) se obtiene invirtiendo el problema. Contemos los cubitos que no tienen ninguna cara pintada. Es claro que estos cubitos forman un cubo interior al primero, de lado 18. Por lo tanto son $18^3=5832$. Los que tiene al menos una cara pintada se pueden obtener ahora restando esta última cantidad del total de cubitos, a saber $20^3-18^3=8000-5832=2168$.

Problema 1.5

En cada una de las 64 *casillas de un tablero de ajedrez hay un grano de azúcar. Una hormiga comienza en un vértice del tablero, come el azúcar, y se traslada a una casilla adyacente, desplazándose en dirección horizontal o vertical (pero nunca en diagonal). Continúa de este modo hasta acabar con todo el azúcar, y sin pasar dos veces por una misma casilla. ¿Es posible que su trayecto finalice en el vértice diagonalmente opuesto al inicial?*

Solución. Este problema es de naturaleza diferente a los anteriores. No se nos pide calcular nada, por lo cual muchos pensaran que no es un verdadero problema de matemática. Sin embargo, si hacemos abstracción de la hormiga y el azúcar (que obviamente se han incluido para hacer más atractivo el enunciado), vemos que el problema trata de la existencia de trayectorias con ciertas características geométricas.

Por alguna razón, la mayoría de las personas a quienes se les ha planteado este problema contestan de inmediato que sí. Cuando se les pide que dibujen en la pizarra la trayectoria, demuestran que no han comprendido cabalmente el enunciado: trazan líneas diagonales, pasan más de una vez por la misma casilla o simplemente finalizan en un vértice que no es el opuesto al inicial, y aún así creen haber solucionado el problema. Cuando por fin comprenden las condiciones, luego de dos o tres intentos fallidos cambian súbitamente de posición y contestan que es imposible.

Ahora bien, es claro que una respuesta afirmativa queda suficientemente justificada con solo exhibir una trayectoria que cumpla las condiciones pedidas. ¿Pero cómo podemos justificar una respuesta negativa?. Es muy importante comprender la enorme diferencia que existe entre las afirmaciones “no puedo hallar ninguna solución” y “no existe ninguna solución”.

Para poder afirmar esto último hay básicamente dos maneras de proceder. Una de ellas consiste en dibujar todas las trayectorias posibles que parten de un vértice y recorren todo el tablero, desplazándose en dirección horizontal o vertical y sin pasar dos veces por ninguna casilla. Una vez hecho esto podemos examinar las trayectorias y verificar que ninguna finaliza en el vértice opuesto al inicial. Un inconveniente de este procedimiento es que resulta muy lento y engorroso, aunque sería factible realizarlo con ayuda del computador.

Otro inconveniente es que si se nos ocurre generalizar el problema para tableros más grandes rápidamente el problema se vuelve inmanejable, incluso para el computador. Más aún, si queremos una respuesta general, para tableros de $n \times n$, este procedimiento resulta completamente inútil.

La segunda manera de proceder es demostrar que no existe trayectoria alguna que cumpla las condiciones exigidas. Para esto resulta útil el hecho de que las casillas de un tablero de ajedrez están pintadas de dos colores, digamos blanco y negro, en forma alternada. La observación clave es que cada movimiento unitario en dirección horizontal o vertical nos lleva de una casilla a otra de diferente color. Ahora bien, como el tablero tiene $8 \times 8 = 64$ casillas, comenzando en cualquiera de ellas se requieren 63 movimientos para recorrerlas todas. Pero es claro que después de $1, 3, 5$ ó cualquier número impar de movimientos estaremos en una casilla de color diferente a la inicial.

Esto demuestra que la respuesta al problema que nos ocupa es negativa, ya que un vértice y el opuesto son del mismo color.

Visión retrospectiva: Una generalización obvia de este problema consiste en considerar tableros de $n \times n$, para cualquier entero positivo n. Es claro que si n es par entonces la respuesta es negativa, por el mismo argumento usado para el caso 8×8. En cambio si n es impar el argumento no se aplica. De hecho es fácil ver que la respuesta es afirmativa. Otras generalizaciones que se resuelven con el mismo método: especificar dos casillas cualesquiera como inicio y fin de la trayectoria; cambiar el tipo de movimiento básico, usando por ejemplo saltos de caballo; plantear el problema en tres dimensiones, por ejemplo en un cubo.

1.6.3. Geometría

La otra clase importante de problemas que encontramos en la matemática elemental son los de geometría. Hay una gran variedad de problemas geométricos: problemas de construcción, de cálculo, de demostración, etc. El siguiente es un ejemplo sencillo.

Problema 1.6

Los lados del triángulo $\triangle ABC$ miden $AB = 26cm$,$BC = 17cm$ y $CA = 19cm$. Las bisectrices de los ángulos de vértices B y C se cortan en el punto I. Por I se traza una paralela a BC que corta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcule el perímetro del triángulo $\triangle AMN$.

Solución. La primera de las estrategias que Schoenfeld coloca en su lista es hacer un diagrama, toda vez que sea posible. Si bien esta recomendación se aplica a todo tipo de problemas, es casi insoslayable si el problema es de carácter geométrico. Muchas veces el enunciado de estos problemas va acompañado de un dibujo, pero otras veces (como en este caso) no es así, y hacerlo es la primera tarea que debemos realizar. Tal vez usted haya oído frases tales como "un dibujo no constituye demostración", "razonar en base a un dibujo puede conducir a errores", etc. Todo eso es cierto, sin embargo un dibujo nos ayuda en primer lugar a comprender el problema. Además estimulara nuestra imaginación y es posible que nos sugiera algún plan para hallar la solución. Si tiene a mano instrumentos geométricos úselos; sin embargo incluso un bosquejo aproximado suele ser de mucha ayuda.

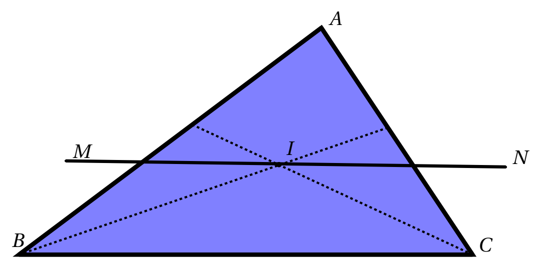

Figura 1.1

Hay muchas maneras de resolver este problema. El que tenga afición a los cálculos complicados podría por ejemplo comenzar por hallar el área del triángulo $\triangle ABC$ (Usando la fórmula de Herón). Dividiendo el área entre el semiperímetro se obtiene el radio de la circunferencia inscrita, es decir la distancia de I a los lados del triángulo $\triangle ABC$. Con estos datos es posible calcular, por proporcionalidad, las longitudes de AM, MN y AN. Sin embargo este procedimiento es tedioso. ¿No habrá una manera más sencilla?. Si miramos el dibujo detenidamente, buscando alguna relación interesante, observaremos (sobre todo si el dibujo está bien hecho) que los triángulos $\triangle BMI$ y $\triangle CNI$ parecen isósceles. Si esto fuese cierto la solución sería inmediata, ya que de las igualdades $MI = MB$ y $IN = NC$ se obtiene:

$$AM + MN + AN = AM + MI + IN + AN = AM + MB + AN + NC = AB + AC = 26 + 19 = 45$$

Ahora bien, ¿podremos probar que los triángulos $\triangle BMI$ y $\triangle CNI$ son isósceles?.
Para probar por ejemplo que $\triangle BMI$ es isósceles es suficiente probar que los ángulos $\angle MBI$ y $\angle MIB$ son iguales.Sabemos que MN es paralelo a BC, por lo tanto $\angle MIB = \angle IBC$ ya que son ángulos alternos internos. Pero BI es la bisectriz de $\angle ABC$, por lo tanto $\angle MBI = \angle IBC$ y hemos completado la demostración (por supuesto que para el triángulo $\triangle CNI$ se razona de modo análogo).

Visión retrospectiva: Si revisamos los datos del problema vemos que hay uno de ellos que no fue utilizado: la longitud del lado BC. En realidad para cualquier triangulo con $AB = 26cm$ y $CA = 19$ la solución sería la misma, $26 + 19 = 45$. ¿Y si variamos AB y CA?. Bueno, es fácil ver que la respuesta será siempre $AB + CA$. En otras palabras, los valores 26 y 19 no juegan ningún papel especial, y mucho menos $BC = 17$. Estos datos en vez de ayudar a resolver el problema más bien estorban, dirigiendo nuestra atención hacia detalles sin importancia. Son elementos distractores, que aumentan la dificultad del problema suministrando más información que la estrictamente necesaria para resolverlo. Para aclarar mejor este punto supongamos que el enunciado del problema hubiese sido:

En un triángulo $\triangle ABC$ las bisectrices de los ángulos de vértices B y C se cortan en el punto I. Por I se traza una paralela a BC que corta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcule el perímetro del triángulo $\triangle AMN$ en función de los lados AB y AC.

Este problema, a pesar de ser más general, es probablemente más fácil de resolver ya que nuestra atención se enfocara directamente hacia los lados AB y AC. Este es el sentido de la recomendación de *Pólya*: "Considere un problema más general", lo cual parece paradójico ya que un problema más

general debería ser por lógica más difícil. Sin embargo una abstracción adecuada, al eliminar la hojarasca innecesaria, puede permitirnos ver el camino con más claridad. Ahora bien, ¿es posible detectar y evitar el efecto de estos elementos distractores?
Es bastante difícil, ya que a priori no podemos saber cuáles datos son esenciales y cuales superfluos para resolver un problema.

Sin embargo es razonable desconfiar de los datos que parecen muy particulares para la naturaleza del problema. Pero hay que tener cuidado, ya que hay propiedades que sí dependen de valores muy particulares de los datos (Esto es muy común en problemas de aritmética.)

Problema 1.7.

¿En cuántas regiones queda dividido el plano por 6 rectas en posición genérica (Es decir tales que no haya dos de ellas paralelas ni tres concurrentes en un punto)?

Solución. Evidentemente una recta divide el plano en dos regiones, y dos rectas no paralelas lo dividen en cuatro. Pero ya para tres rectas el problema comienza a complicarse. Si trazamos unos cuantos diagramas veremos que la tercera recta atraviesa siempre a tres de las cuatro regiones determinadas por las dos primeras, pero no a la cuarta, y por lo tanto la respuesta para tres rectas parece ser siete. ¿Pero podemos estar seguros de esto?, ¿Y que pasara cuando tracemos la cuarta, la quinta y la sexta recta?. Lamentablemente los dibujos se complican demasiado, algunas rectas se cortan fuera de la hoja y no es fácil contar las regiones sin equivocarnos. Además pareciera que la respuesta depende de cómo dibujemos las rectas. Volvamos entonces al principio. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? Bueno, en vez de disminuir el número de rectas podemos disminuir la dimensión, es decir considerar en cuantas regiones queda dividida una recta por cierto número de puntos. Este problema sí es fácil, n puntos dividen a la recta en $n+1$ regiones (A saber $n-1$ segmentos y 2 semirrectas).
¿Y no podemos aprovechar este resultado para el problema en el plano?. Veamos, si ya hemos trazado $n-1$ rectas entonces al trazar la n-ésima, esta cortara a las anteriores en $n-1$ puntos diferentes (Por la hipótesis de genericidad). Por lo tanto la n-èsima recta quedara dividida en n partes por esos puntos de intersección.

Pero es claro que cada una de esas partes estaría contenida por completo en una región de las determinadas por las primeras $n-1$ rectas, región que quedara dividida en dos por la n-ésima recta. Por lo tanto hemos descubierto que al trazar la n-ésima recta el número de regiones aumenta en n unidades. Apliquemos ahora este resultado desde el comienzo y de manera sucesiva. Inicialmente hay una sola región: el plano. Al trazar la primera recta el número de regiones aumenta en una unidad, y tendremos $1+1=2$ regiones. Al trazar la segunda recta el número de regiones aumenta en dos unidades, y tendremos $2+2=4$ regiones. Al trazar la tercera recta el número de regiones aumenta en tres unidades, y tendremos $4+3=7$ regiones. Hasta aquí los resultados concuerdan con lo que ya sabíamos. Ahora resulta fácil continuar: para cuatro rectas son $7+4=11$ regiones, para cinco rectas son $11+5=16$ regiones, para seis rectas son $16+6=22$ regiones.

Visión retrospectiva: Resulta natural preguntarse cuál será el número de regiones en que queda dividido el plano por un numero n cualquiera de rectas en posición genérica. Recordando que la suma de los enteros desde 1 hasta n es

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

es fácil obtener

$$1+1+2+3+4+...+n = 1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Hay otras generalizaciones y problemas similares a los cuales se puede aplicar el mismo método.
Esta última parte del capítulo ofrece al lector la oportunidad de practicar con ejercicios. Los problemas no requieren mayores conocimientos que el lector haya adquirido en los estudios de enseñanza media. Sin embargo, no son problemas de meras aplicaciones de fórmulas, ni son muy fáciles; algunos de ellos requieren cierta originalidad e ingenio.
Las sugerencias ofrecen indicaciones que conducen al resultado, citando, sobre todo, alguna frase apropiada de la lista; a un lector muy atento, pronto a captar las sugerencias, le pueden dar la idea clave de la solución.
Las soluciones no sólo traen la respuesta, sino también el método que a ella conduce, no obstante el lector debe suplir algunos detalles. Algunas de ellas tratan de abrir nuevos horizontes, por medio de algunas palabras al final.
El lector que ha tratado seriamente de resolver el problema, puede sacar provecho de las sugerencias y soluciones. Si por sí mismo llega al resultado, puede aprender algo comparando su método con el que se expone aquí.
Si después de un gran esfuerzo se siente inclinado a abandonar el problema, las sugerencias pueden darle la idea que le falta. Si las sugerencias mismas no le ayudan, puede ver la solución, tratar de ver la idea clave y, haciendo el libro a un lado, tratar de encontrar la solución.

1.7. Problemas Propuestos

1. Partiendo de un punto , un oso camina un kilómetro hacia el sur. Cambia entonces de dirección y recorre un kilómetro hacia el este. Después dando vuelta de nuevo a la izquierda, recorre un kilómetro hacia el norte para llegar exactamente al punto de partida . ¿De qué color es el oso?

2. Roberto quiere un terreno, absolutamente horizontal, delimitado por cuatro líneas rectas. Dos de esas rectas están exactamente dirigidas norte-sur, las otras dos exactamente este-oeste y cada una mide exactamente 1000 metros. ¿Puede comprar Roberto ese terreno en México?

3. Roberto tiene 10 bolsillos y 44 monedas de plata. Quiere poner las monedas en los bolsillos repartiéndolas de tal modo que cada bolsillo contenga un número diferentes de monedas. ¿Puede hacerlo?

4. Para enumerar las páginas de un libro un tipógrafo ha empleado 2989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

5. Entre los papeles del abuelo se han encontrado una nota: 72 Pavos, $_67,9_
El primero y el último dígito del número que, evidentemente, representaba el precio total de las aves, se han remplazado aquí por guiones, dado que estaban borrados y no se podían leer. ¿Cuáles son los dos dígitos borrados y cuál era el precio de un pavo?

6. Dado un hexágono regular y un punto en su plano, trazar una recta que pase por el punto y divida al hexágono en dos partes de áreas iguales.

7. Se da un cuadrado. Encontrar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve al cuadrado bajo un ángulo de

a. 90^0

b. 45^0

(Sea P un punto fuera del cuadrado, pero en su plano. El menor ángulo con vértice en P, en el cual el cuadrado está inscrito es, "el ángulo bajo el cual el cuadrado se ve" desde P). Dibujar claramente los dos lugares geométricos y dar todos sus elementos.

8. Llamemos eje de un sólido a una línea recta que una dos puntos de su superficie y tal que por rotación, en torno a esa recta, de un ángulo comprendido entre 0^0 y 90^0 , el sólido coincide consigo mismo. Encontrar los ejes de un cubo. Definir claramente la posición de los ejes y determinar el ángulo de rotación relativo a cada uno de ellos. Suponiendo que se toma como unidad la arista del cubo, calcular la media aritmética de las longitudes de los ejes.

9. En un tetraedro cualquiera, dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son ortogonales. Además, cada una de esas aristas es perpendicular a la línea, de longitud , que une sus puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b , y demostrar el resultado obtenido.

10. Se llama *ápex* de una pirámide al vértice opuesto a la base.

    - Llamemos "isósceles" a una pirámide cuyo ápex está a igual distancia de todos los vértices de la base. Con dicha definición, demostrar que la base de una pirámide isósceles está inscrita en un círculo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide.
    - Llamemos, ahora, "isósceles" a una pirámide tal que las perpendiculares bajadas del vértice a los lados de la base sean iguales. Con esta definición (diferente de la anterior) demostrar que la base de una pirámide isósceles está circunscrita en un círculo cuyo centro es el pie de la altura de la pirámide.

11. Encontrar x ,y,u, y z que satisfagan el sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+7y+3u+5z &= 16 \\ 8x+4y+6u+2z &= -16 \\ 2x+6y+4u+8z &= 16 \\ 5x+3y+7u+z &= -16 \end{aligned}$$

(Esto puede parecer largo y tedioso: búsquese un procedimiento rápido)

12. Roberto, Pedro y Pablo viajan juntos. Pedro y Pablo son buenos caminantes; cada uno camina p kilómetros por hora. Roberto tiene un pie lastimado y conduce un pequeño automóvil de dos plazas solamente, donde tres no caben; recorre c kilómetros por hora. Los tres amigos adoptan el siguiente plan: Partir juntos, Pablo y Roberto en el automóvil, Pedro a pie. Después de algún tiempo, Pablo desciende del coche y sigue a pie mientras que Roberto regresa en busca de Pedro; después Roberto y Pedro van en coche hasta que alcanzan a Pablo. En ese momento cambian: Pablo sube al coche y Pedro camina, como al principio; todo el ciclo se repite tantas veces cuantas sea necesario.

    - ¿Cuántos kilómetros por hora adelanta el grupo?
    - ¿Durante qué fracción de tiempo del viaje, sólo hay una persona en el automóvil?
    - Verificar los casos extremos $P=0$ y $P=c$.

13. Tres números forman una progresión aritmética y otros tres, una progresión geométrica. Sumando los términos correspondientes de las dos progresiones se obtiene 85, 76 y 84 respectivamente; sumando los tres términos de la progresión aritmética se obtiene 126. Encontrar los términos de las dos progresiones.

14. Determinar m tal que la ecuación en x.

$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$$

tenga cuatro raices en progresion aritmetica.

15. El perímetro de un triángulo rectángulo es de $60cm$, la altura perpendicular a la hipotenusa mide $12cm$. Determinar los lados.

16. De la cima de una montaña se ven dos puntos A y B en la planicie. Las líneas de visión dirigidas a estos puntos determinan el ángulo γ . La primera tiene una inclinación α con relación al horizonte, la segunda una inclinación β. Se sabe que los puntos A y B están en un mismo plano horizontal y que la distancia entre ellos es c .
Expresar la altura x de la cima respecto del plano horizontal que contiene a A y B en función de los ángulos α,β y γ y de la distancia c.

17. Observando que el valor de

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$$

es

$$\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{23}{24}$$

para $n=1,2,3$ respectivamente, recuerde la ley general (considerando más valores si es necesario) y demuestre que la hipótesis es exacta.

18. Considérese la tabla

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
3+5 &= 8\\
7+9+11 &= 27\\
13+15+19 &= 64\\
21+23+25+29 &= 125
\end{aligned}$$

Deduzca la ley general sugerida por esos ejemplos, exprésela por medio de una fórmula matemática apropiada y demuéstrela.

19. El lado de un hexágono regular mide n (siendo n un número entero). Por medio de paralelas equidistantes a sus lados, se divide el hexágono en T triángulos equiláteros de lado 1. Sea V el número de vértices resultantes de esta división y L el número de lados de longitud 1. (Un lado pertenece a uno o dos triángulos, un vértice a dos o más de dos triángulos). Cuando $n=1$, lo que es el caso más sencillo, $T=6$, $V=7$, $L=12$. Considérese el caso general y exprésese T, V y L en función de n . (Hacer una hipótesis está bien, demostrarla es mejor).

20. ¿De cuántas maneras se puede cambiar un peso en monedas? (La manera de cambiar está determinada cuando se conoce el número de piezas de cada valor ?, uno, cinco, diez, veinticinco y cincuenta centavos que se utilizan).

1.8. Sugerencias

1. ¿Cuál es la incógnita?. El color del oso. Pero, ¿Cómo se puede encontrar el color de un oso a partir de datos matemáticos?, ¿Cuál es el dato?. Una situación geométrica - pero que parece contradictoria a sí misma. ¿Después de recorrer tres kilómetros de la manera descrita, cómo puede el oso regresar al punto de partida?

2. ¿Conoce usted algún problema análogo a éste?

3. Si Roberto tuviese un gran número de monedas no tendría dificultad en llenar sus bolsillos de manera diferente. ¿Puede usted plantear el problema de otro modo?, ¿Cuál es el número mínimo de monedas que se pueden meter en diez bolsillos de tal suerte que cada bolsillo contenga un número diferente de monedas?

4. He aquí un problema relacionado con el suyo. Si el libro tiene exactamente nueve páginas numeradas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo? (9 evidentemente). He aquí otro problema en relación con el suyo: si el libro tiene exactamente 99 páginas, ¿cuántos dígitos emplea el tipógrafo?

5. ¿Puede usted plantear el problema en otra forma? ¿Cuáles pueden ser los dos números borrados si el precio total, expresado en centavos, es divisible por 72?

6. ¿Puede imaginar algún problema más fácil relacionado con éste?; ¿Un problema más general? ¿Un problema análogo.

7. ¿Conoce usted algún problema relacionado con éste?. El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento de recta dado desde un ángulo dado se compone de dos arcos de círculo, cuyos extremos coinciden con los del segmento y son simétricos con relación al segmento.

8. Supongo que el lector ésta familiarizado con la forma de un cubo y que, por medio de un simple examen, ha encontrado algunos de sus ejes; pero ¿los ha encontrado todos?; ¿puede demostrar que su enumeración de ejes es exhaustiva?; ¿descansa esta enumeración sobre algún principio claro de clasificación?

9. Mire la incógnita. La incógnita es el volumen de un tetraedro. Sí ya sé, se puede calcular el volumen de una pirámide conocida la base y altura (La tercera parte del producto de los dos factores), pero aquí no se conoce ni la base ni la altura. ¿Puede imaginar algún problema más sencillo que se relacione con este? (¿No ve usted un tetraedro más sencillo que es una parte alícuota del que se da?)

10. ¿Conoce algún teorema que se relacione con esta pregunta?; ¿conoce usted algún teorema análogo “más sencillo” que se relacione? Sí: en un triángulo isósceles, el punto medio de la base es el pie de la altura correspondiente al vértice opuesto. He ahí un teorema que se relaciona con este último y que ya se ha demostrado.
    ¿Puede utilizar el método? El teorema sobre el triángulo isósceles se demuestra considerando dos triángulos rectángulos iguales que tienen por lado común la altura del triángulo.

11. Se supone que el lector esta familiarizado con los sistemas de ecuaciones de algún modo y buscar si, entre éstas, hay relaciones que pudiesen poner en evidencia una combinación particularmente ventajosa.

12. Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito? Entre el momento en que los tres amigos parten y el momento en que se encuentran de nuevo, hay tres fases diferentes:

    - Roberto y Pablo en automóvil.
    - Roberto en automóvil solo.
    - Roberto y Pedro en automóvil.

    Llamaremos, respectivamente t_1, t_2, t_3 , las duraciones de esas fases. ¿Cómo podemos descomponer la condición de manera apropiada?

13. Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?, Sean $a-d$, a, $a+d$, los términos de una progresión aritmética, y bg^{-1}, b, bg, los de una progresión geométrica.

14. ¿Cuál es la condición?. Las cuatro raíces deben estar en progresión aritmética. La ecuación tiene, sin embargo, una característica particular: sólo contiene potencias pares de la incógnita x . Por lo tanto, si a es una raíz, $-a$ es también raíz de la ecuación.

15. Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?. Se pueden, en la condición, distinguir tres partes relativas a

    - el perímetro
    - al triángulo rectángulo
    - a la altura bajada sobre la hipotenusa

16. Separe las diferentes partes de la condición. ¿Puede precisarlas por escrito?. Sean a y b las longitudes (desconocidas) de PA y de PB, α y β , respectivamente, sus inclinaciones con relación al plano horizontal. Se pueden, en la condición, distinguir tres partes relativas a

    - la inclinación de a.
    - la inclinación de b.
    - el triángulo que tiene por lados a ,b y c.

17. ¿Reconoce usted los denominadores $2, 6, 24$?, ¿Conoce algún problema relacionado?; ¿un problema análogo?

18. Para descubrir por inducción hay que observar. Observe los segundos miembros; los primeros términos de los primeros miembros; después los últimos. ¿Cuál es la ley general?

19. Haga una figura. Su examen podrá ya sea ayudarle a encontrar la ley por inducción, ya sea llevarle a las relaciones entre T, V, L y n.

20. ¿Cuál es la incógnita?; ¿qué se nos pide buscar?. Puede ser necesario precisar un poco el objeto del problema. ¿Puede imaginar algún problema que se relacione con éste y sea más sencillo?; ¿algún problema más general?; ¿algún problema análogo? He aquí un problema análogo muy sencillo: ¿De cuántas maneras puede usted pagar un centavo? (Sólo hay un modo). He aquí un problema más general: ¿De cuántas maneras puede usted pagar la cantidad de centavos, utilizando las cinco monedas siguientes: uno, cinco, diez, veinticinco y cincuenta centavos? Nuestro problema particular es el caso para $n = 100$.
    En los casos particulares más sencillos para los valores pequeños de n , podemos cifrar la

respuesta sin método complicado, simplemente ensayando y examinado.
He aquí una tabla (que el lector deberá verificar)

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13

La primera fila enumera las cantidades por pagar, de valor general n; la segunda fila enumera los números de "modos de pagar" correspondientes, de valor general E_n

Tenemos que considerar el caso particular E_{100} , pero sin método claro es dudoso que podamos calcular E_{100} De hecho este problema exige del lector un poco más que los precedentes: debe crear una pequeña teoría.

Nuestra pregunta es general (se trata de calcular E_n para el valor general n , pero está "aislada").

¿Puede imaginar algún problema relacionado más fácil? ; ¿algún problema análogo?. He aquí un problema análogo muy sencillo: Encontrar A_n , el número de procedimientos de pagar la cantidad de n centavos utilizando sólo centavos $(A_n = 1)$.

1.9. Soluciones

1. ¿Piensa usted que el oso es blanco y que el punto P es el Polo Norte?; ¿puede demostrarlo?. Como se ha podido comprender, hemos idealizado la pregunta. Consideramos la tierra exactamente esférica y al oso como un punto material móvil. Dicho punto describe un arco de meridiano al desplazarse hacia el sur o hacia el norte, y un arco de paralelo (paralelo al ecuador) al desplazarse hacia el este. Hay que distinguir dos casos:

   a. Si el oso regresa al punto P siguiendo un meridiano diferente del que ha seguido al salir de P , dicho punto es necesariamente el Polo Norte. De hecho el otro único punto de la tierra en el que dos meridianos se encuentran es el Polo Sur, pero el oso no podría salir de ese Polo más que desplazándose hacia el norte.

   b. El oso podría regresar al punto P siguiendo el mismo meridiano que al salir de P si, al desplazarse un kilómetro hacia el este, describiese n paralelos completos, pudiendo ser n igual a $1, 2, 3...$ En dicho caso, P no es el Polo Norte, sino un punto de un paralelo muy cercano al Polo Sur (cuya longitud, expresada en kilómetros es un poco inferior a $2\pi + \frac{1}{n}$).

2. Representamos a la tierra como en la solución del problema 1. El terreno que quiere Roberto está limitado por dos meridianos y dos paralelos. Imagine dos meridianos fijos y un paralelo alejándose del ecuador: el arco de ese paralelo móvil interceptado por los dos meridianos fijos disminuye constantemente. El centro del terreno tendría que estar en el ecuador. Roberto no puede comprarlo en México.

3. El mínimo número de monedas puestas en un bolsillo evidentemente es 0. El número inmediato superior es por lo menos, 1; el número inmediato superior a éste es cuando

menos, 2,... y el número de monedas puestas en el último (décimo) bolsillo es cuando menos, 9. El número de monedas necesarias es, pues por lo menos

$$0+1+2+3+4+...+9=45$$

Roberto no puede lograrlo: sólo tiene 44 monedas.

4. Para un libro de 999 páginas se necesitan $9+2*90+3*90=2889$ dígitos. Si el libro en cuestión tiene x páginas, $2889+4(x-999)=2989$, entonces $x=1024$
Este problema nos hace ver que una evaluación preliminar de la incógnita puede ser útil (ó incluso necesaria, como en este caso).

5. Si el número _679_ es divisible por 72, lo es también a la vez por 8 por 9. Siendo divisible por 8, el número 79_, debe ser también divisible por 8 (ya que 1000 es divisible por 8), 79_ debe ser, pues, 792: la última cifra borrada es 2. Si _6792 es divisible por 9, la suma de los dígitos de ese número debe serlo también (regla de "la prueba por 9"), la primera cifra borrada debe ser, pues, 3. El precio $367{,}92 \div 72 = 5{,}11$ pesos.

6. "Se dan en el mismo plano, con sus posiciones, un punto y una figura que tiene un centro de simetría. Determinar una recta que pase por el punto y divida a la figura en dos partes de áreas iguales". La recta que se pide pasa naturalmente por el centro de simetría.

7. En cualquier posición del ángulo, sus dos lados deben pasar por dos vértices del cuadrado. Considerando dos de esos vértices, el vértice del ángulo se desplaza sobre el mismo arco de circunferencia (según el teorema indicado en sugerencias). De donde se deduce que cada uno de los dos lugares geométricos requeridos se componen de varios arcos de circunferencia: cuatro semicircunferencias en el caso (a), ocho cuartos de circunferencia en el caso (b).

8. El eje atraviesa la superficie del cubo en un punto que está ya sea en un vértice, en una artista o en una cara. Si el eje pasa por un punto de una arista (excluidos sus extremos), dicho punto debe ser el punto medio de la arista; de otro modo la arista no podría coincidir consigo misma por rotación. Análogamente, el eje que atraviese una cara debe pasar por su centro. Cualquier eje debe, naturalmente, pasar por el centro del cubo. Hay, pues, tres clases de ejes:

   - Cuatro ejes cada uno de los cuales pasa por dos vértices opuestos; sus ángulos son de 120^0 y 240^0.
   - Seis ejes que pasan, cada uno, por los puntos medios de dos aristas opuestas; su ángulo es de 180^0.
   - Tres ejes que pasan, cada uno, por los centros de dos caras opuestas; sus ángulos son de 90^0, 180^0 y 270^0.

   En cuanto a la longitud de un eje de la primera especie; los otros son más fáciles de calcular. La media pedida es

$$\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{13}=1,416$$

   (Este problema puede preparar útilmente al lector para el estudio de la cristalografía. Para el lector que tenga amplios conocimientos del cálculo integral, se puede advertir que la media calculada es una buena aproximación de la"longitud media" del cubo que es, en efecto, $\frac{3}{2}=1,5$).

9. El plano determinado por una arista de longitud a y la perpendicular, de longitud b , divide al tetraedro en otros dos tetraedros iguales, más sencillos, cada uno de los cuales tiene por base $\frac{ab}{2}$ y por altura $\frac{a}{2}$. El volumen pedido es, pues, igual a

$$2 * \frac{1}{3} * \frac{ab}{2} * \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}$$

10. La base de las pirámides es un polígono de n lados. En el caso (a) las n aristas laterales de la pirámide son iguales: en el caso (b) las alturas de sus n caras laterales (bajadas del vértice) son iguales. Si del vértice de la pirámide bajamos la altura sobre la base y si unimos el pie de dicha altura ya sea a los n vértices de la base en el caso (a), ya sea a los pies de las alturas de las n caras laterales en el caso (b), obtenemos en los dos casos n triángulos rectángulos que tienen por lado común la altura de la pirámide: Decimos que esos n triángulos rectángulos son iguales. En efecto, según las definiciones dadas en el problema actual, sus hipotenusas (que son aristas laterales en el caso (a) y alturas en el caso (b) tienen la misma longitud en todos esos triángulos; nos hemos limitado a indicar que tienen en común otro lado (la altura de la pirámide) y un ángulo (el ángulo recto).

   En los n triángulos iguales, los terceros lados deben ser también iguales; parten del mismo punto (el pie de la altura) y están en un mismo plano (el de la base); constituyen n radios de una circunferencia que es o circunscrita a la base de la pirámide en el caso (a) o inscrita a dicha base en el caso (b). En el caso (b) falta, sin embargo, demostrar que los n radios mencionados son perpendiculares a los lados respectivos de la base: esto se deduce de un teorema muy conocido en la geometría del espacio sobre proyecciones.
   Debe notarse que una figura plana, un triángulo isósceles, pueden corresponder, en el espacio, a dos figuras análogas diferentes.

11. Obsérvese que hay la misma relación entre las ecuaciones primera y última que entre la segunda y la tercera: los coeficientes de los primeros miembros son los mismos, pero en orden inverso, mientras que los segundos miembros tiene valores opuestos. Súmense la primera ecuación y la última, después la segunda y la tercera:

$$6(x+u)+10(y+z)=0$$
$$10(x+u)+10(y+z)=0$$

   Se puede considerar esto como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, $x+u$ y $y+z$, del cual se obtiene fácilmente $x+u=0$ y $y+z=0$
   Sustituyendo $-x$ por u y $-y$ por z en las dos primeras ecuaciones del sistema inicial, se obtiene

$$-4x+4y=16$$
$$6x-2y=-16$$

   Resultando un sistema más sencillo del que se obtiene, $x=-2$, $y=2$, $u=-2$ y $z=2$

12. Cada uno de los amigos ha recorrido la misma distancia entre los puntos de partida y reunión. (Recuerde: $espacio = velocidad * tiempo$). Distinguimos dos partes en la condición.
   Roberto ha recorrido la misma distancia que Pablo:

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3$$

Pablo ha recorrido la misma distancia que Pedro:

$$ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3$$

Esta última ecuación da:

$$(c-p)t_1 = (c-p)t_2$$

Suponemos, claro está, que la velocidad del automóvil es superior a la de un peatón, $c > p$ Se deduce pues $t_1 = t_2$; es decir, que Pedro camina exactamente lo mismo que Pablo. De la primera de las dos ecuaciones anteriores se deduce

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c+p}{c-p}$$

lo que, naturalmente, también es el valor de

$$\frac{t_1}{t_2}$$

De donde se obtienen las respuestas:

$$\frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c+3p)}{3c+p}$$

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c-p}{3c+p}$$

En efecto,

$$0 < p < c$$

Hay dos casos extremos:

- si $p = 0$, la primera y segunda ecuación resultan $\frac{c}{3}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente.
- si $p = c$, la primera y segunda ecuación resultan c y 0

13. Se descompone fácilmente la condición en cuatro partes expresadas por las cuatro ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} a-d+bg^{-1} & = & 85 \\ a+b & = & 76 \\ a+d+bg & = & 84 \\ 3a & = & 126 \end{array}$$

De la última ecuación se obtiene $a = 42$, después, de la segunda, $b = 34$. Sumando las otras dos ecuaciones (a fin de eliminar d), se tiene $2a + b(g^{-1} + g) = 169$
Dado que a y b se conocen ya, se tiene aquí una ecuación de segundo grado en g de la que resulta $g = 2$, $d = -26$ ó $g = \frac{1}{2}$, $d = 25$
Las progresiones son
$68, 42, 16,\ 17, 42, 67$ ó $17, 34, 68,\ 68, 34, 17$

14. Si a y $-a$ son las raíces de menor valor absoluto, serán consecutivas en la progresión que tiene, por lo tanto, la forma $-3a, -a, a, 3a$ El primer miembro de la ecuación propuesta debe ser, pues, de la forma $(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2)$
Efectuando el producto y comparándolo los coeficientes de las potencias semejantes, se obtiene el sistema

$$10a^2 = 3m + 2$$
$$9a^4 = m^2$$

La eliminación de a da

$$19m^2 - 108m - 36 = 0$$

De donde $m = 6$ ó $m = -\dfrac{6}{19}$

15. Sean a, b, c los lados, siendo el último la hipotenusa. Las tres partes de la condición se expresan por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 60 \\ a^2+b^2 &= c^2 \\ ac &= 12c \end{aligned}$$

Observando que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

se obtiene

$$(60-c)^2 = c^2 + 24c$$

De donde $c = 25$, $a = 15$ y $b = 20$ ó bien $a = 20$ y $b = 15$ (lo que no cambia el triángulo).

16. Las tres partes de la condición se expresan por

$$\sin\alpha = \frac{x}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{x}{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

La eliminación de a y b da

$$x^2 = \frac{c^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}$$

17. Supongamos que

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Siguiendo el plan de INDUCCIÓN E INDUCCIÓN MATEMÁTICA, preguntémonos si la fórmula supuesta sigue siendo cierta cuando se pasa de n a $n+1$. Se tendría que tener igualmente

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Verifiquémoslo restando de ésta la primera ecuación:

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{-1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

lo que se reduce a

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Siendo esta última ecuación manifiestamente exacta para $n = 1, 2, 3, \ldots$ lo cual, demuestra nuestra hipótesis.

18. En la n-ésima línea, el segundo miembro parece ser n^3 , siendo el primer miembro una suma de n términos. El último término de dicha suma es el m-ésimo número impar o $2m-1$, donde
$$m = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
El último término de la suma del primer miembro deberá ser pues
$$2m-1 = n^2+n-1$$
Se puede deducir de ello el primer término de la suma, considerando a ésta de dos maneras: bien regresando $n-1$ pasos a partir del último término, lo que da
$$(n^2+n-1)-2(n-1) = n^2-n+1$$
Bien, añadiendo un término al último de la línea precedente, lo que da
$$[(n-1)^2+(n-1)-1]+2$$
lo que, después de una simplificación sencilla, se reduce a la misma expresión, afirmamos, pues, que
$$(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\ldots+(n^2+n-1) = n^2$$
Donde el primer miembro es la suma de n términos sucesivos de una progresión aritmética cuya razón es 2. Si el lector conoce la regla que da la suma de una progresión tal (media aritmética del primero y del último término, multiplicada por el número de términos), podrá verificar que
$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}n = n^3$$
(Se puede fácilmente demostrar la regla citada por medio de una figura un poco diferente a la siguiente)

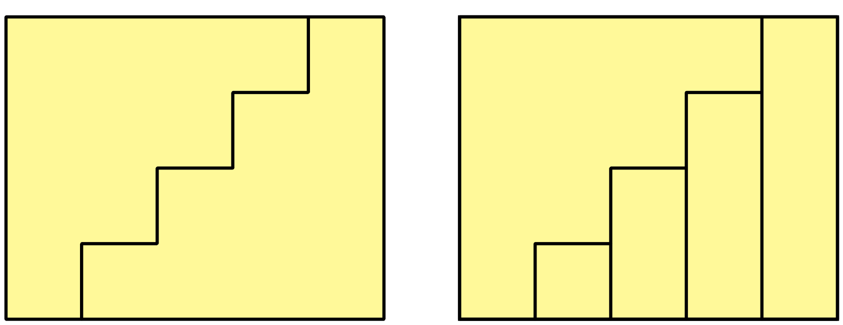

Figura 1.2

19. El perímetro del hexágono regular de lado n es $6n$. Se compone, pues, de $6n$ líneas límites y de $6n$ vértices. Pasando de $n-1$ a n , V aumenta $6n$ unidades, de donde
$$V = 1+6(1+2+3+\ldots+n) = 3n^2+3n+1$$

Tres de las diagonales que pasan por el centro del hexágono lo dividen en seis (grandes) triángulos equiláteros. Considerando uno de estos últimos, se tiene

$$T = 6(1+3+5+\ldots+2n-1) = 6n^2$$

(Según la regla que da la suma de una progresión aritmética, recordada en la solución del problema 18). Los T triángulos tienen $3T$ lados comunes. En ese total $3T$, cada línea de división interior de longitud 1 se cuenta dos veces, mientras que los $6n$ lados no se cuentan sino una vez. De donde:

$$2L = 3T + 6n$$

$$L = 9n^2 + 3n$$

(Para el lector, resulta del teorema de Euler sobre los poliedros, que $T + V = L + 1$. Verificar esta relación).

20. He aquí una serie bien ordenada de problemas análogos. Calcular A_n, B_n, C_n, D_n y E_n que representan cada una de estas cantidades el número de maneras de pagar la cantidad de n centavos y se diferencian de las otras por las monedas utilizadas. Se tendrá

    - A_n monedas de 1 centavo,
    - B_n monedas de 1 y 5 centavos,
    - C_n monedas de 1, 5 y 10 centavos,
    - D_n monedas de 1, 5, 10 y 25 centavos,
    - E_n monedas de 1, 5, 10, 25 y 50 centavos.

    Ya han sido empleados los símbolos E_n y A_n (ahora se ve por qué). Todos los medios y formas de pagar la cantidad de n centavos con las cinco monedas quedan expresadas por E_n

CAPÍTULO 2

EL TRABAJO DE MARTIN GARDNER

Martín Gardner nació e1 21 de octubre de 1914, en los EEUU. Después de graduarse en filosofía, en la Universidad de Chicago, se dedicó al periodismo.

Sus trabajos abarcan la divulgación científica, la crítica literaria e incluso la filosofía. En 1956 Gardner inició una legendaria sección mensual de *Juegos Matemáticos* en la revista *Scientific American*, que condujo por más de veinte años. Estos artículos, reunidos en algo más de una docena de libros, hacen hoy la más rica e inspirada enciclopedia que existe en este campo.

En temas literarios, son muy apreciados sus libros *The Annotated Alice y The Annotated Snark*, sobre las fantasías de Lewis Carroll.

Otras dos de sus obras que gozan de gran popularidad. *Izquierda y derecha en el cosmos y La explosión de la relatividad*. Discurren sobre la simetría de las leyes físicas y sobre la teoría relativista de Einstein.

Jugar con números, figuras e ideas puede llegar a ser la mejor manera de empezar a conocer la matemática y, más en general, de mejorar nuestra capacidad de pensar con lógica y creatividad.

En este capítulo dedicado a Martin Gardner, trataremos de mostrar la creatividad del mencionado autor en cuanto a la didáctica y estrategias que empleó para hacer de la matemática un área al alcance de todos.

Para el maestro de matemáticas y para el lector en general, mostraremos la distribución del capítulo II así:

2.1. Problemas y acertijos de Aritmética y Algebra

Los números que se usan para contar $\{1,2,3,4\ldots\}$ se llaman *Naturales*.

La aritmética es el estudio de los enteros con respecto a lo que se conoce como las cuatro *operaciones fundamentales de la aritmética*: adición, sustracción, multiplicación y división: (La Falsa Tortuga de Lewis Carroll; como recordarán, muestra estas operaciones como la Ambición, Distracción, Horripilación y Deprecación). La aritmética también incluye las operaciones de elevar un número a una potencia más alta (multiplicándolo por sí mismo cierto número de veces), y de extraer una *raíz* (descubrir un número que, si se lo multiplica por sí mismo cierto número de veces, igualará un número determinado).

No hace falta decir que jamás aprenderás álgebra ni ninguna rama más elevada de la matemática si no sabes muy bien aritmética. Pero aún cuando nunca aprendas álgebra, verás que la aritmética es esencial para cualquier profesión que se te ocurra. Una camarera tiene que sumar una cuenta, un agricultor debe calcular los beneficios de su cosecha. Hasta un lustrabotas debe saber dar el vuelto correctamente, y eso es pura aritmética. Es tan importante para la vida diaria como saber atarse los cordones de los zapatos.

Los acertijos de esta sección y de las dos que siguen no requieren otra habilidad que no sea la más simple aritmética y pensar claramente en lo que estás haciendo.

Problema 1. LOS ZOQUETES DE COLORES

Hay diez zoquetes[1] *rojos y diez zoquetes azules mezclados en el cajón del armario. Los veinte zoquetes son exactamente iguales, salvo por el color. El cuarto está absolutamente a oscuras y tú quieres dos zoquetes del mismo color. ¿Cuál es el menor número de zoquetes que debes sacar del cajón para estar seguro de que tienes un par del mismo color?*

Solución. Mucha gente, al tratar de resolver este acertijo, se dice: "Supongamos que el primer zoquete que saco es rojo. Necesito otro rojo para hacer el par, pero el próximo puede ser azul, y el próximo, y el próximo, y así hasta sacar del cajón los diez zoquetes azules. El siguiente zoquete tiene que ser rojo, así que la respuesta debe ser doce zoquetes".

Pero este razonamiento pasa algo por alto. No es necesario que el par sea de zoquetes rojos. Sólo es necesario que los dos zoquetes sean de *igual color*. Si los dos primeros no son iguales, es seguro que el tercero será igual a uno de los otros dos, de modo que la respuesta correcta es tres zoquetes.

Problema 2. PROBLEMA DE PESO

Si una pelota de basket pesa $\frac{1}{2}$ *kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?*

Solución. Antes de responder a este acertijo, es necesario saber exactamente qué significa cada palabra. Por ejemplo, se podría enfocar de esta manera:"La pelota de basket pesa $\frac{1}{2}$ kilo. La mitad de su peso debe ser $\frac{1}{4}$de kilo. Sumamos estos valores y obtenemos la respuesta de $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de kilo".

Pero el problema consiste en descubrir el peso de la pelota, y si resulta ser de tres cuartos, entonces no puede ser de medio kilo como se afirma al principio. Resulta claro que hay una contradicción en este punto, así que debemos haber interpretado mal la pregunta.

[1]Pedazo de madera corto y grueso, que queda sobrante al labrar o utilizar un madero.

Hay solamente una interpretación que tiene sentido. El peso de la pelota de basket es igual a la suma de los dos valores: $\frac{1}{2}$ kilo y un valor desconocido que es la mitad del peso de la pelota de basket. Esto puede representarse en una balanza de platillos tal como se ve en la ilustración.

Si se retira media pelota de basket de cada platillo de la balanza, ésta seguirá en equilibrio.

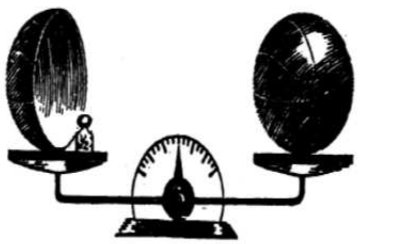

Figura 2.1

Habrá un peso de 1/2 kilo en un platillo y media pelota de basket en el otro, de modo que media pelota de basket debe pesar 1/2 kilo y la pelota entera debe pesar el doble, o sea un kilo.
En realidad, sin saberlo, ¡hemos resuelto el problema por medio del álgebra! En vez de usar la ilustración, representemos media pelota de basket con la letra x. Y en vez de mostrar los dos platillos en equilibrio en una balanza, utilicemos el signo algebraico de igualdad. Ahora podemos escribir esta simple ecuación:

$$\frac{1}{2}+x=x+x$$

Si se quita la misma cantidad de ambos lados de esta ecuación, seguirá "equilibrada". Así, si quitamos una x de cada lado, nos queda:

$$\frac{1}{2}=x$$

Recordemos que x representaba la mitad de la pelota de basket. Si media pelota pesa 1/2 kilo, entonces la pelota entera debe pesar un kilo.

Problema 3. LA BARRA DE PLATA

Un buscador de plata no podía pagar su alquiler de marzo por adelantado. Tenía una barra de plata pura de 31 *centímetros de largo; de modo que hizo con su casera el siguiente arreglo: Le dijo que cortaría la barra en pedazos más pequeños. El primer día de marzo le daría a la casera un centímetro de la barra, y cada día subsiguiente le agregaría otro centímetro más. Ella conservaría la plata en prenda. A fin de mes, el buscador esperaba estar en condiciones de pagarle la renta completa, y ella le devolvería los pedazos de la barra de plata.*

Marzo tiene 31 *días, de modo que una manera de cortar la plata era dividirla en* 31 *partes, cada una de un centímetro de largo. Pero como era bastante laborioso cortarla, el buscador deseaba cumplir el acuerdo dividiéndola en el menor número posible de partes.*

Por ejemplo, podía darle a la casera un centímetro el primer día, otro centímetro el segundo día, y el tercer día podía entregarle una parte de tres centímetros y recibir a cambio las dos partes anteriores *de un centímetro.*

Suponiendo que las porciones de barra fueran entregadas y devueltas de esta manera, ve si puedes determinar el menor número posible de partes en las que el buscador debe dividir su barra de plata.

Solución. El buscador puede cumplir el trato cortando su barra de plata de 31 cm en cinco partes de $1, 2, 4, 8$ y $16cm$ de longitud. El primer día le da a la casera el pedazo de $1cm$, el día siguiente ella se lo devuelve y él da el pedazo de $2cm$; el tercer día él vuelve a darle el pedazo de $1cm.$, el cuarto día ella le devuelve ambas piezas y él le da el pedazo de barra de plata de $4cm$. Al dar y devolver de ésta manera, el buscador puede agregar un centímetro por día y cubrir así los 31 días del mes.

Figura 2.2

La solución de este problema puede expresarse muy simplemente en el sistema binario de la aritmética. Es un método para expresar números enteros utilizando solamente los dígitos 0 y 1. Recientemente se ha convertido en un sistema importante porque la mayoría de las computadoras electrónicas gigantes operan sobre una base binaria. Así es como se escribiría el número 27, por ejemplo, si usamos el sistema binario: 11011 ¿Cómo sabemos que éste es e1 27? La manera de traducirlo a nuestro sistema decimal es la siguiente: sobre el dígito de la derecha del número binario, escribimos "1". Sobre el dígito siguiente, hacia la izquierda, escribimos "2"; sobre el tercer dígito hacia la izquierda escribimos "4"; sobre el dígito siguiente, "8", y sobre el último dígito de la izquierda, "16". (Ver la ilustración). Estos valores forman la serie $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ En la que cada número es el doble del que lo precede.

$$\begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ \text{1} & \text{1} & \text{0} & \text{1} & \text{1} \end{array}$$

El paso siguiente consiste en sumar todos los valores que estén sobre los "1" del número binario. En este caso, los valores son $1, 2, 8, 16$ (4 no se incluye porque está sobre un 0) . Sumados dan 27, de modo que el número binario 11011 es igual a1 27 de nuestro sistema numérico.

Cualquier número de 1 a 31 puede expresarse de esta manera con un número binario de no más de cinco dígitos. Exactamente de la misma manera, puede formarse cualquier número de centímetros de plata, de 1 a 31, con cinco pedazos de plata si las longitudes de esas cinco piezas son de $1, 2, 4, 8$ y 16 centímetros.

La tabla siguiente consigna los números binarios para cada día de marzo. Advertirás que para el 27 de marzo el número es 11011. Esto nos dice que los $27cm$ de plata de la casera estarán formados por las piezas de $1, 2, 8$ y $16cm$. Elige un día al azar y advierte con cuánta rapidez puedes calcular exactamente cuáles piezas de plata sumadas dan la cantidad que corresponde al número del día.

Marzo	16	8	4	2	1
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Problema 4. EL CICLOMOTOR DE SEGUNDA MANO

Bill vendió su ciclomotor a Tom por \$100*. Después de usarlo durante unos días, Tom descubrió que estaba tan arruinado que se lo revendió a Bill por* \$80*. El día siguiente, Bill se lo vendió a Herman por* \$90*. ¿Cuánto es la ganancia total de Bill?*

Solución. Este pequeño acertijo nunca deja de provocar discusiones. La mayor parte de las personas adopta una de las tres posiciones siguientes:

- No sabemos cuánto costó originariamente el ciclomotor, así que después de la primera venta no tenemos manera de averiguar si Bill tuvo o no ganancias. Sin embargo, ya que volvió a comprarlo por $80 y lo revendió a $90, resulta claro que tuvo una ganancia de $10.

- Bill vendió su ciclomotor por $100 y lo volvió a comprar por $80. Tiene ahora el mismo ciclomotor más $20 que antes no tenía, así que su ganancia es de $20. La venta siguiente no nos dice nada, porque no conocemos el verdadero valor del ciclomotor, así que la ganancia total de Bill es de $20.
- Después de que Bill vuelve a comprar el ciclomotor, su ganancia es de $20 tal como se ha explicado. Ahora lo vende por $10 más de lo que pagó por él, por lo que tiene una ganancia adicional de $10. Ganancia total, entonces, $30.

¿Cuál es la correcta?, ¡La respuesta es que todas son igualmente correctas!. En una serie de transacciones que involucran el mismo objeto, la "ganancia total" es la diferencia entre lo que se pagó por él y la cantidad que uno tiene al final. Por ejemplo, si Bill hubiera pagado $100 por el ciclomotor, y termina después con $110, podríamos decir que su ganancia total es de $10. Pero como no conocemos el precio original del ciclomotor, no podemos decir a cuánto asciende su ganancia final.

Sin embargo, la respuesta puede ser diferente si se da otro significado a la expresión "ganancia total". Muchos problemas de la vida son así. Se los llama "problemas verbales" ó "problemas semánticos" porque tienen respuestas diferentes según la manera en que uno entienda las palabras más importantes de la enunciación del problema. No hay respuesta "correcta" si no existe un acuerdo acerca del significado de los términos.

2.2. Acertijos de Velocidad

Vivimos en un mundo en el que todo está en permanente cambio, aunque de diez mil maneras diferentes y a diferentes velocidades. El cielo puede oscurecerse en unas pocas horas, una banana sé oscurece en unos días. Los colores del empapelado se destiñen tan lentamente que pueden pasar años antes de que advirtamos el cambio. Algunos cambios son extremadamente irregulares, como las maneras en las que cambias de posición mientras duermes. Otros cambios, como los de la luna o la vibración de un átomo en una molécula, son más regulares que un reloj.

La rama de la matemática más dedicada al cambio se llama cálculo. Es imposible ser físico actualmente sin saber cálculo, pero antes de entenderlo, debes saber primero muchísimo acerca de la matemática de los tipos de cambios simples y regulares que pueden resolverse por medio de la aritmética común.

El ejemplo más común de ese tipo de cambio es el cambio de posición que denominamos velocidad constante. Se expresa por medio de la proporción entre la distancia y el tiempo:

$$Velocidad = \frac{Distancia}{Tiempo}$$

Problema 5. LAS BICICLETAS Y LA MOSCA

Dos muchachos en bicicleta, a 20 kilómetros de distancia entre sí, empiezan a andar para reunirse. En el momento en que parten, una mosca que está en el volante de una de las bicicletas empieza a volar directamente hacia el otro ciclista. En cuanto llega al otro volante, da la vuelta y vuela de regreso al primero. La mosca voló ida y vuelta de volante a volante hasta que las dos bicicletas se reunieron.

Si cada bicicleta marchó a una velocidad constante de $10km/h$ *, y la mosca voló a una velocidad constante de* $15km/h$*, ¿qué distancia voló la mosca?*

Solución. Cada bicicleta marcha a $10km/h$, por lo que se reunirán, en la mitad de la distancia de veinte kilómetros que las separa, en una hora. La mosca vuela a $15km/h$, de modo que después de una hora habrá recorrido $15km$.

Muchas personas tratan de resolver el problema de la manera más difícil. Calculan la longitud del primer recorrido de la mosca entre ambos volantes, después la longitud del recorrido de regreso y así sucesivamente para recorridos cada vez más cortos.
Pero ese procedimiento involucra lo que se llama la suma de una serie infinita, y es matemática muy compleja y avanzada.

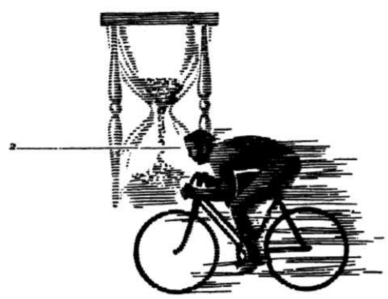

Figura 2.3

Se dice que al matemático húngaro *John von Neumann*, tal vez el más grande matemático del mundo cuando murió en 1957, se le planteó este problema una vez en un cocktail. Pensó un momento y luego dio la respuesta correcta.
La persona que había planteado el problema pareció un poco decepcionada. Explicó que la mayoría de los matemáticos pasaban por alto la manera más simple de resolverlo y lo hacían por medio del complejo proceso de sumar una serie infinita.

Von Neumann se sorprendió. “Pero si así lo resolví yo”, dijo.

Problema 6. EL SOMBRERO FLOTANTE

Un pescador que llevaba un gran sombrero de paja estaba pescando desde un bote en un río que fluía a una velocidad de tres kilómetros por hora. “Creo que remaré corriente arriba unos pocos kilómetros”, se dijo. “Aparentemente, aquí no hay pique”. Justo en el momento en que empezó a remar, el viento le voló el sombrero, que cayó al agua junto al bote. Pero el pescador no advirtió que su sombrero se le había volado hasta que no estuvo a cinco kilómetros de su sombrero, corriente arriba.

Entonces advirtió lo que había pasado, de modo que empezó a remar corriente abajo hasta que llegó hasta el sombrero que flotaba.

En aguas quietas, la velocidad con que rema el pescador es siempre de cinco kilómetros por hora. Cuando remaba corriente arriba, lo hacía a esta misma velocidad constante, pero por supuesto que esa no era su velocidad con respecto a la costa del río. Por ejemplo, cuando remaba corriente arriba a cinco kilómetros por hora, el río lo llevaba corriente abajo a tres kilómetros por hora, de modo que pasaba junto a los objetos de la costa a sólo dos kilómetros por hora. Y cuando remaba corriente abajo, la velocidad del río combinada con su propia velocidad lo hacía avanzar a una velocidad de ocho kilómetros por hora con respecto a la costa. Si el pescador perdió su sombrero a las dos de la tarde, ¿qué hora era cuando lo recuperó?

Solución. Como la velocidad del río ejerce el mismo efecto sobre el bote y el sombrero, puede ignorársela completamente para resolver este problema. En vez de pensar que el agua se mueve y que la costa permanece fija, imagina que el agua está perfectamente quieta y que la que se mueve es la costa. En lo que se refiere al bote y al sombrero, esta situación es exactamente igual que la anterior. Como el hombre se aleja remando cinco kilómetros del sombrero, y luego recorre esos mismos cinco kilómetros de regreso, eso significa que ha remado una distancia total de diez kilómetros con respecto al agua. Rema a una velocidad de cinco kilómetros por hora con respecto al agua, así que le habrá llevado dos horas recorrer diez kilómetros. Por lo tanto, recuperará su sombrero a las cuatro de la tarde.

Esta situación es comparable a la de calcular velocidades y distancias en la superficie de la tierra. La tierra se desplaza en el espacio, pero como ese movimiento ejerce el mismo efecto sobre todos los objetos de la superficie, puede ignorárselo completamente en casi todos los problemas de velocidad y distancia.

Figura 2.4

Problema 7. VIAJE DE IDA Y VUELTA

Cuando se viaja en auto, sin duda el auto viajará a velocidades diferentes en diferentes momentos. Si la distancia total se divide por el tiempo total de manejo, el resultado es la velocidad promedio de ese viaje. El señor Smith quería viajar de Chicago a Detroit y luego regresar. Deseaba hacer una velocidad promedio de $60 km/h$ *en todo el viaje de ida y vuelta. Al llegar a Detroit descubrió que la velocidad promedio, hasta ese momento, era de* $30 km/h$.

¿Cuál debe ser la velocidad promedio en el viaje de vuelta para que el promedio del viaje completo sea de 60 *kilómetros por hora?*

Solución

No es necesario saber la distancia entre Chicago y Detroit para resolver este problema. Cuando

Smith llegó a Detroit, había recorrido cierta distancia y le había insumido cierta cantidad de tiempo. Si lo que desea es duplicar su velocidad promedio, es necesario que recorra el doble de esa distancia en la misma cantidad de tiempo.
Resulta claro que, para lograrlo, ¡debe volver a Chicago sin insumir ningún tiempo! Como eso es imposible, no hay manera en la que Smith pueda aumentar su velocidad promedio a $60km/h$. No importa con cuánta rapidez haga el viaje de regreso, siempre logrará un promedio menor de $60km/h$.

Será más fácil comprenderlo si atribuimos una cierta distancia para que Smith recorra, digamos 30 kilómetros de ida y 30 de vuelta. Como su velocidad promedio es de $30km/h$, Smith completará la primera mitad de su viaje en una hora. Desea hacer el viaje completo a una velocidad promedio de $60km/h$, lo que significa que debe completar el viaje entero en una hora. Pero ya ha usado esa hora. No importa con cuánta rapidez retorne, pues el tiempo total será de más de una hora, por lo que habrá recorrido 60 kilómetros en más de una hora y su velocidad promedio será menor a $60km/h$.

Figura 2.5

Problema 8. LA PARADOJA DEL AEROPLANO

Un aeroplano vuela de la ciudad A a la ciudad B, luego regresa a A. Cuando no hay viento, su velocidad promedio a tierra (velocidad con respecto a la tierra) de todo el viaje es de $100km/h$. Supongamos que un viento constante sopla en línea recta desde la ciudad A a la ciudad B. ¿De qué modo afectará este viento la velocidad promedio a tierra del aeroplano, suponiendo que vuela en todo momento a la misma velocidad de máquina que antes?

El señor White argumenta: "Eso no afectará en nada la velocidad promedio. El viento aumentará la velocidad del aeroplano durante su vuelo de A a B, pero en el viaje de regreso la disminuirá en la misma medida".

"Eso suena razonable", asiente el señor Brown, "pero supongamos que el viento es de $100km/h$. El aeroplano volará de A a B a $200km/h$, ¡pero su velocidad de retorno será cero! El aeroplano no podrá volver."

¿Puedes explicar esta aparente paradoja?

Solución. E1 señor White está en lo cierto al decir que el viento aumenta la velocidad del aeroplano en una dirección tanto como la disminuye cuando el aeroplano vuela en dirección opuesta. Pero está equivocado cuando dice que el viento no afectará la velocidad promedio a tierra del aeroplano en el viaje de ida y vuelta.

Lo que el señor White no ha considerado es la cantidad de tiempo, que el aeroplano vuela a una u otra velocidad. El viaje de regreso, contra el viento, demorará mucho más que el viaje realizado a favor del viento.Como resultado, toma más tiempo el vuelo a velocidad reducida, así que la velocidad promedio con respecto a la tierra de ambos viajes será *menor* que si no hubiera viento. Cuanto más fuerte el viento, tanto mayor será la reducción de la velocidad. Cuando la velocidad del viento iguala o excede la velocidad del aeroplano, la velocidad promedio del viaje completo es cero porque el aeroplano no puede regresar.

Figura 2.6

2.3. Problemas y acertijos de Geometría plana

Si quisiéramos ser muy técnicos y estar actualizados, podríamos hablar de la geometría citando esta definición: “El estudio de las propiedades invariantes de elementos dados sometidos a grupos de transformaciones específicas”. Para comprenderla, tendrías que saber qué significa cada una de las palabras, y algunas de ellas no son fáciles de explicar. Así que utilizaremos un enfoque menos técnico y diremos simplemente que la geometría estudia las dimensiones y las formas de las cosas.

La geometría plana es la rama más elemental de la geometría. Se ocupa de las propiedades matemáticas de las figuras planas tales como líneas, ángulos, triángulos, cuadrados y círculos, que pueden dibujarse en una hoja de papel con la ayuda de una regla y un compás. Se inició en el antiguo Egipto, pero fueron los griegos los que primero la convirtieron en una ciencia. Los griegos estaban interesados en la geometría plana no sólo porque fuera útil para la carpintería y la arquitectura, sino también a causa de su gran belleza. Además creían que ningún hombre podía creerse verdaderamente educado si no entendía algo de geometría.

Los cuatro problemas que siguen no requieren ningún conocimiento especial de geometría plana, pero pondrán a prueba tu habilidad con respecto a la clase de pensamiento gráfico que tan útil resulta para resolver problemas geométricos.

Problema 9. DE ESQUINA A ESQUINA

Muchas veces un problema geométrico es terriblemente difícil si se lo enfoca de manera equivocada. Se lo enfoca de otra manera y resulta absurdamente simple. Este problema es un caso clásico.

Dadas las dimensiones (en centímetros) que muestra la ilustración, ¿con qué rapidez puedes calcular la longitud de la diagonal del rectángulo que va de la esquina A a la esquina B?

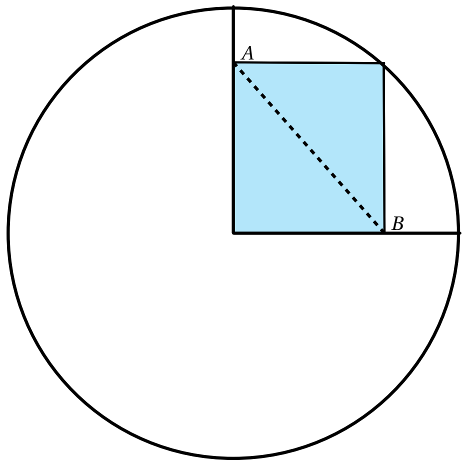

Figura 2.7

Solución. Dibuja la otra diagonal del rectángulo e inmediatamente verás que es el radio del círculo. Las diagonales de un rectángulo son siempre iguales, por lo tanto, la diagonal que va de la esquina A a la B es igual al radio del círculo, que mide 10 centímetros.

Problema 10. CORTANDO EL PASTEL

Con un solo corte recto puedes dividir un pastel en dos partes. Un segundo corte que atraviese el primero producirá probablemente cuatro partes, y un tercer corte (ver la ilustración) puede llegar a producir siete partes. ¿Cuál es el mayor número de partes que puedes lograr con seis cortes rectos?

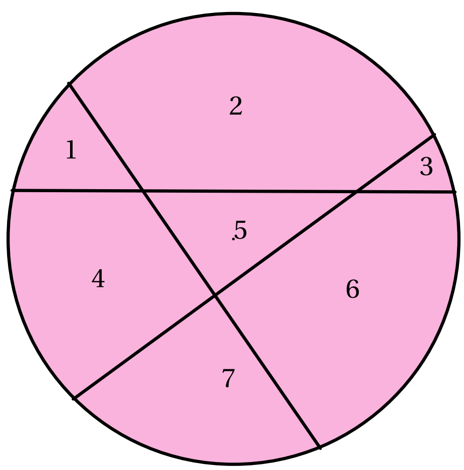

Figura 2.8

Solución. En vez de resolver este problema por medio del ensayo y el error, una manera mejor es descubrir la regla que nos dará el mayor número de partes que pueden obtenerse con cualquier número de cortes.

El pastel sin cortar es una sola parte, de modo que cuando se hace el corte nº 1 se suma una parte más, lo que da dos partes en total.

- El corte nº 2 suma dos partes más, totalizando 4.
- El corte nº 3 suma tres partes más, totalizando 7.

Parece que cada corte suma un número de partes que es igual al número del corte. Esto es cierto, y no resulta difícil observar por qué. Considérese, por ejemplo, el tercer corte. Atraviesa dos líneas previas. Esas dos líneas dividen a la tercera en tres secciones. Cada una de esas tres secciones divide un pedazo de pastel en dos partes, de modo qué cada sección agregará un pedazo extra, y las tres secciones, naturalmente, agregarán tres pedazos.

Lo mismo ocurre en el caso de la cuarta línea. Puede marcarse de manera que cruce las otras tres líneas. Esas tres líneas dividirán a la cuarta en cuatro secciones. Cada sección agrega un pedazo extra, de modo que las cuatro secciones agregarán cuatro pedazos más. y lo mismo ocurre en el caso de la quinta línea, de la sexta y de todas las que deseemos agregar.
Este tipo de razonamiento, que va desde el caso particular hasta un número infinito de casos, se conoce como *inducción matemática*.

Si se tiene en cuenta esta regla, resulta fácil hacer una tabla que muestre el mayor número de partes que producirá cada corte:

NÚMERO DE CORTES	NÚMERO DE PARTES
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22

¿Cuántas partes pueden hacerse con siete cortes?. Sólo tenemos que sumar 7 a 22 para saber que la respuesta es 29. La ilustración muestra cómo puede lograrse que seis cortes produzcan 22 partes, que es la respuesta del problema original.

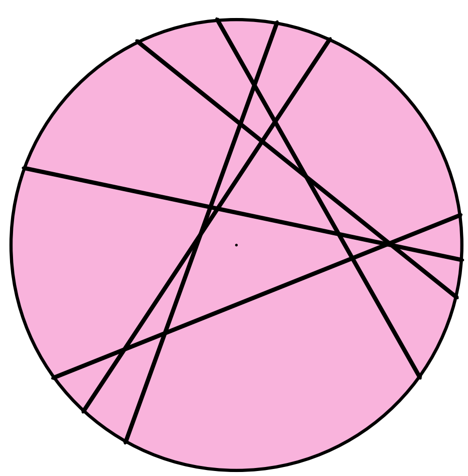

Figura 2.9

Problema 11. ¿DONDE VA EL CUADRADO?

Paul Curry, un mago aficionado de la ciudad de Nueva York, fue el primero que descubrió que un cuadrado puede cortarse en unas pocas partes, y que estas partes pueden reacomodarse y formar un cuadrado de la misma medida, ¡pero con un agujero!
Hay muchas versiones de la paradoja de Curry, pero la ilustrada en la figura 2.10 es la más simple de todas. Pega una hoja de papel sobre un pedazo de cartón. Dibuja el cuadrado que muestra la figura 2.10 (a), después corta siguiendo las líneas para formar cinco partes. Cuando reacomodas esas cinco partes de la manera que se ve en la figura 2.10 (b). ¡aparecerá un agujero en el centro del cuadrado!.
El cuadrado de la figura 2.10 (a) está compuesto por 49 *cuadrados más pequeños. El cuadrado de la figura 2.10 (b) sólo tiene 48 cuadrados más pequeños. ¿Cuál de los cuadrados pequeños desapareció, y dónde fue?*

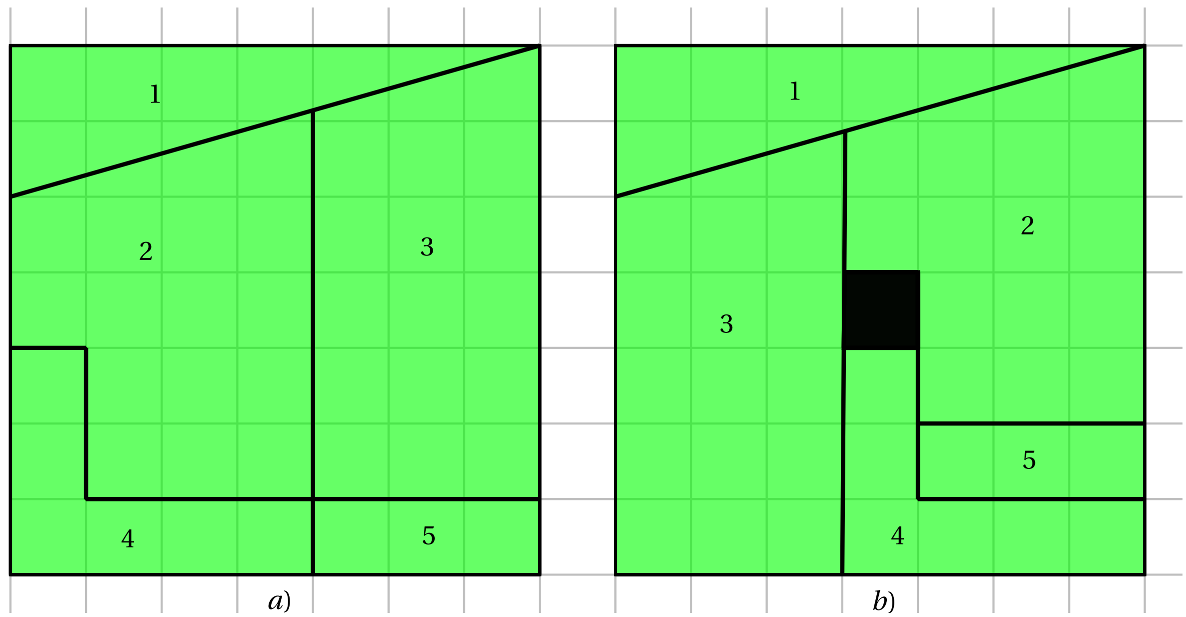

Figura 2.10 (ayb)

Solución A1 cambiar de lugar las dos partes más grandes, cada uno de los cuadrados pequeños cortados por la línea diagonal se torna un poquito más alto que ancho. Esto significa que el cuadrado mayor ya no es un cuadrado perfecto. Su altura ha aumentado en un área exactamente igual al área del agujero.

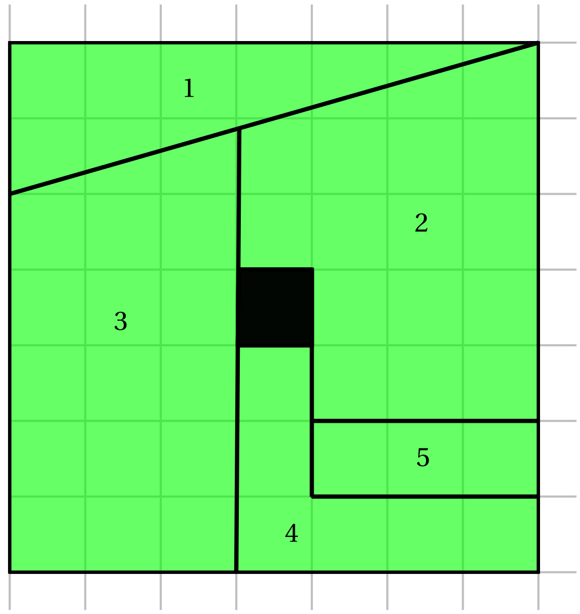

Figura 2.11

2.4. Problemas y acertijos de Geometría sólida

Cuando nos desplazamos de la geometría plana a la geometría sólida, abandonamos el mundo chato y bidimensional de la hoja de papel o la pantalla de TV para llegar al rico mundo tridimensional de la vida cotidiana. Nuestros cuerpos son tridimensionales. Nuestras casas son tridimensionales. Vivimos en un sólido tridimensional que es una *esfera* ligeramente achatada en los polos y con levísima forma de pera. La geometría sólida estudia las formas y las dimensiones de todas las cosas tridimensionales.

Tal vez hayas advertido que muchas figuras bidimensionales tienen primos cercanos en las tres dimensiones. Sobre el plano, con el compás traza un *círculo*. En el aire, si mantenemos la punta del compás en una posición fija y dejamos que la punta que tiene el lápiz oscile en todas las direcciones (o si rotamos un círculo), describirá la superficie de una esfera. Cuando un joven quiere describir a alguien "más cuadrado" que un "cuadrado", usa el nombre de la contraparte tridimensional del cuadrado, y habla de un "cubo".
El triángulo equilátero también tiene su contraparte tridimensional, el *tetraedro*. Es una pirámide con cuatro caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero.

La capacidad de pensar tridimensionalmente, es de gran importancia en casi todas las ciencias.

Problema 12. BAJO LA BANDA

Imagina que te hallas en una esfera perfectamente lisa tan grande como el sol. Hay una banda de acero que abraza estrechamente la esfera alrededor del ecuador.

Se agrega a esta banda un metro de acero, de manera que se eleve de la esfera a igual altura en todo el contorno. ¿Eso dejará la banda a una altura suficiente como para que puedas:

- *deslizar un naipe por debajo de ella?*

- *deslizar una mano debajo de ella?*
- *deslizar una pelota de béisbol por debajo de ella?*

Solución. Parece sorprendente, pero esa banda de acero, después de que se le agregue un metro, ¡se alzará casi 16 centímetros en todo el contorno! Por cierto que es altura suficiente como para deslizar por debajo de ella una pelota de béisbol.

En realidad, la altura a la que se elevará la banda es la misma independientemente del tamaño que pueda tener la esfera. Es fácil comprender, porqué cuando la banda está tensa alrededor de la esfera, es la circunferencia de un círculo con un radio que es el mismo que el radio de la esfera. Sabemos, a partir de la geometría plana, que la circunferencia de un círculo es igual a su diámetro (que es el doble de su radio) multiplicado por pi (π). Pi es $3,14$, un número ligeramente mayor que 3. Por lo tanto, si aumentamos la circunferencia de cualquier círculo en un metro, debemos incrementar el diámetro un poquito menos de un tercio de metro, es decir algo más de 31 centímetros. Esto significa, por supuesto, que el radio aumentará en casi 16 centímetros.

Tal como muestra claramente la ilustración, este aumento del radio es la altura a la que se elevará la banda con respecto a la superficie de la esfera. Será exactamente la misma, $15,9$ centímetros, independientemente de que la esfera sea tan grande como el sol o pequeña como una naranja.

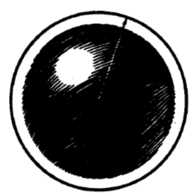

Figura 2.12

Problema 13. LA TERCERA LINEA

Una línea recta se dice que es auto-congruente porque cualquier porción de ella puede hacerse coincidir exactamente con cualquier otra porción de la misma longitud. Lo mismo ocurre con la circunferencia de un círculo. Cualquier parte de la circunferencia es exactamente igual que cualquier otra parte de la misma longitud. Una línea oval no es auto-congruente porque diferentes partes de ella tienen curvaturas diferentes. Una porción de óvalo sacada de uno de los lados no coincidirá con la porción más curvada de uno de los extremos.

Hay un tercer tipo de línea que es auto-congruente como la línea recta y el círculo. ¿Puedes decirme qué clase de línea es?

Solución. Como este problema se halla dentro de la sección de geometría sólida, tal vez has adivinado que el tercer tipo de línea auto-congruente no puede dibujarse en el plano. Se llama hélice circular -una línea que describe una espiral en el espacio como un sacacorchos o como las rayas del poste de la peluquería-. Si estudias la ilustración, verás que cualquier porción de esa hélice coincide con cualquier otra porción.

Hay otros tipos de hélices, pero sólo la hélice circular es auto-congruente. La hélice circular es la que describe una espiral de ángulo constante alrededor de un cilindro de sección circular. Otras hélices son las que describen espirales alrededor de cilindros de sección no circular, y alrededor de conos. Un resorte de colchón con forma de cono es un ejemplo familiar de hélice cónica. Las hélices tienen muchas propiedades interesantes, y se las halla frecuentemente en la física, la astronomía, la química, la biología y otras ciencias.

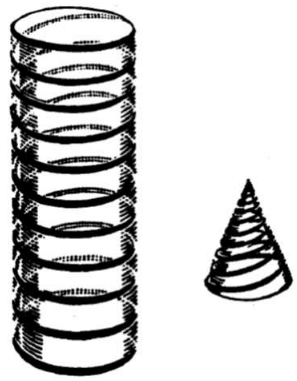

Figura 2.13

Problema 14. LOS CUBOS PINTADOS

Imagina que tienes una lata de pintura roja, una lata de pintura azul y una gran provisión de cubos de madera, todos del mismo tamaño. Deseas pintar los cubos de modo que cada cara sea toda roja o toda azul. Por ejemplo, puedes pintar un cubo todo de rojo. El siguiente puedes pintarlo con tres caras rojas y tres caras azules.
Tal vez el tercer cubo también pueda ser pintado con tres caras rojas y tres azules, pero de tal manera que no sea igual que el segundo.

¿Cuántos cubos diferentes entre sí puedes pintar de esta manera? Dos cubos se consideran iguales si puede rotarse a uno de ellos de tal manera que todas sus caras sean de igual color que las caras correspondientes del otro cubo.

Solución. Puedes pintar:

- 1 cubo todo rojo.
- 1 cubo todo azul.
- l cubo con 5 caras rojas, 1 azul.
- 1 cubo con 5 caras azules, 1 roja.
- 2 cubos con 4 caras rojas, 2 azules
- 2 cubos con 4 caras azules, 2 rojas.
- 2 cubos con 3 caras rojas, 3 azules.

Esto hace un total de diez cubos diferentes.

2.5. Problemas y acertijos de Probabilidades

Todo lo que hacemos, todo lo que ocurre a nuestro alrededor, obedece a las leyes de las probabilidades. No podemos escaparnos de ellas, de la misma manera que no podemos escaparnos de la ley de gravedad. Suena el teléfono. Lo contestamos porque pensamos que alguien ha discado nuestro número, pero siempre existe una posibilidad de que el que llama haya discado el número equivocado por error. Abrimos un grifo porque creemos que es probable que de él salga agua, pero tal vez no salga. "*La probabilidad*", dijo una vez un filósofo, "es la guía de la vida". Somos todos jugadores que pasamos por la vida haciendo incontables apuestas acerca de los resultados de incontables acciones.

La teoría de las probabilidades es esa rama de la matemática que nos dice cómo estimar los grados de probabilidad. Si es seguro que un acontecimiento se producirá, su grado de probabilidad es 1. Si es seguro que no se producirá, su grado de probabilidad es 0.

Todas las otras probabilidades que se sitúan entre 0 y 1 se expresan con fracciones. Si es tan probable que un acontecimiento se produzca como que no se produzca, decimos que su grado de probabilidad es $1/2$. En todos los campos de la ciencia se utiliza la estimación de probabilidades. Un físico calcula el probable trayecto de una partícula. Un genetista calcula las probabilidades de que una pareja tenga un hijo de ojos azules. Las aseguradoras, los comerciantes, los agentes de bolsa, los sociólogos, los políticos, los expertos militares ... Todos ellos deben ser expertos en calcular la probabilidad de los sucesos que les conciernen.

Problema 15. LAS TRES MONEDAS

Joe: "Voy a arrojar tres monedas al aire. Si todas caen cara, te daré diez centavos. Si todas caen cruz, te daré diez centavos. Pero si caen de alguna otra manera, tú me das cinco centavos a mí."

Jim: "Déjame pensarlo un minuto. A1 menos dos monedas tendrán que caer igual porque si hay dos diferentes, la tercera tendrá que caer igual que una de las otras dos. (Ver el problema de los zoquetes de colores al comienzo de este capitulo). Y si hay dos iguales, entonces la tercera tendrá que ser igual o diferente de las otras dos.
Las probabilidades están parejas con respecto a que la tercera moneda sea igual o diferente. Por lo tanto, hay las mismas probabilidades de que las monedas muestren el mismo lado, como que no. Pero Joe está apostando diez centavos contra cinco que no serán todas iguales, de modo que las probabilidades están a mi favor. ¡Bien, Joe, acepto la apuesta!"

¿Fue bueno para Jim haber aceptado la apuesta?

Solución. No es muy bueno para Jim haber aceptado esa apuesta. Su razonamiento de la situación es completamente erróneo.

Para descubrir las probabilidades de que las tres monedas caigan de la misma manera o no, primero debemos consignar todas las maneras en las que las tres monedas pueden caer. Hay ocho maneras, que se ven en la ilustración. Con una A está indicado "cara" y con una Z, "cruz".

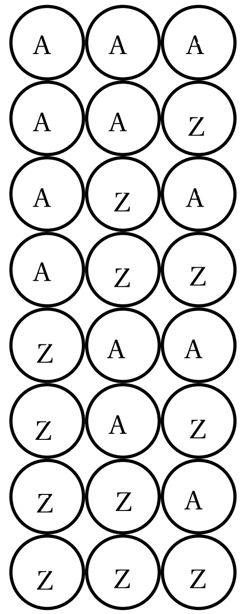

Figura 2.14

Cada una de estas maneras tiene tanta probabilidad de darse como cualquiera de las otras. Advierte que sólo dos de ellas muestran todas las monedas iguales. Esto significa que las probabilidades de que todas las monedas caigan iguales son de dos sobre ocho, ó 2/8, fracción que puede simplificarse a 1/4.
Hay seis maneras en las que las monedas pueden caer sin ser iguales. Por lo tanto, el chance de que esto ocurra es de 6/8 ó 3/4.
En otras palabras, Joe espera, a la larga, ganar tres veces de cada cuatro. Por esas veces, Jim tendrá que pagarle quince centavos. Pero la vez que Jim ganará, Joe le pagará diez centavos. Esto da a Joe un beneficio de cinco centavos cada cuatro tiros. Buen beneficio si la apuesta se repite varias veces.

Problema 16. LA DECIMA TIRADA

Un dado común (como los que se usan en juegos de azar) tiene seis caras, de modo que la probabilidad de que aparezca alguna de ellas es uno sobre seis, ó 1/6. *Supongamos que tiras un dado nueve veces. Cada una de ellas cae con la cara del* 1 *hacia arriba.*
¿Cuál es la probabilidad de que la cara del l vuelva a aparecer en la tirada siguiente? ¿Es más de 1/6 *o sigue siendo* 1/6*?*

Figura 2.15

Solución. Si sabemos que el dado no está cargado, entonces no importa cuántas veces se lo tire ni qué es lo que aparece, la probabilidad de la siguiente tirada seguirá siendo de 1/6 para cada una de las seis caras. ¡Un dado no tiene manera de recordar las tiradas anteriores!

A mucha gente le resulta difícil creerlo. Toda clase de necios sistemas para jugar a la ruleta y otros juegos de azar se basan en la superstición de que cuanto más frecuentemente algo ocurre por azar, menos probable será que se repita. Los soldados, durante la Primera Guerra Mundial, pensaban que si se escondían en los agujeros recientemente hechos por las granadas estarían más seguros que si se ocultaban en los viejos, porque, razonaban, era poco probable que una granada explotara dos veces en el mismo sitio en tan poco tiempo. Una madre con cinco hijos, todas nenas, cree que las probabilidades de que el próximo sea varón son mejores de $1/2$. Estas creencias son infundadas.

Ahora veamos la otra cara de la cuestión. Al arrojar un dado real, es difícil estar seguro de que no es un dado cargado, o tal vez controlado por imanes ocultos. De modo que si en las primeras nueve tiradas nos sale un as, tenemos buenas razones para sospechar que ese dado es lo que las estadísticas llaman un dado tendencioso.
Por lo tanto, ¡la probabilidad de que salga otro as en la décima tirada es mayor que $1/6$.

2.6. Acertijos Engañosos

Problema 17. *¿Puedes poner diez terrones de azúcar en tres tazas vacías de modo que en cada taza haya un número impar de terrones?*

Solución. Hay quince soluciones diferentes para este problema, pero todas ellas involucran el mismo truco. Por ejemplo: pon siete terrones en una taza, dos en otra y uno en la tercera. Ahora pon la última dentro de la segunda. ¡La segunda contendrá entonces tres terrones!

Problema 18. *En la ferretería local, Jones se enteró que* 1 *le costaría* 50 *centavos,* 12 *1e costarían* $\$1,00$ *y que el precio de* 144 *era* $\$1,50$. *¿Qué era lo que Jones estaba comprando?*

Solución. Jones estaba comprando números sueltos de metal.

Problema 19. *Observa con cuánta rapidez puedes anotar los dígitos de* 9 *a* 1 *de atrás para adelante, luego controla la respuesta para ver si has seguido bien las instrucciones.*

Solución. Los dígitos de 9 a 1 de atrás para adelante son: $1-2-3-4-5-6-7-8-9$

Problema 20. *¿Con cuánta rapidez puedes hallar el producto de los siguientes números?*

$$256 \times 3 \times 45 \times 3{,}961 \times 77 \times 488 \times 2{,}809 \times 0$$

Solución. ¿Viste ese cero al final antes de empezar a multiplicar? Si lo ves, sabrás inmediatamente que la respuesta final tiene que ser cero.

Problema 21. *Laringitis, un orador griego, nació e1* 4 *de julio del* 30 *A. C. Murió e1* 4 *de julio del año* 30 *D. C. ¿Qué edad tenía cuando murió?*

Solución. Laringitis tenía 59 años (no hubo ningún año cero).

Problema 22. *Juntos perro y gato pesan* 15 *kilos. Si el peso del can es un número impar, y si el macho pesa el doble que la hembra, ¿cuánto pesa cada uno?*

Solución. El perro, una pequeña Pomerania llamada Henrietta, pesa 5 kilos, y el enorme gatazo llega a los 10. Si supusiste que el perro era "él" y el gato "ella", probablemente no llegaste a ningún lado.

Problema 23. *Después de una serie de experimentos, un químico descubrió que una determinada reacción química demoraba 80 minutos en producirse siempre que él usaba una corbata verde, y que la misma reacción demoraba una hora y veinte cuando él usaba una corbata roja. ¿Se te ocurre alguna razón para ello?*

Solución. No hay nada que explicar porque 80 minutos es lo mismo que una hora y "veinte minutos".

Problema 24. *Divide* 30 *por* $1/2$ *y suma* 10. *¿Cuál es el resultado?*

Solución. Treinta dividido por $1/2$ es 60, así que cuando se le suman 10, da 70, que es la respuesta final.

Problema 25. *Un chico tenía cinco manzanas y se comió todas salvo tres. ¿Cuántas manzanas quedaron?*

Solución. Quedaron tres manzanas.

Problema 26. *¿Cuáles dos números enteros (no fracciones), dan el número de la mala suerte,* 13, *cuando son multiplicados entre sí?*

Solución.

$$13 \times 1 = 13$$

Problema 27. *Un lector estaba tan enojado por no poder hallar las respuestas de todos los problemas que aparecían en un libro de matemáticas que arrancó las páginas* $6, 7, 84, 111$ *y* 112. *¿Cuántas hojas arrancó en total?*

Solución. Sólo arrancó cuatro hojas de papel; porque las páginas 111 y 112 son ambas caras de una misma hoja.

Problema 28. *Si a un reloj le lleva cinco segundos dar las* 6, *¿cuánto tiempo le llevará dar las* 12*?*

Solución. A1 reloj le llevará 11 segundos dar las 12. Hay un segundo entre cada campanada.

Problema 29. *Un triángulo tiene lados de* $17, 35$ *y* 52 *centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?*

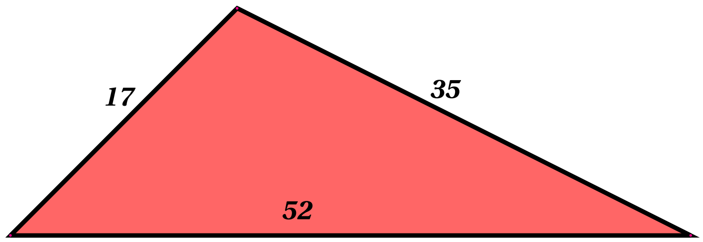

Figura 2.16

Solución. Un "triángulo" con esos lados sería una línea recta (los matemáticos a veces lo llaman un "triángulo degenerado"), de modo que no tendría ninguna superficie. Es verdad que se mostraba un triángulo en la ilustración, pero sólo era para desconcertarte; ese triángulo sin duda no podía tener los lados que se indicaban.

Problema 30. *¿Puedes trazar cuatro líneas rectas, sin levantar la punta del lápiz del papel, que pasen por los nueve puntos de la ilustración?*

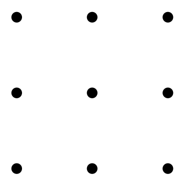

Figura 2.17

Solución.

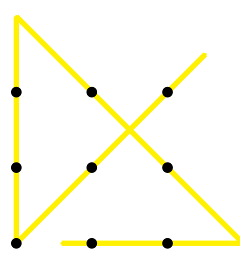

Figura 2.18

Problema 31. *¿Puedes trazar dos líneas rectas, sin levantar el lápiz del papel, que pasen por las seis pelotas de beisbol que aparecen en la ilustración?*

Figura 2.19

Solución. Como las pelotas de béisbol son puntos más grandes, todas ellas pueden cruzarse trazando dos líneas que se unen en la extrema derecha, tal como se ve en la ilustración.

Figura 2.20

Problema 32. *Cada libro de los que se ven en la ilustración tiene cinco centímetros de grosor. Esa medida incluye las tapas, que tienen un grosor de* 1/4 *de centímetro. Sí una polilla que come papeles empieza por la primera página del volumen 1 y se abre camino hasta la última página del volumen* 4*, ¿qué distancia habrá recorrido?*

Figura 2.21

Solución. La primera página del volumen 1 está a la derecha del libro cuando los volúmenes están colocados en el estante, y la última página del volumen 4 está a la izquierda del libro. En consecuencia, la polilla sólo tiene que pasar por la tapa del volumen 1, recorrer todo el volumen 2 y el volumen 3, y la tapa del volumen 4, lo que totaliza una distancia de 10 centímetros y 1/2.

Figura 2.22

Problema 33. *¿Puedes elegir seis dígitos de los que se ven en la ilustración que sumados den 21?*

9	9	9
5	5	9
3	3	3
1	1	1

Figura 2.23

Solución. Invierte el libro y marca con círculos tres 6 y tres 1

Problema 34. *Demuestra de qué manera se puede cortar un panqueque en ocho partes con tres cortes rectos de cuchillo.*

Solución. Dos cortes en ángulo recto dividirán el panqueque en cuatro partes. Apílalos y córtalos por la mitad con el tercer corte para hacer ocho partes.

Problema 35. *Un insecto se arrastra a lo largo de una regla desde la marca de los 10 centímetros de un extremo hasta la marca de los 5 centímetros que está en el centro. Ese trayecto le lleva 10 segundos. Siguiendo su camino, se desplaza desde la marca de los 5 centímetros hasta la marca de 1 centímetro, pero ese recorrido le lleva solamente ocho segundos. ¿Se te ocurre alguna buena razón que justifique esa diferencia de tiempo?*

Solución. El insecto se mueve a una velocidad constante de un centímetro cada dos segundos. ¿Se te ocurrió pensar que la distancia desde el centro de la regla hasta la marca de 1 centímetro es de sólo cuatro centímetros?

Problema 36. *¿En qué se basa el orden en que se han dispuesto estos diez dígitos?*

$$0-5-4-2-9-8-6-7-3-1$$

Solución. Los dígitos están dispuestos de tal manera que sus nombres quedan en orden alfabético.

Problema 37. *Si hay doce estampillas de un centavo en una docena, ¿cuántas estampillas de dos centavos habrá en una docena?*

Solución. Doce.

Problema 38. *Coloca una moneda en cada uno de los sitios que muestra la ilustración adjunta. ¿Puedes cambiar la posición de sólo una moneda y formar dos filas rectas que contengan cuatro monedas cada una?*

Solución. Recoge la moneda inferior y colócala encima de la moneda de la esquina.

Figura 2.24

Problema 39. *Un lógico se encontró en una pequeña ciudad que sólo tenía dos peluqueros, cada uno de ellos con su propia peluquería. Como necesitaba un corte de pelo, miró hacia el interior de una de* *las peluquerías y vio de inmediato que era extremadamente sucia. El mismo peluquero necesitaba una afeitada, sus ropas estaban sucias, su pelo descuidado y mal cortado. La otra peluquería resultó ser impecable. El barbero estaba recién afeitado, impecablemente vestido y tenía el pelo prolijamente cortado. El lógico pensó un momento y luego regresó a la primera peluquería para hacerse cortar el pelo. ¿Por qué?*

Solución. Como en la ciudad había sólo dos peluqueros, cada uno de ellos tiene que haber cortado el pelo del otro. El lógico eligió al peluquero que le hizo el mejor corte de pelo a su rival.

Problema 40. *Cuando los dos desconocidos con los que se habían citado a ciegas llegaron para llevarlas a un partido de fútbol, Katy y Susan quedaron atónitas al ver que los dos jóvenes eran exactamente iguales. "Sí, somos hermanos", explicó uno de ellos. "Nacimos el mismo día del mismo año y tenemos los mismos padres". "Pero no somos mellizos", dijo el otro. Katy y Susan quedaron perplejas.*
¿Puedes explicar la situación?

Solución. Los dos jóvenes pertenecían a un conjunto de trillizos.

Problema 41. *Multiplicar 10 metros por 10 metros da 100 metros cuadrados. ¿Cuánto da diez dólares por diez dólares?*

Solución. La pregunta no tiene sentido. Los dólares pueden sumarse entre sí, o restarse entre sí, pero no pueden multiplicarse o dividirse por algo que no sea un número puro.

Problema 42. *Cuando el joven pagó su desayuno a la cajera, ella advirtió que él había dibujado un triángulo en el reverso de la cuenta. Debajo del triángulo había anotado:* $13 \times 2 = 26$. *La cajera sonrió: "Veo que eres marinero", dijo. ¿Cómo supo la cajera que el joven era marinero?*

Solución. ¡El joven tenía puesto un traje de marinero!

CAPÍTULO 3

JUEGOS MATEMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA, MIGUEL DE GUZMAN

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?
Miguel de Guzmán

Miguel de Guzmán Ozámiz nació en 1936 en Cartagena, era catedrático de Análisis de la Universidad Complutense de Madrid, miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde 1982, miembro correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina desde 1985. En la década de los 90, desde el 91 al 98, fue presidente de la ICMI, Comisión Internacional de Instrucción Matemática.

Obtuvo la licenciatura en Filosofía en el Berchmanskolleg de Munich (Alemania) en 1961 y después se licenció en Matemáticas y en Filosofía en la Universidad Complutense en 1965. Se doctoró en la universidad de Chicago de la mano de Alberto Calderón en 1968. Regresó a la universidad Complutense en 1968, obteniendo el título de doctor por esta universidad ese mismo año. En la Complutense, desde entonces ha impartido clases hasta ahora.

Fue profesor en las universidades de Chicago, San Luis, Princeton, etc.

Fue un gran matemático y un gran profesor pero a lo largo de su vida ha sido mucho más. En los últimos años Miguel se ha convertido en el referente obligado de los medios de comunicación ante cualquier tema o noticia que tuviera que ver con las matemáticas o con su enseñanza en su país. Miguel era, de hecho, el abanderado de la popularización de las matemáticas en España. Y por esta ciencia, ponía no sólo su imagen, sino su palabra sensata y profunda, su tiempo y su entusiasmo allá donde le reclamasen.

Con su muerte perdemos no sólo a un gran matemático, sino a una de las personas, si no la que más esfuerzos ha hecho por popularizar y poner esta ciencia al alcance de todo el mundo.

Buena muestra son sus numerosos libros de carácter divulgativo, siempre amenos, atractivos e interesantes; buscando generar en el lector la curiosidad y la inquietud inteligente ante las matemáticas. Porque esa ha sido una de las características de sus libros: mostrar los aspectos más atractivos de la actividad matemática, descubrir el rostro humano de la reina de las ciencias.

3.1. Matemáticas y Juegos

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la Matemática seria?. Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la Matemática desde fuera, ésta mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la Matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña física, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones. Las reglas válidas en el manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en este campo.
Cuando la teoría es elemental, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca del elemento inicial y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos.

La Matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y Matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos Matemática profundamente seria.

Impacto de los juegos en la historia de la Matemática

La historia no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado problema bovino de Arquímedes, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada *Pseudaria* (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la edad media *Leonardo de Pisa* (1170-1250), mejor conocido hoy y entonces como *Fibonacci*, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador *Federico II* como *Stupor Mundí*.

En la edad moderna *Gerónimo Cardano* (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió "el Liber de ludo aleae", un libro sobre juegos de azar con el que se anticipó en más de un siglo a *Pascal* y *Fermat* en el tratamiento matemático de la probabilidad.
En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como *Tartaglia* y *Ferrari*.

El famoso problema del *Caballero de Meré*, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1610-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, *Euler* (1707-1783), oyó hablar del problema de los sietes puentes Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de *Euler* participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que *Jakod Bernoulli* (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) *Leibniz*, *Newton* y *Huygens*.

Se cuenta que *Hamilton* (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de Viaje por el Mundo. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de *Gauss* (1777-1855) cuentan que el Princeps Mathematicorum era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para alcanzarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) uno de los grandes matemáticos de nuestro tiempo es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John von Neumann (1903-1957), otro de los matemáticos más importantes del siglo anterior, escribió con Oskar Morgenstem en 1944 un libro titulado Teoría de juegos y Conducta Económica. En el analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de minimax, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico.

Según cuenta *Martin Gardner*, *Albert Einstein* (1879-1955), tenía toda una estantería de su biblioteca particular dedicada a libros sobre juegos matemáticos.

El Fundamento Matemático de los Juegos

Estas muestras de interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se podrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la Matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego.

El primer aspecto se puede poner bien de manifiesto sin más que ojear un poco el repertorio de juegos más conocidos. La aritmética está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, juegos sobre pesadas y adivinación de números. La teoría elemental de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración, en juegos emparentados con el **Nim**.La combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante.El álgebra interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15 [1], en el problema de Las Ocho Reinas. La teoría de grupos, en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero en los que se "come al saltar al modo de las damas". La teoría de grafos es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de *Königsberg*, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo,

[1] El juego del 15 o taken es un juego atribuido por Samuel Loyd en Estados Unidos a fines de la década de 1870. es una cajita formada por 16 casillas de las cuáles sólo quince están ocupadas. Consiste en maniobrar todas las fichas para corregir el error que hay en la fila inferior de la cajita

el de los maridos celosos, y resuelve también muchos otros más modernos como el de los cuatro cubos de la locura instantánea. La teoría de matrices está íntimamente relacionada también con los grafos y juegos emparentados con ellos. Diversas formas de topología aparecen tanto en juegos de sabor antiguo, como el de las tres granjas y tres pozos, como en juegos más modernos como los relacionados con la banda de Möbius, problemas de coloración, nudos, rompecabezas de alambres y anillos. La teoría del punto fijo es básica en algunos acertijos profundos y sorprendentes como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una réplica suya sin arrugar. La geometría aparece de innumerables formas en falacias, disecciones, transformación de configuraciones con cerillas, poliominós planos y espaciales. La probabilidad es, por supuesto, la base de todos los juegos de azar, de los que precisamente nació. La lógica da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje.

Matemáticas con sabor a Juego

Por otra parte resulta igualmente fácil señalar problemas y resultados profundos de la Matemática que rezuman sabor a juego. Citaremos unos pocos entresacados de la matemática más o menos contemporánea.

El teorema de Ramsey, en su forma más elemental, afirma que si tenemos 6 puntos sobre una circunferencia, los unimos dos a dos, y coloreamos arbitrariamente los segmentos que resultan de rojo o de verde, entonces necesariamente hay al final un triángulo con tales segmentos por los lados que tiene sus tres lados del mismo color.

El lema de Sperner, importante en la teoría del punto fijo, afirma que si en un triángulo ABC se efectúa una triangulación (Una partición en un número finito de triángulos tales que cada dos de ellos tienen en común un lado, un vértice, o nada) y se nombran los vértices de los triángulos de la triangulación con A, B, C, de modo que en el lado AB no haya más que las letras A ó B, en el AC nada más que A ó C y en BC nada más que B ó C, entonces necesariamente hay un triángulo de la triangulación que se llama ABC.

El teorema de Helly afirma que si en un plano hay un número cualquiera de conjuntos convexos y compactos tales que cada tres tienen un punto en común, entonces todos ellos tienen al menos un punto en común.

El problema de Lebesgue, aún sin resolver, pregunta por el mínimo del área de aquellas figuras capaces de cubrir cualquier conjunto del plano de diámetro menor o igual que 1.

El siguiente problema de *la aguja en un convexo tridimensional* está también aún abierto: ¿Cuál es el cuerpo convexo de volumen mínimo capaz de albergar una aguja de longitud 1 paralela a cada dirección dada? Se sospecha, por analogía con el caso bidimensional, que es el tetraedro regular de altura 1, pero no hay demostración de ello.

Consecuencias para la Didáctica de la Matemática

La Matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática. Generalmente las reglas del juego no requieren introducciones largas, complicadas, ni tediosas.

En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso algunos muy profundos, permiten también una introducción sencilla y una posibilidad de acción con instrumentos bien ingenuos, pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de su realidad propia mental y externa, y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea liviana. Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho, como veremos, han sido numerosos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas, a fin de poner más en claro las conexiones entre juegos y matemáticas.

Nuestros científicos y maestros se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento de mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes.

Notas sobre la Literatura clásia sobre Juegos

Los datos que siguen sobre la historia de la literatura sobre recreaciones matemáticas están tomados fundamentalmente del artículo de *Shaaf* en la Encyclopedia Britannica titulado *Number Games and Other Mathematical Recreations*, que contiene una excelente exposición de los juegos más significativos y de las obras más importantes. Pensamos que los más seriamente aficionados a los juegos matemáticos agradecerán estas breves notas y que servirán al mismo tiempo para que los más escépticos puedan comprobar al menos con qué tesón ha sido y es cultivado el campo en otros países.

Aunque en la Edad Media y comienzos de la Moderna se dieron algunos intentos esporádicos de formalización y análisis matemático de juegos, con *Fibonacci* (1202), *Robert Recorde* (1542) y *Gerónimo Cardano* (1545), el gran primer sistematizador de donde bebieron abundantemente posteriores imitadores fue *Claude-Gaspar Bachet de Méziriac*, quien en 1612 publicó su obra de vanguardia en este campo *Problémes plaisans et delectables qui se font par les nombres*. A él mismo se debe también la publicación en francés de *Diophanti*, traducción de un texto griego sobre teoría de números que ejerció un gran influjo sobre la historia de la matemática, sobre todo a través de *Fermat*. El libro de recreaciones de *Bachet* estaba basado sobre todo en propiedades aritméticas y contiene los problemas más clásicos sobre juegos de cartas, relojes, determinación del número de pesas para pesar 1, 2, 3,..., 40 kilos, problemas de cruces.

En 1624 un jesuita francés, *Jean Leurechon*, escribió bajo el seudónimo de *van Etten*, una obra, *Recréations Mathématiques*, fuertemente basada en la de *Bachet*, pero que tuvo mucho más éxito que la de éste, alcanzando las 30 ediciones ya en 1700.

La obra de van Etten fue modelo para sus continuadores *Claude Mydorge* (1630), en Francia, y *Daniel Schwenter*, en Alemania. Este último, profesor de hebreo, lenguas orientales y matemáticas, añadió gran cantidad de material recopilado por él mismo. Su obra póstuma apareció en 1636 con el título *Deliciae Physico Mathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden* y la reedición de ella en 1651-1653 fue por algún tiempo la obra más completa en su género.

Mientras tanto había aparecido en Italia en (1641-1642) la obra en dos volúmenes bajo el complicado título Apiaria Universae philosophiae Mathematicae, in quibus paradoxa et nova pleraque machinamenta exhiebntur, escrita por el jesuita *Mario Bettini.* Fue seguida en 1660 por un tercer volumen Recreationum Mathematicarum Apiaria Novissima...

En Inglaterra *William Leybourn* publica en 1694 un libro a medio camino entre el texto y la recreación, con la intención de "apartar a la juventud de los vicios propios a los que es inclinada". Su título fue Pleasure with Profit: Consisting of Recreations of Divers Kinds.

La obra que realmente marca la pauta para los muchos autores que aparecerán en los siglos $XVIII$ y XIX fue la de Jacques Ozanam, quien en 1694 publicó *Récréatiions Mathématiques et Physiques*, obra inspirada en las de Bachet, *Leurechon, Mydorge y Schwenter*, que fue revisada más tarde por el historiador de la Matemática *Montucla*.

Al final del siglo XIX aparecen los cuatro volúmenes de *Edouard Lucas*; especialista en teoría de números, titulados *Récréations mathematiques* (1882-1894), que pasa a ser la obra clásica durante algún tiempo. Contemporáneo de Lucas es *Lewis Carroll*, el autor de Alicia, gran aficionado a los puzzles lógicos y juegos matemáticos quien publicó, entre otras cosas, *Pillow Problems y A Tangled Tale* (1885-1895).

En la primera mitad del siglo XX los nombres más importantes en América son los de *Sam Loyd*, padre e hijo, grandes especialistas en puzzles mecánicos, autores del famosísimo juego de los 15, que en su tiempo causó un furor parecido al del cubo de *Rubik* en nuestros días.

En Alemania se destacan *Hermann Schubert* con sus Zwölf Gedulspiele (1907-1909) en tres volúmenes, así como *Wilhelm Ahrens* con sus dos volúmenes Mathematische Unterhaltungen und Spiele (1904-1920). En Inglaterra se destacan *Henry Dudeney* (1917-1967) y sobre todo la gran obra de *W.W.Rouse Ball*, "Mathematical Recreations and Essays" (1892, primera edición), otro de los clásicos, con gran erudición histórica, en cuyas páginas puede apreciarse documentadamente, a través de las numerosas notas, el impacto de los juegos sobre los matemáticos y las matemáticas de todos los tiempos. El geómetra *H.S.M. Coxeter* revisó en 1938 la undécima edición.En Bélgica hay que destacar a *Maurice Kraitchik*, editor de la revista Sphinx y compilador de varios libros entre 1900 y 1942. En Holanda se destaca también *Fred. Schuh*, con su obra Wonderlijke Problemen, publicada en 1943.

A partir de los años 50 *Martin Gardner* comenzó a publicar con gran éxito su artículo mensual en las páginas de Scientific American y su nombre, gracias a la difusión de esa revista y a las compilaciones sucesivas, ocho hasta el presente, de sus mejores artículos, ha llenado con enorme éxito el campo hasta finales de los años 70. De las obras más recientes hay que destacar especialmente la de *Berlekamp, Conway y Guy*, titulada *Winning Ways*, en dos volúmenes, publicada en 1982, que por su amplitud, sistematización y profundidad, alcanzará sin duda un gran éxito entre los aficionados más concienzudos.

3.2. Utilización de los Juegos en la Enseñanza.

¿Se pueden utilizar los juegos matemáticos con provecho en la enseñanza?, ¿De qué forma?, ¿Qué juegos?, ¿Qué objetivos pueden conseguirse a través de los juegos?

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Por eso es natural que haya mucho receloso de su empleo en la enseñanza. “El alumno, -piensa-, se queda con el pasatiempo que, eso sí, le puede comer el coco totalmente y se olvida de todo lo demás. Para lo que se pretende, es una miserable pérdida de tiempo”.

A nuestro parecer, en cambio, ese mismo elemento de pasatiempo y diversión que el juego tiene esencialmente, debería ser un motivo más para utilizarlo generosamente. ¿Por qué no paliar la mortal seriedad de muchas de nuestras clases con una sonrisa?. Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente.

Pero es que además sucede que, por algunas de las razones apuntadas antes, relativas a la semejanza de estructura del juego mismo y de la matemática, avaladas por la historia misma de la matemática y de los juegos, y por otras razones que señalaremos a continuación, el juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente.

En nuestra opinión, el objetivo primordial de la enseñanza básica y media no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que, pensamos, le va a ser muy necesaria como ciudadano en nuestra sociedad. El objetivo fundamental consiste en ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso. Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia.

Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencia más seria, en muchos casos con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos.

Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla tal vez que el juego que practican, tiene que ver con el teorema de *Pitágoras*. Estos bloqueos son causados muy frecuentemente en la niñez, donde a absurdas preguntas iniciales totalmente inmotivadas seguían respuestas aparentemente inconexas que hacían de la matemática una madeja inextricable cada vez más absurda y complicada.

Bien se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de esos mismos elementos lúdicos que están descargados del peso psicológico y de la seriedad temible de la matemática oficial, se mostrarían, ante la ciencia en general y ante la matemática misma en particular, tan inteligentes como corresponde al éxito de su actividad en otros campos diferentes.

Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones Matemáticas que prestan igualmente al aprovechamiento didáctico. Muchos son meras charadas y acertijos ingeniosos. Muchos otros se basan en la confusión intencionada del enunciado al modo de los oráculos sibilinos y dejan al final una impresión de mera tomadura de pelo. En otros casos la solución de la impresión de haber llegado por revelación divina que no cabe fácilmente en un esquema de pensamiento que pueda conducir a un método. Pero, como veremos, hay juegos que, de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas.

Es nuestra intención presentar a continuación dos esquemas de posible utilización de los juegos en la enseñanza. El primero consiste en un ensayo de desarrollo heurístico a través de los juegos. Trataremos de poner de manifiesto cómo lo que, a nuestro parecer, constituye la savia de las matemáticas y la manera más efectiva de acercamiento a ellas desde el punto de vista didáctico. La resolución de problemas puede aprovecharse de la actividad con juegos bien escogidos.

El segundo esquema presenta, a través de un listado de temas, actitudes y actividades matemáticas, cómo los juegos pueden utilizarse para motivar, enriquecer e iluminar la ocupación con ellas.

Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las Matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en el que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados?. A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón el corazón de las Matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas. Muchos de estos elementos pueden adquirirse igualmente en el enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos.

Lo que sigue viene a ser, en sus líneas generales, un calco de las directrices fundamentales de la famosa obra de *Polya ¿Cómo Resolverlo*?, ilustradas aquí con algunos juegos que a nosotros, nos han parecido adecuados. El objetivo de este esquema consiste simplemente en tratar de poner bien patente la semejanza de actitudes que se dan en la resolución de un puzzle o un juego y en la de un genuino problema matemático, y cómo, efectivamente, muchos de los hábitos adecuados para la tarea matemática podría no adquirirlos igualmente bien divirtiéndose con ejemplos escogidos de juegos. La elaboración de un curso completo de heurística en esta dirección sería un trabajo bien interesante que requeriría una inmersión a fondo en la abundante literatura existente a fin de analizar los juegos más apropiados para cada aspecto y para comprobar el rendimiento efectivo de esta actividad. Trataremos en lo posible aquí de presentar ejemplos bien conocidos a fin de evitar introducciones que nos llevarían mucho tiempo.

3.2.1. Directrices Heurísticas basadas en Juegos

Como Resolverlo

Antes de hacer trataré de entender

No pienses que es una observación del todo tonta. La experiencia dice que son muchos los que se lanzan a hacer cosas a lo loco, por si alguna da en el blanco por casualidad. ¿Sabes bien de qué va?, ¿Cómo funcionan las diferentes partes del juego?. Estúdialas una a una: forma del tablero, reglas, funcionamiento de las fichas. Hazte una o varias figuras si te parece que te va bien. Juega un poco con las fichas o las partes del juego según las reglas para familiarizarte con su forma de actuar.

Tramaré una estrategia

Busca conexiones con otros elementos que conozcas. Tal vez necesitarás construirte un juego auxiliar más simple que puedas resolver. Al final de esta etapa deberías construirte un plan de ataque concreto.

Aquí tienes algunas observaciones y preguntas que te pueden ayudar en esta tarea.

- Ya me lo sé. ¿Lo has visto antes? ¿Lo has visto en forma parecida al menos?
- No me lo sé, pero conozco uno que. ¿Conoces algún juego semejante, relacionado con éste de alguna manera? ¿Sabes algo del otro que pueda ayudarte en éste?
- ¿Cómo marchaba aquél?. Tienes un juego semejante en el que sabes cómo actuar. ¿Puedes usar la misma forma de proceder? ¿Puedes usar la misma idea que conduce allí a la solución? ¿Deberías introducir en éste alguna modificación que lo haga más semejante a aquél?
- Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil. ¿Puedes resolver al menos parte del juego? ¿Lo puedes hacer en circunstancias especiales, suponiendo por ejemplo que hubieras conseguido superar una etapa inicial? Supón que se te pide un poco menos, ¿puedes entonces?
- Supongamos el problema resuelto. ¿Puedes tratar de recorrerlo hacia atrás? ¿Puedes pensar desde aquí en alguna pista?
- Si hago esto, entonces queda así. A ver si puedo transformar el juego en otro más sencillo. Introduce tú mismo modificaciones en las reglas, en las condiciones. tratando de sacar alguna luz de estas modificaciones.
- Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación. Procura, por todos los medios a tu alcance tener un buen esquema de los puntos principales en la mente.
- Veamos de nuevo. ¿Para qué son así las reglas? ¿Cuál es la mala (o buena) idea detrás de ellas? Fíjate de nuevo en la estructura del juego. Trata de encontrar pistas en la diferente función de las partes.

Miraré si mi estrategia me lleva al final

Trata de poner en práctica tus planes.

- Ya tengo una idea. Vamos a ver si marcha. Lleva adelante tu estrategia con decisión. No te arrugues fácilmente. Si tienes varias ideas, pruébalas una a una, por orden. No las mezcles en un principio sin ton ni son.
- No nos liemos... Probaré otra cosa. No te quedes demasiado con una sola estrategia. Si te lleva a una situación muy complicada, vuelve al paso segundo y busca otra estrategia. Probablemente hay otro modo más sencillo.
- Lo conseguí... ¿Por casualidad? Si te va bien con tu estrategia, estúdiala detenidamente para convencerte de que no es por casualidad.

Sacaré jugo al juego

No consideres que ya has terminado del todo cuando lo has resuelto. Míralo a fondo. Aprovecha tu solución para asimilar bien la experiencia. No sólo sé que va, sino que veo por qué va. Trata de localizar la razón profunda del éxito de tu estrategia. Con los ojos cerrados. Mira a ver si con la luz que ya tienes encuentras otra estrategia, otra solución más simple. Ahora veo la astucia de las reglas. Trata de entender, a la luz de tu solución, qué lugar ocupan las condiciones y reglas del juego. Además con esto gano a aquel otro juego. Mira si otros juegos semejantes funcionan también con el mismo principio que has encontrado. Me hago otro juego. y lo patento. Constrúyete un juego semejante al que has resuelto modificando sus piezas o sus reglas y mira si tu principio vale aquí también.

A continuación trataremos de ilustrar algunas de las observaciones anteriores con juegos concretos.

¿Cómo marchaba aquél? Un pastor, con una col, una oveja y un lobo (se supone que hasta cierto punto amaestrado) se encuentra a la orilla de un río que quiere atravesar. Hay en su orilla una barca en la que cabe él y una sola de sus pertenencias al tiempo.
¿Cómo se las ingeniará para pasarlas todas?. Si deja solas a un lado oveja y col, ésta será liquidada rápidamente por la oveja. Si deja oveja y lobo solos a un lado, el lobo se comerá a la oveja. En cambio al lobo no le atrae nada la col y bien se puede quedar solo con ella.

El problema es clásico y fácil de resolver sin muchos esfuerzos. Pero existe una solución sencilla acudiendo, como sucede en muchas ocasiones en que se trata de realizar secuencialmente un conjunto de tareas, a la teoría de grafos.

Apuntamos las posibles situaciones de las pertenencias del pastor en la orilla inicial I sin que le desaparezca nada. Así

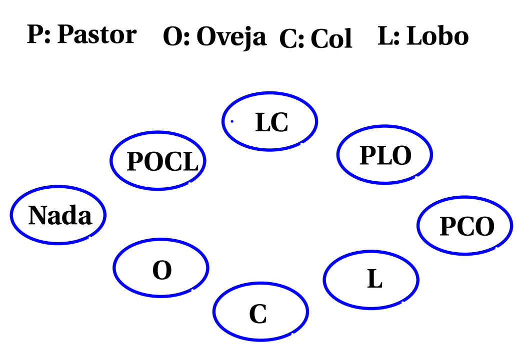

Figura 3.1

A continuación señalamos con una flecha los posibles pasos de una situación a otra según la regla del juego, es decir que en la barca sólo pueden cruzar el pastor y una sola de sus pertenencias. Así se obtiene el grafo que sigue.

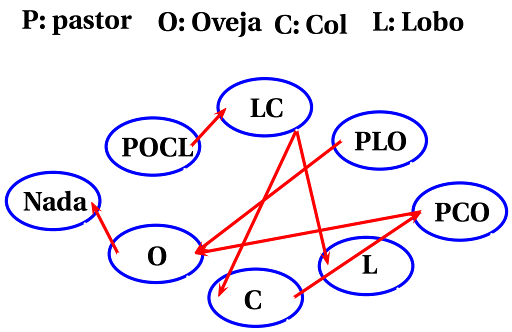

Figura 3.2

Nuestro problema ahora consiste en hallar un camino de flechas desde *POCL* hasta Nada. En el cuadro es evidente que hay solamente dos posibilidades

1) POCL - LC - L - PLO - O - Nada

2) POCL - LC - C - PCO - O - Nada

Quedan claros los caminos que el pastor debe tomar.

Cualquiera que haya visto esta solución y se enfrente ahora con el también clásico problema de los dos maridos celosos, tendrá muy claro cómo debe de proceder.

El problema consiste en resolver la dificultad con que se encuentran dos maridos A, B que llegan con sus respectivas esposas a, b a la orilla de un río que quieren cruzar. Hay una barca en la que sólo caben dos personas al tiempo. El problema sería más fácil si no fuera porque los dos maridos son tan celosos que no pueden sufrir que la esposa esté ni un momento en compañía de otro hombre sin estar él delante. ¿Cómo podrán arreglárselas?

Escribimos como antes las distintas situaciones posibles y unimos con una flecha aquellas que son alcanzables desde otras según las reglas; Así:

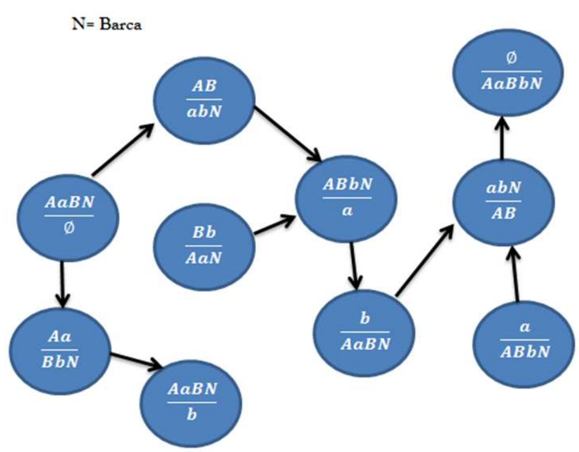

Figura 3.3

De esta forma no sólo podemos encontrar una solución, sino que podemos obtenerlas todas y escoger la mejor, si es que hay alguna mejor.

Empezar por lo fácil, hace fácil lo difícil

En un tablero de ajedrez se tapan dos cuadros de los extremos de una diagonal. Quedan 62 cuadros. Se tienen 31 fichas de dominó o de papel, cada una capaz de cubrir dos cuadros contiguos. Se pide colocar, si se puede, las fichas de dominó de modo que cubran exactamente los 62 cuadros del tablero.

Si empezamos por colocar fichas al buen tuntún, sin pensar un poco antes, pronto nos encontraremos en un buen lío, porque aquí se puede efectivamente empezar a hacer cosas sin sistema y llegar bastante lejos cubriendo el tablero. Pero nuestros intentos sucesivos van fracasando y aconsejándonos que recapacitemos.

El tablero es grande, hay muchas posibilidades. ¿Y si nos construimos uno más modesto e intentamos allí un problema semejante?. Tal vez el tablero 2×2, 3×3, 4×4, etc. En el tablero 2×2 pronto nos damos cuenta de que lo que se pide es imposible sin partir en dos una ficha. Los dos cuadros que quedan están en una diagonal y no hay forma de cubrirlos con una ficha de dominó. En el tablero 3×3 el juego no tiene sentido, pues si se cubren 2 cuadros, quedan 7 que no pueden ser cubiertos ni con tres fichas ni con cuatro exactamente. En el tablero 4×4 no existe este problema, pero la experiencia del tablero 2×2 nos puede hacer pensar en la imposibilidad aquí también. ¡Sí! En el de 4×4 se quitan dos cuadros de una diagonal, dos cuadros por tanto del mismo color, como sucedía en el de 2×2. Quedan 8 cuadros de un color y 6 del otro. Pero una ficha de dominó bien colocada cubre necesariamente un cuadro blanco y otro negro. Así es imposible cubrir el tablero. Y esto mismo sucede en el caso 8×8, 10×10, etc. Además esto va a suceder siempre que quitemos dos cuadros del mismo color.

Este principio de empezar por lo fácil es de amplia aplicación. Las dificultades provienen a menudo de la complejidad de la estructura que nos encubre los rasgos básicos. Estos quedan muy a menudo más claros en un problema semejante más sencillo. Descubierto aquí el principio, éste puede ser aplicado al caso más complicado. La dificultad puede consistir en encontrar un problema más sencillo que el propuesto que, con todo, conserve sus rasgos fundamentales.

Otras veces la solución del problema sencillo es útil, no sólo porque revele un principio que puede ser utilizado para el problema original, sino porque constituye una parte, un escalón en el que nos podemos apoyar para resolver el problema inicial.

En el conocido problema de los 15 se tiene un cuadrado 4×4 en el que se pueden deslizar 15 cuadraditos 1×1 numerados del 1 al 15 utilizando el hueco restante. Se presenta el cuadrado con los números desordenados.

Se pide colocarlos en orden con el hueco en la esquina del SE, es decir

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	■

Al acudir a un problema más sencillo, por ejemplo un cuadrado 2×2 con tres cuadraditos 1×1, se puede uno percatar fácilmente de que el problema propuesto es a veces insoluble y trivial cuando es soluble. Si acudimos al problema semejante de un rectángulo 3×2 con cinco piezas

1	2	3
4	5	■

Podemos encontrar fácilmente una estrategia para resolver aquí cualquier problema soluble. Resuelto este problema ya tenemos una estrategia para el original de los 15, observando que en el tablero de los 15 podemos dejar fijas todas las fichas excepto las de un rectángulo 3×2 o 2×3 en el que colocamos el hueco y con esta flexibilidad resolvemos fácilmente cualquier problema soluble. ¿Sabrías determinar cuáles son los problemas solubles y los insolubles?

Otro problema nos dice lo siguiente: Se dan las siguientes figuras A y B.

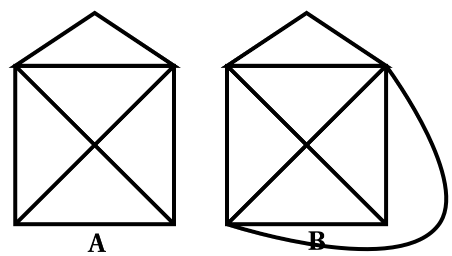

Figura 3.4

¿Puedes trazarlas sin levantar el lápiz del papel, sin repetir dos líneas y saliendo y terminando en un mismo vértice?

Las dos figuras se pueden trazar sin levantar el lápiz del papel, pero A parece resistirse más a un camino que termina en el punto de partida. ¿Por qué?. Supongamos que en A hubiese tal camino, es decir, supongamos el problema resuelto. Entonces, cada vez que llegamos a un vértice de paso en nuestro camino (no inicial ni final), salimos de él por una línea distinta no recorrida antes. Así cada vértice de paso tiene que tener un número par de arcos que concurren en él. También en el vértice de salida tienen que concurrir un número par de arcos, el arco de salida, el arco de llegada y el número par de arcos correspondientes a los pasos por él. Como A tiene los dos vértices de abajo con tres líneas concurrentes en cada una de ellos, el trazado pedido es imposible.

Me hago un esquema, me lo pinto en colores, me escribo una ecuación. Una forma adecuada de representación de un juego puede dar un método para resolverlo y para resolver al tiempo muchos otros semejantes.

De entre los problemas clásicos de Bachet, tal vez los más conocidos son los relativos a medidas. Consideremos el siguiente: Se tienen junto a una fuente una medida de 7 litros y otra de 11. Pero nosotros necesitamos medir exactamente dos litros. ¿Cómo?
Existe una representación gráfica muy útil en los problemas de este tipo.

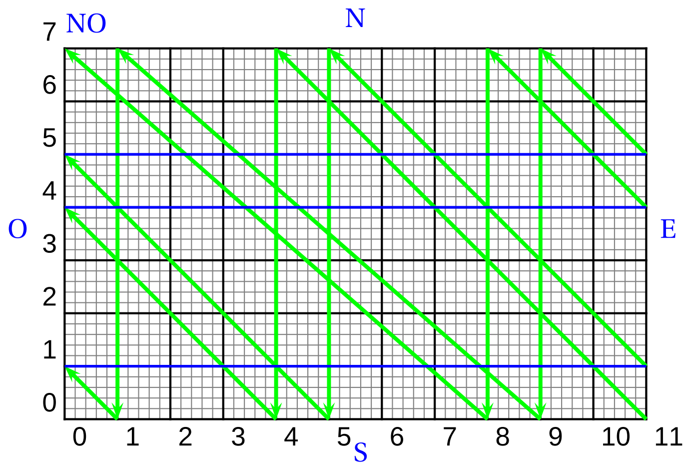

Figura 3.5

Las coordenadas horizontales indican la situación del recipiente de 11 litros. Las verticales la situación del de 7 litros. Las flechas horizontales hacia el *E* indican que se va llenando el recipiente de 11 litros, las oblicuas hacia el NO indican que del de 11 litros se va trasvasando al de 7 litros. Las flechas verticales hacia el S indican que el de 7 se vacía de lo que contiene.

La sucesión de operaciones queda bien clara por el diagrama siguiendo las flechas desde la esquina SE hasta el momento en que llegamos al otro punto gordo de la figura (el de 11 conteniendo 2 litros):
Se llena el de 11 (punto gordo de salida) y se pasa todo lo que se puede al de 7 (línea NO). Se vacía el de 7 (línea hacia S). Se echan los 4 que hay en el de 11 en el de 7 (línea NO). Se llena el de 11 (línea hacia *E*). Se trasvasa del de 11 al de 7, que contenía 4 (línea NO), quedando 8 en el de 11...

Ya hemos visto también cómo los problemas clásicos sobre cruces pueden tratarse con una gráfica adecuada. También los problemas sobre pesas admiten un tratamiento semejante.

Veamos de nuevo... ¿Para qué son las reglas así? ¿Cuál es la mala o buena idea detrás de ellas? Escribe, sin que yo lo vea, un número de tres cifras abc. Repítelas y forma el número de 6 cifras abcabc. Divídelo por 7. Divide el resultado por abc. Divide el resultado por 11. Lo que te resulta es 13.

Si alguien te hace el jueguecito y no lo conoces, te deja un poco perplejo. Para salir de tu sorpresa, sigue la receta de arriba. El número $abcabc$ se puede dividir por 7, por 11, por 13, es decir por $7 \times 11 \times 13 = 1001$. Además $abcabc$ es divisible por abc¿Quién es abcabc? ¿Qué tiene que ver con el número 1001?. Fácil: $abcabc = abc \times 1001$. Ahora sí que está clara la cosa. ¿Podrías inventar un juego parecido con el mismo principio?

Muchos de los puzzles de alambres y cuerdas llevan en su misma estructura la pista adecuada para dar con la solución. Por ejemplo el siguiente de las guindas:

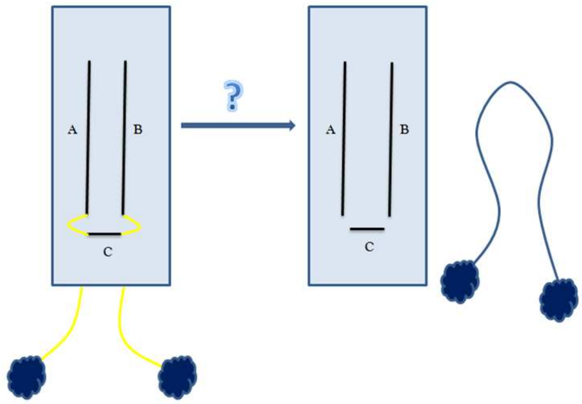

Figura 3.6

Las dos cuerdas están unidas por una cuerda. El rectángulo es de papel con los tres cortes indicados A, B, C. Las guindas son muy grandes para pasar por C sin romper el papel. ¿Cómo separar las guindas del papel?

No sólo sé que va, sino que veo por qué va.

El juego de **Nim** consiste en lo siguiente. Se ponen tres montones de piedrecillas, uno con 3, otro con 4, otro con 5. Juegan dos jugadores A y B. El primero en jugar, A, puede quitar tantas piedras como quiera (siempre una o más) de uno sólo de los tres montones. Luego juega B del mismo modo. Gana quien se lleve la última piedra.

Tal vez te haya contado alguien la estrategia infalible que tiene A. Se ponen en sistema binario los números de piedras de cada montón. Al empezar estos son

3	11
4	100
5	101

La estrategia consiste en quitar las piedras que haga falta del montón adecuado para que los unos de cada columna de los números en sistema binario sumen un número par. Así, aquí se pueden quitar dos piedras del montón de 3 y queda

1	1
4	100
5	101

El primer jugador gana necesariamente siguiendo esta misma estrategia cada vez que le toque jugar.

¿Te has parado a pensar alguna vez por qué marcha?, ¿Por qué A puede llevar a cabo su estrategia haga B lo que haga? ¿Y si los montones tienen números de piedras diferentes a 3, 4, 5?

Si lo averiguas no te será difícil tal vez dar con la estrategia del juego de Moore, que es como el de Nim, pero pudiendo quitar las piedras que se quiera (siempre una o más) de uno o dos montones en cada turno.

Con los ojos cerrados. Consideremos ahora el juego siguiente con un montón de 40 piedras. El jugador A puede quitar $1,2,3,4$, ó 5 piedras a su antojo. Luego B puede quitar así mismo $1,2,3,4$, ó 5 piedras. Ahora le toca a A. Gana quien se lleve la última.
La estrategia de A consiste en dejar, siempre que no se pueda llevar todas las piedras que quedan, un número de piedras que sea múltiplo de 6. Es claro que así B no puede ganar, y como gana alguien seguro, tiene que ser A quien gane. Una vez que A conoce la estrategia, no le hace falta hacer cuentas más que la primera vez que juega, en que quita 4 piedras, dejando 36. A partir de entonces su táctica es sencilla: si B quita m, A quita $6-m$.

Y además, con esto gano a aquel otro juego.
En un tablero de ajedrez se señalan dos cuadros A y B. ¿Es posible pasearse con una torre por todo el tablero comenzando en A y terminando en B? Recordemos que la torre se mueve horizontal y verticalmente, nunca en oblicuo.

Por supuesto que uno piensa enseguida en jugar a lo mismo en un tablero más pequeño, como en el juego del ajedrez recortado que hemos visto antes y así resulta fácilmente que a veces, por ejemplo en un tablero 2×2 con A y B en dos esquinas diagonalmente opuestas el paseo propuesto es imposible. Asimismo, quien conozca el uso que en el otro juego hemos hecho de los colores, puede pensar rápidamente en aplicar el mismo principio aquí. Si A y B son del mismo color, blanco por ejemplo, el paseo es imposible en el tablero 8×8. En efecto la torre va recorriendo sucesivamente blanco, negro, blanco, negro,... Así si el paseo terminase en blanco, el número de cuadros sería impar. En cambio será imposible el paseo en un tablero con un número impar de cuadros si A y B son de distinto color y también si son del mismo color si es que este color es el más escaso en el tablero. ¿Podrías dar con un teorema general y una estrategia para hacer el paseo siempre que se pueda?

3.2.2. Directrices temáticas para el uso de los Juegos

Nos ha parecido de interés elaborar un segundo esquema de utilización de juegos que, pensamos, puede parecer a muchos más directamente aprovechable. En él trataremos de señalar mediante ejemplos concretos cómo diversos temas y actitudes que nos ocupan en nuestra enseñanza a todos los niveles pueden ser motivados, ilustrados y enriquecidos mediante el uso de juegos. La disposición de este esquema será presentada alrededor de unas cuantas actitudes y núcleos temáticos propios de la actividad matemática. El campo es enormemente rico. Pensamos que sería muy útil una experimentación sistemática y de equipo con estos y otros elementos para averiguar el valor efectivo de estas ideas a fin de comunicar los temas y actitudes deseadas.

Sorpresas Matemáticas

"Por la admiración comenzó el hombre a filosofar", dijo *Aristóteles*, y la admiración y la sorpresa y la curiosidad siguen contándose entre los elementos motivadores más fuertes de nuestra actividad intelectual. Cualquiera de nosotros que explore un poco en el origen de nuestro interés por las matemáticas encontrará sin duda instantes de sorpresa y admiración ante ciertos hechos matemáticos que nos han llamado poderosamente la atención. Los hay a todos los niveles, elementales, menos elementales, simples, más sofisticados. En la enseñanza la motivación es el motor esencial. ¿Por qué no apoyarnos en los elementos más adecuados para ponerlo en marcha con energía? Incluso cuando se trata de hechos que no pueden ser explicados plenamente, estos pueden presentar aspectos de misterio que motiva fuertemente el interés por saber más para desvelarlo plenamente.

Dentro de lo que constituye el contenido matemático propiamente dicho, existen multitud de hechos con carácter de sorpresa. He aquí algunos:

a Las tres mediatrices de los lados de un triángulo concurren; las tres alturas también; las tres bisectrices también.

b Teorema de Desargues; teorema del hexagrama místico de Pascal (Guzmán, Mirar y Ver, Cap.7).

c Teorema de Steiner: Se dan dos círculos E e I, interior a E. Se traza un círculo C_1, tangente a los dos, luego otro C_2, tangente a C_1, E, I, luego otro C_3, tangente a C_2, E, I, y así hasta C_n, tangente a C_{n-1}, E, I. ¿Se podría conseguir una cadena de círculos tal que C_n sea tangente a E, I y C_1? (Este se puede mirar en la geometría de inversión que transforme E, I, en círculos concéntricos).

d Teorema de Poncelet: Se dan dos círculos E, I, con I interior a E. Se traza una secante S_0, S_1 en E que sea tangente a I, luego otra distinta S_1S_2 asimismo tangente a I, etc. Hasta obtener $S_{n-1}S_n$. Supongamos que S_n coincide son S_0. Entonces si repetimos la operación con otro S_0* inicial, obtenemos una cadena de secantes $S_0 * S_1*, S_1 * S_2*, ..., S_{n-1} * S_n*$, y resulta también que S_n* coincide con S_0*. (A pesar de la semejanza con el teorema de Steiner, el modo de demostración es distinto. Este es un hecho importante en la historia de la geometría algebraica) (Schoenberg I.J., Mathematical Time Exposures, The Mathematical Association of América, Washington D.C., 1982; Cap.14).

e Si tres círculos del plano son tangentes dos a dos, existe un cuarto círculo tangente a los tres (se demuestra por inversión).

f El collar de las seis perlas. Se tienen tres esferas tangentes dos a dos exteriormente. Se comienza a ponerles un collar de perlas esféricas de distinto tamaño en general del siguiente modo. Primero se traza una esfera cualquiera E_1 tangente exteriormente a las tres (hay muchas). Luego trazamos otra E_1 tangente exteriormente a las tres y a E_1 (sólo hay una). Continuamos con otra E_3 tangente a las tres y a E_2. Etc... Entonces, sea cual sea E_1, siempre este collar se cierra con E_6 tangente a E_1 (Demostración por inversión).

g Hay infinitos números primos.

h Proceso diagonal de Cantor. El conjunto de palabras infinitas de dos letras no es numerable. El conjunto de los números reales no es numerable.

i Es posible hacer una partición de un cuadrado en cuadrados desiguales más pequeños (Gardner 2, Cap. 17). En cambio es imposible hacer una partición de un cubo en un número finito de cubos desiguales más pequeños (Gardner 6, Cap. 21).

Criterios de Divisivilidad

Los libros clásicos de Rouse Ball, Dudeney, Schuh, Kraitchik, contienen muchos juegos basados en diferentes propiedades aritméticas.

a Escribe un número cualquiera. Multiplícalo por 9. Tacha una cifra cualquiera distinta de 0. Dime lo que suman las restantes y yo te diré qué cifra es la tachada. (Criterio de divisibilidad por 9).

b El computador me ha escrito 15! por extenso, pero hay una cifra que no puedo leer. ¿Puedes decirme cómo averiguar rápidamente cuál es?. (Divisibilidad por 9 y por 11)

c Averigua una estrategia para el siguiente juego. Dos jugadores A y B con un montón de piedrecillas. Juega A quitando 1 y 6. Juega B quitando de las que quedan entre 1 y 6. Gana quien se lleva la última. (Otro juego: gana quien no se lleva la última) (La estrategia para el primer juego es dejar un número de piedras múltiplo de 7)

Contar sin contar

Una gran porción de la matemática se reduce a encontrar trucos para obtener información cuantitativa de una situación dada de la forma más sencilla posible. Hay unos cuantos de ellos que, a pesar de su aparente trivialidad conducen a resultados verdaderamente profundos.

a Principio de Dirichlet: Un palomar tiene 16 agujeros. Una bandada de 17 palomas se cuela en él. ¿Puedes sacar alguna conclusión interesante?

b En cualquier momento dado hay en Madrid más de 20 personas con exactamente el mismo número de pelos en su cabellera (Hazte un palomar con 150.000 agujeros, número de pelos que como mucho soporta un mortal en su cabeza, y vete metiendo a cada madrileño en el agujero correspondiente a su número de pelos).

c Teorema de Ramsey (versión sencilla): Se señalan 6 puntos sobre una circunferencia. Se trazan todos los segmentos que unen cada par de ellos. Se colorean de rojo o verde. Entonces, lo hagas como lo hagas, te encontrarás con que algún triángulo de los formados por estos segmentos tiene los tres lados del mismo color.

d Juegos de cartas con un principio aritmético.

e Un truco topológico. Pinta un circuito cerrado con cruces todo lo complicado que quieras, como este, sin que yo lo vea. Que no haya cruces triples, cuádruples, etc.

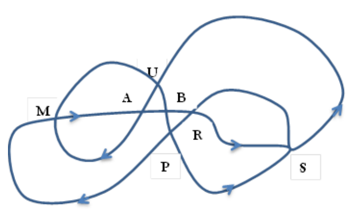

Figura 3.7

Pon a cada punto de cruce una letra a tu antojo. Ahora recorre el circuito y vas diciéndome las letras. Cuando tú quieras cambias una vez las letras sucesivas para engañarme. Por ejemplo, en el de arriba me dices

$MA\underline{RB}SUAMUBPSRP$
y te adivino cuál es el cambiazo que me has dado (Me basta escribir las otras a medida que me las das una arriba y otra abajo de una raya, así

$$MRSAUPR$$
$$ABUMBSP$$

al observar que cada una está una vez arriba y otra abajo excepto las cambiadas R y B. Has cambiado B por R (Gardner 3, Cap. 9).

f La historia del pequeño Gauss. El maestro manda a su clase hallar la suma de los 100 primeros números. Quería tranquilidad para un rato largo. Gauss escribe inmediatamente algo así

$$\begin{array}{rcc} S & = & 1+2+3+\ldots+98+99+100 \\ S & = & 100+99+98+\ldots+3+2+1 \\ \hline 2S & = & 101+101+101+\ldots+101+101+101 \end{array}$$

$$2S = 100(101)$$

entonces $S = 50 \times 101 = 5050$

Deducción lógica

El esqueleto de las matemáticas está compuesto por unos cuantos axiomas que se manipulan mediante el mecanismo raciocinante del hombre. Está bien que se sepa y que se ejerciten nuestros alumnos en la deducción, pero tratando al mismo tiempo de estimular los otros muchos aspectos de la matemática, intuición espacial, intuición numérica, imaginación, fantasía, actividad aventurera.

a. ¿Podrías construirte un cuadrado mágico 2×2? ¿Uno 3×3? Busca estrategias para construir cuadrados mágicos (Gardner 1, Cap. 2; Rouse Ball, Cap. 7).

b. Diseña una estrategia para jugar bien al Tres en Raya.

c. Un monje budista sale de su templo a las 5 : 30 de la mañana por una vereda hacia la cumbre de una montaña, a donde llega por la tarde. Allí se queda durante toda la noche y a las 5 : 30 del día siguiente inicia el descenso por la misma vereda. Trata de demostrar que en el descenso ha estado en algún mismo punto del camino exactamente a la misma hora que el día anterior (Gardner 3, Cap. 20, Prob.4).

d. Toma dos alambres de la misma longitud, rectos. Uno lo pliegas como y cuantas veces quieras. Lo colocas luego doblado sobre el otro de modo que no sobresalga. Entonces, lo hagas como lo hagas hay un punto del alambre doblado que está donde estaba antes de empezar a plegar (Usa el teorema de Bolzano que dice esencialmente que si quieres cruzar un río y no tienes ni puente ni barca, tendrás que mojarte).

Elemental, querido Watson

He aquí algunos problemas elementales que pueden servir para ejercitar el arte de resolver problemas de acuerdo con las normas heurísticas dadas anteriormente.

a. Sin trigonometría, sólo con geometría elemental, demostrar que en la figura

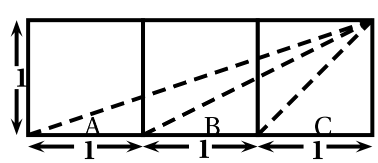

Figura 3.8

se tiene $\angle C = \angle A + \angle B$
Solución: Observa con atención la figura siguiente

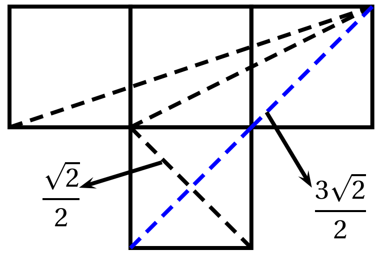

Figura 3.9

b. Las dos rectas señaladas en la figura 3.10 cortan al cuadrado en tres partes de igual área. ¿Cómo cortan a los lados? Sin hacer cuentas.

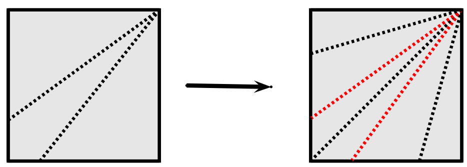

Figura 3.10

Basta observar la figura auxiliar siguiente con los segmentos adicionales que se han trazado dividiendo las áreas señaladas en dos partes iguales. Con ello es claro que las rectas originales van a pasar a $1/3$ del vértice opuesto.

c. En el interior de un círculo se da un millón de puntos. Demostrar que existe una recta que deja 500.000 puntos a cada lado. (Gardner 7, Cap, Prob.8).

d. Teoremas geométricos obtenidos cortando y doblando papel (Gardner 3, Cap.5; Donovan J., Matemáticas más fáciles con manualidades de papel, Distein, Madrid, 1975).

e. Tres Círculos del mismo radio R pasan por un punto. Demostrar que los otros tres puntos de intersección de los círculos determinan otro círculo del mismo radio R. (Polya, Mathematical Discovery, Wiley, New York, 1962).

Simetría

La utilización de la simetría es técnica muy frecuente en matemáticas. Y en juegos. He aquí algunos ejemplos.

a. En el juego de Hex se puede demostrar que el segundo jugador no puede tener una estrategia para ganar (Gardner 1, Cap. 8).

b. Consideramos el siguiente juego para dos jugadores A y B, en el tablero de ajedrez con 32 rectángulos de papel, cada uno capaz de cubrir dos cuadros del tablero. Juega A colocando un rectángulo donde quiera, cubriendo dos cuadrados. Luego juega B cubriendo otros dos cuadros no cubiertos. Luego A. Pierde el primero que no pueda colocar un rectángulo que cubra dos cuadros. ¿Sabrías dar con una estrategia para alguno de los dos jugadores que le permita ganar siempre? (Fácil: Simetría) ¿Cómo cambian las cosas si juegan en un tablero 8×7.?

c. Para construir cuadrados mágicos impares hay una técnica muy sencilla y fácilmente memorizable. Se amplía el cuadro, p.e. 5×5, como se indica en la figura 3.11, con las pirámides que hemos señalado

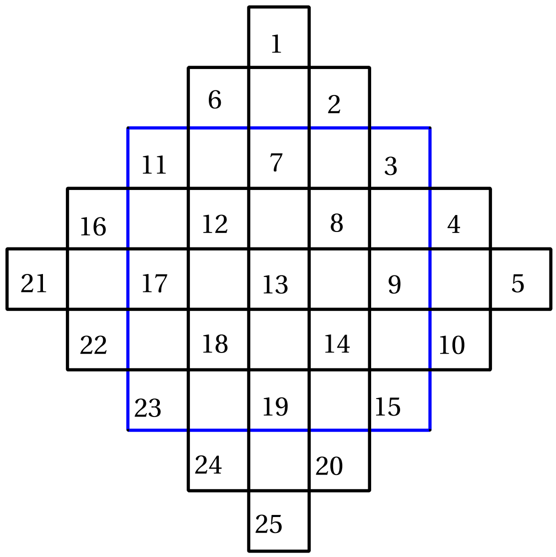

Figura 3.11

A continuación se colocan los números oblicuamente, como lo hemos hecho arriba. Luego la pirámide superior se desliza hasta abajo del cuadro donde encaja perfectamente. Análogamente se procede con las otras pirámides. Así se obtiene un cuadro mágico 5×5

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figura 3.12

¿Sabrías demostrar por qué sale siempre bien? (Estudia la simetría de la disposición inicial y a dónde va a parar cada número después).

d. Los tres círculos de la figura 3.13 tienen el mismo radio y cada uno pasa por el centro de los otros dos. ¿Podrías determinar si la zona rayada mide más o menos que 1/4 del área del círculo? Sin cálculos. (Gardner 4, Cap. 15, Prob. 4).

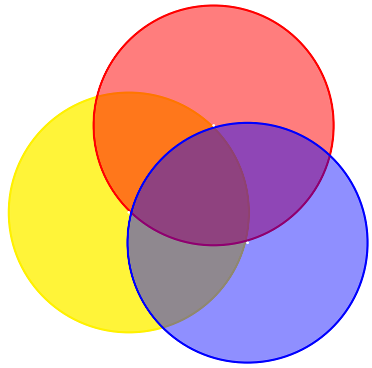

Figura 3.13

e. En un billar ¿cómo llegar con una bola a otra sin efectos después de dos reflexiones sobre dos bandas? (Se halla el simétrico del punto de destino con respecto a la última banda, luego el simétrico de este punto con respecto a la primera banda que hay que tocar y este punto se une con el de partida, determinando así el comienzo de la trayectoria).

f. El problema de la araña y la mosca. Una araña en el interior de un vaso cilíndrico quiere llegar lo más rápidamente posible a una apetitosa mosca que está en el interior del vaso. ¿Le puedes indicar el recorrido que debe seguir? (Desenrolla el cilindro y lo tendrás casi resuelto). ¿Y si sustituimos el vaso cilíndrico por una caja de zapatos? ¿Cómo resuelves ahora el mismo problema?

g. ¿Cómo construir el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triangulo dado con un vértice en cada lado de él? (Guzmán, Mirar y Ver, Cap. 7).

Hazte un dibujo

Cualquier tipo de representación adecuada, puede ayudar extraordinariamente a aclarar las cosas, permitiendo ver mejor los rasgos esenciales, tener los datos pertinentes a mano, etc. Por eso es natural que los grafos sean un instrumento utilísimo en tantos juegos y problemas, tanto de la matemática como de la vida real. Ya hemos visto el uso de algunos en la sección heurística. He aquí algunos más.

a. Las veintiocho fichas de dominó se pueden colocar en hilera de acuerdo con las reglas del juego. ¡Faltaría más! ¿Puedes hacerlo si quitas las 7 fichas que tienen seis puntos? (Gardner 4, Cap. 12).

b. Solución del puzzle de los 4 cubos de colores “Locura Instantánea” (Berlekamp y Winning Ways vol. 2., p. 784).

c. Diversos juegos con grafos.

Utilización de colores

a. Ajedrez recortado (ya citado antes) (Guzmán, Cuentos con Cuentas).

b. Paseos con las torres comenzando en un cierto cuadro y terminando en otro prefijado. (Ver esquema heurístico).

c. Imposibilidad de un paseo hamiltoniano por los vértices del rombo dodecaedro. (Se colorean los vértices de la malla plana equivalente a la malla de vértices del rombododecaedro).

d. Paseo del caballo por el tablero de ajedrez, un problema famoso que ocupó, entre otros a Euler. (Gardner 8, Cap. 13).

e. Un cubo de madera 3x3 está dividido en 27 cubitos 1x1 de la forma natural. Una termita desea penetrar hasta el cubito central después de horadar todos los demás cubitos desde el exterior, comenzando por el centro de alguna cara exterior de un cubito y moviéndose paralelamente a los ejes del cubo grande, pasando siempre de un cubito a otro a través del centro de una cara común. ¿Lo podrá hacer? ¿Cómo? (Gardner 3, Cap. 12, Prob 9).

f. En el tablero siguiente juegan D y P.

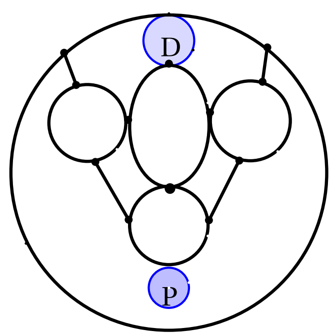

Figura 3.14

El jugador D juega con un duro que sale de D y el jugador P con una peseta que sale de P. Los jugadores se mueven alternativamente por las rutas señaladas. El jugador D trata de cazar a P y gana si lo consigue en 6 o menos turnos. Si no lo ha conseguido después de 6 turnos, pierde. (Gardner 6, Cap. 19, Prob. 3).

Comenzar por lo fácil ayuda a resolver lo dificil

Este es un principio importante en heurística que ya hemos tratado antes y que fácilmente se olvida. Además de los ejemplos que vimos en el primer esquema, mencionaremos aquí rápidamente algunos más.

a. Puentes de Königsberg (Guzmán, Cuentos con Cuentas).

b. Rana Saltarina (Guzmán, Cuentos con Cuentas).

c. Comienza con un dominó con fichas que solo tengan, por ejemplo 0, 1, 2, 3 puntos en sus caras.

Piensa al reves. Supongamos el problema resuelto

Otro principio heurístico del que ya hemos visto antes algún ejemplo.

a. El reparto de cartas interrumpido (Gardner 8, Cap. 14. Prob. 1).

b. ¿Qué situación es más verosímil después de repartir las cartas en el bridge: que entre tú y tu compañero tengan todos los tréboles o que entre tú y él no tengan ninguno? (Gardner 8, Cap. 9, Prob. 25).

Solitarios Matemáticos

Existen muchos solitarios con un claro contenido matemático. Periódicamente, como cometas, salen de nuevo a la popularidad viejos solitarios inventados hace siglos. De vez en cuando, como en nuestros días el cubo de Rubik, alguno acapara totalmente la atención, los matemáticos escriben unos cuantos artículos sobre él y sus variaciones y luego vuelve a dormirse en una discreta penumbra. Los solitarios tienen aplicaciones pedagógicas, por supuesto, pero también las tienen psicoterapéuticas y no está mal que los profesores de matemáticas nos aprovechemos de unas y otras tanto para nosotros mismos como para nuestros alumnos. He aquí unos cuantos solitarios curiosos. Prácticamente todos los solitarios tradicionales tratables matemáticamente y otros muchos de reciente invención son discutidos en: Berlekamp y otros, Winning Ways.

a. Tangram. Probablemente el más antiguo de este tipo de solitarios.

b. El solitario de la Bastilla. Enormemente popular desde el siglo 17.

c. El Juego de los 15, de Sam Loyd, que hizo furor a principios de nuestro siglo.

d. Locura Instantánea.

e. Soma, el solitario famoso de Piet Hein.

f. Poliomino.

h. El cubo de Rubik tiene mucha matemática en sus aristas, pero no se presta mucho a un tratamiento elemental.

i El juego de la vida, adecuado para explotar el comportamiento de autómatas autorreproductores.

Partidos Matemáticos

A lo largo de lo ya expuesto hemos tenido ocasión de ver algunos juegos interesantes para dos jugadores, como el Nim, el Hex. Los juegos tradicionales con sabor matemático abundan y se van creando muchos nuevos de gran interés, basados en principios nuevos. Pensamos que el tratamiento más completo de juegos matemáticos se puede encontrar en la reciente obra de Berlekamp, Conway y Guy, Winning Ways, que ya hemos citado varias veces. Hemos entresacado aquí algunos de ellos indicando también alguna otra referencia más asequible.

a. Tres en Raya

b. Nim y variaciones.

c. Ceros y Cruces, el clásico juego sobre una cuadrícula completando cuadros.

d. Go, un antiguo juego oriental de reglas muy sencillas y de gran riqueza estratégica. Durante algún tiempo fue asignatura obligatoria en las academias de preparación militar en Japón. Es interesante saber que, como en el ajedrez, no se conoce estrategia completa.

e. Otelo, también llamado Reversi, otro juego de reglas muy sencillas sin estrategia matemática conocida.

f. Juegos topológicos.

g. Hex.

h. El juego militar, un clásico juego de acorralamiento parecido al de los gatos y el ratón sobre un tablero como el de la figura 3.15.

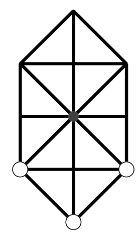

Figura 3.15

Analogías escondidas

Como sucede en matemáticas, existen a veces analogías insospechadas en los juegos que uno se puede proponer, a veces incluso isomorfismos de estructura que permiten analizar varios de un golpe. Ya hemos visto cómo algunos juegos y puzzles se convierten, mediante un esquema, en un problema equivalente de teoría de grafos. He aquí algunos ejemplos de juegos isomorfos.

a. El juego de Moser y el Tres en Raya.

b. Juego de cartas equivalente al cuadrado mágico 3×3.

c. El juego icosiano y las torres de Hanoi.

d. Problemas de medidas y de reflexión en un billar.

Falacias

Las falacias tienen un gran valor pedagógico. Euclides escribió un libro de falacias y aporías, los Pseudaria, que probablemente utilizó con gran provecho en su enseñanza. Los clásicos en recreaciones matemáticas suelen tener una sección dedicada a falacias. Especialmente recomendables son las secciones de los capítulos 2 y 3 de Rouse Ball, dedicadas a falacias aritméticas y geométricas.

a. Diversas falacias aritméticas, topológicas

b. La siguiente falacia es muy antigua (Torricelli?) y viene a demostrar que el principio de Cavalieri (mal interpretado) es falso. Consideramos los dos triángulos ABC y ABD de la figura 3.16, con $BC = BD = 1$. Para cada M de AB es claro que $MN = MP$. Así por el principio de Cavalieri, el área de ABC es igual al de ABD.

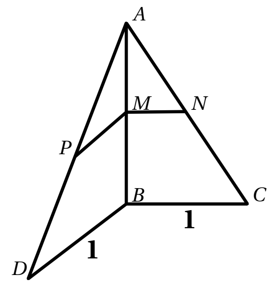

Figura 3.16

Feliz Idea

En la resolución de juegos y acertijos, como en la resolución de problemas, a veces es preciso que surja en nuestra mente lo que llamamos una feliz idea. Un concepto nada fácil de definir. Para el experto es un método de trabajo lo que para el novicio resulta una feliz idea, una especie de revelación divina que surge como un relámpago en la oscuridad y nos deja ver claro el camino a seguir. El examen de muchas felices ideas puede abrir en nuestro espíritu cauces que hagan surgir chispas semejantes en circunstancias parecidas. Por eso no es nada despreciable esta labor preparatoria. Con este espíritu está escrito el estimulante y agradable libro de Martin Gardner "Inspiración, ¡Ajá!", que constituye toda una antología de felices ideas en diferentes campos.

CAPÍTULO 4

JUEGOS DE INGENIO Y ENTRETENIMIENTO MATEMÁTICO, JEAN PIERRE ALEM

Historia de un Círculo y un Cuadrado

En la página de un libro de geometría, se encontraba un cuadrado y un círculo.
Como el libro era poco consultado, los dos se aburrían y generalmente disputaban.

¡Yo soy el más grande!, decía el primero, pues un círculo es un cuadrado cuyos ángulos han sido recortados.

El círculo replicaba:
Es todo lo contrario justamente, pues un círculo es un cuadrado el cual se ha soplado y así se ha hinchado.

Como no podían ponerse de acuerdo sobre la superficie, pasaron a hablar de la belleza.
Yo soy el símbolo de la solidez (decía el cuadrado). La igualdad de mis cuatro lados y sobre todo mis ángulos, mis ángulos de ochenta grados (este cuadrado no era muy sabio), confieren a mi figura armonía vigorosa y segura.

El círculo respondía:
En la solidez que tanto alabas, no veo sino vulgaridad. Tu vigor primario no me seduce nada. Te considero como una medida de superficie y nada más. En cuanto a mí, de todas las curvas soy la que mejor está hecha. Los astros adoptaron mi contorno, los artistas siempre recurrieron a mi curvatura y los hombres andan alrededor de mi; pues, como sabes muy bien, nada conmueve tanto su carne como el orgulloso hemisferio de un trasero o de un seno femenino.
En lo que se refiere a la utilidad, si deseas que hablemos de eso, mi superioridad en este dominio es absolutamente segura. Soy la rueda y habría que ser loco, convendrás en ello, para no admitir que la rueda lo es todo.

Si no es todo, es sin embargo mucho (reconoció el cuadrado), pero yo presto también algunos servicios; soy la base, créeme, de los edificios más durables.
El círculo se encogió de arco

Tú eres estático, y lo que no se mueve muere; así lo señalan las estadísticas.

Yo soy movimiento y en ese terreno soy irremplazable. Si las ruedas de las carretas fueran cuadradas, creo en verdad que sería difícil hacerlas avanzar.

Y así reñían durante días enteros. Nadie se atrevía a ponerlos de acuerdo. Habría sido un problema tan arduo y vano como el de la cuadratura del círculo.

Ahora bien, un día un niño que volvía las páginas del libro y al pasar hacia garabatos, dibujos, rostros en una y otra figura. El cuadrado quedo convertido en una cabeza austera y bigotuda. Al círculo le puso cabello y pestañas en los ojos y le infundio un aire tan gracioso que era menester de toda evidencia pasarlo al género femenino y que por decencia se lo llamara una circunferencia.

Fácil es adivinar lo que ocurrió después. La curva y la rigidez que antes los había irritado durante tanto tiempo parecieron llenos de atractivos a sus sexos opuestos. Púberes, se miraron, luego se amaron y se casaron.

Al principio todo marcho bien. Es natural. La circunferencia se complacía en rodar sobre los lados del cuadrado y experimentaba el placer en demorarse en los ángulos duros que le cosquilleaban su curvatura.

Pero luego la circunferencia se cansó. Como era rápido para analizar , no tardo en descubrir a polígonos menos monótonos en las cercanías de las páginas. Primero la sedujo el rectángulo por su silueta espigada. Mantuvo relaciones con él. Luego admitió la elegancia esbelta del rombo y el perfil aguzado del triángulo. También se solazó con el trapecio, y con el paralelogramo que rendía el alma.

En su rincón, el cuadrado se aburría. Lo irritaba ser cornudo. Luego fastidiado se preguntó cómo podría reconquistar el amor y los favores de su voluble esposa.

Se puso a considerar a sus rivales y, como no era tonto, llego a la conclusión de que era demasiado grueso. "Demasiado Grueso", pensó "y ¿Por qué no confesarlo?, demasiado cuadrado". Habría querido transformarse pero, ¡ay! Sus ángulos, sus ángulos de ochenta grados, como él creía, habían sido determinados para toda la eternidad.

Como no podía deformarse, un día se le ocurrió la idea de plegarse. Lo hizo por su diagonal y, en virtud de una trivial maniobra, se redujo a la mitad con lo cual se convirtió sin ni más ni más en un triángulo isósceles y rectángulo.

La circunferencia, conquistada por ese audaz artificio, volvió a sentir gusto por su esposo.

De su hipotenusa la circunferencia se hizo un diámetro e hizo cuerda de los lados que la estrechaban tensamente o bien se refugiaba en el hueco de sus bisectrices donde la abrazaba su tierno perímetro.

Pronto, sin por ello ser más o menos redonda, la circunferencia se encontró embarazada, pero no quisieron tener como hijo a una figura hibrida, ni siquiera a un pequeño polígono como aquellos grandes con los cuales ella no había tenido reparos en tratar.

Hicieron el voto de que en su momento la circunferencia diera a luz un teorema.

Y fue, en efecto, un teorema el hijo que tuvieron, un hijo grande y fuerte. Lo llamaron Pitágoras.

En este capítulo, trataremos el trabajo de Jean Pierre Alem "*Juegos de Ingenio y Entretenimiento Matemático*", tomaremos los mejores ejercicios y problemas que aparecen en su libro y dándoles un pequeño toque de actualidad en los nombres de los personajes, queremos que la lectura sea más atractiva para sus estudiantes. A continuación mostraremos una serie de ejercicios y compartiremos la solución, como también al final del capítulo, incluiremos una serie de problemas que quedaran de reto para el docente o estudiante lector.

Ejercicio 4.1

El señor Wbeymar, profesor de un prestigioso colegio de Neiva, vive en una bonita calle y del lado elegante, el lado de los números pares en el que solo hay casas individuales rodeadas de jardines. Su vecino de la derecha el señor Elvis, profesor también, con el cual está muy ligado.
Aquel domingo los dos profesores mientras se paseaban hablaban de trabajo.

-La verdad de ser profesor- dice Wbeymar- consiste en que uno se jubila antes de los 70 años.
-Bien tarde, por cierto -dice Elvis-.

¿Por qué?, ¡Yo no soy ningún viejo chocho! Y vea usted a mi vecino de la izquierda. Diego Mora, el exportador de Arepas, tiene 75 años y todavía dirige su negocio.
-Yo quisiera jubilarme a los 50 años -dice Elvis-
Así podría, una vez alcanzada esta edad, dedicarme enteramente al juego de parqués.
Como Wbeymar se encoge de hombros, Elvis le agrega:
-¿Sabe usted que para llegar a clase internacional un jugador de parqués debe entrenarse de 5 a 6 horas por día?
-¡Internacional de parqués! -suspira Wbeymar- ¡Que ridículo!...
Vea -agrega al llegar frente a su puerta-, acabo de observar que el producto de mi edad por el número de mi casa es igual al producto de la casa de usted por su edad.

¿Cuáles son los números de las casas de los dos profesores y cuál es la edad de cada uno?

Solución. Sean A, a y B, b las edades y los números de las casas de los profesores Elvis y Wbeymar. Puesto que Elvis ocupa la casa individual vecina de la de Wbeymar, entonces

$$a = b + 2$$

$$(B > A, \;\; luego \;\; a > b)$$

$$\begin{aligned} A(b+2) &= Bb \\ 2A &= b(B-A) \end{aligned}$$

Elvis tiene menos de 50 años y Wbeymar más de 70 años.
Luego,

$$B - A > 20 \;\; y \;\; b < \frac{2A}{20} \text{ ó } \frac{A}{10}$$

A es inferior a 50, luego $b < 50/10 = 5$, como b es par no puede ser sino 2 ó 4. Pero 2 queda excluido pues Wbeymar tiene un vecino a la izquierda (Diego Mora), de modo que su casa no es la primera de la calle.

$$b = 4 \;\; y \;\; a = 6$$

$$3A = 2B$$

2 divide a A,

$$b > 70$$

luego

$$A > 46$$

pero

$$46 < A < 50$$

Como A es par, solo puede ser 48. Entonces $B = 3/2A = 3/2 \times 48 = 72$.
Elvis tiene 48 años y Wbeymar 72.
Luego se cumple que $48 \times 6 = 72 \times 4$.

Ejercicio 4.2

La cohorte[1] *beocia*[2] *estaba formada en cuadrado. Teniendo que llevar a cabo dos operaciones con una sola cohorte, un general la dividió, en virtud de un solo movimiento, en dos rectángulos, uno de los cuales tenía 36 hombres más que el otro. ¿Cuáles eran los efectivos de la cohorte?*

Solución. Sea n el número de hombres por línea o columna del cuadrado. En la nueva formación, uno de los rectángulos contiene más filas y 36 hombres más que otro. 36 representa pues una o varias filas y es por lo tanto múltiplo de n. n es superior a 6 pues n^2 es superior a 36. Por otra parte $36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ tiene (como divisores superiores a 6): $9, 12, 18$ y 36.
Si $n = 9$, el rectángulo mayor debe tener $36/9 = 4$ filas más que el menor. Pero 9 no puede dividirse en dos números cuya diferencia sea 4. Un razonamiento semejante nos lleva a rechazar igualmente las hipótesis $n = 12$ y $n = 36$. Luego $n = 18$. La cohorte beocia tiene $18^2 = 324$ hombres.

Ejercicio 4.3

Los Mora van a la feria:
Diego, Jimmy y Johan, los tres primos Mora, van a la feria con sus mujeres. Una de esas señoras se llama Madeleine, otra María y la tercera Martha. Cada una de estas seis personas compra uno o varios objetos y paga tantos dólares como objetos compro.
Diego compra 23 objetos más que Madeleine, Jimmy 11 más que María. Cada hombre gasto 63 dólares más que su mujer. ¿Cuál es la mujer de cada cual?

Solución. Sea x el número de objetos comprados por uno de los hombres y sea a el número de objetos comprados por su mujer.

$$x^2 - a^2 = 63$$
$$(x + a)(x - a) = 1 \times 3 \times 3 \times 7$$

Hay tres maneras de descomponer 63 en un producto de 2 factores.

63=1 ×63	$(x + a) = 63$	$(x - a) = 1$	$x = 32$	$a = 31$
63=3 ×21	$(x + a) = 21$	$(x - a) = 3$	$x = 12$	$a = 9$
63=9 ×7	$(x + a) = 9$	$(x - a) = 7$	$x = 8$	$a = 1$

[1] En historia militar, una cohorte era una unidad táctica de infantería del antiguo ejército romano. Estaba formada por unos 480 hombres y constituía la décima parte de una legión romana

[2] Beocia (en griego, Viotía) es una unidad periférica de Grecia, en la periferia de Grecia Central.

Entre los seis números encontrados solo hay dos (el 12 y el 1) cuya diferencia sea 11. Diego compro 12 objetos (y su mujer 9), María compro un objeto (y su marido 8). Existe una sola pareja x, a de manera tal que

$$(x-a)=23$$
$$x=32\ ,\wedge, a=9$$

De manera que Diego compro 32 objetos y Madeleine 9.

Diego	¿?	Jimmy	Madeleine	¿?	Martha
32	31	12	9	8	1

Las parejas son Jimmy-Martha, Diego-Madeleine, Johan- María.

Ejercicio 4.4

Al año siguiente de lo que acaba de leer, Diego, Jimmy, Johan y sus tres mujeres vuelven a la feria; cada uno hace compra y cada objeto comprado cuesta tantos dólares como objetos compro. En cada hogar uno de los dos conyugues gasta 325 dólares más que el otro. Martha es la que mas gasta, la sigue Diego. Johan compro 13 objetos más que María. ¿Cuáles son las dramáticas permutaciones acaecidas en la familia Mora?

Solución. Sean x e y los números de los objetos comprados por dos conyugues.

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=325=1\times5\times5\times13$$

$(x+y)(x-y)$ no puede ser sino $325\times1, 65\times5$ ó 25×13, estas tres combinaciones posibles dan:

$x=163$	$y=162$
$x=35$	$y=30$
$x=19$	$y=6$

Fue Martha quien gasto más. Fue ella pues la que compro 163 objetos en tanto que su marido compro 162. Como Diego fue quien gasto mas después de Martha es él su marido. Johan compro 13 objetos más que María.

$$19-6=13$$

De manera que Johan es el marido de María, Diego el de Martha y, por lo tanto Jimmy el de Madeleine.

Ejercicio 4.5

La señora Bleiner enciende un primer sábado una vela de su candelabro que mantiene encendida durante una hora, el segundo sábado mantiene encendida dos velas durante el mismo tiempo, el tercer sábado tres velas y así sucesivamente. Cada vela tarda cuatro horas en consumirse enteramente.

¿Cuál debe ser el número n de velas para que el n-ésimo sábado esta manera de proceder culmine en un consumo total de las velas?

Solución. El número total de horas de velas consumidas es:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ese número es también $4n$

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= 4n \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.6

Este año, Ricardo participa en la celebre semana de la Escuela Regional de Matemáticas con sede en la USCO. Estaba alojado en el hotel Plaza, establecimiento del cual Ricardo no apreciaba mucho su numerosa clientela.
-¡Esta gente es ruidosa y vulgar! -dice Ricardo a su viejo enemigo Mauro-. Habría que fusilar a la mitad.
-¡Exagera usted!
-¡De ninguna manera! Precisamente la mitad, contándonos a nosotros dos.
En los intervalos de las sesiones del encuentro, ocioso, Ricardo juega al billar o hace estadísticas.
Entre los clientes del hotel Plaza, $3/5$ *están en pensión completa, los de media pensión y entre estos últimos* $2/3$ *cenan y los otros almuerzan.*
Los $2/3$ *de pensión completa, los* $3/4$ *de los que están con media pensión y la mitad de los que almuerzan beben vino. En cada una de las tres categorías, los* $4/5$ *de los bebedores consumen vino tinto concha y toro a 11 dólares el litro o casillero del diablo, cuyo precio (un numero entero de dólares) es ligeramente inferior al doble del precio del vino concha y toro.*
El hotel sirve $1/4$ *de litro de vino por persona en el almuerzo y* $1/2$ *litro en la cena. Por este servicio en la caja del hotel entran 1390 dólares por día.*
Después de haber obtenido toda esta información, Ricardo se frota las manos y sonríe.
-Ahora -se dice- podría, si ya no los hubiera contado, calcular el número de clientes de este hotel.
¿Cuántos son, pues, esos clientes (comprendidos Ricardo y Mauro)? ¿Y que cantidad de casillero del diablo consumen por día?

Solución. Sea x el número de clientes del hotel y A el número de litros de vino tinto consumido cada día.

- Los clientes con pensión completa que beben vino tinto son:

$$x\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=x\left(\frac{8}{25}\right)$$

- Los clientes con media pensión que cenan y beben vino tinto son:

$$x\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=x\left(\frac{4}{25}\right)$$

- Los clientes con media pensión que almuerzan y beben vino tinto son:

$$x\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=x\left(\frac{4}{75}\right)$$

Cada una de las categorías y subcategorías debe estar compuesta de un número entero de personas, lo cual implica que x es un múltiplo de 75.
Por otra parte, según el enunciado, x es par. Luego $x = 150p$, siendo p número entero.
En litros, la cantidad de vino tinto consumido cada día es:

$$A = x\frac{8}{25}\frac{3}{4} + \frac{4}{25}\frac{1}{2} + x\frac{4}{75}\frac{1}{4} = \frac{1}{3}x = 50p$$

A es evidentemente inferior al número de litros que obtendría dividiendo el precio total 1390 dólares, por el precio del vino más barato.

$$A < \frac{1390}{17} \quad A \leq 81$$
$$50p \leq 81, \ \ luego \ \ p = 1$$

El número de los clientes del hotel es 150 × 1 = 150
Como la cantidad mas pequeña servida es de un cuarto de litro, las cantidades casillero del diablo y concha y toro, a y b son números enteros de cuartos de litro.
Sea y el precio del litro de casillero del diablo. $y > 17$

$$a\left(\frac{y}{4}\right) + b\left(\frac{17}{4}\right) = 1390$$

$ay + 17b = 5560$, con $a + b = 200$, y $b = 200 - a$.
Luego

$$a(y - 17) = 2160$$
$$2160 = 1 \times 2^4 \times 3^3 \times 5$$

Los divisores entre los cuales hay que buscar $(y - 17)$ son:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, ...$$

Como y es ligeramente inferior al doble de 17, el número que conviene es 16.

$$y - 17 = 16$$
$$a = \frac{2160}{16} = 135$$

La cantidad de casillero del diablo consumida cada día es de 135 cuartos de litro, es decir, 33 litros 3/44.

Ejercicio 4.7

La secta de los siete candelabros rosados fue prohibida. Habiéndose enterado la policía de que la secta acaba de ofrecer un espectáculo clandestino, organizan una intervención en su base. Al llegar al lugar, los espectadores ya se han marchado, pero la policía encuentra un documento contable.
26 entradas a 202 dólares: 5555 dólares.
Los policías quedan muy intrigados por esta aritmética.
Por fin, el comandante que los dirige se da un golpe en la frente y exclama:
- ¡Estos clientes no tienen nada como los demás! ¡Ni siquiera su base es la misma!
¿Qué quiso decir el sagaz comandante?

Solución. El enunciado insiste en la palabra base. Y, en efecto, se trata de una cuestión de base, la base de numeración de los candelabros rosados.
Sea x esa base: $26 \times 202 = 5555$

$$\begin{gathered}(2x+6)(2x^2+2) = 5(x^2+x^2+x+1)\\ x^3-7x^2+x-7=0\\ (x-7)(x^2+1)=0\\ x=7\end{gathered}$$

Los "candelabros rosados" calculan mediante un sistema de numeración de base 7.

Ejercicio 4.8

Los Pérez (el señor Pérez, la señora Pérez y su hijo) consideran sus edades como un secreto de familia. Un día en que el profesor Augusto, tuvo la indiscreción de hacer una pregunta al hijo sobre ese tema, el padre intervino, creyendo poner en apuros al viejo matemático, le dijo:
La suma de nuestras tres edades es inferior a 70. Yo tengo 5 veces la edad de mi hijo y, dentro de algunos años, la relación de mi edad con la de mi hijo será un número entero igual a la relación de la suma de las tres edades que tendremos entonces en la familia con las sumas de las tres edades que tendremos hoy. Todo en números enteros para facilitarle a usted la tarea.
Augusto se marcho encogiéndose de hombre. Y como no era hombre discreto, todo el edificio vino a saber bien pronto por que los Pérez mantenían tanto secreto en torno de sus edades.
¿Por qué, pues, tanto secreto?

Solución Sean P, M, E, A, x, y las edades del padre, de la madre, del hijo, la suma de estas tres edades, los "algunos años" de que habla el padre, el valor de las relaciones comunes. Todos estos números son enteros.

$$P+M+E=A \qquad P=5E$$

$$\frac{P+x}{E+x} = \frac{5E+x}{E+x} = y \tag{4.1}$$

$$\frac{A+3x}{A} = y \tag{4.2}$$

la ecuación (4.2) , da $x = \dfrac{A(y-1)}{3}$. Llevando este valor de x a (4.1), se obtiene:

$$P = \frac{5A(y-1)^2}{15-3y} \tag{4.3}$$

$$M = A-P-E = \frac{A(-2y^2+3y+3)}{5-y} \tag{4.4}$$

y es evidentemente diferente de 5 y no puede ser superior a 5. En efecto, si $y \geq 6$, de conformidad con (4.2) tendríamos $x \geq \frac{5A}{3}$ lo que no correspondería a la expresión "algunos años" pronunciada por el padre. Por otro lado, y es diferente de 1, valor para el cual tendríamos $E = P = 0$.
Y solo puede ser 2, 3 ó 4, y es fácil ver que 2 es el único valor razonable. En efecto, M y $5-y$ siendo positivos deben dar 4:

$$\begin{gathered}-2y^2+3y+3>0\\ 2y^2-3y-3<0\end{gathered}$$

Y debe estar comprendido entre las raíces de la ecuación,

$$2y^2-3y-3=0$$

Que son

$$\frac{3-\sqrt{33}}{4} \;\; y, \;\; \frac{3+\sqrt{33}}{4}$$

La primera raíz es negativa, la segunda debe ser menor que $\frac{9}{4}$, porque

$$\sqrt{33} < 6, \;\; y, \; 3+\sqrt{33} < 9$$

luego,

$$1 < \frac{3+\sqrt{33}}{4} < \frac{9}{4}$$

Así que $y = 2$. para este valor tenemos que

$$E = \frac{A}{9}, \;\; P = \frac{5A}{9}, \;\; M = \frac{A}{3}$$

- Si E es entero, A es múltiplo de 9. El múltiplo máximo de 9 inferior a 70 es 63.

- Con $A = 63$, $E = 7$, $P = 35$, $M = 21$, $M - E = 14$

- Si se tomara para A un múltiplo de 9 inferior a 63, $M - E$, diferencia entre las edades de la madre y del hijo, sería un número demasiado bajo para ser aceptable. La señora Pérez tuvo a su hijo a los 14 años, antes de casarse. Ese es el secreto de la familia.

Ejercicio 4.9

Este año díez sobrinos y sobrinas de Clotario acudieron a su cena de cumpleaños. Clotario quería mucho a esos jóvenes, pero les reprochaba que fuesen jugadores y, algo mas grave, que en general fuesen malos matemáticos.
Resolví entonces proponerles un juego que les daría una lección y que tendría además la ventaja de reembolsarle los gastos de la comida.
Aquí tengo dos dados. -dijo Clotario-. Los lanzo; el resultado puede variar de 2 (un punto cada dado) a 12 (seis puntos cada dado). Cada uno de nosotros elegirá un número comprendido entre 2 y 12 que será valido durante todo el juego. Los dados serán arrojados 360 veces en total (no importa quien los arroje). A cada tiro cada uno de los jugadores apostara 100 pesos; quien tenga el número indicado por los dados recogerá las posturas. Como yo soy el mayor de todos, elegiré primero mi número.
Al terminar la velada, Clotario por supuesto era el gran ganador, en tanto que Jorge y Fredy eran los grandes perdedores.
¿Cuáles eran los tres números que habían elegido? ¿Qué suma aproximada gano Clotario?

Solución Hay seis maneras de marcar 7 puntos con dos dados $(1,6;6,1;2,5;5,2;3,4;4,3)$ y hay sólo una manera de marcar dos puntos o doce puntos.
Clotario había elegido el numero 7; Jorge y Fredy habían elegido el 2 y el 12.
Como el número de combinaciones posibles es 36, la posibilidad de que salga 7 es $6/36 = 1/6$ En 360 tiros, número muy elevado para que se verifique aproximadamente la ley de los grandes números, Clotario gano alrededor de 60 veces.
Su ganancia final, descontada la puestas, se acercó pues a
$60 \times 11 \times 100 - 360 \times 100 = 30000$ pesos
Mucho más de lo que le había costado la cena ofrecida a sus sobrinos y sobrinas. (Jorge y Fredy perdieron alrededor de 25000 pesos cada uno)

Ejercicio 4.10

Descomponer 13411 *en cuatro cuadrados.*

Solución. Sean a, b, c y d números en orden descendente, tales que
$a^2+b^2+c^2+d^2=13411$, puesto que $\sqrt{13411}<116$, entonces $\sqrt{13411}=115,\ldots$
a es menor o igual a 115.
Tomando a $a=115$, tenemos que $b^2+c^2+d^2=13411-115^2=13411-13225=186$

$$\sqrt{186}=13,\ldots$$

Con el mismo argumento anterior encontramos que b es menor o igual a 13.
Tomando $b=13$, obtenemos que $c^2+d^2=186-13^2=186-169=17$
De aquí, $c=4$ y $d=1$, por lo tanto

$$115^2+13^2+4^2+1^2=13411$$

Otras posibles soluciones son.

$$113, 25, 4, 1 \text{ ó } 113, 23, 8, 7.$$

4.1. Ejercicios propuestos para el lector

A manera de introducción y con el fin de hacer saber al lector que la lógica y los juegos matemáticos van de la mano, presentamos la siguiente situación:

Junto al cadáver de un suicida se encontró una carta explicatoria diciendo:
“No se culpe a nadie de mi muerte. . . ”
Me quito la vida porque dos días más que viviese, sería mucho martirio:
Tuve la desgracia de casarme con una viuda. Ella tenía una hija.
De haberlo sabido, nunca me hubiera casado con ella.

Mi padre, para mayor desgracia, era viudo y se enamoró y se casó con la hija de mi mujer. De manera que mi mujer era suegra de su suegro.

Mi hijastra se convirtió en mi madrastra y mi padre al mismo tiempo ¡¡¡era mi yerno!!!

Al poco tiempo, mi madrastra trajo al mundo una niña que era mi hermana, y a la vez era nieta de mi mujer, de manera que yo era abuelo de mi hermana...

Después, mi mujer trajo al mundo un niño que, como era hermano de mi madrastra, era cuñado de mi padre, nieto de su hermana ¡¡¡y mi tío!!!

Mi mujer era nuera de su hija, yo soy en cambio padrastro de mi madrastra, y mi padre y su mujer son mis hijastros, mi hijo es mi bisnieto y tío de su tía.
Además, ¡¡¡yo soy mi propio abuelo!!!

ME DESPIDO DE ESTE MUNDO, PORQUE NO SE QUIÉN SOY, Y DE REPENTE,..PODRÍA SER PRIMO SUYO...

Esta situación embarazosa muestra que el desarrollo del pensamiento lógico matemátematico de nuestros estudiantes, se puede hacer desde problemas muy cotidianos.

1. La ardilla en el calvero

Hoy por la mañana he jugado al escondite con una ardilla -contaba a la hora del desayuno uno de los comensales en el albergue donde pasábamos las vacaciones -. ¿Recuerdan ustedes el calvero circular del bosque con un abedul solitario en el centro? Para ocultarse de mí, una ardilla se había escondido tras ese árbol. Al salir del bosque al claro, inmediatamente he visto el hociquito de la ardilla y sus vivaces ojuelos que me miraban fijamente detrás del tronco. Con precaución, sin acercarme, he empezado a dar la vuelta por el contorno del calvero, tratando de ver al animalillo.
Cuatro vueltas he dado alrededor del árbol, pero la bribona se iba retirando tras del tronco en sentido contrario, sin enseñarme más que el hociquillo. En fin, no me ha sido posible dar la vuelta alrededor de la ardilla. Sin embargo -objetó alguien-, usted mismo ha dicho que dio cuatro veces la vuelta alrededor del árbol.
- Alrededor del árbol, sí; pero no alrededor de la ardilla. -Pero la ardilla, ¿no estaba en el árbol? -¿Y qué?
- Entonces usted daba también vueltas alrededor de la ardilla.
-¿Cómo, si ni siquiera una vez le pude ver el lomo?
-¿Pero qué tiene que ver el lomo? La ardilla se halla en el centro, usted marcha describiendo un círculo, por lo tanto anda alrededor de la ardilla.
-Ni mucho menos. Imagínese que ando junto a usted describiendo un círculo, y que usted va volviéndome continuamente la cara y escondiendo la espalda. ¿Diría usted que doy vueltas a su alrededor?
-Claro que sí. ¿Qué hace usted?
¿Le rodeo, aunque no me encuentre nunca detrás de usted, y no vea su espalda? -¡La ha tomado usted con mi espalda!. Cierra el círculo usted a mi alrededor; ahí es donde está el intríngulis, y no en que me vea o no la espalda.
-¡Perdone!, ¿Qué significa dar vueltas alrededor de algo?
-A mi entender no quiere decir nada más que lo siguiente: ocupar sucesivamente distintas posiciones de modo que pueda observarse el objeto desde todos los lados. ¿No es así, profesor? -preguntó uno de los interlocutores a un viejecillo sentado en la mesa. En realidad, están ustedes discutiendo sobre palabras -contestó el hombre de ciencia -En estos casos hay que empezar siempre por lo que acaban de hacer; o sea, hay que ponerse de acuerdo en el significado de los términos. ¿Cómo deben comprenderse las palabras “moverse alrededor de un objeto”? Pueden tener un doble significado. En primer lugar, pueden interpretarse como un movimiento por una línea cerrada en cuyo interior se halla el objeto. Esta es una interpretación.
-Otra: moverse respecto a un objeto de modo que se le vea por todos los lados. Si aceptamos la primera interpretación, debe reconocer que ha dado usted cuatro vueltas alrededor de la ardilla.
-Manteniendo la segunda, llegamos a la conclusión de que no ha dado vueltas a su alrededor ni una sola vez.
-Como ven ustedes, no hay motivo para discutir, si ambas partes hablan en un mismo lenguaje y comprenden los términos de la misma manera.
-Eso está muy bien; puede admitirse una interpretación doble. Pero, ¿cuál es la justa? La cuestión no debe plantearse así. Puede convenirse lo que se quiera. Sólo hay que preguntarse cuál es la interpretación más corriente. Yo diría que la primera interpretación es la más acorde con el espíritu de la lengua, y he aquí por qué. Es sabido que el Sol da una vuelta completa alrededor de su eje en 26 días...
-¿El Sol da vueltas?
-Naturalmente, lo mismo que la Tierra alrededor de su eje. Imaginen ustedes que la rotación del Sol se realizara más despacio; es decir, que diera una vuelta no en 26 días, sino en 365 días y 1/4; o sea, en un año. Entonces el Sol tendría siempre el mismo lado orientado a la Tierra y nunca veríamos la

parte contraria, la espalda del Sol. Pero, ¿podría entonces afirmarse que la Tierra no daba vueltas alrededor del Sol?
-Así, pues, está claro que a pesar de todo yo he dado vueltas alrededor de la ardilla.

2. El bramante

¿Más cordel? - preguntó la madre, sacando las manos de la tina en que lavaba. Ayer mismo te di un buen ovillo.
¿Para qué necesitas tanto? ¿Dónde lo has metido?
¿Dónde lo he metido? - contestó el muchacho -. Primero me cogiste la mitad...
¿Con qué quieres que ate los paquetes de ropa blanca?
La mitad de lo que quedó se la llevó Tom para pescar.
Debes ser condescendiente con tu hermano mayor.
Lo fui. Quedó muy poquito y de ello cogió papá la mitad para arreglarse los tirantes que se te habían roto de tanto reírse con el accidente de automóvil. Luego, María necesitó dos quintos del resto, para atar no sé qué...
¿Qué has hecho con el resto del cordel? ¿Con el resto? ¡No quedaron más que 30 cm! ¿Qué longitud tenía el cordel al principio?

3. Calcetines y guantes

En una misma caja hay diez pares de calcetines color café y diez pares negros, y en otra caja hay diez pares de guantes café y otros tantos pares negros. ¿Cuántos calcetines y guantes es necesario sacar de cada caja, para conseguir un par de calcetines y un par de guantes de un mismo color (cualquiera)?

4. La longevidad del cabello

¿Cuántos cabellos hay por término medio en la cabeza de una persona? Se han contado unos 150.000. Se ha determinado también que mensualmente a una persona se le caen cerca de 3.000 pelos. ¿Cómo calcular cuánto tiempo dura en la cabeza cada pelo?

5. El salario

La última semana he ganado 250 duros, incluyendo el pago por horas extra. El sueldo asciende a 200 duros más que lo recibido por horas. ¿Cuál es mi salario sin las horas extras?

6. Carrera de esquíes

Un esquiador calculó que si hacía 10 km por hora, llegaría al sitio designado una hora después del mediodía; si la velocidad era de 15 km por hora, llegaría una hora antes del mediodía.
¿A qué velocidad debe correr para llegar al sitio exactamente al mediodía?

7. Dos obreros

Dos obreros, uno viejo y otro joven, viven en un mismo apartamento y trabajan en la misma fábrica. El joven va desde casa a la fábrica en 20 minutos; el viejo, en 30 minutos. ¿En cuántos minutos alcanzará el joven al viejo, andando ambos a su paso normal, si éste sale de casa 5 minutos antes que el joven?

8. Por cinco francos, cien

Un artista de variedades, en un circo parisiense, hacía al público esta seductora proposición:

Declaro ante testigos que pagaré 100 francos al que me dé cinco francos en veinte monedas; deberá haber, entre estas 20, tres clases de monedas: de 50 céntimos, de 20 céntimos y de 5 céntimos. ¡Cien francos por cinco! ¿Quién los desea?
Reinó el silencio. El público quedó sumido en reflexiones. Los lápices corrían por las hojas de las libretas de notas; pero nadie aceptaba la propuesta.

Estoy viendo que el público considera que 5 francos es un precio demasiado elevado para un billete de 100 francos. Bien; estoy dispuesto a rebajar dos francos y a establecer un precio menor: 3 francos, en monedas, del valor indicado. ¡Pago 100 francos, por 3! ¡Que se pongan en cola los que lo deseen!
Pero no se formó cola. Estaba claro que el público vacilaba en aprovecharse de aquel caso extraordinario.

¿Es que 3 francos les parece también mucho?, Bien, rebajo un franco más. Abonen, en las indicadas monedas, sólo 2 francos, y entregaré cien francos al que lo haga.
Como nadie se mostrara dispuesto a realizar el cambio, el artista continuó:
¡Quizá no tengan ustedes dinero suelto! No se preocupen, pueden entregármelo más tarde.
¡Denme sólo escrito en un papel cuántas monedas de cada clase se comprometen a traer!
Por mi parte, estoy dispuesto a pagar también cien francos a todo lector que me envíe por escrito la lista correspondiente.

9. Un millar

¿Puede usted expresar el número 1.000 utilizando ocho cifras iguales? (Además de las cifras se permite utilizar también los signos de las operaciones.)

10. Veinticuatro

Es fácil expresar el número 24 por medio de tres ochos: $8+8+8$. ¿Podrá hacerse esto mismo utilizando no el ocho, sino otras tres cifras iguales? El problema tiene más de una solución.

11. Treinta

El número 30 es fácil expresarle con tres cincos: $5 \times 5+5$. Es más difícil hacer esto mismo con otras tres cifras iguales. Pruébelo. ¿No lograrían encontrar varias soluciones?

12. La carreta

¿Por qué el eje delantero de una carreta se desgasta más y se calienta con mayor frecuencia que el trasero?

13. La lente biconvexa

Con una lupa, que aumenta cuatro veces, se observa un ángulo de grado y medio. ¿Con qué magnitud se ve?

14. El nivel de la burbuja

Con su burbuja de aire indicadora que se desplaza a la izquierda o a la derecha de la marca índice cuando se inclina la base del nivel respecto del horizonte. Cuanto mayor sea la inclinación, tanto más se alejará la burbuja de la marca central.

La burbuja se mueve porque es más ligera que el líquido que la contiene, y por ello asciende, tratando de ocupar el punto más elevado. Pero si el tubo fuera recto, la burbuja, al sufrir él nivel la menor inclinación, se desplazaría a la parte extrema del tubo, o sea, a la parte más alta. Es fácil comprender que un nivel de este tipo seria incomodísimo para trabajar. -Por tanto, el tubo del nivel se hace en forma curva. Cuando la base del nivel está horizontal, la burbuja, al ocupar el punto más alto del tubo, se encuentra en su parte central. Si el nivel está inclinado, el punto más elevado no coincidirá con la parte central del tubo, sino que se hallará en otro punto próximo a la marca, y la burbuja se desplazará respecto de la marca índice, situándose en otro lugar del tubo, que entonces será el más alto.
Se trata de determinar cuántos milímetros se separa la burbuja de la marca si el nivel tiene una inclinación de medio grado y el radio de curvatura del tubo es de $1m$.

15. Número de caras

He aquí una pregunta que sin duda alguna parecerá muy cándida, o por el contrario, demasiado sutil. ¿Cuántas caras tiene un lápiz de seis aristas?

16. El cuarto creciente de la Luna

Se trata de dividir la figura de un cuarto creciente de la Luna en seis partes, trazando solamente dos líneas rectas.
¿Cómo hacerlo?

17. Hacer pasar una moneda de cinco pesetas

Tomen dos monedas: una de cinco pesetas y otra de diez céntimos. Dibujen en una hoja de papel un círculo exactamente igual a la circunferencia de la moneda de diez céntimos y recórtenlo cuidadosamente.
¿Podrá pasar la moneda de cinco pesetas por ese orificio?
No se trata de un truco, es un verdadero problema geométrico.

18. Hallar la altura de una torre

En la ciudad donde usted vive hay, sin duda, algunos monumentos notables, y entre ellos una torre cuya altura seguramente desconoce. Dispone usted de una postal con la fotografía de la torre. ¿En qué forma puede esta foto ayudarle a averiguar la altura de la torre?

19. Las variaciones del tiempo

Fijemos nuestra atención sólo en un elemento: si el tiempo es nublado o despejado; es decir, distinguimos los días por el hecho de si en el cielo hay nubes o no. ¿Qué piensa el lector?, En estas condiciones, ¿habrá muchas semanas con diferente combinación de días nublados y despejados?
Puede parecernos que éstas serán pocas y que pasados unos dos meses se agotarán todas las combinaciones de días nublados y despejados, repitiéndose entonces a la fuerza alguna de las combinaciones ya observadas. Más, probemos a calcular exactamente el número posible de

combinaciones que pueden darse en estas condiciones. Este es uno de los problemas que nos conducen inesperadamente a la quinta operación matemática. En fin, ¿de cuántas formas diversas pueden combinarse los días nublados y despejados en una misma semana?

20. La cerradura secreta

En cierta institución soviética fue hallada una caja fuerte de tiempos anteriores a la revolución.
Hallase la llave de la misma, mas para poder abrirla se precisaba conocer el secreto de la cerradura: ésta se componía de cinco rodillos, en torno a los cuales había un alfabeto con 36 letras; los rodillos debían combinarse de tal manera que formasen una determinada palabra desconocida. Para evitar forzar la caja decidiese probar con dichas letras todas las combinaciones posibles. En cada una de estas combinaciones se invertían tres segundos. ¿Podía abrirse la cerradura en 10 jornadas?

21. Los cuatro doses

Resolvamos este problema tratándose de doses. ¿Cómo deben disponerse cuatro doses para que adquieran su máximo valor?

22. Las aves de la orilla

En las obras de un matemático árabe del siglo XI hallamos el siguiente problema:
A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo.
¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

23. El paseo

Pase usted mañana por mi casa - dijo el viejo doctor a un conocido.

Muy agradecido. Saldré mañana a las tres. Quizá desee usted dar también un paseo. En este caso salga a la misma hora y nos encontraremos a la mitad del camino.
Usted olvida que soy ya viejo y ando tan sólo tres kilómetros por hora, en tanto que usted, jovenzuelo, cuando más despacio va, hace 4 kilómetros por hora. No sería ningún delito que me concediera alguna ventaja.

Tiene razón - contestó el joven –. Como quiera que yo recorro un kilómetro a la hora más que usted, le doy este kilómetro de ventaja, es decir, saldré de casa un cuarto de hora antes ¿le será suficiente?

Es usted muy amable –aprobó al instante el anciano. El joven cumplió lo prometido y salió de su casa a las tres menos cuarto, marchando a 4 kilómetros por hora. El doctor salió a la calle a las tres en punto y anduvo a tres kilómetros por hora. Cuando se encontraron, el anciano dio la vuelta, yendo juntos a su domicilio. Tan sólo cuando el joven regresó a su casa comprendió que debido a la ventaja concedida tuvo que caminar, no el doble, sino el cuádruplo de lo que anduvo el doctor.

¿A qué distancia de la casa del doctor estaba la de su joven conocido?

24. El artel de segadores

“Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía doble superficie que otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?”.

25. En el velódromo

Dos ciclistas corren por el velódromo a velocidades constantes. Al llevar direcciones opuestas se encuentran cada 10 segundos; cuando van en la misma dirección, un ciclista alcanza al otro cada 170 segundos, ¿Cuál es la velocidad que desarrolla cada ciclista si la longitud de la pista es de 170 m?

26. Velocidad media

Un automóvil cubrió la distancia entre dos ciudades a 60 km por hora e hizo el viaje de regreso a 40 km por hora. ¿Cuál fue la velocidad media de su recorrido?

27. Compra de una bufanda

Una bufanda cuesta 19 rublos, pero el comprador no tiene más que billetes de tres rublos; y la cajera, sólo de cinco. ¿Puede en estas condiciones abonarse el importe de la compra, y cómo hacerlo?

La misión de este problema se reduce a saber cuántos billetes de tres rublos deben entregarse a la cajera para que ella dé las vueltas con billetes de cinco, cobrando los 19 rublos. Las incógnitas del problema son dos: el número de billetes de tres rublos (x) y el número de billetes de cinco (y). Sólo puede plantearse una ecuación:

$$3x - 5y = 19$$

Aunque una ecuación con dos incógnitas tiene infinidad de soluciones, esto no quiere decir que entre ellas haya alguna en las que x e y sean números enteros y positivos (recordemos que se trata del número de billetes de banco). He aquí por qué el álgebra ha elaborado el método de solución de estas ecuaciones “indeterminadas”. El mérito de haberlas introducido en el álgebra pertenece al primer sabio europeo que cultivó esta ciencia, a Diofanto, célebre matemático de la antigüedad, por lo que estas ecuaciones se llaman con frecuencia “Ecuaciones de Diofanto”.

28. Adivinar el día de nacimiento

Una persona que multiplique la fecha del día de su nacimiento por 12, y el número del mes, por 31. Con la suma de los productos de esos datos puede calcularse la fecha del nacimiento de la persona dada. Si por ejemplo nació el 9 de febrero, se efectuarán las siguientes operaciones:

$$9 \times 12 = 108, 2 \times 31 = 62, 108 + 62 = 170$$

. ¿Cómo se deducirá el día del nacimiento conociendo esa suma?

29. Venta de pollos

Tres hermanas fueron a vender pollos al mercado. Una llevó 10 pollos; otra, 16, y la tercera, 26. Hasta el mediodía, las tres habían vendido al mismo precio una parte de los pollos. Después del mediodía, temiendo que no pudieran desprenderse de todos los pollos, bajaron el precio vendiendo los que les quedaban al mismo precio.
Las tres hermanas regresaron a casa con igual cantidad de dinero, obtenida de la venta de las aves, con 35 rublos cada una. ¿A qué precio vendieron los pollos antes y después del mediodía?

BIBLIOGRAFÍA

[1] De Castro Korgi, Rogrigo. *El universo del Latex*. Ed. Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[2] Gardner, Martin. *Matemáticas para Divertirse*. Ediciones Juan Granica,Barcelona, España.1988.

[3] Fernández Bravo, J. A. *Desarrollo del Pensamiento Matemático en educación infantil* , madrid 2005.

[4] Brian, Bolt. *Divertimentos Matemáticos*. New York. 1996

[5] http://www.definición.org/didáctica

[6] http://www.monografias.com/trabajos25/didactica-de-Matemática/didáctica-de-Matemática.shtml

[7] http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/365

[8] Miguel de Guzman. *Mirar y Ver*. Ed. Nivola libros y Ediciones. S.L. 2004

[9] G. Polya. *Como Plantear y Resolver Problemas*. Ed. Trillas. 1989