Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Arquímedes y las cuadraturas

Carlos Andrés Caycedo Narváez

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Arquímedes y las cuadraturas

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Carlos Andrés Caycedo Narváez
2007167758

Asesor:
Mg. Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Presidente del jurado

Jurado

Jurado

Neiva, Enero de 2013

AGRADECIMIENTOS

Hoy con la entrega de este trabajo termina un etapa más en mi vida, que seguramente dejara huella ya que con esta ciencia que es la matemática permaneceré el resto de mi vida. Además mi paso por la universidad deja muchos recuerdos, alegrías y ante todo agradecimientos. Primero con Dios que me dio la vida y la sabiduría para terminar esta carrera y además llenó de bendiciones mi vida y la de las personas que me rodearon en este camino.

Mil y mil gracias a mis padres que fueron un pilar fundamental para cumplir este sueño, sin ellos nada de lo que hoy estoy logrando se hubiese convertido en realidad, sus consejos y los valores recibidos desde niño lograron formar lo que hoy soy.

Todos los profesores del programa en especial a mi asesor el profesor Ricardo Cedeño Tovar por sus consejos enfocados en el mejoramiento y avance de mi trabajo de grado y de mi formación académica.

A todos mi amigos en especial aquellos pertenecientes al centro de estudios Leonhard Euler y a mi novia con los cuales compartí muchos momentos y fueron un apoyo en todo este largo paso por la Licenciatura.

Para culminar a todas las personas que de una u otra manera lograron aportar para que este proceso culminara de la mejor manera, mil y mil gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Quien comprenda a Arquímedes y a Apolonio
admirará menos los logros de matemáticos posteriores.

G. W. Leibniz

Son muchas las personas que sienten curiosidad hacia el pasado e incursionan en diversos campos del conocimiento como el arte, la geografía, el origen del universo, de la tierra o del hombre, pero pocos son los matemáticos apasionados por la historia. Pocos son los que escudriñan el origen, las etapas y los personajes que aportaron en el descubrimiento o solución de muchos problemas. Como por ejemplo la polémica por el descubrimiento del cálculo infinitesimal, en el cual se vieron involucrados Newton y Leibniz, pero sus logros no solo fueron genialidad de ellos, su logro fue una serie de resultados que se gestaron a lo largo de la historia para culminar con el descubrimiento del cálculo.

Detrás de este logro estuvieron brillantes pensadores, hombres y mujeres que con su enorme contribución lograron aportar en el desarrollo de esta magnífica ciencia dejando con esto sus nombres grabados en la eternidad y en la historia. Algunos de éstos grandes maestros fueron, Thales de Mileto, Zenón de Elea, Eudoxo, Euclides, Apolonio, Arquímedes, Kepler, Cavalieri, Fermat, Wallis y Barrow. Pero será Arquímedes a quien dedicaremos nuestro estudio más adelante.

Para muchos no es un secreto la grandeza y genialidad que poseía Arquímedes de Siracusa y muchos lo consideran el más grande de la antigüedad clásica. Arquímedes incursionó en muchos campos del conocimiento como la astronomía, la física y la mecánica, además diseño armas para proteger su ciudad de los ataques romanos.

Aunque su faceta de inventor es mucho más popular, también realizó grandes contribuciones en el campo de la matemática, fue capaz de adelantarse muchos siglos y utilizó los infinitesimales como se utilizan en el moderno cálculo integral. Sus escritos se caracterizaron por el uso del método de exahusión, con el cual permitió que sus demostraciones alcanzaran la rigurosidad exigida en la Matemática.

Arquímedes supera la geometría tradicional al plantear nuevos problemas geométricos, como por ejemplo la cuadratura del segmento parabólico, que envió a algunos matemáticos entre ellos Eratóstenes y Conón de Samos en Alejandría en dos secciones, en la primera se describe el procedimiento mecánico que utilizó para obtener un resultado intuitivo y en la segunda realiza una demostración utilizando el método de exhausión obteniendo así resultados con la rigurosidad necesaria. Además, en su libro Sobre las Espirales, calculó el área de la primera revolución de la espiral.

Entre sus obras matemáticas se pueden mencionar además: Medida del círculo en donde calcula una aproximación del número π y demuestra una equivalencia entre la cuadratura y la rectificación; De la esfera y el cilindro, Conoides y esferoides.

OBJETIVOS

Objetivos generales

- Resaltar los aportes de Arquímedes de Siracusa y matemáticos anteriores en la solución de problemas sobre cuadraturas .

Objetivos específicos

- Resaltar la influencia de los tratados de Arquímedes en la evolución de la matemática moderna.
- Destacar los intentos realizados para resolver problemas de cuadraturas antes de Arquímedes.
- Reconstruir con base en los escritos de Arquímedes las cuadraturas del círculo, parábola, elipse y espiral.

CAPÍTULO 1

LAS CUADRATURAS ANTES DE ARQUÍMEDES

1.1. Las cuadraturas en la matemática Egipcia

En los papiros del antiguo Egipto aparecen problemas relacionados con geometría los cuales hacen referencia a fórmulas de medición necesarias para evaluar áreas de figuras planas y volúmenes.

La más antigua aproximación del número π fue encontrada en los trabajos de los antiguos egipcios; y fue el resultado más preciso hasta los descubrimientos de Arquímedes.

El método usado por los antiguos egipcios para calcular el área de un círculo esta explicado en el papiro Rhind escrito por el egipcio Ahmes en el año 1650 a.C. [1] y comprado en 1858 por el egiptólogo escoses Henry Rhind

El área de un círculo se obtiene utilizando un cuadrado con un lado igual a $\frac{8}{9}$ de la longitud del diámetro. De este modo resulta una aproximación de $3,16$.

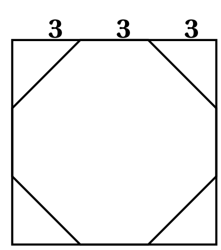

Figura 1,1

Mediante un cuadrado cuyo lado mide 9 unidades se construye un octágono de modo que el área de cada triángulo isósceles formado por las esquinas sea $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas.

El área del cuadrado será de 81 unidades cuadradas y el área del octágono sera igual al área del cuadrado menos el área de cada uno de los triángulos, es decir $81 - 18 = 63$. Por lo tanto el área del octágono es de 63 unidades lo que es casi el área de un cuadrado de lado 8.

[1] Más exactamente en el cuarto mes de la estación de inundaciones en el año 33 del reinado del Rey Apophis

Ya que el área del octágono difiere poco de la del círculo inscrito en el cuadrado, el área del círculo sera igual a

$$\pi r^2 \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{64}{81}\right)\cdot(4r^2),$$

de donde

$$\pi \approx \frac{256}{81} \approx 3,16.$$

1.2. Las cuadraturas en la matemática Griega

Desde mucho antes de que se desarrollase la Geometría teórica, la Cultura griega mostró gran interés por las figuras geométricas y especialmente por los círculos.

En el siglo V a.C., Enópides de Quíos, habría establecido el uso de la regla y compás como el instrumento idóneo en las construcciones geométricas, adjudicando así el rango de figuras elementales, de elementos básicos a la recta y al círculo. Platón daría el carácter metafísico a esta elección en el Timeo, al hacer que un Demiurgo forjase el alma del mundo con rectas y círculos como elementos fundamentales.

Muy pronto se harían famosos los problemas de cuadraturas que consisten en lo siguiente: dada una figura plana, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los Elementos de Euclides (c. 300 a.C.) la construcción debe constar de un número finito de pasos, cada uno de ellos consiste en

1. Trazar una recta que una dos puntos.
2. Trazar una semicircunferencia con centro y radio arbitrarios.
3. Intersecar dos de las figuras anteriores.

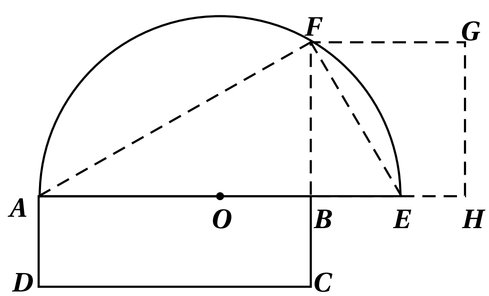

Figura 1,2

En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier tipo de polígono. Por ejemplo: Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ de la figura 1,2 se procede de la siguiente forma

- Se prolonga el lado AB y se determina sobre él un punto E tal que $BE = BC$.
- Se traza con centro en el punto medio O de AE una semicircunferencia de radio OE.
- Se traza por B una perpendicular a AE y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.

- El triángulo AFE es rectángulo por estar inscrito en un semicírculo. El ángulo recto está en F y su hipotenusa es AE.
- El segmento FB es el lado del cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$ ya que en todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa (en este caso FB) es media proporcional entre las dos partes que divide la hipotenusa, es decir, $\frac{FB}{AB} = \frac{BE}{FB}$, por lo que $FB^2 = AB \cdot BE = AB \cdot BC$.

Este tipo de construcciones surgieron después de que se planteara el problema de la cuadratura del círculo que junto con la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo son conocidos actualmente con el nombre de los tres problemas clásicos de la antigua Grecia.

El problema de la cuadratura del círculo consistió en encontrar mediante construcciones con regla no graduada y compás exclusivamente, un cuadrado de igual área.

Algunos de los Griegos anteriores a Arquímedes cuyos hallazgos aportaron a la solución de tales problemas fueron: Anaxágoras de Clazomenas, Hipócrates de Quíos, Antifón el Sofista y Brisón de Heraclea.

Anaxágoras de Clazomenas (500-428 a.C.) Se le atribuye el ser el primer griego en interesarse en el problema de la cuadratura del círculo. Encarcelado por sus ideas sobre astronomía (afirmó que el Sol no era una deidad, sino una gigantesca piedra al rojo y que la luna era una tierra deshabitada que recibía y reflejaba luz del sol, además dio suficientes explicaciones sobre fenómenos de los eclipses lunares y solares), parece que intentó resolver la cuadratura del círculo durante su cautividad. Su alumno Pericles, gracias a su influencia, obtuvo su libertad.

Hipócrates de Quíos (460-380 a.C.) Uno de los primeros problemas geométricos con cierto grado de dificultad para los matemáticos griegos fue el de cuadrar regiones curvas. Fue Hipócrates uno de los que logro cuadrar este tipo de regiones. Según los fragmentos escritos por Eudemo Rodas, Hipócrates logro cuadrar 3 tipos de lúnulas, que son regiones planas limitadas por arcos de círculos de radios diferentes con convexidad del mismo tipo, fragmentos que aún se conservan de la obra de Historia de la geometría.

A continuación mostraremos como Hipócrates logro cuadrar lúnulas sobre un cuadrado y un hexágono inscrito en una circunferencia.

Lúnulas sobre un cuadrado inscrito en una circunferencia.

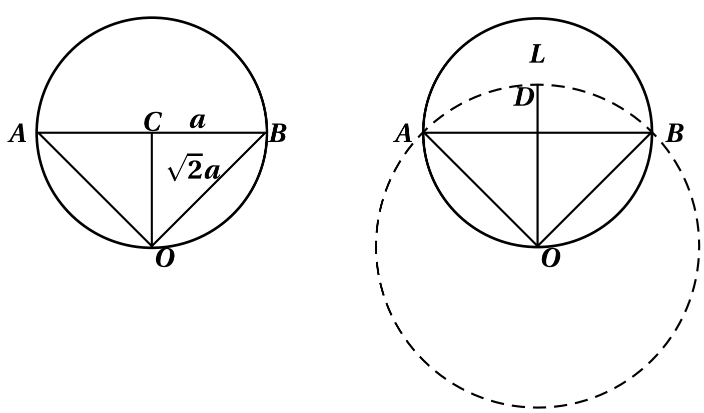

Figura 1,3

Es el caso más sencillo sobre las cuadraturas de lúnulas. Hipócrates muestra que el área de la lúnula es igual al área de un triángulo. El proceso demostrativo se reproduce con base en el gráfico de la figura 1,3.

Iniciamos construyendo un círculo de radio a, tracemos un diámetro AB y un radio CO perpendicular a él. Haciendo centro en el punto de corte del círculo con el radio y tomando como nuevo radio el que parte de este punto y llega a uno cualquiera de extremos de la diagonal, trazamos el círculo mayor.

De esta manera obtenemos la lúnula L con radios del círculo mayor $\sqrt{2}a$ y del círculo menor a.

Definamos el sector circular $OADB$ como la unión del segmento circular ADB con el triángulo AOB; y el semicírculo menor como la unión del segmento circular ADB y la lúnula L; sabiendo esto podemos realizar las siguientes observaciones:

a) El área del círculo mayor es igual a $2a^2\pi$.

b) El área del círculo menor es igual a $a^2\pi$.

c) El área del semicírculo menor es igual a $\frac{1}{2}a^2\pi$.

d) El área del sector circular $OADB$ es igual a $\frac{1}{4}$ del área del círculo mayor es decir $\frac{1}{2}a^2\pi$.

Por c) y d) podemos decir que el área del sector circular $OADB$ es igual al área del semicírculo menor por lo tanto

$$\text{área del Segmento circular } ADB + \text{área del } \triangle\ AOB = \text{área del Segmento circular } ADB + \text{área de la Lúnula } L$$

$$\text{área del } \triangle\ AOB = \text{área de la Lúnula } L$$

Como había que demostrar.

El contenido superficial de la lúnula ha podido representarse mediante el contenido superficial de un triángulo. Por eso, escribe Simplicio *Ahora está demostrado que la lúnula es igual al triángulo.* Recordando que se ha podido realizar con solo regla no graduada y compás.

Lúnulas sobre un hexágono inscrito en una circunferencia.

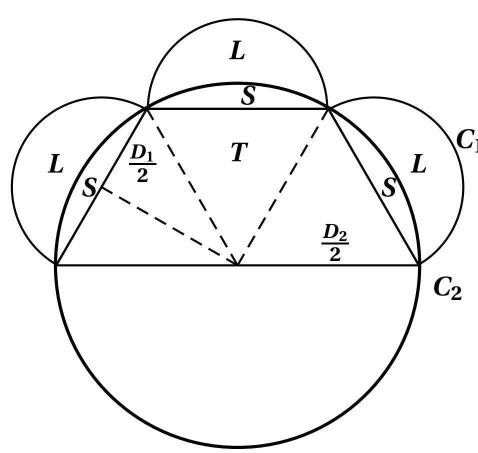

Figura 1,4

Hipócrates inscribe un hexágono regular en una circunferencia, el lado del hexágono es entonces la mitad del diámetro del círculo en el cual se inscribe, y se construyen los semicírculos sobre los lados del hexágono como se puede ver en la figura 1,4.

Definimos como C_1 los círculos cuyos diámetros son los lados del hexágono; C_2 como el círculo en el que está inscrito el hexágono; D_1 al lado del hexágono; D_2 al diámetro del círculo en el cual se inscribe, se puede observar que $D_2 = 2D_1$; L a la lúnula formada sobre los lados del hexágono; S al sector circular y a T al semihexágono regular inscrito.

Luego, podemos observar que $\frac{C_2}{2} = 3S + T$ para el semicírculo en el cual está inscrito el hexágono y $\frac{C_1}{2} = L + S$ para el semicírculo sobre el lado del hexágono. Queremos mostrar que $C_1 = 2(T - 3L)$.

Para realizar su cuadratura Hipócrates utiliza el lema siguiente: Segmentos semejantes de círculos están entre si en la misma relación que los cuadrados sobre sus bases. En el lenguaje actual

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(D_1)^2}{(D_2)^2}$$

Ahora, sabemos que $\frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{2}$ y por el lema anterior tenemos que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{(D_1)^2}{(D_2)^2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

lo cual implica que

$$4C_1 = C_2$$

Pero $\frac{C_2}{2} = \frac{4C_1}{2} = 2C_1 = 4(L+S)$, de aquí $3S + T = 4L + 4S$, de donde $T = 4L + S$, o equivalentemente $T = 3L + L + S$, y de esto $T = 3L + \frac{C_1}{2}$, por lo tanto $\frac{C_1}{2} = T - 3L$, donde finalmente $C_1 = 2(T - 3L)$.

El círculo construido sobre el lado del hexágono regular inscrito aparece representado por las lúnulas sobre el hexágono y por el semihexágono, lo cual no quiere decir que el círculo sea cuadrable. Aunque se logró cuadrar lúnulas sobre lados de un cuadrado no podemos afirmar que toda lúnula es cuadrable. El problema de la cuadratura del círculo requiere que su solución se obtenga haciendo uso de la regla no graduada y el compás, y las lúnulas construidas sobre los lados de un hexágono regular inscritos no son cuadrables con regla no graduada y compás, consecuentemente el círculo no es cuadrable con regla y compás.

Antifón el Sofista. Según Simplicio el trabajo sobre cuadratura de Antifón resulta de inscribir polígonos regulares en un círculo, como por ejemplo el cuadrado. Sobre cada lado del cuadrado inscrito como base se construyen triángulos isósceles de tal manera que un vértice esté sobre el arco del círculo subtendido por el lado del cuadrado, obteniendo así un octágono regular inscrito; como se puede ver en la Figura 1,5. Este procedimiento es iterable, de donde Antifón concluye que el área del círculo se agotara, y por consiguiente se tendría inscrito un polígono regular de manera tal que los lados del polígono debido a su pequeñez, coincidirán con la circunferencia del círculo y se podría construir un cuadrado con área igual al área de un círculo. Antifón no solo toma al cuadrado como polígono regular inscrito base, sino que además de esté también utiliza a un triángulo equilátero.

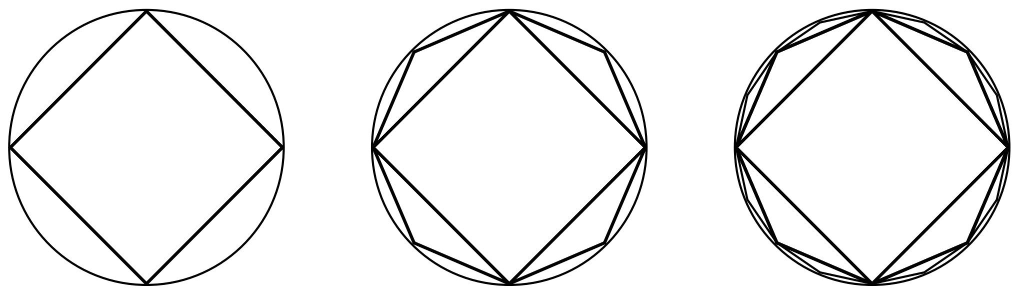

Figura 1,5

Antifón imagina la situación en la que una recta por infinitésima que sea, se puede acoplar a la circunferencia de un círculo. Y como consecuencia de este pensamiento Alejandro de Afrodisia descalifica la propuesta de Antifón como un paralogismo. Eudemo expresa que el principio de la divisibilidad indefinida se pasa por alto. Si el área del círculo fuese divisible indefinidamente el proceso de Antifón nunca lograra hacer coincidir los lados del polígono regular inscrito con la circunferencia del círculo.

Brisón de Heraclea. Muchos autores identifican la obra de Brisón con la de Antifón por la forma en la que expresan la proximidad de polígonos inscritos a la circunferencia del círculo. Brisón expone su propuesta para la resolución del problema de la cuadratura de la siguiente manera: *Si el cuadrado circunscrito tiende al cuadrado inscrito, el círculo por cuadrar tiende al cuadrado intermedio.*

No se conocen indicios de la construcción del cuadrado o polígono regular intermedio. Brisón argumenta que el círculo por cuadrar es menor que el cuadrado circunscrito y mayor que el cuadrado inscrito, el cuadrado intermedio es menor que el cuadrado circunscrito y mayor que el inscrito; termina diciendo que cosas que son mayores y menores que las mismas cosas respectivamente son iguales

Brisón al iterar el procedimiento repetidamente obtendría un polígono inscrito y otro circunscrito, tan poco diferentes en área que si se pudiera describir un polígono intermedio en área entre ellos, el círculo por cuadrar tendría que ser igual a dicho polígono intermedio.

Eudoxo de Cnido. Es uno de los matemáticos más importantes de la Academia platónica, que al introducir la idea de *tan pequeño como se quiera*, antecedente de nuestro proceso de *paso al límite*, encuentra una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres pasos:

1. Una definición: igualdad de razones, Euclides, Definición V.5.
2. Un axioma: axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad, Euclides, Definición V.4.
3. Un método: el Método de Exhaución, Euclides, Proposición X.1.

Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones de la siguiente forma:

Definición V.5 de Los Elementos de Euclides: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

Es decir: Si a,b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c,d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b) Eudoxo define que las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene: $na > mb$ y $nc > md$ ó $na = mb$ y $nc = md$, ó $na < mb$ y $nc < md$.

Dado que el problema de la época era intentar hallar el área de figuras no rectilíneas, entre ellas el círculo, se buscaba la forma de encontrar dicho tipo de áreas; al respecto Eudoxo, propone que lo mejor que se puede hacer (para el caso del círculo), es inscribir en la circunferencia correspondiente figuras rectilíneas que tuviesen cada vez un mayor número de lados, y proceder a calcular sus áreas indefinidamente. De este modo, la superficie de los polígonos inscritos se aproximaran cada vez más a la superficie de la figura curvilínea.

Puesto que el polígono inscrito podía aproximarse al círculo sin llegar nunca a cubrirlo completamente. El axioma que permitiría a Eudoxo solucionar este problema, es el expuesto, como la primera proposición del libro X de los Elementos de Euclides, la cual éste demuestra:

Proposición X.1 de Los Elementos de Euclides. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se quita una magnitud mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Este resultado al que llamaremos como el principio de Eudoxo, se puede expresar de la siguiente manera. Consideremos dos magnitudes M_0 y ϵ, y $\{M_1, M_2, M_3 \ldots\}$ una secuencia tal $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$, $M_3 < \frac{1}{2}M_2$ etc. Entonces queremos concluir que $M_n < \epsilon$ para algún n. Para ver que esto es así, elijamos un número entero N tal que

$$(N+1)\epsilon > M_0.$$

Entonces ϵ es a lo sumo un medio de $(N+1)\epsilon$ por lo que se deduce que

$$N\epsilon \geq \frac{1}{2}M_0 > M_1.$$

De manera similar, ϵ es a lo sumo un medio de $N\epsilon$ de manera que

$$(N+1)\epsilon \geq \frac{1}{2}M_1 > M_2.$$

Procediendo sucesivamente, se llega en N pasos a la desigualdad deseada: $M_n < \epsilon$. Este enunciado de la Proposición X.1, abre las puertas al Método de agotamiento, con el que Eudoxo demuestra rigurosamente los teoremas sobre el círculo, así como sobre la pirámide y el cono, que habían sido enunciados por Hipócrates y Demócrito, respectivamente, y que aparecerán en Los Elementos de Euclides en las Proposiciones XII.2, XII.7, XII.10.

Podemos ver que, inscribiendo el cuadrado de área máxima en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo, ya que el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito, el cual es mayor que el círculo.

Ahora bien, si sobre cada lado del cuadrado se construye un triángulo isósceles bisecando el arco cuya cuerda es el lado del cuadrado, obtenemos un octágono regular inscrito en el círculo. Se puede ver que la diferencia entre cada segmento circular (determinado por el lado del cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles descrito anteriormente que determina dos lados del octágono, es menor que la mitad del segmento circular. La operación de disección se puede reiterar de forma que se obtiene en cada proceso un polígono regular inscrito en el círculo y con doble número de lados que el precedente. Como se puede ver en la Figura 1,6.

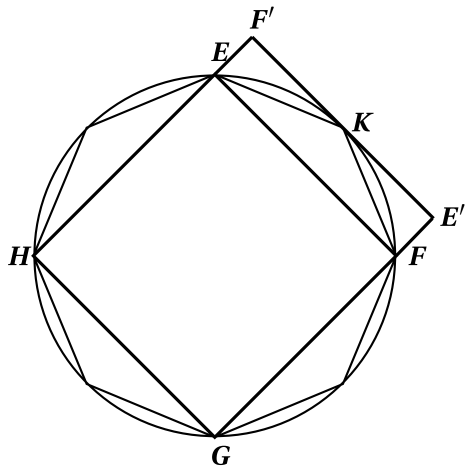

Figura 1,6

Continuando con este proceso de restar reiteradamente a una cantidad otra cantidad superior a su mitad (primero, al círculo se le resta el cuadrado de área máxima inscrito, en segundo lugar, a los segmentos circulares resultantes se les restan los triángulos isósceles que determinan el octágono, y así sucesivamente); aplicando el Principio de Eudoxo, alcanzaremos un polígono inscrito, cuya diferencia con el círculo es tan pequeña como se quiera.

De esta manera, se obtiene el Lema de agotamiento del círculo, que simbólicamente se expresa en la forma:

Dado un circulo C y un número $\epsilon > 0$, existen un polígono regular P inscrito en C tal que

$$a(C) - a(P) < \epsilon. \tag{1.1}$$

Demostración. Partimos de un cuadrado $P_0 = EFGH$ inscrito en un círculo C y escribimos $M_0 = a(C) - a(P_0)$. Duplicando el número de lados, obtenemos un octógono regular P_1 inscrito en C.

Al continuar el proceso de duplicación se obtiene una sucesión de polígonos inscritos en el círculo $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, donde el polígono P_n tiene 2^{n+2} lados. Escribiendo

$$M_n = a(C) - a(P_n),$$

queremos demostrar que

$$M_n - M_{n+1} > \frac{1}{2} M_n. \tag{1.2}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} M_0 - M_1 &= [a(C) - a(P_0)] - [a(C) - a(P_1)] \\ &= a(P_1) - a(P_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4a(\triangle\, EFK)\\
&= 2a(\square EFE'F')\\
&> 2a(\widehat{EKF})\\
&= \frac{1}{2}\cdot 4a(\widehat{EKF})\\
&= \frac{1}{2}\left[a(C)-a(P_0)\right], \text{de donde}\\
M_0 - M_1 &> \frac{1}{2}M_0,
\end{aligned}
$$

donde denotamos por $\widehat{EKF}$ el segmento circular limitado por el arco circular EF y la cuerda EF. En el caso general obtenemos

$$
\begin{aligned}
M_n - M_{n+1} &= a(P_{n+1}) - a(P_n)\\
&> \frac{1}{2}\left[a(C)-a(P_n)\right] = \frac{1}{2}M_n,
\end{aligned}
$$

donde $a(C)-a(P_n)$ es la suma de las áreas de los 2^{n+1} segmentos circulares cortados por los bordes de P_n. ■

El Método de agotamiento precede la obtención de los resultados euclídeos del Libro XII sobre círculos, esferas, pirámides, cilindros y conos. Arquímedes atribuyó la obtención de muchos de estos resultados a Demócrito y las demostraciones rigurosas de los correspondientes teoremas a Eudoxo, de quien Euclides adaptaría el material para la redacción del Libro XII de Los Elementos.

Arquímedes aplicaría de forma impecable el Método de agotamiento, con sagaz pericia, en gran parte de sus obras (Sobre la Cuadratura de la Parábola, Sobre la Esfera y el Cilindro, Sobre la Medida del Círculo, Sobre las Espirales, Sobre Conoides y Esferoides, ...), para demostrar sus famosas cuadraturas que había descubierto mediante su original y heurístico método mecánico.

Según P. Tannery "Se debe considerar a Eudoxo como el verdadero artífice de los principios que durante toda la antigüedad han tenido el papel que juega en la actualidad el recurso de los límites. Eudoxo ha mostrado la fecundidad de las aplicaciones de estos principios y ha sido el auténtico antecesor de Arquímedes en el cálculo de cuadraturas y cubaturas ... Despojada de su indumentaria geométrica la teoría de Eudoxo mantiene sin ninguna desventaja la comparación con las exposiciones modernas, a menudo tan defectuosas".[2]

El Lema de agotamiento del círculo proporciona la base para una prueba rigurosa del teorema sobre áreas de circunferencias (Euclides XII.2). en el que se relacionan las áreas de dos círculos con los cuadrados de sus radios.

Si C_1 y C_2 son círculos con radios r_1 y r_2, entonces

$$
\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \tag{1.3}
$$

Demostración. Si $A_1 = a(C_1)$, $A_2 = a(C_2)$, se tiene que

$$
\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}, \text{ o, } \frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}, \text{ o, } \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}
$$

[2] La Geometrie grecque. Gauthier-Villars, 1887, pp.95, 96

La prueba es una doble *Reductio ad absurdum*, característico de la geometría Griega, en la que se prueba que la suposición de cualquiera de las desigualdades conduce a una contradicción.

Supongamos primero que $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ lo cual equivale a $A_2 > \frac{A_1 r_2^2}{r_1^2} = \mathbf{S}$, y sea $\epsilon = A_2 - \mathbf{S} > 0$. Entonces por el Lema de agotamiento del círculo existe un polígono P_2 inscrito en el círculo C_2 de tal manera que

$$A_2 - a(P_2) < \epsilon = A_2 - \mathbf{S},$$

por lo tanto, $a(P_2) > \mathbf{S}$. Sea P_1 el polígono regular semejante a P_2, inscrito en el círculo C_1. Según la Proposición XII.1 de Los Elementos, se tiene:

$$\frac{a(P_1)}{a(P_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{A_1}{\mathbf{S}},$$

donde se deduce que

$$\frac{\mathbf{S}}{a(P_2)} = \frac{A_1}{a(P_1)} = \frac{a(C_1)}{a(P_1)} > 1,$$

Por lo tanto, $\mathbf{S} > a(P_2)$, lo cual es contradictorio con el resultado ya obtenido $a(P_2) > \mathbf{S}$. Como esta contradicción se obtiene de suponer que $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$ concluimos que este supuesto es falso.

Razonando de igual manera demostramos que $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ también es falso.

De donde concluimos que $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. ■

Si volvemos a escribir (1.3) de la forma

$$\frac{a(C_1)}{r_1^2} = \frac{a(C_2)}{r_2^2} \tag{1.4}$$

Y denotamos por π el valor común de estas dos razones, entonces obtenemos la fórmula familiar $A = \pi r^2$ para el área del círculo. Sin embargo los Griegos no podían hacer esto porque para ellos (1,4) fue una proporción entre las áreas, en lugar de una igualdad numérica. Por lo tanto el número π no aparece en la concepción de los matemáticos Griegos.

CAPÍTULO 2

LA MEDIDA DEL CÍRCULO

2.1. Arquímedes

Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero

Voltaire

Arquímedes nació en la ciudad de Siracusa en la isla de Sicilia en el año 287 a.C., se cree que era el hijo de un astrónomo llamado Fidias. Aparte de esto, muy poco se sabe sobre la vida temprana de Arquímedes o de su familia. Algunos historiadores sostienen que Arquímedes perteneció a la nobleza de Siracusa, lo que le permitió dedicarse al estudio.

En su juventud Arquímedes viajó a Egipto para estudiar en Alejandría, allí conoció a Eratóstenes de Cirene, director del Museo de Alejandría. Con él intercambió ideas y opiniones científicas. De su correspondencia con Eratóstenes se conoce El Método.

Fue en Egipto donde hizo su primer gran invento, el tornillo de Arquímedes, una especie de máquina que servía para elevar las aguas y regar ciertas regiones del Nilo, donde no llegaba el agua durante las inundaciones.

Después volvió a Siracusa, se cuenta que Arquímedes dedicaba todo su tiempo a investigar, y que le molestaba perder tiempo en tareas tales como bañarse. Una anécdota muy conocida de él, que relata el arquitecto romano Vitruvio, es la famosa "Eureka" (que en griego quiere decir, " lo encontré "). Cuenta la leyenda que el rey Herón II de Siracusa le había dado a un orfebre una cierta cantidad de oro para que le hiciera una corona de oro puro. Cuando se la entregaron, el rey tuvo la sensación de que no era nada más oro lo que había sido usado. Le planteó la duda a Arquímedes y éste se dio a la tarea de resolver el misterio … y llegó la hora del baño. Esa vez lo aceptó sin chistar, pues estaba sumido en el problema de la famosa corona … y cuando se metió a la tina que estaba llena hasta el tope, se dio cuenta de que la cantidad de agua derramada, estaba relacionada a la cantidad de su cuerpo sumergida en el agua. Con la cara iluminada por la alegría, salió de la tina y desnudo, se fue por las calles de la ciudad gritando "Eureka! Eureka!".

Arquímedes se consideraba un geómetra y es en las matemáticas donde más demostraciones y teoremas ha dejado. Pero también era un experto en aplicar principios físicos y matemáticos para la construcción de sus inventos mecánicos. Como por ejemplo palancas, poleas, catapultas, espejos ardientes, … , ect.

Arquímedes murió en el año 212 a. C., cuando Siracusa fue tomada por los romanos al mando del general Marcelo, él estaba resolviendo un problema en el suelo, cuando un soldado romano se acercó a él y le ordenó levantarse e irle a presentar sus respetos al general romano Marcelo. Arquímedes, muy molesto porque el soldado había pisado su dibujo, le gritó "!No arruines mis esferas!" … la reacción fue inmediata: el soldado lo mató. Marcelo, que había encargado explícitamente que no mataran a Arquímedes pues sabía de su fama de gran sabio, encargó que se le hiciera un funeral de honor y esculpió en su lápida un grabado con una imagen de una esfera dentro de un cilindro, uno de sus tratados geométricos.

Es probable que todas las anécdotas que se cuentan sobre él no sean más que meras recreaciones, pero su fama no sobrevive por las anécdotas que de él se cuentan sino por su importante desarrollo de la ciencia.

2.1.1. Obras de Arquímedes

Las principales obras de Arquímedes son las siguientes:

- Primer libro de los equilibrios.
- Cuadratura de la parábola. Trata de la cuadratura de cualquier segmento de parábola, problema para el que ofrece una solución mecánica y otra geométrica.
- Segundo libro de los equilibrios.
- Sobre la esfera y el cilindro.
- Sobre los espirales.
- Sobre conoides y los esferoides.
- Medida del círculo, breve tratado que esta compuesto por tres teoremas; el primero demuestra la equivalencia de la cuadratura y la rectificación; el segundo prueba que el círculo es los $\frac{11}{14}$ del cuadrado circunscrito si la longitud de la circunferencia es 3 veces el diámetro mas un séptimo; y por último afirma que el perímetro del círculo es menor que los $3\frac{1}{7}$ del diámetro y mayor que $3\frac{10}{71}$ de este diámetro.
- Arenario.
- Los cuerpos flotantes
- Tratado sobre el método

2.2. La medida del círculo

2.2.1. Teorema 1

El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la longitud de la circunferencia del propio círculo.

El conocimiento (en un cierto nivel) que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio, $A = \pi_1 r^2$ para alguna constante π_1, se remonta a muchos siglos en el tiempo. Similarmente, la proporcionalidad entre la circunferencia de un círculo y el diámetro, $C = \pi_2 d$ para alguna constante π_2, es muy antigua. Sin embargo, no está claro cuando se comprendió por primera vez que las dos constantes de proporcionalidad fueran iguales $\pi_1 = \pi_2 = \pi$.

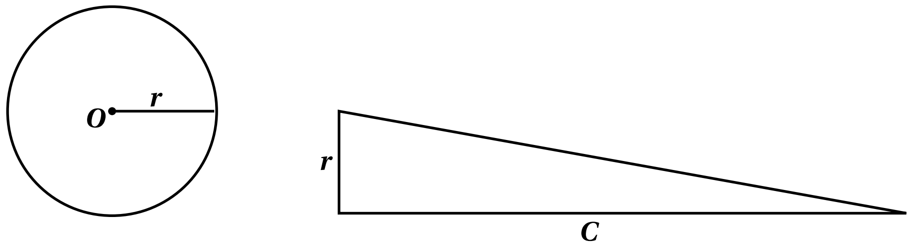

Figura 2,1

Arquímedes proporcionó la primera prueba rigurosa de este hecho, al mostrar que el área de un círculo es igual a la de un triángulo con base igual a la longitud de su circunferencia y altura igual a su radio. (Figura 2,1)

$$A = \frac{1}{2} rC. \tag{2.1}$$

La fórmula (2,1) fue sin duda conocida antes de Arquímedes, y se deduce probablemente en relación con el círculo como la unión de infinidad de numerosos triángulos isósceles con el centro como vértice común, y con su base formando un polígono regular inscrito con un número infinito de lados que coincide con un pequeño arco del círculo. Puesto que la altura de cada triángulo prácticamente será igual al radio del círculo, y la suma de sus bases casi será igual a su circunferencia.

Esta derivación heurística suple la motivación de la prueba rigurosa de Arquímedes. En ésta Arquímedes extiende el método de agotamiento para que sea terminado por el método de comprensión. En lugar de tratar con solo polígonos inscritos, emplea polígonos inscritos y circunscritos. El área del círculo está comprimida entre las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos que cercan aproximadamente el círculo (Figura 2,2).

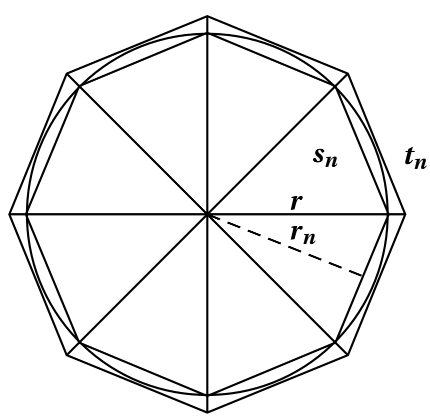

Figura 2,2

Demostración. La prueba de (2,1) es una típica argumentación *reductio ad absurdum.* Asumiendo que $A \neq \frac{1}{2} rC$ entonces debemos ver que

$$A > \frac{1}{2} rC, \text{ o, } A < \frac{1}{2} rC$$

Entonces tomamos primero $A > \frac{1}{2}rC$ y sea $\epsilon = A - \frac{1}{2}rC$ y elijamos un polígono regular P de n-lados inscrito en un círculo tal que

$$a(P) > A - \epsilon = \frac{1}{2}rC.$$

Si s_n es la longitud del lado de P, y r_n es la longitud de la perpendicular desde el centro hasta el lado de P, entonces

$$r_n < r, \text{ y, } ns_n < C,$$

ya que P es la unión de los n triángulos isósceles con base s_n y altura r_n, se deduce que

$$a(P) = n \cdot \frac{1}{2}r_n s_n = \frac{1}{2}r_n(ns_n) < \frac{1}{2}rC.$$

Pero esto es una contradicción, por lo que A no es mayor que $\frac{1}{2}rC$.

Por último asumimos que $A < \frac{1}{2}rC$ sea $\epsilon = \frac{1}{2}rC - A$ y elija un polígono regular Q de n-lados circunscrito en un círculo tal que

$$a(Q) > A + \epsilon = \frac{1}{2}rC$$

Para el propósito de cálculos posteriores, sea t_n la mitad de la longitud del lado de Q. Entonces

$$a(Q) = n \cdot \frac{1}{2}r(2t_n) = \frac{1}{2}r(2nt_n) > \frac{1}{2}rC,$$

porque el perímetro $2nt_n$ de Q es mayor que C. Esta contradicción completa la prueba de (2,1). ■

2.2.2. Teorema 3

La razón entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que $3 + \frac{1}{7}$, pero mayor que $3 + \frac{10}{71}$. Aquí vamos a obtener una aproximación para π, es decir,

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71} \tag{2.2}$$

Arquímedes comienza con hexágonos regulares inscritos y circunscritos sobre el círculo de radio 1. Sucesivamente doblando el número de lados obtuvo pares de polígonos regulares inscritos y circunscritos con 6, 12, 24, 48 y 96 lados y calculó sus perímetros para encontrar la longitud de la circunferencia por defecto y por exceso.

Los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos están expresados de la forma $n \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ y $n \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ respectivamente donde n es el número de lados del polígono. Entonces

$$n \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \cdot tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Para un polígono regular con $n = 6$, se tiene

$$6 \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) < \pi < 6 \cdot tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} = 3,46$$

Para un polígono regular con $n = 12$ se tiene

$$12 \cdot sen\left(\frac{\pi}{12}\right) < \pi < 12 \cdot tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$3,1058 < \pi < 3,2153$$

Para un polígono regular con $n = 24$ se tiene

$$24 \cdot sen\left(\frac{\pi}{24}\right) < \pi < 24 \cdot tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$3,1326 < \pi < 3,1596$$

Para un polígono regular con $n = 48$ se tiene

$$48 \cdot sen\left(\frac{\pi}{48}\right) < \pi < 48 \cdot tan\left(\frac{\pi}{48}\right)$$

$$3,1326 < \pi < 3,146$$

Por último para un polígono regular con $n = 96$ se tiene

$$96 \cdot sen\left(\frac{\pi}{96}\right) < \pi < 96 \cdot tan\left(\frac{\pi}{96}\right)$$

$$3,141 < \pi < 3,1426$$

Por lo tanto Arquímedes había encontrado que el número π es aproximadamente $3,14$.

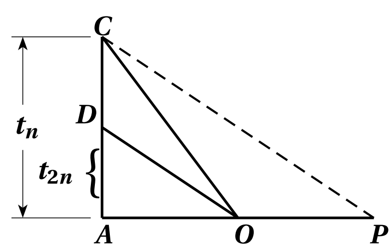

Figura 2,3

Ahora consideremos en primer lugar los polígonos circunscritos. Si t_n denota la mitad de la longitud del lado de un polígono regular circunscrito con n lados, entonces la relación entre t_n y t_{2n} se indica en la Figura 2,3, donde O es el centro del circulo, y OD divide el ángulo AOD en dos. Si CP es paralelo a OD, se ve fácilmente que $OP = CO$. Puesto que los triángulos ADO y ACP son semejantes. Se tiene que

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{AO + OP} = \frac{AC}{AO + OC},$$

o

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}} \tag{2.3}$$

Ahora considere s_n el lado de un polígono regular inscrito con n lados, la relación entre s_n y s_{2n} está indicada en la Figura 2,4, donde $s_n = BC$, $s_{2n} = BD$ y AD divide en dos el ángulo BAC, donde los triángulos ABD, BPD y APC son semejantes. Por lo tanto

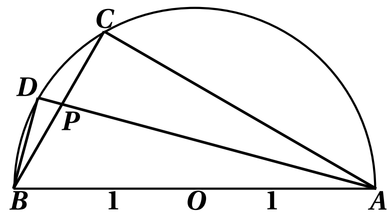

Figura 2,4

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{BD} \text{ y } \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{BD},$$

así

$$\frac{AB + AC}{AD} = \frac{BP + PC}{BD} = \frac{BC}{BD},$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\frac{s_n}{s_{2n}} &= \frac{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}{\sqrt{4 - s_n^2}} \\
\left(4 - s_{2n}^2\right) s_n^2 &= s_{2n}^2 \left(4 + 4\sqrt{4 - s_n^2} + 4 - s_n^2\right) \\
4s_n^2 - s_{2n}^2 s_n^2 &= 8s_{2n}^2 + 4s_{2n}^2\sqrt{4 - s_n^2} - s_{2n}^2 s_n^2 \\
s_n^2 &= 2s_{2n}^2 + s_{2n}^2\sqrt{4 - s_n^2} \\
s_n^2 &= s_{2n}^2\left(2 + \sqrt{4 - s_n^2}\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}. \tag{2.4}$$

En general se cree que la medida existente de un círculo es sólo un fragmento del tratamiento original de Arquímedes y más completa del círculo. En un reciente artículo W. R. Knorr argumenta persuasivamente que, para obtener una aproximación más precisa de π, Arquímedes empezó con decágonos inscritos y circunscritos (polígonos regulares de 10 lados) y sucesivamente duplicado caras seis veces para obtener polígonos regulares inscritos y circunscritos con 640 lados.

Veamos este hecho en un decágono regular inscrito y otro circunscrito a un círculo unitario, sabiendo que la medida de sus lados son $s_{10} = 0{,}61803$ y $t_{10} = 0{,}3249196$ respectivamente. Apliquemos las ecuaciones (2,3) y (2,4) para calcular s_{640} y t_{640} llevando a 8 decimales y verifiquemos que $\pi = 3{,}1416$, redondeado a 4 decimales.

Primero empezamos el cálculo de s_{640}

$$\begin{aligned}
s_{20}^2 = \frac{s_{10}^2}{2 + \sqrt{4 - s_{10}^2}} &= \frac{(0{,}61803)^2}{2 + \sqrt{4 - (0{,}61803)^2}} \\
&\approx \frac{0{,}38196108}{3{,}902114329}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\approx 0{,}097885671\\
s_{40}^2 = \frac{s_{20}^2}{2+\sqrt{4-s_{20}^2}} &= \frac{(0{,}097885671)^2}{2+\sqrt{4-(0{,}097885671)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}097885671}{3{,}97537709}\\
&\approx 0{,}02462299\\
s_{80}^2 = \frac{s_{40}^2}{2+\sqrt{4-s_{40}^2}} &= \frac{(0{,}02462299)^2}{2+\sqrt{4-(0{,}02462299)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}02462299}{3{,}99383475}\\
&\approx 0{,}00616523\\
s_{160}^2 = \frac{s_{80}^2}{2+\sqrt{4-s_{80}^2}} &= \frac{(0{,}00616523)^2}{2+\sqrt{4-(0{,}00616523)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}00616523}{3{,}998458098}\\
&\approx 0{,}001541902\\
s_{320}^2 = \frac{s_{160}^2}{2+\sqrt{4-s_{160}^2}} &= \frac{(0{,}001541902)^2}{2+\sqrt{4-(0{,}001541902)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}001541902}{3{,}999614487}\\
&\approx 0{,}000385512\\
s_{640}^2 = \frac{s_{320}^2}{2+\sqrt{4-s_{320}^2}} &= \frac{(0{,}000385512)^2}{2+\sqrt{4-(0{,}000385512)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}000385512}{3{,}99990359}\\
s_{640}^2 &\approx 0{,}000096380\\
s_{640} &\approx \sqrt{0{,}000096380}\\
s_{640} &\approx 0{,}009817348
\end{aligned}
$$

Por último el cálculo de t_{640}

$$
\begin{aligned}
t_{20} = \frac{t_{10}}{1+\sqrt{1+t_{10}^2}} &= \frac{0{,}3249196}{1+\sqrt{1+(0{,}3249196)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}3249196}{2{,}05146222}\\
&\approx 0{,}158384440\\
t_{40} = \frac{t_{20}}{1+\sqrt{1+t_{20}^2}} &= \frac{0{,}158384440}{1+\sqrt{1+(0{,}158384440)^2}}\\
&\approx \frac{0{,}158384440}{2{,}0124651}\\
&\approx 0{,}078701707
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_{80} = \frac{t_{40}}{1+\sqrt{1+t_{40}^2}} &= \frac{0{,}078701707}{1+\sqrt{1+(0{,}078701707)^2}} \\
&\approx \frac{0{,}078701707}{2{,}003092199} \\
&\approx 0{,}039290107 \\
t_{160} = \frac{t_{80}}{1+\sqrt{1+t_{80}^2}} &= \frac{0{,}039290107}{1+\sqrt{1+(0{,}039290107)^2}} \\
&\approx \frac{0{,}039290107}{2{,}000771559} \\
&\approx 0{,}019637478 \\
t_{320} = \frac{t_{160}}{1+\sqrt{1+t_{160}^2}} &= \frac{0{,}019637478}{1+\sqrt{1+(0{,}019637478)^2}} \\
&\approx \frac{0{,}019637478}{2{,}000192797} \\
&\approx 0{,}009817793 \\
t_{640} = \frac{t_{320}}{1+\sqrt{1+t_{320}^2}} &= \frac{0{,}009817793}{1+\sqrt{1+(0{,}009817793)^2}} \\
&\approx \frac{0{,}009817793}{2{,}000048193} \\
&\approx 0{,}004908778
\end{aligned}
$$

Teniendo $t_{640} = 0{,}004908778$ y $s_{640} = 0{,}009817348$ entonces haciendo el redondeo a 4 decimales obtenemos $320s_{640} < \pi < 640t_{640}$ y por lo tanto $3{,}1416 < \pi < 3{,}1416$ con lo cual concluimos que $\pi \approx 3{,}1416$.

CAPÍTULO 3

CUADRATURA DE LA PARÁBOLA

Un segmento de una curva convexa es una región limitada por una línea recta y una porción de la curva dada. Figura (3,1). En el prefacio de su libro la cuadratura de la parábola Arquímedes señala que anteriores matemáticos habían intentado con éxito encontrar el área de un segmento de un círculo o hipérbola, pero, que al parecer nadie había intentado con anterioridad la cuadratura de un segmento de parábola (precisamente el que puede llevarse a cabo por el método de exhausión).

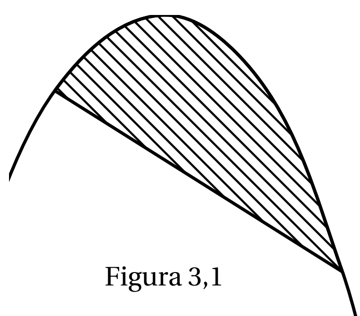

Figura 3,1

La parábola fue definida originalmente por los Griegos como una sección cónica. Es decir, dado un cono circular (doble) de eje vertical, una parábola es la curva de intersección del cono con un plano paralelo al elemento generador del cono. (Figura 3,2) Otra posición del plano produce elipses e hipérbolas. Si el plano es horizontal entonces la sección es un círculo. Una parábola es simétrica con respecto a una línea recta del plano que la contenga. Esta recta es llamada el eje de la parábola.

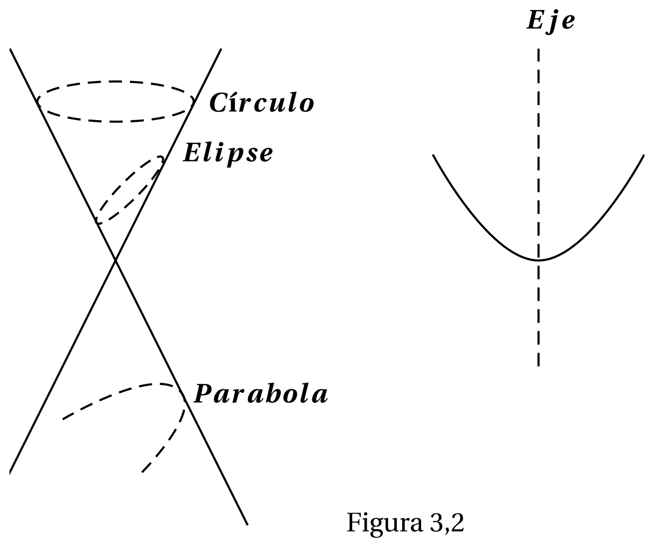

Figura 3,2

Dado el segmento parabólico con base AB (Figura 3,3), el punto P del segmento que esta más lejano a la base es llamado el vértice del segmento, y la distancia (perpendicular) desde P hasta AB es la altura. Arquímedes demuestra que el área del segmento es cuatro tercios del triángulo inscrito APB.

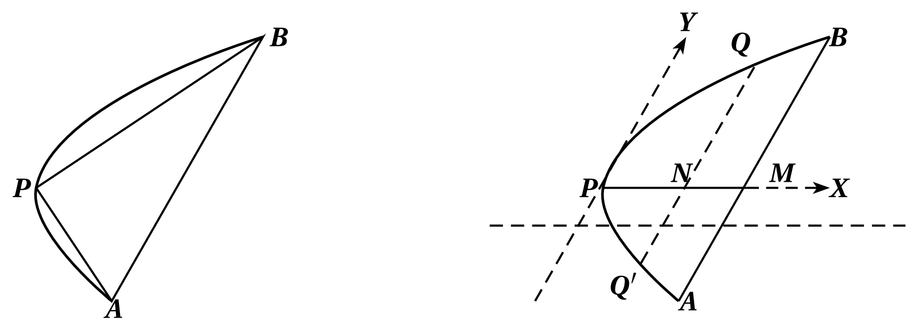

Figura 3,3

En el tiempo de Arquímedes, los siguientes hechos eran conocidos en relación a un segmento parabólico arbitrario APB.

a. La recta tangente a P es paralela a la base AB.

b. La longitud de la recta que atraviesa el punto P paralela al eje que intersecta la base AB en el punto medio M.

c. Cada corte QQ' paralelo a la base AB es bisectado por el diámetro PM

d. Con la notación en la figura (3,3)

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2}. \tag{3.1}$$

Esto es, en la figura oblicua del sistema de coordenadas (x, y), la ecuación de la parábola es de la forma $x = ky^2$. Arquímedes cita estos hechos sin pruebas, refiriéndose a los primeros tratados de las cónicas de Euclides y Aristóteles.

Este es un paralelogramo natural circunscrito sobre un segmento parabólico APB, teniendo el lado AB, y con base AA' y superficie en BB' paralela al diámetro PM, donde el área del triángulo inscrito APB es la mitad del paralelogramo circunscrito, se sigue que el área de este triángulo es más de la mitad del área del segmento parabólico APB.

Ahora considerando los dos pequeños segmentos parabólicos con bases PB y AP; sean los vértices P_1 y P_2 respectivamente (Figura 3,4). De la misma manera se puede deducir que las áreas de los triángulos inscritos PP_1B y PP_2B son más de la mitad de las áreas de estos dos segmentos.

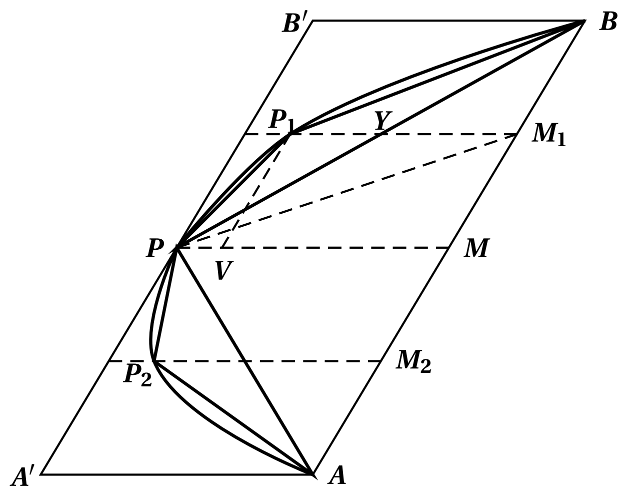

Figura 3,4

Hemos empezado a agotar el área del segmento parabólico APB con polígonos inscritos. El triángulo APB es el primer polígono inscrito, y AP_2PP_1B es el segundo. Continuamos de este modo, añadiendo en cada uno de los triángulos inscritos en los segmentos parabólicos restantes en el paso anterior. Puesto que el área total de estos triángulos inscritos es más de la mitad que la del segmento, se desprende del principio de Eudoxo que, sea $\epsilon > 0$ se obtiene después de un número finito de pasos un polígono inscrito cuya área difiere del segmento de APB por menos de ϵ.

Ahora queremos mostrar la suma de las áreas de los triángulos AP_2P y AP_1B es un cuarto de la $\triangle APB$. Sea M_1 el punto medio de BM, Y el punto de intersección de P_1M_1 y PB, y V la intersección con PM de la recta que pasa por P_1 paralela a la AB. Entonces

$$BM^2 = 4M_1M^2,$$

lo que se deduce de (3,1) es

$$PM = 4PV, \ \textbf{o}, \ P_1M = 3PV.$$

Pero $YM_1 = \dfrac{1}{2}PM = 2PV$, de modo que

$$YM_1 = 2P_1Y.$$

Se deduce de esto que

$$a(\triangle PP_1B) = \frac{1}{2}a(\triangle PM_1B) = \frac{1}{4}a(\triangle PMB),$$

aplicando dos veces el hecho de que la relación de las áreas de dos triángulos con la misma base es igual a la relación de sus alturas. De manera similar

$$a(\triangle AP_2P) = \frac{1}{4}a(\triangle APM),$$

así encontramos que

$$\begin{aligned} a(\triangle PP_1B) + a(\triangle AP_2P) =& \frac{1}{4}a(\triangle PMB) + \frac{1}{4}a(\triangle APM) \\ =& \frac{1}{4}a(\triangle APB) \end{aligned}$$

como se quiera mostrar.

De la misma manera se puede demostrar que la suma de las áreas de los triángulos inscritos agregados en cada paso es igual a $\frac{1}{4}$ de las sumas de las áreas de los triángulos agregados en el paso anterior. Si escribimos

$$\alpha = a(\triangle APB),$$

se sigue que el polígono $\mathscr{P}_n$ obtenido después de n pasos tiene área

$$a(\mathscr{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \cdots \frac{\alpha}{4^n}. \tag{3.2}$$

En consecuencia, dado $\epsilon > 0$ el área $a(APB)$ del segmento parabólico difiere del lado derecho de (3,2) por menos de ϵ si n es suficientemente grande.

En este punto Arquímedes obtiene la identidad elemental

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}. \tag{3.3}$$

La cual podemos deducir de la siguiente manera:

Llamemos S a la serie geométrica producida por la suma de las áreas de los polígonos inscritos obtenidos despues de n pasos. Esta serie tiene como razón $r = \frac{1}{4}$ la cual podemos expresar de la siguiente manera

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \tag{3.4}$$

si multiplicamos (3,4) por $-r$ obtenemos

$$-rS = -r - r^2 - r^3 - \cdots - r^n - r^{n+1} \tag{3.5}$$

sumando (3,4) y (3,5) se produce que

$$\begin{aligned} S - rS =& 1 - r^{n+1} \\ (1-r)S =& 1 - r^{n+1} \end{aligned}$$

$$S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$
$$S = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

Así que

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{4}^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{4}^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$$

de modo que

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$$

Resulta tentador simplificar la suma de la serie geométrica, dejando $n \to \infty$ en (3,3) para obtener

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}.$$

Podemos entonces concluir que

$$\begin{aligned} a(APB) &= \lim_{n\to\infty} a(\mathscr{P}_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}\right) \\ &= \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots\right) \\ a(APB) &= \frac{4}{3}\alpha = \frac{4}{3} a(\triangle\ APB) \end{aligned}$$

Si el resultado de Arquímedes se aplica al segmento de parábola $y = x^2$ y la recta horizontal $y = 1$ encontramos que el área es $\frac{4}{3}$ por lo que se deduce que el área bajo la parábola y en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$ es $\frac{1}{3}$. En notación moderna esto significa que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

CAPÍTULO 4

EL ÁREA DE UNA ELIPSE

Aunque Arquímedes fue incapaz de calcular el área de un segmento arbitrario de una elipse. Pero en su tratado sobre Conoides y Esferoides mostró que el área de la elipse completa con semiejes mayores y menores a y b es

$$A = \pi ab, \tag{4.1}$$

una generalización agradable de la fórmula para el área del círculo (el círculo de radio r siendo la elipse con $a = b = r$).

Arquímedes demuestra (4,1) basándose en la siguiente propiedad característica de la elipse. El círculo de radio a circunscrito sobre la elipse como en la Figura 4,1. Sea P un punto sobre al eje mayor (horizontal) de la elipse, sea Q el punto de la elipse y R el punto en el círculo por encima de P entonces

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{b}{a}. \tag{4.2}$$

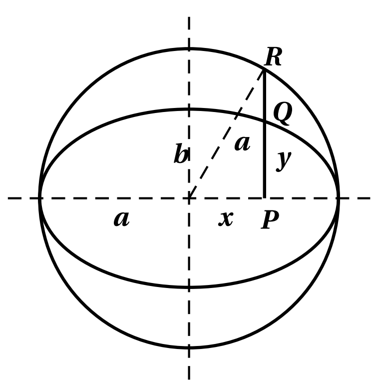

Figura 4,1

Sabiendo el resultado, es decir el área de la elipse es igual πab, Arquímedes considera una elipse E con semiejes mayor y menor a y b, y con el círculo auxiliar C'. Sea C'' el círculo con radio $r = \sqrt{ab}$, de tal manera que el área de este círculo sea igual a de la elipse (πab), como se ve en la Figura 4,2.

Ademas, consideremos un polígono regular P'' similar al polígono regular P' inscrito en círculo auxiliar C', entonces la relación entre las áreas de estos polígonos semejantes es

$$\frac{a(P'')}{a(P')} = \frac{(\sqrt{ab})^2}{a^2} = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a}. \tag{4.3}$$

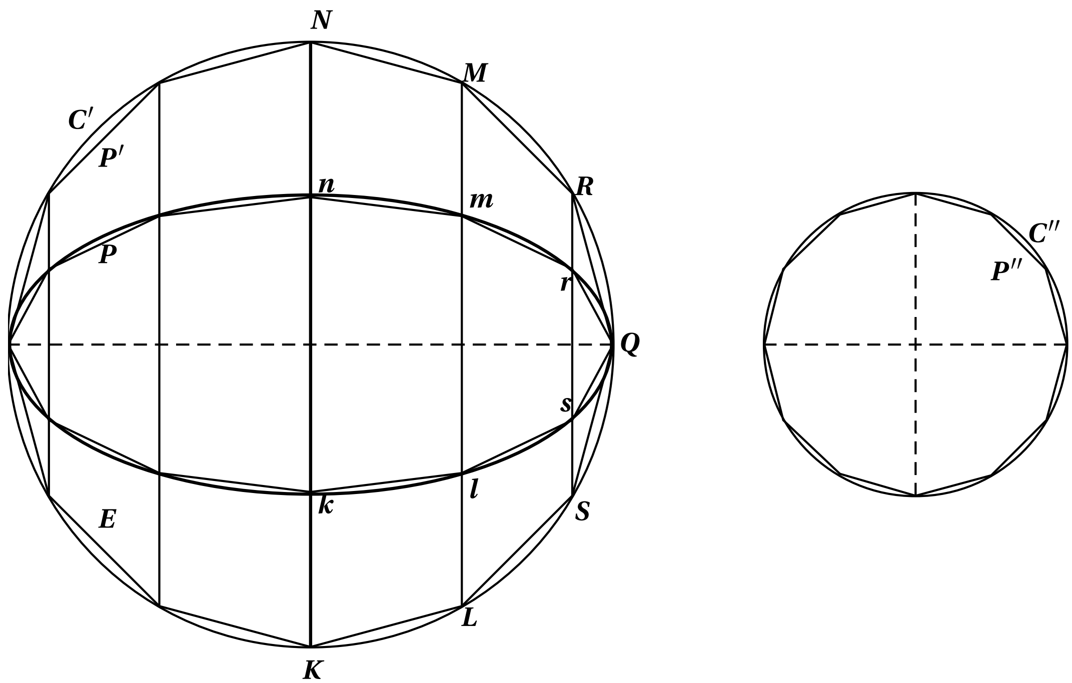

Figura 4,2

Entonces queremos probar que $a(E) = a(C'')$.

Demostración. Tenemos que

$$a(C'') < a(E), \ \text{o}, \ a(C'') > a(E), \ \text{o}, \ a(C'') = a(E)$$

La prueba es una doble Reductio ad absurdum, característico de la geometría Griega, en la que se prueba que la suposición de cualquiera de las desigualdades conduce a una contradicción.

Asumiendo que el área del círculo C'' es mayor que el área de la elipse E, es decir

$$a(C'') > a(E)$$

podemos considerar un polígono regular P'' inscrito en C'', teniendo el número de sus lados iguales a un múltiplo de 4 ($4n$ lados), y con los extremos opuestos del diámetro horizontal de C'' como vértices, de tal manera que

$$a(P'') > a(E) \tag{4.4}$$

entonces podemos considerar un polígono similar P' en el circulo auxiliar C' y el correspondiente polígono en la elipse. por lo que obtenemos que

$$\frac{a(P'')}{a(P')} = \frac{b}{a}$$

El polígono P inscrito en la elipse E cuyos vértices son las intersecciones con E de las perpendiculares desde los vértices de P' al eje horizontal de E. Podemos considerar estos polígonos como uniones de los correspondientes triángulos Qrs y QRS, y los correspondientes trapezoides $klmn$ y $KLMN$. Ahora por la propiedad caracteristica de la elipse(4,2) implica que

$$\frac{lm}{LM} = \frac{kn}{KN} = \frac{rs}{RS} = \frac{b}{a}$$

por lo que sigue que

$$\frac{a(klmn)}{a(KLMN)} = \frac{a(Qrs)}{a(QRS)} = \frac{b}{a}$$

en consecuencia por comparación de pares de triángulos y trapezoides que forman P y con los que forman P', podemos ver que

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a}$$

lo cual implica que el $a(P'') = a(P)$, lo cual es una contradicción porque P está inscrito en E. por lo tanto $a(C'')$ no es mayor que $a(E)$.

$$a(P) = a(P'') > a(E) > a(P)$$

Asumiendo que el área del circulo C'' es menor que el área de la elipse E, es decir

$$a(C'') < a(E)$$

podemos considerar un polígono regular P inscrito en E, de tal manera que

$$a(P) > a(C'')$$

Sea P' un polígono inscrito en el círculo auxiliar C' cuyos vértices son las intersecciones con C', y sea P'' un polígono similar inscrito en C''

$$\frac{a(P)}{a(P')} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a(P'')}{a(P')} = \frac{b}{a}$$

lo cual implica que el $a(P'') = a(P)$, que es contradictorio porque

$$a(P'') = a(P) > a(C'') > a(P'')$$

Por lo tanto el círculo C'', como no puede ser ni mayor ni menor que le elipse es igual a ella; y obtenemos el resultado requerido.

$$a(C'') = a(E) = \pi ab$$

■

En esencia, Arquímedes ha dado simplemente una prueba rigurosa por exhaución del hecho intuitivamente evidente de que el área de la elipse es $\frac{b}{a}$ veces el área de su círculo auxiliar, esto se corresponde con la observación de que el círculo se transforma en la elipse comprimiendo su dimensión vertical por el factor $\frac{b}{a}$.

CAPÍTULO 5

SOBRE LAS ESPIRALES

La matemática Griega sufrió una escasez de curvas disponibles para servir como objeto de su estudio. Debido a que su álgebra era geométrica y retórica en lugar de numérica y simbólica, la introducción de nuevas curvas por medio de ecuaciones (como en la geometría analítica) no era viable. Además, la geometría griega era esencialmente estática en lugar de tener un carácter dinámico.

En consecuencia, podría, en su mayor parte, definir curvas sólo en términos de simples condiciones (el círculo como el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto dado) o como intersecciones de superficies dadas en una posición fija (una sección cónica como la intersección de un plano y un cono).

El carácter estático de la geometría griega es un reflejo del papel muy limitado de movimiento y los conceptos de la variabilidad en la ciencia griega en general. Solamente los casos de movimiento uniforme ya sea rectilínea o circular se estudiaron en detalle. Otros movimientos (tales como las de los planetas en modelos astronómicos griegos) sólo pueden ser analizados en términos de movimientos uniformes lineales y circulares.

El libro de Arquímedes sobre las espirales es el que presento mayores dificultades, hasta el punto de que muchos matemáticos del siglo $XVII$ y $XVIII$ lo consideraban incomprensible y no falto quien, por no entender algunas de sus proposiciones, las declaro erróneas, pero nuestros actuales conocimientos sobre geometría analítica y cálculo infinitesimal comprueban las proposiciones del libro como verdaderas. Demostrando la genialidad de Arquímedes cuya cota intelectual es la más alta de toda la antigüedad clásica.

Arquímedes definió su famosa espiral como la composición de un movimiento lineal uniforme y un movimiento circular uniforme.

Si una línea recta trazada en un plano gira a una velocidad uniforme sobre un extremo que permanece fijo y regresar a la posición desde la cual inició, y si, al mismo tiempo que gira en la línea, un punto se mueve a una velocidad uniforme a lo largo de la línea recta a partir del extremo que se mantiene fijo, el punto describirá una espiral en un plano.

Para describir esta curva en coordenadas polares modernas, sea w (en radianes) la velocidad angular constante de rotación de la línea, y v la velocidad constante con la que el punto se mueve a lo largo de la línea, comenzando en el origen. Entonces las coordenadas polares del punto móvil en un tiempo t es $r = vt$ y $\theta = wt$, por lo que la ecuación en coordenadas polares de la espiral es

$$r = a\theta \tag{5.1}$$

donde $a = \dfrac{v}{w}$.

Las últimas ocho proposiciones del libro sobre las espirales se dedican al cálculo de áreas. Por ejemplo, Arquímedes prueba en la proposición 24 del mismo tratado que el área del sector S comprendida por la primera revolución de una espiral y la recta origen de ella es la tercera parte de la del primer círculo. Como se ve en la Figura 5,1.

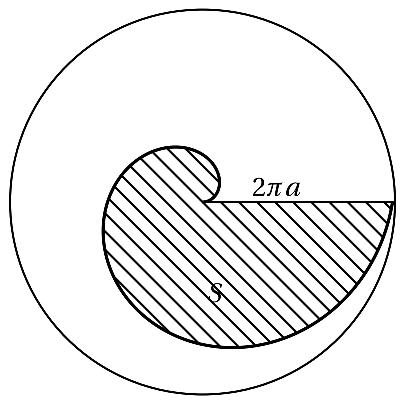

Figura 5,1

Es decir,

$$a(S) = \frac{1}{3}(2\pi a)^2. \tag{5.2}$$

Arquímedes emplea el método de comprensión combinado con el principio de reducción al absurdo para demostrar su proposición.

La construcción geométrica de Arquímedes para la prueba es muy similar a la que se emplearía para establecer una integral definida moderna en coordenadas polares. Primero dividió el círculo en n sectores congruentes (por proposición 21) [1] . En cada parte tomo sectores circulares menores que aproximen un sector de la espiral por defecto y por exceso como se muestra en la Figura 5,2

La figura siguiente muestra una partición del círculo en 8 sectores circulares. La suma de los sectores de color azul da una estimación inferior P_8 del área de la espiral y la suma de los sectores circulares de color azul claro da una estimación superior Q_8. Definamos $a(C)$ el área del círculo y $a(E)$ como el área de la espiral de tal manera que

$$P_8 < a(E) < Q_8$$

[1]Proposición 21: Al área comprendida por un arco de espiral de la primera revolución y las rectas que unen sus extremos con el origen se le puede circunscribir una figura formada por sectores circulares e inscribirle otra de tal modo que el exceso de la figura circunscrita sobre la inscrita sea menor que un área dada.

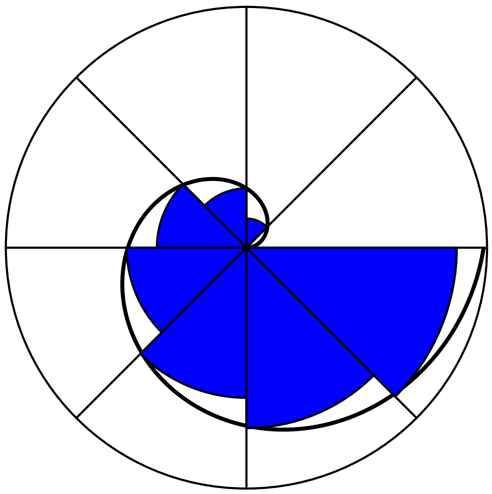

Figura 5,2

Para calcular P_8 y Q_8 podemos usar una consecuencia de la proposición XII.2 [2] de los elementos de Euclides sobre la razón de las áreas de círculos: *Las áreas de dos sectores circulares con el mismo ángulo, son entre si como los cuadrados de sus radios.*

En consecuencia los radios de los elementos de P_8 son $0, \frac{r}{8}, \frac{2r}{8}, \ldots, \frac{7r}{8}$ y los elementos de Q_8 son $\frac{r}{8}, \frac{2r}{8}, \frac{3r}{8}, \ldots, r$. De donde podemos ver que el cuarto elemento de P_8 tendría como área $\left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{c}{8} = \frac{9c}{8^3}$ y el cuarto elemento de Q_8 tendría como área $\left(\frac{4}{8}\right)^2 \cdot \frac{c}{8} = \frac{16c}{8^3}$

de tal manera que

$$P_8 < a(E) < Q_8$$
$$\frac{0c}{8^3} + \frac{c}{8^3} + \cdots + \frac{49c}{8^3} < a(E) < \frac{c}{8^3} + \frac{4c}{8^3} + \cdots + \frac{64c}{8^3}$$
$$\frac{(0+1+\cdots+49)c}{8^3} < a(E) < \frac{(1+4+\cdots+64)c}{8^3}$$

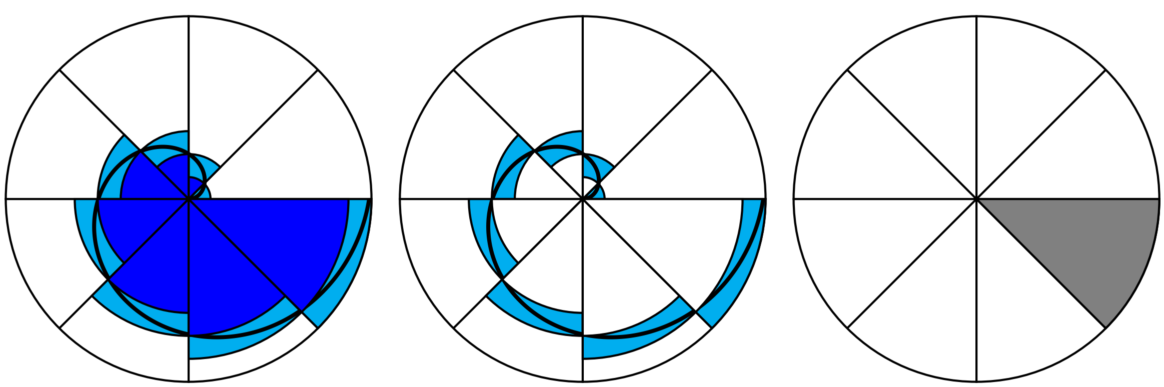

Figura 5,3

[2]Si C_1 y C_2 son círculos con radios r_1 y r_2, entonces $\frac{a(C_1)}{a(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

Podemos observar que si ponemos la figura P_8 sobre la figura Q_8 la diferencia entre las dos aproximaciones (superior e inferior) es igual a la suma de los segmentos anillos y estos segmentos juntos forman exactamente un sector circular de la partición. Entonces $P_8 - Q_8 = \frac{a(C)}{8}$ de donde la diferencia puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo un n suficientemente grande y es por esto que podemos saber que las dos aproximaciones del área de la espiral tienden al mismo valor limite para concluir que ese valor es $\frac{1}{3}a(C)$.

Arquímedes utiliza en su demostración las siguientes dos desigualdades:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} > \frac{1}{3}, \quad \text{y,} \quad \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3} \tag{5.3}$$

que son consecuencia de las fórmulas para la suma de los términos de una progresión aritmética, y de sus cuadrados:

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) > \frac{1}{3}n^3.$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2 = \frac{1}{3}n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1) < \frac{1}{3}n^3.$$

Desde la aproximación basada en la partición de C en n partes podemos concluir que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2 < \frac{a(E)}{A(C)} < 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

Así pues, tenemos los ingredientes necesarios para una prueba por reducción al absurdo en la cual suponemos que $a(S) \neq \frac{1}{3}a(C)$ entonces debemos ver que

$$a(S) < \frac{1}{3}a(C), \quad \text{o,} \quad a(S) > \frac{1}{3}a(C)$$

Demostración. Suponemos primero que $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$, entonces elegimos n suficientemente grande de manera que

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S),$$

entonces podemos ver que

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} > \frac{1}{3}$$

de donde,

$$a(Q) > \frac{1}{3}a(C)$$

de manera que

$$\frac{1}{3}a(C) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S), \text{ de donde } a(P) > a(S)$$

pero esta es una contradicción puesto que $a(P)$ es una aproximación menor que $a(S)$. Por lo tanto nuestra hipótesis $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$ es absurda.

Ahora suponemos que $a(S) > \frac{1}{3}a(C)$, elegimos n suficientemente grande de modo que

$$a(Q) - a(P) < a(S) - \frac{1}{3}a(C),$$

por lo que se deduce que

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}, \text{ es decir, } \frac{a(P)}{a(C)} < \frac{1}{3}, \text{ de donde, } a(P) < \frac{1}{3}a(C)$$

pero entonces encontramos que

$$a(Q) - \frac{1}{3}a(C) < a(S) - \frac{1}{3}a(C), \text{ por lo tanto } a(Q) < a(S)$$

pero esta es una contradicción puesto que $a(Q)$ es una aproximación superior que $a(S)$. Por lo tanto nuestra hipótesis $a(S) > \frac{1}{3}a(C)$ es absurda. con lo cual concluimos que

$$a(S) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$

como se quería demostrar ■

Arquímedes pasó a calcular el área de un sector S de la espiral (Figura 5,4) si los radios a los puntos inicial y final de la espiral son r_1 y r_2 y el ángulo central es θ (en radianes), entonces

$$a(S) = \frac{\theta}{2}\left[r_1 r_2 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)^2\right]. \tag{5.4}$$

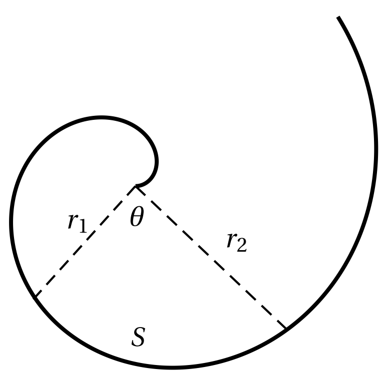

Figura 5,4

La prueba de (5,4) requiere de la fórmula para la suma de los cuadrados de los términos de una progresión finita aritmética arbitraria

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + b \quad a_3 = a + 2b, \quad \ldots, \quad a_n = a + (n-1)b$$

Con n términos, termino a y diferencia común b, encontramos que

$$
\begin{aligned}
a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 =& a^2+(a+b)^2+\cdots+[a+(n-1)b]^2\\
=& a^2+(a^2+2ab+b^2)+\cdots+(a^2+2a((n-1)b)+((n-1)b)^2)\\
=& na^2+2a\,[b+2b+\cdots+(n-1)b]+\left[b^2+(2b)^2+\cdots+(n-1)^2b^2\right]\\
=& na^2+2ab\,[1+2+\cdots+(n-1)]+b^2\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]\\
=& na^2+abn(n-1)+\frac{b^2}{6}(n-1)(n)(2n-1)\\
a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 =& na_1a_n+\frac{1}{6}(a_n-a_1)^2\frac{2n^2-n}{n-1}
\end{aligned}
$$

porque $(n-1)b=a_n-a_1$ y $a^2+ab(n-1)=a_1a_n$.

Ahora lo que realmente se necesita son las desigualdades

$$(n-1)\left[a_1a_n+\frac{1}{3}(a_n-a_1)^2\right]<a_2^2+\cdots+a_n^2 \tag{5.5}$$

y,

$$a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2<(n-1)\left[a_1a_n+\frac{1}{3}(a_n-a_1)^2\right], \tag{5.6}$$

Para la demostración de la primera desigualdad empezamos por el hecho de que $a_1<a_n$, entonces $a_1^2<a_1a_n$, de modo que, $a_1^2+(n-1)a_1a_n<a_1a_n+(n-1)a_1a_n$.

Además, $2<3n$, porque $n\in\mathbb{N}$, así que $2(n^2-2n+1)=2n^2-4n+2<2n^2-4n+3n=2n^2-n$, de modo que $2(n-1)^2<2n^2-n$ de donde, $(n-1)^2<\dfrac{2n^2-n}{2}$, por lo tanto $\dfrac{(n-1)}{3}<\dfrac{2n^2-n}{6(n-1)}$, luego $\dfrac{(n-1)}{3}(a_n-a_1)^2<\dfrac{2n^2-n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2$.

De esto y lo anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
a_1^2+(n-1)a_1a_n+\frac{(n-1)}{3}(a_n-a_1)^2 <& a_1a_n+(n-1)a_1a_n+\frac{2n^2-n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2\\
=& a_1a_n(1+(n-1))+\frac{2n^2-n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2\\
=& na_1a_n+\frac{2n^2-n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2\\
=& a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(n-1)\left[a_1a_n+\dfrac{1}{3}(a_n-a_1)^2\right]<a_2^2+\cdots+a_n^2$ como se quería demostrar.

Para demostrar la desigualdad (5,6), debemos ver que

$$
\begin{aligned}
a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2+a_n^2-a_n^2 <& (n-1)\left[a_1a_n+\frac{1}{3}(a_n-a_1)^2\right],\\
na_1a_n+\frac{1}{6}(a_n-a_1)^2\frac{(2n^2-n)}{(n-1)}-a_n^2 <& (n-1)\left[a_1a_n+\frac{1}{3}(a_n-a_1)^2\right],
\end{aligned}
$$

$$na_1a_n + \frac{1}{6}(a_n - a_1)^2\frac{(2n^2-n)}{(n-1)} < (n-1)\left[a_1a_n + \frac{1}{3}(a_n-a_1)^2\right] + a_n^2,$$

Para probar lo anterior iniciamos con el hecho de que $0 < (3n-4)b + 6a_1$ de tal manera que, $-6a_1 < (3n-4)b$ de donde, $-6a_1(n-1) < (n-1)(3n-4)b$ luego, $6a_1 - 6na_1 < (n-1)(3n-4)b$ por lo tanto, $2a_1 + 4a_1 - 3na_1 - 3na_1 < (n-1)(3n-4)b$ y así, $2a_1 - 3na_1 < 3na_1 - 4a_1 + (n-1)(3n-4)b$ de modo que, $(2-3n)a_1 < (3n-4)a_1 + (n-1)(3n-4)b$, así que $(2-3n)a_1 < (3n-4)(a_1+(n-1)b)$ entonces, $(2-3n)a_1 < (3n-4)a_n$ obteniendo, $2a_1 - 3na_1 < 3na_n - 4a_n$ podemos ver que, $3na_n - 2a_n - 3na_1 + 2a_1 < 6na_n - 6a_n$ de donde, $(3n-2)(a_n - a_1) < 6(n-1)a_n$ por lo cual, $\frac{(3n-2)}{6(n-1)}(a_n - a_1) < a_n$ luego, $\frac{(n+2(n-1))}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 < a_n(a_n-a_1)$ de tal manera, $\frac{n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 + \frac{2(n-1)}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 < a_n(a_n-a_1)$ por lo tanto, $\frac{n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 + \frac{2}{6}(a_n-a_1)^2 < a_n^2 - a_na_1$ de donde, $a_1a_n + \frac{n}{3}(a_n-a_1)^2 + \frac{n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 < a_n^2 + \frac{n}{3}(a_n-a_1)^2 - \frac{1}{3}(a_n-a_1)^2$ de modo que, $a_1a_n + \frac{1}{6}(a_n-a_1)^2\frac{2n(n-1)}{(n-1)} + \frac{n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 < a_n^2 + \frac{1}{3}(a_n-a_1)^2(n-1)$ por lo tanto vemos que, $a_1a_n + \frac{1}{6}(a_n-a_1)^2\frac{2n^2-2n}{(n-1)} + \frac{n}{6(n-1)}(a_n-a_1)^2 < a_n^2 + \frac{1}{3}(a_n-a_1)^2(n-1)$ de tal manera que $na_1a_n + \frac{1}{6}(a_n-a_1)^2\frac{2n^2-n}{(n-1)} < na_1a_n - a_1a_n + a_n^2 + \frac{1}{3}(a_n-a_1)^2(n-1)$ que era lo que queríamos demostrar.

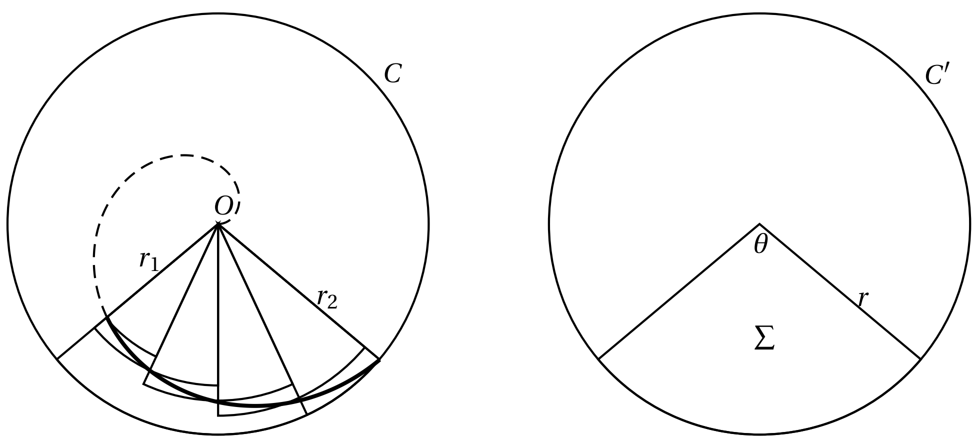

Figura 5,5

Ahora estamos listos para la prueba de la fórmula (5,4) para el área del sector S de la espiral.

Demostración. Sea C el circulo con radio r_2 y centro O, y sea Σ el sector C con ángulo central θ que contiene el sector S de la espiral. Sea C el circulo de radio r de tal manera que

$$r^2 = r_1r_2 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)^2,$$

Y sea Σ' el sector de C' con ángulo central θ. Queremos probar que

$$a(S) = a(\Sigma')$$

Se subdivide Σ en (n-1) sectores iguales, cada uno con ángulo central $\frac{\theta}{n-1}$ y obtenemos figuras P y Q inscritas y circunscritas en S.

Si

$$a = r_1 \text{ y } b = \frac{r_2 - r_1}{n-1}$$

Entonces P se compone de los sectores con radio

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + b, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = a + (n-2)b$$

mientras que Q se compone de los sectores con radio

$$a_2 = a + b, \quad a_3 = a + 2b, \quad \ldots, \quad a_n = a + (n-1)b = r_2.$$

Para realizar esta prueba Arquímedes utiliza de nuevo el método de reducción al absurdo en la cual suponemos que $a(S) \neq a(\Sigma')$ entonces debemos ver que

$$a(S) < a(\Sigma'), \quad \text{o,} \quad a(S) > a(\Sigma')$$

Asumiendo primero que $a(S) < a(\Sigma')$, elegimos n suficientemente grande

$$a(Q) < a(\Sigma')$$

Pero entonces

$$\begin{aligned}
\frac{a(Q)}{a(\Sigma)} &= \frac{a_2^2 + \cdots + a_n^2}{(n-1)a_n^2} \\
&> \frac{a_1 a_n + \frac{1}{3}(a_n - a_1)^2}{a_n^2}, \text{ por (5,5)} \\
\frac{a(Q)}{a(\Sigma)} &> \frac{a(\Sigma)}{a(\Sigma')},
\end{aligned}$$

lo que implica que $a(Q) > a(\Sigma')$. Esta contradicción muestra que $a(S)$ no es menor que $a(\Sigma')$.

Asumiendo que $a(S) > a(\Sigma')$, asumiendo un n suficientemente grande

$$a(P) > a(\Sigma')$$

Pero entonces

$$\begin{aligned}
\frac{a(P)}{a(\Sigma')} &= \frac{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2}{(n-1)a_n^2} \\
&< \frac{a_1 a_n + \frac{1}{3}(a_n - a_1)^2}{a_n^2}, \text{ por (5,6)} \\
&< \frac{a(\Sigma)}{a(\Sigma')},
\end{aligned}$$

lo que implica que $a(P) < a(\Sigma')$. Esta contradicción muestra que $a(S)$ no es mayor que $a(\Sigma')$. así llegamos a la conclusión de que

$$a(S) = \frac{\theta}{2}\left[r_1 r_2 + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)^2\right].$$

como se deseaba.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

- Los descubrimientos matemáticos realizados por Arquímedes, permitieron gran parte del desarrollo de la matemática renacentista, abriendo muchas puertas al conocimiento que demarcó los derroteros de la matemática moderna .
- Temas como los que hay aquí expuestos, se convierten en base importante en el proceso de compresión y aprendizaje de la matemá tica a través de propuestas metodológicas que revolucionaron la elaboración de conceptos y teorías que han consolidado el conocimiento matemático.
- En sus trabajos se evidencia la genialidad de Arquímedes, utilizando herramientas como el método de exhausión dio solución a muchos problemas de la época.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Apostol Tom M., *Cálculo*. Editorial Reverte. Volumen I, Segunda edición, Barcelona, 1972.

[2] Boyer, Carl B., *Historia de la matemática.* Editorial Alianza. Madrid, 1986.

[3] Castro Chadid, Iván., Pérez Alcázar Jesús H., *Un paseo finito por lo infinito El infinito en matemáticas.* Editorial Pontificia Universidad Javeriana, Bogota, 2007

[4] Castro Chadid, Ivan *Razonamiento griego con regla y compás.* Universidad Pedagogica Nacional, Bogota, 2003.

[5] C. H. Edwards Jr., *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag. New York, 1982.

[6] Collete, Jean-Paul, *Historia de la matemáticas*. Volumen I, Siglo veintiuno editores, Madrid, 1986.

[7] Newman James R., *Sigma El mundo de las matemáticas.* Tomo 1, Ediciones Grijalbo S. A., Barcelona-Buenos Aires-Mexico., 1980.

[8] Rey Pastor, J., Babini, J., *Historia de las matemáticas.* Gedisa. Bacelona. 1984.

[9] Torija Herrera, R., *Arquímedes alrededor del círculo.* Nivola libros y ediciones. Madrid, 2003.

[10] Vera, Francisco, *Cientificos griegos, Volumen* 2. Editorial Aguilar. Madrid, 1970.