Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Geometría de los espacios con métrica indefinida

Katherine Trujillo Herrera

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Geometría de los espacios con métrica indefinida

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en matemáticas

Katherine Trujillo Herrera
2008276804

Asesor:
C.Dr.Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Abril de 2013

AGRADECIMIENTOS

El agradecimiento principal de mi trabajo de grado es a Dios quien me ha guiado y me ha dado la fortaleza para salir adelante.

A mi asesor de trabajo de grado, el profesor Osmin Ferrer Villar por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda culminar mis estudios con éxito y el deseo de continuar estudiando en el área de Matemáticas.

También me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera profesional porque todos han aportado con un granito de arena a mi formación, y en especial al profesor Mg. Ricardo Cedeño Tovar por sus importantes recomendaciones, sus enseñanzas y por su amistad.

A mis padres por darme la vida, una formación maravillosa, por su ternura, todo su amor y contagiarmen de sus mayores fortalezas, porque me enseñaron a ser disciplinada, perseverante y paciente, a ponerme pasos fijos para alcanzar mis metas, a ver los problemas con cabeza fría y como situaciones solucionables y no como tragedias, y me orientaron el valor "Toda disciplina y esfuerzo tiene su recompensa".

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí y por todo lo que me han brindado.

Y por último quiero agradecerle a la Universidad Surcolombiana por ofrecerme los espacios y algunas actividades que contribuyeron a mi formación profesional.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En **1962** Yu. P. Ginzburg e Iokvidov publicaron, en forma conjunta, el primer tratado sobre geometría de espacios con métrica indefinida. Este trabajo contenía resultados clásicos y en parte, algunos de los resultados obtenidos a comienzos de los años '60.
En esta década se realizaron grandes avances para la teoría, descubriéndose nuevas aplicaciones, por ejemplo, a sistemas de ecuaciones diferenciales parabólicos e hiperbólicos disipativos (Philips), a oscilaciones de amplitud restringida en sistemas elásticos de dimensión infinita (Krein, Langer), a sistemas canónicos de ecuaciones diferenciales (Krein, Yakubovich, Derguzov), a la teoría de representación de grupos (Naymark), etc.

Para el final de este período, J. Bognár [1] publicó el primer libro enteramente dedicado a espacios con métrica indefinida. En los últimos años esta teoría ha sido redescubierta, provocando un nuevo y creciente interés en el desarrollo de estos temas.

Los espacios con W-métrica ó métrica indefinida son verdaderamente interesantes, ya que sus elementos poseen algunas caracteristicas muy importantes con respecto al producto interno , las cuales permiten construir algunos conjuntos especiales, clasificados como conjuntos degenerados ó no degenerados, permitiendo analizar lo que se conoce como descomposición fundamental a través de unos operadores llamados proyectores ortogonales, sirviendo como generadores de espacios de Hilbert , con esto se consigue generalizar algunos resultados de espacios de Hilbert a espacios con W-métrica .

OBJETIVOS

Objetivo General

- Exponer los fundamentos históricos y teóricos sobre los cuales se desarrolla la teoría geométrica de los espacios con métrica indefinida.

Objetivos Específicos

- Presentar una breve reseña histórica del desarrollo de la teoría de espacios con métrica indefinida.
- Enunciar y estudiar definiciones y resultados básicos de la teoría de operadores en espacio con métrica indefinida.
- Realizar un estudio cualitativo de la geometría de espacios con métrica indefinida.
- Mostrar algunas utilidades de los espacios con métrica indefinida.

JUSTIFICACIÓN

Los espacios producto interno permitian estudiar en espacios de Hilbert algunos problemas, en estos solamente se podia analizar la positividad del producto interno, pero no se permitia analizar el producto interno para valores no positivos, siendo esta la motivación por la cual se desea hacer un estudio cualitativo a un espacio más general, espacios producto interno con W-métrica ó métrica indefinida donde la no negatividad del producto interno no se tiene, es decir la función producto interno puede tomar valores negativos para algunos elementos.

Para los espacios de W-métrica, sus elementos poseen algunas caracteristicas con respecto al producto interno, la contrucción de algunos conjuntos se clasificarán en conjuntos degenerados ó no degenerados, se analizará lo que se conoce como descomposición fundamental a través de unos operadores muy importantes llamados proyectores ortogonales, los cuales servirán para generar espacios de Hilbert a través de los espacios de W-métrica.

Durante los últimos años la teoría de los espacios producto interno con métrica indefinida se ha desarrollado rápidamente debido a sus nuevas aplicaciones en la mecánica cuántica y en la solución de algunos modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales parciales.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Espacio métrico

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto no vacío, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación , se dice una* ***métrica*** *(o una* ***distancia****) si para todo $x, y, z \in X$ satisface:*

d_1) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

d_2) $d(x, y) = d(y, x);\ \forall x, y \in X$ *(Simetría)*

d_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);\ \forall x, y, z \in X$ *(Desigualdad Triangular)*

Al par (X, d) se le llama ***espacio métrico***.
La métrica d representa la distancia entre los puntos x y y.

Definición 1.1.2. *Sea (E, d) un espacio métrico, una* ***bola*** *con centro en $a \in E$ y radio $r > 0$, es el conjunto,*

$$B_E(a, r) := \{x \in E :\ d(a, x) < r\}$$

Definición 1.1.3. *Sea (E, d) un espacio métrico , $a \in E$ y $V \subset E$. Se dice que V es una* ***vecindad*** *de a si existe $r > 0$ tal que*

$$B_E(a; r) \subset V$$

Definición 1.1.4. *Sea (E, d) un espacio métrico y $S \subset E$, $a \in S$, a es llamado un* ***punto interior*** *de S en (E, d), si*

$$(\exists r > 0) \quad (B_E(a, r) \subset S)$$

Definición 1.1.5. *Si (E, d) es un espacio métrico y $S \subset E$, se define el* ***interior*** *de S , como el conjunto*

$$\{a \in S :\ a \text{ es punto interior de } S\},$$

Este conjunto se denota por $int(S)$.

Notese que $int(S) \subset S$

Definición 1.1.6. *Si (E,d) es un espacio métrico y $S \subset E$, se dice que S es **abierto** en E , si todos sus puntos son interiores , esto es si*

$$(\forall s \in S)\ (s \in int(S))$$

De la definición es claro que para (E,d) espacio métrico , $S \subset E$.
S es abierto en $E \longleftrightarrow S = int(S)$

Definición 1.1.7. *Dado un espacio métrico (E,d) y $S \subset E$, se dice que S es **cerrado** en (E,d) si $E \setminus S$ (el complemento de S con respecto a E) es abierto en (E,d).*

Teorema 1.1.8. *Sea (E,d) un espacio métrico*

1) $\emptyset$ es abierto en (E,d).

2) E es abierto en (E,d).

3) La intersección de un número finito de conjuntos abiertos en (E,d), es un conjunto abierto en (E,d).

4) La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos en (E,d), es un conjunto abierto en (E,d).

Demostración:

1) Si $x \in \emptyset$ entonces $(\exists r > 0)\ /\ (B_E(x,r) \subset \emptyset)$, lo cual implica que $x \in int(\emptyset)$, luego $\emptyset \subset int(\emptyset)$, por lo tanto $\emptyset$ es abierto en (E,d).

2) Si $x \in E$, tomemos $r = 1 > 0$, tal que $B_E(x,1) \subset E$, entonces $x \in int(E)$, luego $E \subset int(E)$, por lo tanto se concluye que E es abierto en (E,d).

3) Sean $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ una colección finita de abiertos en (E,d) y sea

$$G = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i.$$

Demostraremos que G es abierto en (E,d).

Sea $x_0 \in G$, entonces $(\forall i \in I)\ x_0 \in G_i$, así $x_0 \in int(G_i)(i = 1,\ldots,n)$, pues G_i es abierto, como G_i es abierto $\exists r_i > 0$ tal que $B_E(x_0, r_i) \subset G_i$, $(i = 1,\ldots,n)$, notaremos en lo que sigue a $B_E(x_0, r)$ como $B(x_0, r)$.

Sea $r = min\{r_1, \ldots r_n\} > 0$, (pues todo subconjunto no vacio de números reales tiene un elemento mínimo y un elmento máximo), entonces

$$(\forall i \in I\ , i = 1,\ldots,n)\ B(x_0, r) \subset B(x_0, r_i) \subset G_i,$$

esto es $B(x_0, r)$ está contenida en cada G_i, luego

$$B(x_0, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$$

Se concluye entonces que G es abierto.

4) Sean $(G_i)_{i\in I}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos en (E,d) y

$$G = \bigcup_{i\in I} G_i$$

Demostraremos que G es abierto en (E,d).

Sea $x \in G$, entonces $\exists i \in I \,/\, x \in G_i$, luego $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset G_i \subset \bigcup_{i\in I} G_i$, así x es un punto interior de G, por consiguiente $x \in int(G)$, por lo tanto $G \subset int(G)$, se concluye entonces que G es abierto en (E,d).

■

Teorema 1.1.9. *Sea (E,d) un espacio métrico.*

1) *El subconjunto E es cerrado en (E,d).*
2) *El subconjunto vacio $\emptyset$ es cerrado en (E,d) .*
3) *La intersección de cualquier colección de subconjuntos cerrados de (E,d) es cerrada en (E,d) .*
4) *La unión de un número finito de subconjuntos cerrados de (E,d) es cerrada en (E,d) .*

Demostración:

1) $(E \setminus E) = \emptyset$, el cual es abierto en (E,d) , luego E es cerrado en (E,d) .
2) $(E \setminus \emptyset) = E$ es abierto en (E,d) , luego $\emptyset$ es cerrado en (E,d) .
3) Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia cualquiera de subconjuntos cerrados de (E,d) y sea

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i,$$

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i \right) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i)$$

como cada $(E \setminus F_i)$ es abierto en (E,d), entonces $E \setminus F = E \setminus (\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i)$ es abierto en (E,d), por lo tanto $(E \setminus F)$ es abierto en (E,d), esto es F es cerrado en (E,d) .

4) Sea $\{F_1,\ldots,F_n\}$ una colección finita de subconjuntos cerrados de (E,d) y sea

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (E \setminus F_i)$$

que es abierto por ser intersección de un número finito de conjuntos abiertos , luego F es cerrado en (E,d) . ■

Definición 1.1.10. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces a es un* ***punto adherente*** *de X si y solo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*

Definición 1.1.11. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. La* ***clausura*** *de X $(\overline{X})$, se define como*

$$\overline{X} := \{a \in \mathbb{R} \ / \ a \text{ es punto adherente de } X\}$$

Definición 1.1.12. *Sea (X, d) un espacio métrico , $A \subset X$ se llama* ***denso*** *en X, si $\overline{A} = X$.*

Definición 1.1.13. *Un conjunto* ***C*** *se llamará* ***numerable*** *si y sólo si es equipotente con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, es decir, cuando existe una biyección de $\mathbb{N}$ a* ***C****.*

Definición 1.1.14. *En un espacio métrico (X, d) , un conjunto es* ***separable****, si existe $D \subset X$, denso y numerable.*

1.2. Espacios Normados.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), una función $\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una norma en X , si satisface:*

$N_1)$ $\| x \| \geq 0; \ \forall x \in X$

$N_2)$ $\| x \| = 0 \iff x = 0; \ \forall x \in X$

$N_3)$ $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|; \ \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall x \in X$

$N_4)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| ; \ \forall x, y \in X$

Al par $(X, \| \cdot \|)$ se le llama **espacio normado.**

Proposición 1.2.2. *En todo espacio normado X , se puede introducir una métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

La cual es llamada métrica inducida por la norma.

Demostración:

$d_1)$

$$d(x, y) = \| x - y \| \geq 0 \quad (Por N_1)$$

$d_2)$

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad \| x - y \| = 0 \\ &\longleftrightarrow \quad x - y = 0 \quad (Por N_2) \\ &\longleftrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

$d_3)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \| x-y \| \\ &= \| (-1)(y-x) \| \\ &= |-1| \| y-x \| \quad (Por N_3) \\ &= \| y-x \| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

$d_4)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \| x-y \| \\ &= \| x-y+z-z \| \\ &= \| (x-z)+(z-y) \| \\ &\leq \| x-z \| + \| z-y \| \quad (Por N_4) \\ &\leq d(x,z)+d(z,y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.3. Espacio con Producto Interno.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, una función*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

se dice que es un ***producto interno*** *en X , si $\forall x, y, z \in X$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ satisface :*

(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *(Linealidad con respecto a la primera componente)*

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ *(Conjugado lineal con respecto a la primera componente)*

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *(Simetria Hermitiana).*

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(No negatividad)*

Al par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama espacio **producto interno**.

Las tres primeras condiciones son conocidas como sesquilinealidad, y la cuarta es llamada positiva. De este modo, un producto interno es una forma sesquilineal positiva.
De (i) y (ii) se tiene,

Observación 1.3.2. 1) Linealidad con respecto al segundo factor.

$$\begin{aligned} \langle x, y+z\rangle &= \overline{\langle y+z, x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} \\ &= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} \\ &= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \end{aligned}$$

2) Conjugado lineal con respecto al segundo factor.

$$\begin{aligned}\langle x, \alpha y\rangle &= \overline{\langle \alpha y, x\rangle}\\ &= \overline{\alpha\langle y, x\rangle}\\ &= \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle}\\ &= \overline{\alpha}\,\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Definición 1.3.3. *Sea* $(X, [\cdot,\cdot])$ *un espacio producto interno, la pareja* $(X, \|\cdot\|)$ *recibe el nombre de* ***espacio pre-hilbert****, donde* $\|\cdot\|$ *está asociada al producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Proposición 1.3.4. *En un espacio producto interno* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se puede inducir una norma* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

La cual es llamada la norma inducida por un producto interno.
En efecto

$N_1)$

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0 \quad (Por(iv)).$$

$N_2)$

$$\begin{aligned}\| x \| = 0 \quad &\longleftrightarrow \quad \| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0\\ &\longleftrightarrow \quad \langle x, x\rangle = 0\\ &\longleftrightarrow \quad x = 0. \quad (Por(iv)).\end{aligned}$$

$N_3)$

$$\begin{aligned}\| \alpha x \| &= \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\\ &= \sqrt{\alpha\langle x, \alpha x\rangle}\\ &= \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle}\\ &= |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle}\\ &= |\alpha|\, \| x \|\end{aligned}$$

Para demostrar $N_4)$ *se debe tener en cuenta el siguiente lema y la siguiente notación.*

Lema 1.3.5. *[Desigualdad de Cauchy Schwarz] Sean* H *un espacio pre-Hilbert y* $x, y \in H$, *entonces se tiene*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \| y \|$$

Demostración:
Si $y = 0$, entonces se tiene $\langle x, 0\rangle = 0$.
Sea $y \neq 0$, para cada escalar α se tiene

$$\begin{aligned}0 \leq \| x - \alpha y \|^2 &= \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle\\ &= \langle x, x - \alpha y\rangle - \langle \alpha y, x - \alpha y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle - \langle x, \alpha y\rangle - \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \overline{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\left[\langle y,x\rangle - \overline{\alpha}\langle y,y\rangle\right] \end{aligned}$$

Si se toma $\overline{\alpha} = \dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$, la expresion $\left[\langle y,x\rangle - \overline{\alpha}\langle y,y\rangle\right] = 0$.

Luego el resto de la desigualdad es

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle = \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \\ 0 &\leq \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} \\ \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} &\leq \langle x,x\rangle \\ |\langle x,y\rangle|^2 &\leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \\ |\langle x,y\rangle| &\leq \| x \| \| y \| \end{aligned}$$

■

Notación 1.3.6. *Sean H un espacio pre-Hilbert $x, y \in H$, se tiene que*

$$Re\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$$

Veáse Kreyszig[pag.138]

N_4)

$$\begin{aligned} \| x+y \|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \overline{\langle x+y, x\rangle} + \overline{\langle x+y, y\rangle} \\ &= \overline{\langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle} + \overline{\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle} \\ &= \overline{\langle x,x\rangle} + \overline{\langle y,x\rangle} + \overline{\langle x,y\rangle} + \overline{\langle y,y\rangle} \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle \\ &= \| x \|^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \| y \|^2 \\ &= \| x \|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \| y \|^2 \ \ (\textit{Por 1.3.6}) \\ &\leq \| x \|^2 + 2\| x \|\| y \| + \| y \|^2 \ \ (\textit{Por 1.3.5}) \\ &= (\| x \| + \| y \|)^2 \end{aligned}$$

Así que, $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$

NOTA: Por lo tanto se puede inducir una métrica dada por

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

1.4. Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy

Definición 1.4.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, se dice **convergente** a x si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}\ /\ si\ n \geq K \to d(x_n, x) < \varepsilon$$

Definición 1.4.2. *Sea (X,d) un espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de **Cauchy**, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N}\ /\ m, n \geq K \to d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

1.5. Espacios de Hilbert

Definición 1.5.1. *Un espacio métrico (X,d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.*

Definición 1.5.2. *Un espacio pre-Hilbert $(H,\langle,\rangle)$, se dice que es un espacio de **Hilbert** si es un espacio producto interno completo con respecto a la métrica inducida por el producto interno.*

De ahora en adelante $\mathscr{H}$ representará un espacio de Hilbert.

1.6. Teoría de operadores lineales

Definición 1.6.1. *Dados X, Y espacios vectoriales definidos sobre un campo $\mathbb{K}$, un operador $T : D \subset X \to Y$, se dice **lineal** si:*

(i) *El dominio D es un espacio vectorial y el rango $R(T)$ cae sobre un espacio vectorial sobre el mismo campo de X.*

(ii) $$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x)+T(y) && \forall x, y \in D \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x) && \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Indicaremos como $\mathscr{L}(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales de X en Y. Si $X = Y$ escribiremos simplemente $\mathscr{L}(X)$.

Definición 1.6.2. *Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se reconoceran los siguientes subespacios asociados a T*

* $N(T) = \{\xi \in \mathscr{H}\ :\ T\xi = 0\}$, *es el **espacio nulo ó núcleo** de T.*
* $R(T) = \{T\xi\ :\ \xi \in \mathscr{H}\}$, *es el **rango ó imagen** de T*

Definición 1.6.3. *Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, se dice que T es **inyectivo** si $T(v_1) = T(v_2) \longrightarrow v_1 = v_2;\ \forall\, v_1, v_2 \in V$*

Definición 1.6.4. *Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, si $R(T) = \mathscr{H}$ entonces T es **sobreyectivo**.*

Definición 1.6.5. *Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice que T es **invertible** si ,*

i) *T es inyectivo y*

ii) *T es sobreyectivo*

En tal caso , se tiene que $\exists w \,/\, Tw = wT = id_{\mathscr{H}}$, *dicho operador es único y lo notaremos* T^{-1}

Definición 1.6.6. *Dado V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$, $f : V \to K$, se dice* ***funcional lineal*** *si.*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in V$

(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Definición 1.6.7. *Sean* $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ *espacios normados y* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal , si* $\exists\, c\, \mathbb{R}^+ / \| T(x) \|_Y \le c \| x \|_X, \forall x \in X$. *Se dice que T es un* ***operador acotado****.*

Con $\mathscr{B}(X,Y)$ indicaremos al conjunto de los **operadores lineales acotados** de X en Y .
En caso de que $X = Y$, entonces $\mathscr{B}(X)$.

Definición 1.6.8. *Sea $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ entonces existe $c \in \mathbb{R}^+$, talque .*

$$\| T(x) \|_Y \le \boldsymbol{c} \| x \|_X \longrightarrow \frac{\| T(x) \|_Y}{\| x \|_X} \le c \qquad con \quad x \neq 0$$

Por lo tanto el subconjunto de $\mathbb{R}$

$$W = \left\{ \frac{\| T(x) \|_Y}{\| x \|_X}, x \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}$$

es distinto de vacío y acotado superiormente por $\boldsymbol{c}$ *, entonces existe el* $sup(W)$ *, el cual se notará* $\| T \|$ *y recibe el nombre de* ***norma del operador*** *T. Esto es*

$$\| T \| = sup \left\{ \frac{\| T(x) \|_Y}{\| x \|_X}, \qquad x \neq 0 \right\}$$

Teorema 1.6.9 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sean $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ espacios de Hilbert y*

$$h : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \longrightarrow K$$

una forma sesquilineal acotada. Entonces h tiene un representación

$$h(x,y) = \langle Sx, y \rangle \tag{1.1}$$

donde $S : \mathscr{H}_1 \longrightarrow \mathscr{H}_2$ es un operador lineal acotado. ***S*** *está determinada únicamente por h y tiene norma*

$$\| S \| = \| h \| . \tag{1.2}$$

Demostración. Se considera $\overline{h(x,y)}$, lineal en y.
Entonces el teorema da una representación, en el que y es variable y x es fija, de lo cual se tiene,

$$\overline{h(x,y)} = \langle y, z \rangle$$

Por lo tanto

$$h(x,y) = \langle z, y \rangle \tag{1.3}$$

donde $z \in \mathscr{H}_2$ es único, pero depende de $x \in \mathscr{H}_1$ que es fijo. Ahora se deduce (1.3) con x variando que se define por un operador

$$S : \mathscr{H}_1 \longrightarrow \mathscr{H}_2 \quad \textit{dado por} \quad z = Sx$$

Sustituyendo $z = Sx$ en (1.3), se obtiene (1.1).

S es lineal, su dominio es el espacio vectorial $\mathscr{H}_1$, de (1.1) y la sesquilinealidad se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y\rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y)\\
&= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y)\\
&= \alpha\langle Sx_1, y\rangle + \beta\langle Sx_2, y\rangle\\
&= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y\rangle
\end{aligned}$$

para todo **y** en $\mathscr{H}_2$. También se tiene

$$S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2$$

S es acotado . En efecto se deja a un lado el caso trivial $S = 0$, de la definición de operador acotado y la igualdad (1.1) se tiene

$$\| h \| = \sup_{x\neq 0, y\neq 0} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\| x \| \| y \|} \geq \sup_{x\neq 0, Sx\neq 0} \frac{|\langle Sx, Sx\rangle|}{\| x \| \| Sx \|} = \sup_{x\neq 0} \frac{\| Sx \|}{\| x \|} = \| S \|$$

Esto demuestra la acotación. Por otra parte , $\| h \| \geq \| S \|$.

Se obtiene (1.2) , escribiendo que $\| h \| \leq \| S \|$ y aplicando la desigualdad de Cauchy Schwarz :

$$\| h \| = \sup_{x\neq 0 y\neq 0} \frac{|\langle Sx, y\rangle|}{\| x \| \| y \|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\| Sx \| \| y \|}{\| x \| \| y \|} = \| S \|$$

S es único. En efecto , se asume que hay un operador lineal $T : \mathscr{H}_1 \longrightarrow \mathscr{H}_2$ tal que para todo $x \in \mathscr{H}_1$ y $y \in \mathscr{H}_2$ se tiene

$$h(x, y) = \langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle,$$

es claro que $Sx = Tx$ para todo $x \in \mathscr{H}_1$. Entonces $S = T$. ■

Definición 1.6.10. *Sea $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Existe un único operador lineal $T_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T_1 y\rangle$ para todo x, y en $\mathscr{H}$. Dicho operador se le llama el **adjunto** de T y se nota como T^*. Por lo tanto $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$.*

Definición 1.6.11. *$T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, es llamado* **autoadjunto** *(o* **hermítico***) si coincide con su adjunto.*

$$T^* = T$$

Definición 1.6.12. *Sean X y Y espacios producto interno sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Se dice que T es una* **isometría** *si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo x, y de X.*

Definición 1.6.13. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert , $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice **simétrico** si su dominio $D(T)$ es denso en $\mathscr{H}$ y para todo par x, y en $D(T)$ se tiene*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

Definición 1.6.14. *Sean $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, se dice que U es* **unitario** *si :*

(i) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$; $\forall x, y \in \mathscr{H}$. *(U es una isométria) .*

(ii) $R(U) = \mathscr{H}$*; (U es sobreyectivo).*

Definición 1.6.15. *Sean $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y T_1 y T_2 operadores lineales en S con $Dom(T_1) = Dom(T_2) = S$, se dice que T_1 y T_2* ***conmutan*** *cuando*

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Definición 1.6.16. *Sea X un espacio producto interno de dimensión finita y $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Se dice que T es* **normal** *si conmuta con su adjunto; es decir,*

$$T T^* = T^* T$$

Definición 1.6.17. *Un operador $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ se dice* **positivo** *si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathscr{H}$. Denotaremos en este caso $T \geq 0$.*

Observación:
Si $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ son tales que $\langle (T_1 - T_2)x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$, entonces diremos que $T_1 \geq T_2$.

CAPÍTULO 2

ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA

2.1. Producto Interno Indefinido

Definición 2.1.1. *Sea V un espacio vectorial. Una **forma sesquilineal** en V es una función*

$$[\cdot,\cdot] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que para cualquier $x, y, w \in V \quad y \quad \alpha \in \mathbb{C}$ se tiene que

1) $[x+w, y] = [x, y] + [w, y]$

2) $[\alpha x, y] = \alpha[x, y]$

3) $[x, y] = [\overline{y, x}]$

Proposición 2.1.2. *Sean $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio producto interno, $\forall x \in S$, entonces $[x, x] \in \mathbb{R}$*

Demostración:

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in S \quad &\longrightarrow \quad [x,x] = \overline{[x,x]} \;\; (\text{ Por } (2.1.1)) \\ &\longrightarrow \quad [x,x] \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

■

Por lo tanto se tienen las siguientes posibilidades:

1) $[x, x] > 0$ (se dice que x es positivo)

2) $[x, x] < 0$ (se dice que x es negativo)

3) $[x, x] = 0$ (se dice que x es neutro)

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, con la suma usual $+$.
Sea $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\big[(x_1, y_1), (x_2, y_2)\big] = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

Se demostrará que $(\mathbb{R}^2, [\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno indefinido.

Demostración:
Sean $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ y $w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}$, α un escalar.

$$\begin{aligned}
[u+v, w] &= \left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2), (x_3, y_3)\right] \\
&= \left[(x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3)\right] \\
&= (x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3 \\
&= x_1 x_3 + x_2 x_3 - y_1 y_{3-} y_2 y_3 \\
&= (x_1 x_3 - y_1 y_3) + (x_2 x_{3-} y_2 y_3) \\
&= \left[(x_1, y_1), (x_3, y_3)\right] + \left[(x_2, y_2), (x_3, y_3)\right] \\
&= [u, w] + [v, w].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\alpha u, v] &= \left[\alpha(x_1, y_1), (x_2, y_2)\right] \\
&= \left[(\alpha x_1, \alpha y_1), (x_2, y_2)\right] \\
&= \alpha x_1 x_2 - \alpha y_1 y_2 \\
&= \alpha(x_1 x_2 - y_1 y_2) \\
&= \alpha\,[u, v]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[u, v] &= \left[(x_1, y_1), (x_2, y_2)\right] \\
&= x_1 x_2 - y_1 y_2 = x_2 x_1 - y_2 y_1 \\
&= \overline{x_2 x_1 - y_2 y_1}, \\
&= \overline{\left[(x_2, y_2), (x_1, y_1)\right]} \\
&= \overline{[v, u]}
\end{aligned}$$

pues $(x_2 x_1 - y_2 y_1) \in \mathbb{R}$.
Por lo tanto $(\mathbb{R}^2, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno. ■

Proposición 2.1.4. *De las relaciones anteriores se tiene que*

$$[y, \alpha_1 x + \alpha_2 z] = \overline{\alpha}_1 [y, x] + \overline{\alpha}_2 [y, z]$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
[y, \alpha_1 x + \alpha_2 z] &= \overline{[\alpha_1 x + \alpha_2 z, y]} \\
&= \overline{\alpha_1 [x, y] + \alpha_2 [z, y]} \\
&= \overline{\alpha_1 [x, y]} + \overline{\alpha_2 [z, y]} \\
&= \overline{\alpha}_1\, \overline{[x, y]} + \overline{\alpha}_2\, \overline{[z, y]} = \overline{\alpha}_1 [y, x] + \overline{\alpha}_2 [y, z]
\end{aligned}$$

■

El número $[x, y]$ *se denomina producto interno de* x , y .

Definición 2.1.5. *Sean* V *un espacio vectorial y*

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

una forma sesquilineal, tal que para cualquier $w \in V$, *si se cumple adicional las siguientes condiciones,* *1)* $[w,w] \geq 0$.

2) $[w,w] = 0 \longleftrightarrow w = 0$

entonces se dice que $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un* ***espacio con producto interno***.

Definición 2.1.6. *Si* $(S,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno indefinido entonces se cumple la* ***propiedad de polarización***, *es decir para todo* $x, y \in S$, *se tiene*

$$[x,y] = \frac{1}{4}[x+y,x+y] - \frac{1}{4}[x-y,x-y] + \frac{i}{4}[x+iy,x+iy] - \frac{i}{4}[x-iy,x-iy] \tag{2.1}$$

Sea $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, entonces se pueden definir los siguientes conjuntos

$$\mathfrak{B}^{+} = \{x \in S : [x,x] \geq 0\} \qquad \mathfrak{B}^{++} = \{x \in S : [x,x] > 0 \quad o \quad x = 0\}$$

$$\mathfrak{B}^{-} = \{x \in S : [x,x] \leq 0\} \qquad \mathfrak{B}^{--} = \{x \in S : [x,x] < 0 \quad o \quad x = 0\}$$

$$\mathscr{N} = \{x \in S : [x,x] = 0\} \qquad \mathfrak{B}^{\circ\circ} = \{x \in S : [x,x] = 0 \quad , \quad x \neq 0\}$$

Observación 2.1.7. Nótese que $\mathfrak{B}^{+}$ es distinto a $\mathfrak{B}^{++}$, teniendo en cuenta el ejemplo 2.1.3, consideremos :

$$(1,1) \in \mathfrak{B}^{+} \ \text{ y } \ (1,1) \not\in \mathfrak{B}^{++}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} [(1,1),(1,1)] &= 1\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(1,1) \not\in \mathfrak{B}^{++}$ pues $(1,1) \neq (0,0)$.

Definición 2.1.8. *Sea* $(S,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno, si contiene tantos elementos positivos como negativos, lo llamaremos* ***producto interno indefinido*** *en* S, *ó que* $(S,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio producto interno indefinido.*

Proposición 2.1.9. *Todo espacio con producto interno indefinido contiene vectores neutros no nulos.*

Demostración:
Sea $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido. Entonces existen $a, b \in V$ tales que $[a,a] > 0$ y $[b,b] < 0$.

Por lo tanto $[a,a]\,[b,b] < 0$, luego

$$-4\,[a,a]\,[b,b] \geq 0.$$

Consideremos la ecuación cuadrática para la variable x

$$[b,b]\,x^2 + 2\,\mathrm{Re}\,[a,b]\,x + [a,a] = 0. \tag{2.2}$$

Como $(2\,\mathrm{Re}\,[a,b])^2 \geq 0$ y $-4\,[a,a]\,[b,b] \geq 0$, entonces

$$(2\,\mathrm{Re}\,[a,b])^2 - 4\,[a,a]\,[b,b] \geq 0$$

y también se tiene que $[b,b] \neq 0$. Por lo tanto la ecuación (2.2) tiene solución en $\mathbb{R}$.

Sea $x_o \in \mathbb{R}$ solución de (2.2). Definamos $c = a + x_o b$, se probará que $[c,c] = 0$ y $c \neq 0$.

En efecto

$$\begin{aligned}
[c,c] &= [a + x_o b, a + x_o b] \\
&= [a, a + x_o b] + [x_o b, a + x_o b] \\
&= [a,a] + [a, x_o b] + [x_o b, a] + [x_o b, x_o b] \\
&= [a,a] + \overline{x_o}\,[a,b] + x_o\,[b,a] + x_o \overline{x_o}\,[b,b] \\
&= [a,a] + x_o\,[a,b] + x_o\,[b,a] + x_o^2\,[b,b] \\
&= [a,a] + x_o \left([a,b] + \overline{[a,b]} \right) + x_o^2\,[b,b] \\
&= [b,b]\,x_o^2 + 2x_o\,\mathrm{Re}\,[a,b] + [a,a] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Usando que $x_o \in \mathbb{R}$ y que x_o es solución de (2.2).

Por otro lado si $c = 0$, se tendría $a = -x_o b$.
Luego,

$$\begin{aligned}
0 < [a,a] &= [-x_o b, -x_o b] \\
&= (-x_o)\overline{(-x_o)}\,[b,b] \\
&= x_o^2\,[b,b] \leq 0.
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción.
Así que V posee elementos neutros no nulos. ■

Definición 2.1.10. *Sea* $(S, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno, si este no es indefinido , entonces se llamará* ***producto interno semi-definido****, que puede ser :*

1) Semi-definido positivo si, $[x,x] \geq 0$ *para todo* $x \in S$.

2) Semi-definido negativo si, $[x,x] \leq 0$ *para todo* $x \in S$.

3) Neutro si, $[x,x] = 0$ *para todo* $x \in S$. *(En este caso es semi-definido positivo y negativo).*

Lema 2.1.11. *Sea* $(S, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno semi-definido, la desigualdad de Cauchy Schwarz*

$$|[x,y]|^2 \leq [x,x]\,[y,y] \qquad (x, y \in S)$$

se cumple.

La demostración es la misma que en espacios de Hilbert.

Definición 2.1.12. *Sea* $(S, [\cdot,\cdot])$ *un espacio producto interno, se dice que es* ***definido****, si* $[x, x] = 0$ *implica que* $x = 0$. *El espacio con producto inerno* ***definido*** *puede ser :*

1) *Definido positivo si,* $[x, x] > 0 \quad para \quad x \neq 0$.

2) *Definido negativo si,* $[x, x] < 0 \quad para \quad x \neq 0$.

Un espacio producto interno positivo (negativo, neutral, definido, definido positivo, definido negativo) es un espacio vectorial con un producto interno positivo (negativo, neutral, definido, definido positivo, definido negativo).

Definición 2.1.13. *Sea* $(S, [\cdot,\cdot])$ *un espacio producto interno. Escribiendo cada valor* $[x, y]$ *del producto interno por* $[x, y]' = -[x, y]$ *obtenemos un espacio producto interno* $(S, [\cdot,\cdot])'$. *Se dice que* $(S, [\cdot,\cdot])'$ *es el* ***anti-espacio*** *de* $(S, [\cdot,\cdot])$.

Teorema 2.1.14 (Krein-Smulian)**.** *Si el espacio producto interno* $(S, [\cdot,\cdot])$ *contiene al menos un vector positivo (negativo) , entonces todo elemento de S es la suma de dos vectores positivos (negativos).*

Demostración:
Si $x, x_0 \in S, \quad [x_0, x_0] > 0$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ suficentemente grande, se tiene la ecuación

$$\begin{aligned} [x+\alpha x_0, x+\alpha x_0] &= [x, x+\alpha x_0] + [\alpha x_0, x+\alpha x_0] \\ &= [x, x] + [x, \alpha x_0] + [\alpha x_0, x] + [\alpha x_0, \alpha x_0] \\ &= [x, x] + \overline{\alpha}[x, x_0] + \alpha[\overline{x, x_0}] + \alpha\overline{\alpha}[x_0, x_0] \\ &= [x, x] + \alpha[x, x_0] + \alpha[x, x_0] + \alpha[x, x_0] + \alpha^2[x_0, x_0] \\ &= [x, x] + 2\alpha\, Re[x, x_0] + \alpha^2[x_0, x_0] \end{aligned}$$

Será positiva. Por lo tanto los vectores $x_1 = x + \alpha x_0, \quad x_2 = -\alpha x_0$ son positivos y tenemos que $x = x_1 + x_2$. Para demostrar con los vectores negativos se debe tomar el anti-espacio de S . ■

Corolario 2.1.15. *Si* $(S, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio producto interno indefinido, entonces ninguno de los conjuntos* $\mathfrak{B}^+, \mathfrak{B}^-, \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{B}^{--}$ *es un subespacio en S.*

2.2. Ortogonalidad.

Definición 2.2.1. *Sean* $(S, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno indefinido y sean* $u, v \in S$. *Se dice que* u, v *son* ***vectores ortogonales*** *cuando* $[u, v] = 0$. *Esto se denota mediante* $u \perp v$.

Definición 2.2.2. *Sean* $(S, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno indefinido y sean X y Y subconjuntos de S. Se dice que X y Y son* ***conjuntos ortogonales*** *cuando* $x \perp y$ *para todo* $x \in X$, *para todo* $y \in Y$. *Esto se denota mediante* $X \perp Y$.

Notación 2.2.3. *Cuando* $\left[u, p\right] = 0$ *para todo* $p \in S$ *escribiremos* $[u, S] = 0$.

Proposición 2.2.4. *Si* $(S, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno neutro, entonces* $[u, v] = 0$ *para todo* $u, v \in S$.

Demostración:
Sean $u, v \in S$, entonces $[u,u]=0$, $[v,v]=0$ pues S es neutro.
Por la desigualdad de polarización se tiene que

$$[u,v]=\frac{1}{4}[u+v,u+v]-\frac{1}{4}[u-v,u-v]+\frac{i}{4}[u+iv,u+iv]-\frac{i}{4}[u-iv,u-iv]=0.$$

■

Definición 2.2.5. *Sean $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y W subconjunto de S, el **complemento ortogonal** de W, denotado por $(W^{\perp})$, es*

$$W^{\perp}=\{u\in S:[u,W]=0\}.$$

Proposición 2.2.6. *Si $(S,[\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno indefinido y $W\subset S$, entonces*

(a) $W\subseteq W^{\perp\perp}$.

(b) $W^{\perp}\subseteq W^{\perp\perp\perp}$.

Demostración:
(a) Sean $u\in W$. Entonces $[u,v]=0$ para todo $v\in W^{\perp}$. Luego $u\in W^{\perp\perp}$. Por lo tanto $W\subseteq W^{\perp\perp}$.
(b) Para probar $W^{\perp}\subseteq W^{\perp\perp\perp}$ basta aplicar la parte (a) al conjunto $W^{\perp}$. ■

Notación 2.2.7. *De ahora en adelante entenderemos por una variedad lineal como un subespacio.*

Definición 2.2.8. *Sean $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $\mathscr{L}$ una variedad lineal contenida en S. Si $\mathscr{L}$ es la suma de variedades lineales $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\mathscr{L}_3,\ldots,\mathscr{L}_n$ ortogonales dos a dos, se dice que $\mathscr{L}$ es la **suma ortogonal** de las variedades $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\mathscr{L}_3,\ldots,\mathscr{L}_n$ y escribiremos*

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\,[+]\,\mathscr{L}_2\,[+]\,\mathscr{L}_3\,[+]\ldots[+]\,\mathscr{L}_n.$$

*Si además la suma es directa, entonces decimos que $\mathscr{L}$ es la **suma directa ortogonal** de las variedades $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\mathscr{L}_3,\ldots,\mathscr{L}_n$ y escribiremos*

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\,[\dot{+}]\,\mathscr{L}_2\,[\dot{+}]\,\mathscr{L}_3\,[\dot{+}]\ldots[\dot{+}]\,\mathscr{L}_n.$$

Definición 2.2.9. *Sean $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y W una variedad lineal en S, la variedad lineal*

$$W^{o}=W\cap W^{\perp}$$

*se llama la **parte isotrópica** de W y sus elementos se llaman **vectores isotrópicos**.*

Note que en cualquier caso este conjunto es no vacío:

$$W^{o}\neq\emptyset.$$

Esto se debe a que $0\in W$ y $0\in W^{\perp}$ luego $0\in(W\cap W^{\perp})=W^{o}$.

Definición 2.2.10. *Si $W^{o}\neq\{0\}$ se dice que W es una variedad lineal degenerada. En caso contrario, se dice que W es una variedad lineal no degenerada.*

Proposición 2.2.11. *Sean $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathscr{N}$ el conjunto de vectores neutros de S. Si W es una variedad lineal en S y W^{o} es la parte isotrópica de W entonces*

$$W^{o}\subseteq\mathscr{N}.$$

Demostración:
Si $u \in W^o$ entonces $u \in (W \cap W^{\perp})$, luego $[u,u] = 0$ y por lo tanto $u \in \mathcal{N}$. ■

Proposición 2.2.12. *Sea $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno semi-definido, entonces la parte isotrópica de S es el conjunto de vectores neutros. Es decir,*

$$S^o = \mathcal{N}.$$

Demostración:
Sea $u \in \mathcal{N}$. Entonces $u \in S$ y se tiene que $[u,u] = 0$.
Para probar que $u \in S^{\perp}$ se toma $v \in S$. Como el producto es semi-definido vale la desigualdad de Cauchy -Schwartz. Por lo tanto se tiene que

$$0 \leq |\,[u,v]\,|^2 \leq [u,u]\,[v,v] = 0.$$

De donde $[u,v] = 0$. Luego $u \in S^{\perp}$.
Por lo tanto $u \in (S \cap S^{\perp}) = S^o$. Esto prueba que $\mathcal{N} \subseteq S^o$.
Como ya se vio en la Proposición 2.2.11, se tiene que $S^o \subseteq \mathcal{N}$, por lo tanto $\mathcal{N} = S^0$. ■

Definición 2.2.13. *Sea $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal de S. Sea $u \in S$, si u admite una representación como $u = v + z$, con $v \in W$ y $z \in W^{\perp}$, se dice que v es una **proyección ortogonal** de u sobre W.*

Proposición 2.2.14. *Sea $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en S. Si $u \in S$ y existen dos proyecciones ortogonales v_1 y v_2 de u sobre W, entonces estas difieren en un vector isotrópico.*

Demostración:
Sean v_1 y v_2 proyecciones ortogonales de u sobre W, entonces existen $z_1 \in W^{\perp}$ y $z_2 \in W^{\perp}$ tales que

$$u = v_1 + z_1, \qquad u = v_2 + z_2.$$

Por lo tanto

$$v_1 - v_2 = z_2 - z_1.$$

Sea

$$w = z_2 - z_1.$$

Se probará que $w \in W^0$.
En efecto v_1 y v_2 están en W, el cual es una variedad lineal en S. Entonces $(v_1 - v_2) \in W$. Luego $(z_2 - z_1) \in W$.
Además $z_1, z_2 \in W^{\perp}$ entonces

$$[z_1, w] = 0 \qquad \text{y} \qquad [z_2, w] = 0 \qquad \text{para todo } w \in W,$$

por lo tanto

$$[z_2 - z_1, w] = [z_1, w] - [z_2, w] = 0 + 0 = 0$$

entonces $(z_2 - z_1) \in W^{\perp}$. De donde

$$(z_2 - z_1) \in W \cap W^{\perp} = W^0.$$

■

Teorema 2.2.15. *Sea $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathscr{L}$ una variedad lineal de S.*

(a) Si $\mathscr{L}$ es no degenerado entonces los elementos de S tienen a lo sumo una proyección sobre $\mathscr{L}$.

(b) Si existe un elemento en S que tiene exactamente una proyección sobre la variedad lineal $\mathscr{L}$ entonces $\mathscr{L}$ es no degenerado.

Demostración:
a) Sean $u \in S$ y v_1, v_2 proyecciones de u sobre $\mathscr{L}$, entonces existen $z_1, z_2 \in \mathscr{L}^{\perp}$ tales que

$$u = v_1 + z_1 \quad u = v_2 + z_2 \tag{2.3}$$

Luego $v_1 - v_2 = z_2 - z_1$. Pero es claro que $v_1 + (-v_2) \in \mathscr{L}$ y $z_1 + (-z_2) \in \mathscr{L}^{\perp}$ por tanto $v_1 - v_2 \in \mathscr{L}^0 = \{0\}$, esto indica que $v_1 = v_2$.
b) Sea $u \in S$ tal que tiene exactamente una proyección sobre $\mathscr{L}$ y esta es v, entonces existe $z \in \mathscr{L}^{\perp}$ tal que $u = v + z$.

Supongamos que $\mathscr{L}$ es degenerado, entonces existe $z_0 \neq 0$ tal que $z_0 \in \mathscr{L}^0 = \mathscr{L} \cap \mathscr{L}^{\perp}$. Como

$$u = v + z = v + z + 0 = (v + z_0) + (z - z_0)$$

se sigue que $v + z_0 \neq v$. Esta es la proyección de u sobre $\mathscr{L}$, lo cual es absurdo. ■

Definición 2.2.16. *Sea $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal de S. Se dice que W es* ***orto-complementada*** *cuando todo $u \in S$ se puede escribir como $u = v + z$, con $v \in W$ y $z \in W^{\perp}$.*
En este caso escribimos

$$S = cl\{W, W^{\perp}\} \qquad ó \qquad S = \bigvee\{W, W^{\perp}\}.$$

Teorema 2.2.17. *Sea $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en S. Todo vector de S tiene una proyección sobre W si y sólo si W es orto-complementado. En particular, cuando W es no degenerado se tiene que todo vector de S tiene una única proyección sobre W si y sólo si $W = W\,[\dot{+}]\,W^{\perp}$.*

Observación: Este teorema garantiza la existencia de proyectores ortogonales en subespacios ortocomplementados.

2.3. Operadores lineales en espacios con métrica indefinida

Proposición 2.3.1. *Todo operador isométrico cuyo dominio es no degenerado es invertible.*

Demostración:
Si $Tu = 0$, entonces para cualquier $v \in Dom(T)$ tenemos

$$[u, v] = [T(u), T(v)] = [0, T(v)] = 0$$

debe ser $u = 0$. Así u es ortogonal a $Dom(T)$. Como $Dom(T)$ es no degenerado, entonces T es invertible. ■

Proposición 2.3.2. *Sea $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio producto interno, si T es un operador isométrico en S y $W \subseteq S$ es una variedad lineal tal que $W \subseteq T(W \cap Dom(T))$, entonces $W^{\perp}$ es invariante por T.*

Demostración:
Para $y \in W$ entonces $y \in T(W \cap Dom(T))$
$\exists m \in (W \cap Dom(T))\ /\ T(m) = y$

$$\begin{aligned} [Tx, y] &= [Tx, Tm] \\ &= [x, m] \quad (\text{Pues} T \text{es isométrico}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Proposición 2.3.3. *Sean $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, T es un operador simétrico y $W \subseteq Dom(T)$ es invariante por T, entonces también lo es $W^{\perp}$.*

Demostración:
Sea $u \in W^{\perp}$ entonces
$$[T(u), W] = [u, T(W)]$$
como $T(W) \subseteq W$, entonces
$$\{[u, T(W)]\} \subseteq \{[u, W]\} = \{0\}.$$

■

Definición 2.3.4. *Sea $U \in L(S)$ y E una variedad lineal en S, se dice que E es U-**invariante** cuando $UE \subseteq E$. Se dice que E **reduce** a U si E y $E^{\perp}$ son $U-$invariantes.*

Definición 2.3.5. *Se dice que una descomposición en suma directa*
$$S = \mathscr{L}_1 [\dot{+}] \mathscr{L}_2 [\dot{+}] \mathscr{L}_3 [\dot{+}] \ldots [\dot{+}] \mathscr{L}_n$$
***reduce** a T si:*

1. *$\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \mathscr{L}_3, \ldots, \mathscr{L}_n$ son $T-$invariantes.*
2. *$Dom(T) = (Dom(T) \cap \mathscr{L}_1) [\dot{+}] (Dom(T) \cap \mathscr{L}_2) [\dot{+}] \ldots [\dot{+}] (Dom(T) \cap \mathscr{L}_n)$.*

En este caso T es suma directa de $T \mid \mathscr{L}_1, T \mid \mathscr{L}_2, T \mid \mathscr{L}_3, \ldots, \mid \mathscr{L}_n$.

Definición 2.3.6. *Sea $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno, P es isométrico talque $P^2 = P$, si su dominio es S, se dice que P es un **proyector ortogonal**.*

Observación 2.3.7. Sean $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y W una variedad lineal en S, tal que W es ortocomplementado y no degenerado, entonces todo vector de S tiene una única proyección sobre W. La aplicación $P_W : S \to W$ dada por
$$P_W(u) = v$$
donde v es la proyección ortogonal de u sobre W está bien definida y es lineal. Además es fácil ver que es un proyector ortogonal.

Teorema 2.3.8. *Sea $(S, [\cdot,\cdot])$, un espacio con producto interno, si P es un proyector ortogonal en $(S, [\cdot,\cdot])$, entonces el rango de P es ortocomplementado y para cada $u \in S$, P_u es la proyección del rango de P sobre W. Si además W es no degenerado y ortocomplementado, entonces P_W es un proyector ortogonal y $Ran(P) = W$.*

Demostración:
Sea $u \in S$, entonces podemos escribir

$$u = P_u + (u - P_u).$$

Además como $P_u = P(u)$ se tiene que

$$\begin{aligned}[u - P_u, P_v] &= [P(u - P_u), P_v] \\ &= \left[Pu - P_u^2, v\right] \\ &= [Pu - P_u, v] \\ &= [0, v] \\ &= 0\end{aligned}$$

para todo $v \in S$.
De donde

$$S = cl\{Ran(P), (Ran(P))^{\perp}\},$$

esto es $Ran(P)$ es ortocomplementado y P_u es la proyección de u sobre $Ran(P)$.
Por otro lado si $u, v \in S$, existen $p, z \in W^{\perp}$ tales que

$$x = P_W(u) + p, \quad \text{y}, \quad v = P_W(v) + z.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}[P_W(u), v] &= [P_W(u), P_W(v) + z] \\ &= [P_W(u), P_W(v)] + [P_W(u), z] \\ &= [P_W(u), P_W(v)] + 0.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}[P_W(u), v] &= [P_W(u), P_W(v)] \\ &= \left[u, P_W^2(v)\right] = [u, P_W(v)].\end{aligned}$$

Sea $w \in W$

$$\begin{aligned}\left[P_W(u) - P_W^2(v), w\right] &= [P_W(u - P_W(v)), w] \\ &= [u - P_W u), P_W(w)] \\ &= [w, P_W(w)] = 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$P_W(u) - P_W^2(v) \in W \cap W^{\perp}$$

$\mathcal{N}^0 = \{0\}$ y W es no degenerado, luego

$$P_W = P_W^2.$$

Si vale que $S = S^0[+]S_1$, entonces $S = S^0[\dot{+}]S_1$, de modo que S_1 es no degenerado y ortocomplementado, así $P_S = P_{S_1}$, entonces P es proyector ortogonal con $Ran(P) = S_1$ y además

$$[P(u), P(v)] = [u, v]$$

para todo u, v en S por lo tanto P es isométrico. ∎

Definición 2.3.9. *Se dice que* $(S,[\cdot,\cdot])$ *es* ***descomponible*** *si admite una representación de la forma*

$$S = S^0 [\dot{+}] S^+ [\dot{+}] S^-, \qquad S^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \qquad S^- \subseteq \mathfrak{B}^{--},$$

donde S^0 *es la parte isotrópica de* S*,* S^-*,* S^+ *son variedades lineales. Toda descomposición como la anterior recibe el nombre de descomposición fundamental.*

Proposición 2.3.10. *Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado* $(S,[\cdot,\cdot])$ *es de la forma*

$$S = S^+ [\dot{+}] S^- \qquad \textit{con} \quad S^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \qquad S^- \subseteq \mathfrak{B}^{--},$$

$(\mathcal{N}^0)^0 = \mathcal{N}^0 \cap (\mathcal{N}^0)^\perp = \mathcal{N}^0$ *y* $(\mathcal{N}^0)^\perp = \mathcal{N}^0$.

Observación 2.3.11. Sea $(S,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado tal que

$$S = S^+ [\dot{+}] S^- \qquad \text{con} \quad S^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \quad S^- \subseteq \mathfrak{B}^{--}$$

entonces los proyectores $P^\pm : S \to S^\pm$ dados por

$$P^\pm(x) = x^\pm$$

están bien definidos y son proyectores ortogonales.

Definición 2.3.12. *Los operadores* $P^\pm : S \to S^\pm$ *de la observación anterior se llaman* ***proyectores fundamentales*** *y*

$$J = P^+ - P^-$$

se llama ***simetría fundamental****.*

por lo tanto J está asociado a la descomposición fundamental.

Si $x \in S$, $S = S^+ [\dot{+}] S^-$, entonces

$$x = x^+ + x^- = P^+(x) + P^-(x)$$

y

$$J(x) = (P^+ - P^-)(x) = P^+(x) - P^-(x) = x^+ - x^-.$$

Luego

$$x = P^+(x) + P^-(x)$$

y

$$J(x) = P^+(x) - P^-(x),$$

entonces

$$J(x) + x = 2P^+(x)$$

Por lo tanto

$$P^+ = \frac{1}{2}(J + I),$$

en forma similar se obtiene que

$$P^- = \frac{1}{2}(I - J).$$

Por lo tanto como

$$\left[P^+(x), P^-(x)\right] = 0$$

se sigue que $J^2 = I$.

Demostración:

$$\begin{aligned}
J^2(x) &= J(J(x)) \\
&= J(x^+ - x^-) \\
&= J(x^+) - J(x^-) \\
&= x^+ + 0 - (-x^-) \\
&= x^+ + x^- \\
&= x \\
&= I(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $J^2 = I$ ■

Además J es autoadjunto, en efecto,

$$\begin{aligned}
[J(x), y] &= [x^+ - x^-, y] \\
&= [x^+, y] - [x^-, y] \\
&= [x^+, y^+ + y^-] - [x^-, y^+ + y^-] \\
&= [x^+, y^+] + [x^+, y^-] - [x^-, y^+] - [x^-, y^-] \\
&= [x^+, y^+] + [x^-, y^-] \\
&= [x^+, y^+] + [x^+, -y^-] + [x^-, y^+] + [x^-, -y^-] \\
&= [x^+, y^+ - y^-] + [x^-, y^+ - y^-] \\
&= [x^+ + x^-, y^+ - y^-] \\
&= [x, J(y)]
\end{aligned}$$

Si $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $[\cdot,\cdot]_J =: S \times S \to \mathbb{C}$ dada por

$$[x, y]_J = [J(x), y]$$

Observación 2.3.13. J es J-isométrico, en efecto,

$$\begin{aligned}
[J(x), J(y)]_J &= [JJ(x), J(y)] \\
&= [x, J(y)] \\
&= [J(x), y] \\
&= [x, y]_J
\end{aligned}$$

Entonces para todo $x, y \in S$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[x, y]_J &= [Jx, y] \\
&= [x^+ - x^-, y^+ + y^-] \\
&= [x^+, y^+ + y^-] - [x^-, y^+ + y^-] \\
&= [x^+, y^+] + [x^+, y^-] - [x^-, y^+] - [x^-, y^-] \\
&= [x^+, y^+] - [x^-, y^-] \geq 0.
\end{aligned}$$

A la función $[\cdot,\cdot]_J : S \times S \to \mathbb{C}$, se le llama J-**producto interno** y $\|\cdot\|_J$ se le llama J-**norma**.

Proposición 2.3.14. *Si J es la simetría fundamental asociada a la descomposición $S = S^+ [\dot{+}] S^-$, entonces $\left[v^+, v^-\right]_J = 0$.*

Demostración:
Como $\left[v^+, 0\right] = 0$ y $[0, v^-] = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left[v^+, v^-\right]_J &= \left[v^+ + 0, v^- + 0\right]_J \\ &= \left[v^+, 0\right] - [0, v^-] \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.15. *Sea $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y J es la simetría fundamental. Si $[\cdot,\cdot]_J : V \times V \to \mathbb{C}$ está dada por*

$$\left[x, y\right]_J = \left[J(x), y\right]$$

entonces

$$|\left[x, y\right]| \leq \| x \|_J \| y \|_J .$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |\left[x, y\right]| &= |\left[x^+, y\right] + \left[x^-, y\right]| \\ &\leq |\left[x^+, y^+\right]| + |\left[x^-, y^-\right]| \\ &\leq \left[x^+, x^+\right]^{\frac{1}{2}} \left[y^+, y^+\right]^{\frac{1}{2}} + (-[x^-, x^-])^{\frac{1}{2}} (-\left[y^-, y^-\right])^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\left[x^+, x^+\right] - [x^-, x^-]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[y^+, y^+\right] - \left[y^-, y^-\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \| x \|_J \| y \|_J . \end{aligned}$$

■

Definición 2.3.16. *Sean $(S, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno, U y W variedades lineales de S. Decimos que U y W son* ***compañeros duales*** *si*

$$U \cap W^{\perp} = \{0\} = U^{\perp} \cap W.$$

Y notamos que $U \neq W$

Obsérvese que si W es no degenerado entonces

$$W^{\perp} \cap W = W^0 = \{0\}.$$

Por lo tanto $W^{\perp} \neq W$.

Definición 2.3.17. *Un espacio con producto interno $(\Re, [\cdot,\cdot])$ que admite una descomposición fundamental de la forma*

$$\Re = \Re^+ [\dot{+}] \Re^-, \qquad \Re^+ \subseteq \Re^{++}, \qquad \Re_2^- \subseteq \Re^{--}$$

con $(\Re^+, [\cdot,\cdot])$ y $(\Re^-, -[\cdot,\cdot])$ espacios de Hilbert, recibe el nombre de ***espacio de Krein****.*

Observación 2.3.18. Los espacios de Krein son no degenerados.

Sea $(\Re,[\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein. Tal como se dijo antes este espacio es no degenerado y descomponible. Por lo tanto existen los proyectores ortogonales $P^{\pm}:\Re\times\Re\rightarrow\Re^{\pm}$ dados por

$$P^{\pm}(x)=x^{\pm}$$

y la simetría fundamental $J=P^{+}-P^{-}$ asociada en forma natural.

Sea $[\cdot,\cdot]_J:\Re\times\Re\rightarrow\mathbb{C}$ dada por

$$\left[x,y\right]_J=\left[J(x),y\right]$$

Consideremos el espacio de Hilbert asociado $(\Re,[\cdot,\cdot]_J)$.

Ejemplo 2.3.19. Teniendo en cuenta el ejemplo 2.1.3, consideremos el espacio vectorial $\mathfrak{R}=\mathbb{R}^2$, con la suma usual.
Sea $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ dado por

$$\left[(x_1,y_1),(x_2,y_2)\right]=x_1x_2-y_1y_2$$

donde

$$\mathfrak{R}^{+}=\{(x,0)\ \ ,/\ \ x\in\mathbb{R}\}\quad \text{y}\quad \mathfrak{R}^{-}=\{(0,y)\ /\ y\in\mathbb{R}\}$$

en el cual $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^{+}[\dot{+}]\mathfrak{R}^{-}$, los operadores

$$\begin{array}{rcl} P^{+}:\mathfrak{R}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{R}^{+} \\ (x,y) & \longrightarrow & P^{+}(x,y)=(x,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P^{-}:\mathfrak{R}=\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathfrak{R}^{-} \\ (x,y) & \longrightarrow & P^{-}(x,y)=(0,y) \end{array}$$

Para este ejemplo la simetría fundamental es :

$$\begin{array}{rcccccc} J: & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R} & & \\ & (a,b) & \longrightarrow & J(a,b) & = & (P^{+}-P^{-})(a,b) \\ & & & & = & P^{+}(a,b)-P^{-}(a,b) \\ & & & & = & (a,0)-(0,b) \\ & & & & = & (a,-b) \end{array}$$

Se mostrará que $(\mathfrak{R},[\cdot,\cdot]_J)$ es un producto interno, para esto se demostrará la propiedad de la no negatividad,
Sea $x=(a,b)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} [x,x]_J & = & [Jx,x] \\ & = & [J(a,b),(a,b)] \\ & = & [(a,-b),(a,b)] \\ & = & (a.a)-(-b.b) \end{array}$$

$$= \quad a^2 + b^2 \geq 0$$

Por lo tanto se logra demostrar que $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot]_J)$ es un producto interno pues cumple la propiedad de la no negatividad.

Así dado un espacio de Krein $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$, se le puede asociar un espacio de Hilbert $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot]_J)$. Por otro lado, si $(H, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Hilbert, entonces podemos verlo como un espacio de Krein de la forma

$$H = H\,[\dot{+}]\,\{0\}.$$

Teorema 2.3.20. *Sea* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein y sean*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1^+\,[\dot{+}]\,\mathfrak{R}_1^-, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2^+\,[\dot{+}]\,\mathfrak{R}_2^-, \quad con \quad \mathfrak{R}_1^+, \mathfrak{R}_2^+ \subseteq \beta^{++} \;\; y \;\; \mathfrak{R}_1^-, \mathfrak{R}_2^- \subseteq \beta^{--}$$

dos descomposiciones fundamentales entonces:

$$\dim(\mathfrak{R}_1^+) = \dim(\mathfrak{R}_2^+) \qquad y \qquad \dim(\mathfrak{R}_1^-) = \dim(\mathfrak{R}_2^-).$$

Además si J_1 *y* J_2 *son las respectivas simetrías fundamentales entonces* $\|\,.\,\|_{J_1}$ *y* $\|\,.\,\|_{J_2}$*, son normas equivalentes.*

Este es un resultado clásico de espacios de Krein. La prueba puede verse en [2].

Tomando en cuenta el Teorema 2.3.20 tiene sentido hablar de

$$k^+ = \dim(\mathfrak{R}^+) \qquad \text{y} \qquad k^- = \dim(\mathfrak{R}^-)$$

cualquiera sea la descomposición fundamental del espacio de Krein.
Por el Teorema 2.3.20 dos descomposiciones fundamentales dan origen a normas equivalentes y por lo tanto dan origen a la misma topología. Esta topología es la que se conoce como **topología fuerte** del espacio de Krein.

En general, los conceptos de convergencia, continuidad, etc en un espacio de Krein se refieren a esta topología.

Definición 2.3.21. *Sea* $k = \text{mín}\{\mathfrak{R}^+, \mathfrak{R}^-\}$. *Cuando* k *es finito se dice que* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio de Pontryagin.*

Sea $T : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ un operador lineal. La definición del adjunto de T se hace de manera análoga a como se hace en espacios de Hilbert, usando la versión para espacios de Krein del teorema de representación de Riesz. Es decir, el adjunto de T es $T^{[*]} : Dom(T^{[*]}) \to \mathfrak{R}$ tal que

$$[T(x), y] = [x, T^{[*]}(y)]$$

para todo $x \in Dom(T)$, $y \in Dom(T^{[*]})$.

Teorema 2.3.22. *Sean* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein,* T *un operador lineal en dicho espacio, dominio de* T *denso en* $\mathfrak{R}$. *Sea* J *una simetría fundamental en* $\mathfrak{R}$ *y* T^{*J} *el adjunto de* T *respecto al espacio de Hilbert* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot]_J)$*, entonces*

$$T^{[*]} = J T^{*J} J.$$

Demostración:
Sean $x, y \in \Re$ tales que $x \in Dom(T^*)$ y $y \in Dom(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left[JT^{[*]}(x), y\right] &= \left[T^{[*]}(x), J(y)\right] \\
&= \left[x, TJ(y)\right] \\
&= \left[J(x), TJ(y)\right]_J \\
&= \left[T^{*J}J(x), J(y)\right]_J \\
&= \left[T^{*J}J(x), y\right]_J \\
&= \left[JT^{*J}J(x), J(y)\right] \\
&= \left[T^{*J}J(x), JJ(y)\right] \\
&= \left[T^{*J}J(x), y\right]
\end{aligned}$$

Luego $JT^{[*]} = T^{*J}J$, de donde $T^{[*]} = JT^{*J}J$ ■

CAPÍTULO 3

TEOREMA DE WOLD-KOLMOGOROV EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO INDEFINIDO.

3.1. Complemento ortogonal de Subespacios.

Definición 3.1.1. *Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{R})$ un operador lineal isométrico, $W \subset \mathfrak{R}$, si W y $W^{\perp}$ son T-invariantes, se dice que W* ***reduce*** *a T.*

Ejemplo 3.1.2. Consideremos el operador lineal identidad $I : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$.

$$\begin{array}{rcl} I:\mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R} \\ x & \longrightarrow & I(x) = x \end{array}$$

Probemos que el operador I es lineal.
Sea $u, v \in \mathfrak{R}$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \bullet\ I(u+v) & = & u+v \\ & = & I(u)+I(v) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \bullet\ I(\alpha u) & = & \alpha u \\ & = & \alpha I(u) \end{array}$$

Luego T es un operador lineal.

Tenemos que I es lineal e isométrico pues

$$[Ix, Iy] = [x, y]$$

para todo $x, y \in \mathfrak{R}$.
Como $\mathfrak{R}$ es un espacio de Krein, se tiene que $\mathfrak{R}$ admite una descomposición fundamental
$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{+}[\dotplus]\mathfrak{R}^{-}$ con $\mathfrak{R}^{+}, \mathfrak{R}^{-} \subset \mathfrak{R}$ y además $(\mathfrak{R}^{+})^{\perp} = \mathfrak{R}^{-}$.

Sea $x^+ \in \mathfrak{R}^+$, entonces $I(x^+) = x^+ \in \mathfrak{R}^+$, luego $I(\mathfrak{R}^+) \subset \mathfrak{R}^+$, por lo tanto $\mathfrak{R}^+$ es I-invariante.

Similarmente se tiene que $(\mathfrak{R}^+)^\perp = \mathfrak{R}^-$ es I-invariante.
Luego por definición se tiene que $\mathfrak{R}^+$ reduce a I.

Ejemplo 3.1.3. Sea

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) = (2x,3y) \end{array}$$

T es lineal, sean $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $v = (c,d) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} \bullet\ T(u+v) &= T((a,b)+(c,d)) \\ &= T((a+c,b+d)) \\ &= (2(a+c),3(b+d)) \\ &= ((2a+2c),(3b+3d)) \\ &= (2a,3b)+(2c,3d) \\ &= T(u)+T(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ T(\alpha u) &= T(\alpha(a,b)) \\ &= T(\alpha a,\alpha b) \\ &= (2\alpha a,3\alpha b) \\ &= \alpha(2a,3b) \\ &= \alpha T(u) \end{aligned}$$

Luego T es un operador lineal.

$*$ Ahora se probará que T es un operador isométrico
Sea $[\cdot,\cdot]:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\big[(x_1,y_1),(x_2,y_2)\big] = x_1x_2 - y_1y_2$$

Sean $u = (x_1,y_1)$, $v = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces:

$$\begin{aligned} [T(u),T(v)] &= [T(x_1,y_1),T(x_2,y_2)] \\ &= [(2x_1,3y_1),(2x_2,3y_2)] \\ &= 4x_1x_2 - 9y_1y_2 \end{aligned}$$

Se logra ver que el operador T no es isométrico.

1. Considerando el ejemplo 2.1.3, debemos mostrar que $\mathfrak{R}^+ = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ es T-invariante.
Sea $u \in \mathfrak{R}^+$, entonces $u = (x,0)$

$$T(u) = T(x,0)$$

$$\begin{aligned} &= (2x, 3\cdot 0)\\ &= (2x, 0)\\ &= (m, 0) \in \mathfrak{R}^+ \end{aligned}$$

Miremos que $(2x,0) \in \mathfrak{R}^+$,

$$\begin{aligned} [(2x,0),(2x,0)] &= ((2x)(2x) - 0\cdot 0)\\ &= 4x^2 - 0\\ &= 4x^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Luego $T(\mathfrak{R}^+) \subset \mathfrak{R}^+$, por lo tanto $\mathfrak{R}^+$ es T-invariante.

2. Ahora veamos para el complemento de $(\mathfrak{R}^+)^\perp = \mathfrak{R}^- = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ es T-invariante.

Sea $v \in \mathfrak{R}^-$, entonces $v = (0,y)$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(0,y)\\ &= (2\cdot 0 - 3y)\\ &= (0, -3y)\\ &= (0, n) \in \mathfrak{R}^- \end{aligned}$$

Miremos que $(0,-3y) \in \mathfrak{R}^-$,

$$\begin{aligned} [(0,-3y),(0,-3y)] &= (0\cdot 0 - (-3y)(-3y))\\ &= 0 - 9y^2\\ &= -9y^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Así que $T(\mathfrak{R}^+)^\perp \subset (\mathfrak{R}^+)^\perp$, es T-invariante.

Luego de 1. y 2. se tiene que $\mathfrak{R}^+$ y $(\mathfrak{R}^+)^\perp$ son T-invariantes.

Nota: De lo anterior se tiene que $\mathfrak{R}^+$ no reduce a T, pues no cumple todas las condiciones, ya que el operador T no es isométrico bajo ese producto interno.

Definición 3.1.4. *Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{R})$ un operador isométrico, si no existen subespacios no nulos $W \subset \mathfrak{R}$ tales que $TW \subset W$ y $T|_W$ es unitario, se dice que $T \in \mathscr{L}(\mathfrak{R})$ es* ***completamente no unitario***

Definición 3.1.5. *Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ variedades lineales de $\mathfrak{R}$ tales que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$. Al conjunto $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1^\perp$ se le llama* ***el complemento ortogonal de $\mathscr{L}_1$ con respecto a $\mathscr{L}_2$*** *y se denota por*

$$\mathscr{L}_2 \ominus \mathscr{L}_1$$

Proposición 3.1.6. *Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein y $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ variedades lineales de $\mathfrak{R}$, entonces se cumple que*

$$(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp = \mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}_2^\perp$$

Demostración:

a) $(\longleftarrow)$ Sea $x \in (\mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}_2^\perp) \Rightarrow x \in \mathscr{L}_1^\perp$ y $x \in \mathscr{L}_2^\perp$

Luego si $(a+b) \in (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)$ para $a \in \mathscr{L}_1 \ \wedge \ b \in \mathscr{L}_2$ entonces

$$[x,a] = 0 \quad \wedge \quad [x,b] = 0$$

Sumando

$$[x,a] + [x,b] = 0 + 0$$

así

$$[x, a+b] = 0$$

de ahí que

$$x \in (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp$$

Por lo tanto

$$\mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}_2 \subset (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp$$

b) $(\longrightarrow)$ Sea $x \in (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp$ entonces $[x, a+b] = 0 \ \ \forall (a+b) \in (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)$ con $a \in \mathscr{L}_1$ y $b \in \mathscr{L}_2$

i) Sea $a \in \mathscr{L}_1$ entonces $(a+0) \in (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)$
Luego

$$[x, a+0] = 0$$

de ahí

$$[x,a] = 0$$

por lo tanto

$$x \in \mathscr{L}_1^\perp$$

ii) Similarmente para $b \in \mathscr{L}_2$, entonces $(0+b) \in (\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)$
Luego

$$[x, 0+b] = 0$$

de ahí

$$[x,b] = 0$$

por lo tanto

$$x \in \mathscr{L}_2^\perp$$

Así que de i) y ii) se tiene que

$$(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp \subset \mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}_2^\perp$$

De a) y b) se cumple que

$$(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2)^\perp = \mathscr{L}_1^\perp \cap \mathscr{L}_2^\perp$$

$\blacksquare$

Proposición 3.1.7. *Sean* $(\mathfrak{K},[\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein y* $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\mathscr{L}_3$ *variedades lineales de* $\mathfrak{K}$ *entonces se tiene que*

$$(\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\cap\mathscr{L}_3=(\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)[\dot{+}](\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3).$$

Demostración:

a) $(\longrightarrow)$ Sea $x\in((\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\cap\mathscr{L}_3)$, entonces $x\in((\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2))$ y $x\in\mathscr{L}_3$.

Luego $\exists!\ x_1\in\mathscr{L}_1$ y $\exists! x_2\in\mathscr{L}_2$ tales que $x=x_1+x_2$ y además como x_1 y x_2 son únicos se tiene que $x_1,x_2\in\mathscr{L}_3$

De ahí que

$$(x_1\in\mathscr{L}_1\wedge x_2\in\mathscr{L}_2)\wedge(x_1\in\mathscr{L}_3\wedge x_2\in\mathscr{L}_3)$$

conmutando y asociando

$$(x_1\in\mathscr{L}_1\wedge x_1\in\mathscr{L}_3)\wedge(x_2\in\mathscr{L}_2\wedge x_2\in\mathscr{L}_3)$$

$$(x_1\in\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)\wedge(x_2\in\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3)$$

luego

$$x\in((\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)[\dot{+}](\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3))\ \text{ pues } x=x_1+x_2$$

Por lo tanto $((\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\cap\mathscr{L}_3)\subset((\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)[\dot{+}](\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3))$.

b) $(\longleftarrow)$ Sea $x\in\mathfrak{K}$ tal que $x\in((\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)[\dot{+}](\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3))$. Entonces $\exists!$ $x_1\in(\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)$ y $\exists! x_2\in(\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3)$ tales que $x=x_1+x_2$.

Así pues

$$(x_1\in\mathscr{L}_1\wedge x_1\in\mathscr{L}_3)\wedge(x_2\in\mathscr{L}_2\wedge x_2\in\mathscr{L}_3)$$

ahora,

$$(x_1\in\mathscr{L}_1\wedge x_2\in\mathscr{L}_2)\wedge(x_1\in\mathscr{L}_3\wedge x_2\in\mathscr{L}_3)$$

entonces

$$x=x_1+x_2\in(\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\ \wedge\ x=x_1+x_2\in\mathscr{L}_3$$

finalmente

$$x\in((\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\cap\mathscr{L}_3)$$

Por lo tanto $((\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)[\dot{+}](\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3))\subset((\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\cap\mathscr{L}_3)$.

Luego de **a)** y **b)** se cumple

$$(\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2)\cap\mathscr{L}_3=(\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_3)[\dot{+}](\mathscr{L}_2\cap\mathscr{L}_3).$$

■

Lema 3.1.8. *Sean $(\mathfrak{R},[\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ variedades lineales de $\mathfrak{R}$ tales que $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2$. Si $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2$ entonces $\mathscr{L} \ominus \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_1^0[\dot{+}]\mathscr{L}_2$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} \ominus \mathscr{L}_1 &= \mathscr{L} \cap \mathscr{L}_1^{\perp} \quad \text{(Def. de} \ominus) \\
&= (\mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2) \cap \mathscr{L}_1^{\perp} \quad (\text{ sustituyendo } \mathscr{L} = \mathscr{L}_1[\dot{+}]\mathscr{L}_2) \\
&= (\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_1^{\perp})[\dot{+}](\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1^{\perp}) \quad \text{(Por proposición3,1,7)} \\
&= \mathscr{L}_1^0[\dot{+}](\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1^{\perp}) \quad (\text{ Def. de } \mathscr{L}_1^0) \\
&= \mathscr{L}_1^0[\dot{+}]\mathscr{L}_2 \quad (\text{ ya que } \mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1^{\perp})
\end{aligned}$$

■

3.2. Subespacios regulares y T-errantes.

Definición 3.2.1. *Sean $(\mathfrak{R},[\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein y $\mathscr{L}$ una variedad lineal de $\mathfrak{R}$, se dice que $\mathscr{L}$ es **regular** con respecto a $\mathfrak{R}$ si se cumple que $\mathfrak{R} = \mathscr{L}[\dot{+}]\mathscr{L}^{\perp}$.*

Proposición 3.2.2. *Si $\mathscr{L}$ es una variedad lineal regular con respecto a $\mathfrak{R}$ se tiene que $\mathscr{L}$ es no degenerado es decir $\mathscr{L}^0 = \mathscr{L} \cap \mathscr{L}^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración:

Como $\mathscr{L}$ es una variedad lineal regular con respecto a $\mathfrak{R}$ entonces por definición tenemos que

$$\mathfrak{R} = \mathscr{L}[\dot{+}]\mathscr{L}^{\perp}$$

Ahora, por la definición de suma directa ortogonal se tiene que $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto

$$\mathscr{L}^0 = \mathscr{L} \cap \mathscr{L}^{\perp} = \{0\}$$

y así $\mathscr{L}$ es no degenerado. ■

Lema 3.2.3. *Si T es un operador lineal isométrico en $\mathfrak{R}$ y $\mathscr{L}$ un subespacio de $\mathfrak{R}$, entonces $T\mathscr{L}$ es también un subespacio de $\mathfrak{R}$.*

Demostración:
Sean $(y_1, y_2) \in T\mathscr{L}$ y α un escalar. Entonces $\exists (x_1, x_2) \in \mathscr{L} \,/\, T(x_1) = y_1 \wedge T(x_2) = y_2$

i)

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= T(x_1) + T(x_2) \\
&= T(x_1 + x_2), \quad (x_1 + x_2) \in \mathscr{L}
\end{aligned}$$

Luego $(y_1 + y_2) \in T\mathscr{L}$.

ii)

$$\begin{aligned} \alpha y_1 &= \alpha T(x_1) \\ &= T(\alpha x_1), \quad (\alpha x_1) \in \mathscr{L} \end{aligned}$$

Luego $(\alpha y_1) \in T\mathscr{L}$.

Por lo tanto de i) y ii) se tiene que $T\mathscr{L}$ es un subespacio de $\mathfrak{R}$ ■

Definición 3.2.4. *Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, T un operador lineal isométrico y $\mathscr{L}$ un subespacio de $\mathfrak{R}$. $\mathscr{L}$ es llamado T-**errante**, si $\mathscr{L}$ es no degenerado y $T^m\mathscr{L} \perp T^n\mathscr{L}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ con $m \neq n$.*

Ejemplo 3.2.5. Sea $T : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ el operador identidad y consideremos $\mathscr{L} = \mathfrak{R}^0 = \{0\}$.

Tenemos que $\mathscr{L}$ es no degenerado y además $[T^n\mathscr{L}, \mathscr{L}] = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.
Por tanto $\mathscr{L}$ es T-errante.

Proposición 3.2.6. *$\mathscr{L}$ es T-errante si y solamente si $\mathscr{L}$ es no degenerado y $T^n\mathscr{L} \perp \mathscr{L}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Demostración:
$(\longrightarrow)$ Como $\mathscr{L}$ es T-errante entonces por definición $\mathscr{L}$ es no degenerado y $T^n\mathscr{L} \perp T^m\mathscr{L}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ con $m \neq n$.
En particular para $m = 0$ se tiene que $T^0\mathscr{L} = \mathscr{L}$, tomando $n \in \mathbb{Z}^+$ se consigue que

$$T^n\mathscr{L} \perp \mathscr{L},$$

con $n = 1, 2, \ldots$

$(\longleftarrow)$ Sean $\mathscr{L}$ no degenerado y $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ con $m \neq n$, supongamos que $m > n$. Luego, como T es una isometría, si $z, w \in \mathscr{L}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} [T^m z, T^n w] &= [(T^n)^{-1} T^m z, w] \quad (\text{pues } \; TT^* = I \to T^* = T^{-1}). \\ &= [T^{-n} T^m z, w] \\ &= [T^{m-n} z, w] \\ &= 0 \quad (\text{pues } \; (m-n) \in \{1, 2, 3, \ldots\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\mathscr{L}$ es T-errante. ■

Observación 3.2.7. Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, $\mathscr{L}$ una variedad lineal de $\mathfrak{R}$ y T un operador lineal isométrico, se tiene

$$M_+(\mathscr{L}) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\mathscr{L} = \langle T^n\mathscr{L} \rangle, n = 0, 1, 2 \ldots$$

Notación 3.2.8. *Nótese que si $n = 0$, $T^0\mathscr{L} = \mathscr{L}$ entonces $\mathscr{L} \subset M_+(\mathscr{L})$*

Proposición 3.2.9. *Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein y $\mathscr{L} \subset \mathfrak{R}$ una variedad lineal T-errante. Entonces se tiene que:*

(1) $T(M_+(\mathscr{L})) = M_+(T\mathscr{L})$.

(2) $\mathscr{L} \perp TM_+(\mathscr{L})$

Demostración:

(1) Como $\mathscr{L}$ es T-errante entonces tenemos un operador lineal isométrico T, además $M_+(\mathscr{L})$ es cerrado pues $M_+(\mathscr{L}) = \langle T^n\mathscr{L} : n = 0,1,2,\ldots\rangle$, se tiene que $TM_+(\mathscr{L})$ es cerrado pues es un subespacio de $\mathfrak{R}$. Luego

$$M_+(T\mathscr{L}) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n T\mathscr{L} = \bigvee_{n=0}^{\infty} TT^n\mathscr{L} = T\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\mathscr{L} = T(M_+(\mathscr{L})).$$

(2) Como $\mathscr{L}$ es T-errante entonces se tiene que $\mathscr{L} \perp T^m\mathscr{L}$ para todo $m = 1,2,3,\ldots$
Tomando $m = n+1$ tenemos para $n = 0,1,2,\ldots$ que:

$$\mathscr{L} \perp T^{n+1}\mathscr{L}$$

Por lo cual

$$\mathscr{L} \perp T^n T\mathscr{L} \quad (\text{Pues } T^nT\mathscr{L} \in M_+(T\mathscr{L}))$$

se tiene que

$$\mathscr{L} \perp M_+(T\mathscr{L}) \quad (\text{Observación 3.2.7})$$

entonces

$$\mathscr{L} \perp T(M_+(\mathscr{L})) \quad (\text{Proposición 3.2.9, inciso(1).})$$

∎

Teorema 3.2.10. *Sean T un operador lineal isométrico y $\mathscr{L}$ una variedad lineal T-errante en $\mathfrak{R}$. Si $\mathscr{L}$ es regular entonces:*

(1) $M_+(\mathscr{L}) = \mathscr{L}[\dot{+}]TM_+(\mathscr{L})$
(2) $T(M_+(\mathscr{L})) = M_+(\mathscr{L}) \ominus \mathscr{L}$

Demostración:
(1)

$$\begin{aligned}
\text{Como, } M_+(\mathscr{L}) &= \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n\mathscr{L} \\
&= T^0\mathscr{L} + \bigvee_{n=1}^{\infty} T^n\mathscr{L} \\
&= \mathscr{L} + \bigvee_{n=1}^{\infty} T^n\mathscr{L}, \quad (\text{haciendo } n = m+1 \text{ tenemos}) \\
&= \mathscr{L} + \bigvee_{m=0}^{\infty} T^{m+1}\mathscr{L} \\
&= \mathscr{L} + T\bigvee_{m=0}^{\infty} T^m\mathscr{L} \\
&= \mathscr{L} + TM_+(\mathscr{L}) \quad (\text{Observación 3.2.7})
\end{aligned}$$

Ahora por la proposición 3.2.9, inciso (2) se tiene que $\mathscr{L} \perp TM_+(\mathscr{L})$.
Así $M_+(\mathscr{L}) = \mathscr{L}[\dot{+}]TM_+(\mathscr{L})$.

Nótese que de $\mathscr{L}[\dot{+}]TM_+(\mathscr{L})$ se tiene que $TM_+(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}^\perp$

(2)

$$\begin{aligned} M_+(\mathscr{L}) \ominus \mathscr{L} &= M_+(\mathscr{L}) \cap \mathscr{L}^\perp \quad \text{(Definición. de } \ominus) \\ &= (\mathscr{L}[\dot{+}]TM_+(\mathscr{L})) \cap \mathscr{L}^\perp \quad \text{(Por el teorema 3.2.10 } inciso \text{ (1))} \\ &= (\mathscr{L} \cap \mathscr{L}^\perp)[\dot{+}](TM_+(\mathscr{L}) \cap \mathscr{L}^\perp) \quad \text{(Por la proposición 3.1.7).} \\ &= \mathscr{L}^0[\dot{+}](TM_+(\mathscr{L}) \cap \mathscr{L}^\perp) \quad \text{(Definición de } \mathscr{L}^0) \\ &= TM_+(\mathscr{L}) \cap \mathscr{L}^\perp \quad \text{(pues } \mathscr{L}^0 = \{0\}) \\ &= TM_+(\mathscr{L}) \quad \text{(ya que , } TM_+(\mathscr{L}) \subset \mathscr{L}^\perp, \text{ Por el teorema 3.2.10 } inciso \text{ (1))} \end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.11. *Sean* $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein y* $\mathscr{L}$ *una variedad lineal* T*-errante en* $\mathfrak{K}$. *Si* $\mathscr{L}$ *es regular entonces*

$$(M_+(\mathscr{L}))^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n M_+(\mathscr{L}).$$

Demostración:
$(\longrightarrow)$ Sea $h \in (M_+(\mathscr{L}))^0$, entonces

$$h \in M_+(\mathscr{L}) \ \text{ y } \ h \in M_+(\mathscr{L})^\perp. \tag{3.1}$$

Se mostrará por inducción que $h \in T^n M_+(\mathscr{L})$

Para $n = 0$, se tiene $h \in (M_+(\mathscr{L})) = T^0 M_+(\mathscr{L})$.
Para $n = 1$, se tiene
Como $h \in M_+(\mathscr{L})^\perp$ por hipótesis y además ,

$$\begin{aligned} M_+(\mathscr{L})^\perp &= (\mathscr{L}[\dot{+}]TM_+(\mathscr{L}))^\perp \quad \text{(Por el teorema 3.2.10 inciso(2))} \\ &= \mathscr{L}^\perp \cap (TM_+(\mathscr{L}))^\perp \end{aligned}$$

Entonces $h \in \mathscr{L}^\perp$ y por hipótesis
$h \in M_+(\mathscr{L})$, entonces
$h \in M_+(\mathscr{L})^\perp \cap M_+(\mathscr{L})$

$$\begin{aligned} &= M_+(\mathscr{L}) \ominus \mathscr{L})) \quad (\mathscr{L} \subset M_+(\mathscr{L}) \\ &= TM_+(\mathscr{L}) \\ &= T^1 M_+(\mathscr{L}) \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple para $n = 1$.
Consideremos cierto para $n \quad (n > 1)$, esto es $h \in T^n M_+(\mathscr{L})$.

Se mirará si se cumple para $n+1$.

Como $\mathscr{L}$ es regular, por el teorema 3.2.10 inciso (1) se tiene que

$$M_+(\mathscr{L}) = \mathscr{L}[\dot{+}]TM_+(\mathscr{L}),$$

entonces

$$T^n M_+(\mathscr{L}) = T^n(\mathscr{L})[\dot{+}]T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \tag{3.2}$$

Como $M_+(\mathscr{L}) \subset T^n(\mathscr{L})$ entonces $T^n(\mathscr{L})^\perp \subset M_+(\mathscr{L})^\perp$ pero $h \in (M_+(\mathscr{L}))^0$ por(3.1), luego $h \perp T^n(\mathscr{L})$ es decir $h \in (T^n(\mathscr{L})^\perp)$.
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
T^n M_+(\mathscr{L}) \ominus T^n(\mathscr{L}) &= T^n M_+(\mathscr{L}) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp \quad \text{(Definición de}\ominus) \\
&= (T^n(\mathscr{L})[\dot{+}]T^{n+1}M_+(\mathscr{L})) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp \quad \text{(por (3.2))} \\
&= (T^n(\mathscr{L}) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp)[\dot{+}](T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp) \quad \text{(Por la proposición3,1,7).} \\
&= T^n(\mathscr{L})^0[\dot{+}](T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp) \quad \text{(Def. de parte isotrópica de}T^n(\mathscr{L})^0) \\
&= T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp \quad \text{(Pues}T^n(\mathscr{L})^0 = \{0\}) \\
&= T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \quad \text{(por (3.2) ya que}T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \subset T^n(\mathscr{L})^\perp)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) = T^n M_+(\mathscr{L}) \ominus T^n(\mathscr{L}) = T^n M_+(\mathscr{L}) \cap T^n(\mathscr{L})^\perp$$

luego por la hipótesis de inducción $(h \in T^n M_+(\mathscr{L}))$ y de que $h \in T^n(\mathscr{L})^\perp$, se tiene que $h \in T^{n+1}M_+(\mathscr{L})$.

Así se tiene que $h \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n M_+(\mathscr{L})$.

$(\longleftarrow)$ Sea $h \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n M_+(\mathscr{L})$.

Por la proposición 3.2.9, inciso (2) se tiene

$$\mathscr{L} \perp TM_+(\mathscr{L})$$

entonces se cumple que

$$T^n\mathscr{L} \perp T^{n+1}M_+(\mathscr{L}) \qquad \text{para} n = 0,1,2,\ldots \tag{3.3}$$

Luego como $h \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n M_+(\mathscr{L})$, se tiene por (3.3) que $h \perp T^n(\mathscr{L})$, para $n = 0,1,2,\ldots$
Entonces $h \perp M_+(\mathscr{L})$ y así $h \in M_+(\mathscr{L})^\perp$.

Ahora por otro lado se tiene que

$$h \in M_+(\mathscr{L})$$

pues $h \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n M_+(\mathscr{L})$, por lo tanto

$$h \in (M_+(\mathscr{L}) \cap M_+(\mathscr{L})^\perp) = (M_+(\mathscr{L}))^0$$

De esta manera se concluye que

$$(M_+(\mathscr{L}s))^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n M_+(\mathscr{L})$$

■

3.3. Operadores Shift Unilaterales.

Definición 3.3.1. *Sea* $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein, un operador lineal isométrico T en* $\mathfrak{R}$ *es llamado **Shift unilateral** si existe una variedad lineal* $\mathscr{L}$ *que es T-errante en* $\mathfrak{R}$ *tal que se tiene*
$M_+(\mathscr{L}) =< T^n(\mathscr{L}) >= \mathfrak{R}, \quad n = 0,1,2,\dots$

Observación 3.3.2. El subespacio $\mathscr{L}$ es regular pues $\mathfrak{R} = \mathscr{L}[\dot{+}]\mathscr{L}^\perp$ donde se tiene que
$\mathscr{L}^\perp =< T^n(\mathscr{L}) >: n = 1,2,\dots$ ya que $\mathscr{L}$ es T-errante.
Además tendremos que $\mathscr{L} = (T\mathfrak{R})^\perp$.

Ejemplo 3.3.3. Sea $\mathfrak{R} = \ell^2(\mathbb{N}) = \left\{(x_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n\geq 1} |\, x_n\,|^2 < \infty\right\}$, donde definiremos:

$$\begin{aligned}[.,.] : \mathfrak{R}\times\mathfrak{R} &\longrightarrow \mathfrak{R}\\ (x_m, x_n) &\longrightarrow [x_m, x_n] = x_{m_1}x_{n_1} + x_{m_2}x_{n_2} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T : \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})\\ (x_1, x_2, \dots) &\longrightarrow T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)\end{aligned}$$

Probemos que T es un operador lineal.
Sean $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in \mathfrak{R}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
Luego

$$\begin{aligned}\bullet T\big((x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots)\big) &= T\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)\big)\\ &= (0, x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)\\ &= (0, x_1, x_2, \dots) + (0, y_1, y_2, \dots)\\ &= T((x_1, x_2, \dots)) + T\big((y_1, y_2, \dots)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet T(\alpha(x_1, x_2, \dots)) &= T(\alpha x_1, \alpha\ x_2, \dots)\\ &= (0, \alpha x_1, \alpha\ x_2, \dots)\\ &= \alpha T((x_1, x_2, \dots))\end{aligned}$$

Por lo tanto T es un operador lineal.

∗ Ahora se probará que T es un operador isométrico.

Sean $(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \in \mathfrak{R}$,entonces:

$$[T(x_1, x_2, \dots), T(y_1, y_2, \dots)] = [(0, x_1, x_2, \dots), (0, y_1, y_2, \dots)]$$

$$\begin{aligned}&= 0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots \\ &= [(x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)]\end{aligned}$$

Luego el operador lineal T es isométrico.

Sean $e_n = (0,0,0,\dots,1,0,0,\dots) \in \mathfrak{R}$. Tomemos en particular $e_1 = (1,0,0,\dots)$.

Sea la variedad lineal $\mathscr{L} =< e_1 >$, que es no degenerado. Analicemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}T(1,0,0,\dots) &= (0,1,0,0,\dots) = e_2 \\ T^2(1,0,0,\dots) &= T(0,1,0,0,\dots) = (0,0,1,0,0,\dots) = e_3 \\ T^3(1,0,0,\dots) &= T^2(0,1,0,0,\dots) = T(0,0,1,0,0,\dots) = (0,0,0,1,0,0,\dots) = e_4 \\ &\vdots \\ T^n(1,0,0,\dots) &= T^n(e_1) = e_{n+1} \text{ con } n = 0,1,2,\dots\end{aligned}$$

Luego,

$$M_+(\mathscr{L}) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathscr{L} = \bigvee_{n=0}^{\infty} e_{n+1} = l^2(\mathbb{N}) = \mathfrak{R}.$$

Como $e_1 \perp e_{n+1}$ $(\forall n \geq 1)$ entonces $\mathscr{L} \perp T^n \mathscr{L}$ con $n = 1,2,3,\dots$, así por la proposición3.1.7 se tiene que $\mathscr{L}$ es T-errante, con $n = 1,2,3,\dots$

Sea $x = (x_1, x_2, ...) \neq 0$ con $x \in \mathfrak{R}$, entonces $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, ...) = \overrightarrow{x} \in T\mathfrak{R}$.

Ahora,
Sea $0 \neq h = (h_1, h_2, \dots) \in \mathfrak{R}$ y supongamos que

$$h \in (T\mathfrak{R})^{\perp}$$

luego $h \perp T\mathfrak{R}$ y así se tiene que $[(h_1, h_2, \dots), (0, x_1, x_2, \dots)] = 0$
Luego,

$$[h, \overrightarrow{x}] = 0 \text{ para todo } \overrightarrow{x} \in T\mathfrak{R} \tag{3.4}$$

Ahora, si $(h_1, h_2, \dots) \in \mathfrak{R}$ se tiene que $(h_2, h_3, \dots) \in \mathfrak{R}$, y además $(0, h_2, h_3, \dots) \in \mathfrak{R}$, luego de (3.4) se tiene que $[(h_1, h_2, \dots), (0, h_2, h_3, \dots)] = 0 \Leftrightarrow h_k = 0, \quad \forall k > 1$.

Entonces $(T\mathfrak{R})^{\perp} =< e_1 >$, así el operador lineal isométrico T en $\mathfrak{R}$ es un Shift unilateral.

Teorema 3.3.4. *(WOLD-KOLMOGOROV)*
Sean $(\mathfrak{R}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, T un operador lineal isométrico y $\mathscr{L}$ una variedad lineal en $\mathfrak{R}$, tales que $\mathscr{L} = (T\mathfrak{R})^{\perp}$. De forma equivalente,

1) *$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 [\dotplus] \mathfrak{R}_1$, donde $\mathfrak{R}_0$ y $\mathfrak{R}_1$ son T-invariantes,*

2) *$T|_{\mathfrak{R}_0}$ es un Shift unilateral y $T|_{\mathfrak{R}_1}$ es unitario.*

Se cumple 1) y 2) si y solamente si $M_+(\mathscr{L})$ es regular, en este caso se tiene que $\mathfrak{R}_0 = M_+(\mathscr{L})$ *y* $\mathfrak{R}_1 = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n\mathfrak{R}$

Demostración:

$(\longrightarrow)$

Sean $\mathfrak{R}_0$ *y* $\mathfrak{R}_1$ variedades lineales T-invariantes de $\mathfrak{R}$ tales que se cumple $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1$, $T|_{\mathfrak{R}_0}$ es un Shift unilateral y $T|_{\mathfrak{R}_1}$ es unitario.

Como $T|_{\mathfrak{R}_1}$ es unitario se tiene que $T\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$ y además:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} = (T\mathfrak{R})^{\perp} &= \mathfrak{R} \ominus T\mathfrak{R} \quad \text{(por definición de } \ominus) \\
&= (\mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1) \ominus (T\mathfrak{R}_0[\dot{+}]T\mathfrak{R}_1) \quad (\text{pues}\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1) \\
&= (\mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1) \ominus (T\mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1) \quad (T|_{\mathfrak{R}_1} \text{es unitario}) \\
&= \mathfrak{R}_0 \ominus T\mathfrak{R}_0 \quad \text{(por definición de } \ominus)
\end{aligned}$$

Así $\mathscr{L}$ es una variedad lineal que es $T|_{\mathfrak{R}_0} - errante$. En consecuencia, $M_+(\mathscr{L}) = \mathfrak{R}_0$ pues $T|_{\mathfrak{R}_0}$ es un shift unilateral y como $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1$ entonces $M_+(\mathscr{L})$ es regular por definición.

$(\longleftarrow)$

Supongamos que $M_+(\mathscr{L})$ es regular, y sean $\mathfrak{R}_0 = M_+(\mathscr{L})$, $\mathfrak{R}_1 = (M_+(\mathscr{L}))^{\perp}$. Entonces se tiene que $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0[\dot{+}]\mathfrak{R}_1$ pues $M_+(\mathscr{L})$ es regular.
Ahora, como $\mathfrak{R}_0 = \bigvee_{n=0}^{\infty} M_+(\mathscr{L})$, se tiene que $\mathfrak{R}_0$ es T-invariante pues $T\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_0$ y además $T|_{\mathfrak{R}_0}$ es un shift unilateral. Ahora :

$$\begin{aligned}
T\mathfrak{R}_1 &= T\mathfrak{R} \ominus T\mathfrak{R}_0 \quad (\text{pues } T\mathfrak{R} = T\mathfrak{R}_0[\dot{+}]T\mathfrak{R}_1) \\
&= \mathfrak{R} \cap (T\mathfrak{R}_0)^{\perp} \quad (\text{Por Defininición de } \ominus \text{ y que } T\mathfrak{R} = \mathfrak{R}) \\
&= \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}_1 \quad (T\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_0) \\
&= \mathfrak{R}_1 \quad (\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R})
\end{aligned}$$

Entonces tenemos que $T\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$ y como T es un operador lineal isométrico entonces $T|_{\mathfrak{R}_1}$ es unitario.Por otra parte:

$$\begin{aligned}
(M_+(\mathscr{L}))^{\perp} &= \mathfrak{R} \ominus M_+(\mathscr{L}) \quad (\text{Definición de } \ominus) \\
&= \mathfrak{R} \ominus \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(\mathscr{L}) \right) \quad (\text{Definición de } M_+(\mathscr{L})) \\
&= \mathfrak{R} \ominus \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(T\mathfrak{R})^{\perp} \right) \quad (\text{Pues}\mathscr{L} = (T\mathfrak{R})^{\perp}) \\
&= \mathfrak{R} \ominus \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(T\mathfrak{R}_0[\dot{+}]T\mathfrak{R}_1)^{\perp} \right) \quad (T\mathfrak{R} = T\mathfrak{R}_0[\dot{+}]T\mathfrak{R}_1) \\
&= \mathfrak{R} \ominus \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(T\mathfrak{R}_0^{\perp} \cap T\mathfrak{R}_1^{\perp}) \right) \\
&= \mathfrak{R} \ominus \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(T\mathfrak{R}_1 \cap T\mathfrak{R}_0) \right) \quad (T\mathfrak{R} = T\mathfrak{R}_0[\dot{+}]T\mathfrak{R}_1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathfrak{R} \ominus \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{R}^0) \right) \qquad (\text{Definición de} T(\mathfrak{R}^0)) \\
&= \mathfrak{R} \bigcap \left(\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{R}^0) \right)^{\perp} \qquad (\text{Definición de } \ominus) \\
&= \mathfrak{R} \bigcap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} (T^n(\mathfrak{R}^0))^{\perp} \right) \\
&= \mathfrak{R} \bigcap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{R}) \right) \qquad ((\mathfrak{R}^0)^{\perp} = \mathfrak{R}) \\
&= \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{R}) \right) \qquad (\text{ Ya que} \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{R}) \right) \subset \mathfrak{R})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathfrak{R}_1 = \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{R}) \right)$ ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] Bognár,J. 1974. Indefinite inner product spaces. New York. Springer- Verlag. IX

[2] Is. Iokhvidov , M.G. Krein, H. Langer. 1982. Introdcution to the spectral theory of operators in spaces with an inderinite metric. Mathematical Research, Wol.9 . Berlin : Akademie- Verlag. 42

[3] T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov. Linear Operators in Hilbert Spaces with G-metric.

[4] N. Akhiezer , I. Glazman. Theory of linear operators in Hilbert space. Transl.from Russian (Two volumes bound as one). Repr. of the 1961 and 1963 transl . New York, NY : Dover Publications.xiv, 147, iv , 1993.

[5] B.Sz.-Nagy , C. Foias. 1970. Harmonic analysis of operators on Hilbert Space. North Holland Publishing Co..

[6] Hoffman,K; Kunze,R. 1973. Álgebra Lineal. 1 ed.en español. Neucalpan de Juárez, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.