Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Transformaciones Lineales

Fabio Andrés Amézquita Roa
Nelson Yair Tafur Rugeles

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Transformaciones Lineales

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Fabio Andrés Amezquita Roa
2008276817
Nelson Yair Tafur Rugeles
2002200995

Asesor:
Prof. Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Junio de 2013

AGRADECIMIENTOS

La vida está llena de etapas, que se componen de momentos buenos y en algunas ocasiones no tan buenos, pero lo importante es siempre tener en cuenta, que el momento no determina nuestra llegada, si no el estado de ánimo con el que lleguemos, con la mejor actitud hoy sumamos todos esos momentos para llegar, a donde algún día de nuestra vida nos propusimos llegar, con un mayor conocimiento y una forma de pensar diferente, Terminamos nuestra carrera para comenzar una nueva etapa, por tal motivo queremos agradecerle primero que todo a Dios por darnos la fortaleza y los medios necesarios para culminar de forma exitosa nuestra formación profesional.

A nuestro asesor de trabajo de grado, el profesor Ricardo Cedeño Tovar, quien con su experiencia y su valioso conocimiento nos orientó, para que nuestro trabajo se realizara de la mejor manera.

También, agradecemos a nuestros profesores que durante todo el trayecto de la carrera estuvieron prestos a colaborarnos, en especial al profesor Augusto Silva Silva, por sus importantes recomendaciones a este trabajo.

A nuestros padres por el apoyo moral y económico durante todo este tiempo.

Y por último, agradecemos a la Universidad Surcolombiana por ofrecernos los espacios y actividades que contribuyeron a nuestra formación.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal se consolida a mediadios del siglo XIX con los aportes de Grassmann, quien anticipa aspectos fundamentales de los espacios de dimensión finita, tales como la noción de subespacio engendrado, independencia lineal, dimensión, la proyección de un vector sobre un subespacio y el Teorema Espectral. Otros matemáticos que hicieron notables contribuciones son Hamilton, Cayley y Sylvester.

Entre los conceptos el álgebra lineal, de más larga gestación en la historia de la humanidad están los de transformación lineal y matriz. Las matrices, en cuanto tablas de números, aparecen en las matemáticas chinas alrededor del año $200 A.C.$, el primer uso riguroso de las matrices se halla en el estudio por Gauss (1777-1855) de las formas cuadráticas binarias. En su trabajo se encuentra ya la multiplicación de matrices, luego en la geometría analítica de los siglos XVII y XVIII se estudiaron transformaciones lineales y sus matrices.

Se debe destacar igualmente la influencia de Frobenius sobre el desarrollo de la noción de transformación lineal, la cual venía evolucionando desde el siglo XVIII con los trabajos de Cauchy, Weierstrass y Kronecker, entre otros, y que adoptaría su forma actual en 1918 de la mano del matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955).

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Exponer los fundamentos teóricos sobre los cuales se desarrollan las transformaciones lineales.

Objetivos Específicos

- Presentar antecedentes del álgebra lineal y de las transformaciones lineales.
- Enunciar definiciones y resultados básicos de las transformaciones lineales.
- Mostrar algunos ejemplos de las transformaciones lineales.

JUSTIFICACIÓN

Parte importante de los avances científicos y tecnológicos de los últimos tiempos tienen su fundamentación en la Matemática y sus aplicaciones. En el Algebra Lineal se construyen los cimientos básicos relacionados con objetos como: matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, vectores, espacios vectoriales y transformaciones lineales.

Algunas aplicaciones del álgebra lineal proporcionan herramientas para el desarrollo de matemáticas subsecuentes como el cálculo vectorial, la programación lineal, la estática, la probabilidad, la estadística, y las ecuaciones diferenciales, entre otras.

El concepto de transformación lineal es muy importante dentro de los mapas curriculares de varias carreras universitarias en las áreas de Física y Matemáticas, por esta razón decidimos enfocarnos a trabajar en este tema.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1.1. *Un **cuerpo** $\mathbb{K}$ es una estructura algebráica en la cual las operaciones de adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las siguiente propiedades: Propiedad asociativa, conmutativa y distributiva, además de la existencia de un inverso aditivo y de un inverso multiplicativo,para todo número diferente al módulo de la suma. Los elementos de $\mathbb{K}$ se llamaran escalares.*

Definición 1.1.2. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un conjunto no vacío V (cuyos elementos se llamaran vectores), junto con dos operaciones $(+,\cdot)$ es un **espacio vectorial** (o espacio lineal), si satisface los siguientes axiomas:*

a) *Para cualquier x, y de V, $x+y$ es un vector de V, además se tiene:*

  i) *Conmutativa $x+y=y+x$*

  ii) *Asociativa: $x+(y+z)=(x+y)+z$*

  iii) *Existe un único vector 0 de V , llamado vector nulo: $x+0=x$*

  iv) *Para cada vector $x\in V$, existe un único vector*
  $-x\in V : x+(-x)=0$.

b) *La operación multiplicación por escalar, asocia a cada escalar $\alpha\in\mathbb{K}$ y cada $x\in V$ un vector $\alpha x\in V$ y tiene las siguientes propiedades:*

  i) $1x=x$, *para todo $x\in V$.*

  ii) $(\alpha_1\alpha_2)x=\alpha_1(\alpha_2 x)$, *para todo $x\in V$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$.*

  iii) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, *para todo $x,y\in V$, $\alpha\in\mathbb{K}$.*

  iv) $(\alpha_1+\alpha_2)x=\alpha_1 x+\alpha_2 x$, *para todo $x\in V$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$.*

Usualmente, se dice que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que V es un $\mathbb{K}$- espacio vectorial.

Definición 1.1.3. *Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un* ***subespacio*** *de V si y sólo si W, conjuntamente con las operaciones de suma y de multiplicación escalar definidas en V, es un espacio vectorial.*

Definición 1.1.4. *Sean $v_1, v_2, \cdots, v_n$, vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, donde $a_1, a_2, \cdots, a_n$, son escalares, se denomina una* ***combinación lineal*** *de $v_1, v_2, \cdots, v_n$.*

Definición 1.1.5. *Un conjunto no vacío de vectores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de un espacio vectorial V es* ***linealmente independiente*** *si y sólo si $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n = 0$, implica que $\alpha_1 = \alpha_2 \cdots = \alpha_n = 0$.*

Ejemplo 1.1.6. Tomemos el conjunto de vectores $\{(2,3),(1,1)\}$, si:

$$\alpha(2,3) + \beta(1,1) = (0,0)$$

entonces $2\alpha + \beta = 0$ y $3\alpha + \beta = 0$, de donde $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Como los escalares α y β son ambos iguales a cero entonces estos vectores son linealmente independientes.

Definición 1.1.7. *Se dice que los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ de un espacio vectorial V* ***generan*** *a V si todo vector de V se puede escribir como combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $v \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que:*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Ejemplo 1.1.8. Tomemos los mismos vectores del ejemplo anterior para ver si forman un conjunto generador.
Tenemos lo siguiente

$$x(2,3) + y(1,1) = (a,b)$$

de donde,

$$2x + y = a \quad \text{y} \quad 3x + y = b$$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos

$$x = b - a \quad \text{y} \quad y = -2b + 3a$$

Como x e y están definidos para todos los reales a y b los vectores forman un conjunto generador.

Definición 1.1.9. *Si B es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V, entonces B es una **base** para V si y solo si.*

i) El espacio V es generado por B.

ii) B es un conjunto linealmente independiente.

Definición 1.1.10. *Si el espacio vectorial V tiene una base con un número finito n de elementos, entonces la **dimensión** de V es n y V se denomina espacio vectorial de **dimensión finita**. De otra manera, V se denomina espacio vectorial de **dimensión infinita**. Si $V = \{0\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.*

Definición 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial, el conjunto formado por los vectores que tienen en la posición n el elemento uno y en las demás posiciones cero, es un base para el espacio V, la cual recibe le nombre de **base canónica.***

Definición 1.1.12. *Una **matriz** A de $m \times n$, es un arreglo rectangular de mn números de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los escalares dispuestos horizontalmente son las filas de A, los dispuesto verticalmente son las columnas.

Definición 1.1.13. *Sea A una matriz $n \times n$. Una matriz B, $n \times n$ que tiene la siguiente propiedad*

$$AB = BA = I_n$$

*se llama **inversa multiplicativa** de A. Se nota $B = A^{-1}$.*

Definición 1.1.14. *Una matriz A $n \times n$ que tiene una inversa multiplicativa, se llama **matriz no singular**. Si A no tiene inversa se llama **singular**.*

Definición 1.1.15. *Una matriz B $n \times n$ es **similar** a una matriz A $n \times n$ si, y solo si, existe una matriz no singular P tal que $B = P^{-1}AP$.*

Notación 1.1.16. *Si $T : V \to V$ es un operador lineal sobre V y si A y B son representaciones matriciales de T pero respecto a bases distintas (posiblemente), entonces B es similar a A.*

Definición 1.1.17. *La Traza de una matriz cuadrada $An \times n$, esta definida como la suma de los elementos de la diagonal principal de A.*
es decir,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

donde a_{jj}, representa el elemento que esta en la fila j-ésima y en la columna j-ésima de A. Simbolicamente:

$$tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

CAPÍTULO 2

TRANSFORMACIONES LINEALES

2.1. Transformaciones Lineales

Definición 2.1.1. *Sean V y W dos espacios vectoriales. Una **trasformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $T(v) \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y para cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$,*

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$. *(Propiedad aditiva)*

ii) $T(\alpha V) = \alpha T(v)$. *(Propiedad homogénea)*

Ejemplo 2.1.2. Sean V y W espacios vectoriales y T la aplicación

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & V \longrightarrow W \\ & v \longrightarrow T(v) = 0 \end{aligned}$$

para todo $v \in V$. T es lineal.

i) $T(v_1 + v_2) = 0 = 0 + 0 = T(v_1) + T(v_2)$.

ii) $T(\alpha v) = 0 = \alpha 0 = \alpha T(v)$.

T se denomina la **trasformación cero**.

Ejemplo 2.1.3. Sean V y W espacios vectoriales y una aplicación

$$\begin{array}{ccc} T & : & V \longrightarrow V \\ v & \longrightarrow & T(v) = v \end{array}$$

T es lineal. Para todo $v \in V$, T se denomina la **trasformación identidad**.

Definición 2.1.4. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T una transformación lineal de V en W. El espacio **nulo ó núcleo** de T (N_T) es el conjunto de todos los vectores v de V tales que*

$$T(v) = 0.$$

Definición 2.1.5. *Si V es de dimensión finita, el **rango** de T es la dimensión de la imagen de T y la **nulidad** de T es la dimensión del espacio nulo de T.*

Ejemplo 2.1.6. Sean $X_1 = (1,0,0); X_2 = (1,1,0); X_3 = (1,1,1)$ y

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

una transformación lineal tal que $T(X_1) = (-1,0), T(X_2) = (2,1), T(X_3) = (3,3)$. Encuentre $T(x, y, z)$, el núcleo (espacio nulo) y la nulidad de T.

Solución. Sea $X = (x, y, z)$, despejamos $a_1, a_2,$ y a_3 de la ecuación vectorial $X = a_1X_1+a_2X_2+ a_3X_3$. Esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= x \\ a_2 + a_3 &= y \\ a_3 &= z \end{aligned}$$

Las soluciones son: $a_1 = x - y,\ a_2 = y - z,$ y $a_3 = z$; entonces , $X = (x - y)X_1 + (y - z)X_2 + zX_3$. Luego

$$T(x, y, z) = (x - y)(-1,0) + (y - z)(2,1) + z(3,3) = (-x + 3y + z, y + 2z)$$

Ahora

$$\begin{aligned} N_T &= \{(x, y, z) :\ T(x, y, y) = 0\} \\ &= \{(x, y, z) :\ (-x + 3y + z,\ y + 2z) = (0,0)\} \\ &= \{(x, y, z) :\ y = -2z,\ \ y,\ \ x = z + 3y = z - 6z = -5z\} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} N_T &= \{(-5z, -2z, z) :\ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-5, -2, 1);\ z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

la nulidad de T es 1.

2.2. Operadores

Definición 2.2.1. *Dados X, Y espacios vectoriales definidos sobre un campo $\mathbb{K}$, un operador $T : D \subset X \to Y$, se dice **lineal** si:*

(i) *El dominio D es un espacio vectorial y el rango $R(T)$ cae sobre un espacio vectorial sobre el mismo campo de X.*

(ii) $T(x + y) = T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in D$
$\quad\ T(\alpha x) = \alpha T(x) \qquad \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Definición 2.2.2. *Sea V un espacio vectorial definido sobre un campo $\mathbb{K}$, una aplicación I se dice operador Identidad si:*

$$\begin{array}{rcl} I : V & \longrightarrow & V \\ x & \longrightarrow & I(x) = x \end{array}$$

Nota: El conjunto de funciones diferenciables en el intervalo $[a,b]$ se nota $C'[a,b]$.
$C'[a,b] = \{f \ / \ f$ *es diferenciable en* $[a,b]\}$

Definición 2.2.3. *Supongamos que $D : C'[0,1] \longrightarrow [0,1]$ se define por $Df = f'$ tenemos que $(f+g)' = f' + g'$ y $(\alpha.f)' = \alpha.f'$ si f y g son diferenciables.*
D es lineal y se denomina ***operador diferencial****.*

Ejemplo 2.2.4. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea V el espacio vectorial de las funciones polinomiales f de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$, dado por

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$$

Para el caso $(Df)(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + kc_k x^{k-1}$. D es una trasformación lineal de V en V.

Ejemplo 2.2.5. Sea A una matriz con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. La función

$$\begin{array}{rcl} T : K^{m\times 1} & \longrightarrow & K^{n\times 1} \\ x & \longrightarrow & T(x) = A \cdot x \end{array}$$

La función U definida por $U\alpha = \alpha A$, es una trasformación lineal de F^m en F^n.

$$U(\alpha) : F^m \longrightarrow F^n.$$

Sea P una matriz $m \times m$ dada, con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea Q otra matriz $n \times n$ dada, sobre $\mathbb{K}$, se define una función T del espacio $\mathbb{K}^{m\times n}$ en sí mismo por $T(A) = PAQ$ entonces T es una trasformación lineal de $\mathbb{K}^{m\times n}$ en $\mathbb{K}^{m\times n}$, porque:

i.

$$\begin{array}{rcl} T(A+B) & = & P(A+B)Q \\ & = & PAQ + PBQ \\ & = & T(A) + T(B) \end{array}$$

ii.

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha A) & = & P\alpha AQ \\ & = & \alpha(PAQ) \\ & = & \alpha T(A). \end{array}$$

Definición 2.2.6. *Sea $J : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$Jf = \int_0^1 f(x)dx.$$

Puesto que

$$\int_0^1 [f(x)+g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx \text{ y}$$
$$\int_0^1 \alpha f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)dx,$$

*para funciones f y g continuas J es lineal; J se denomina **operador integral***

Ejemplo 2.2.7. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales y sea V el espacio de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define T por,

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

T es una transformación lineal de V en V.
La función Tf no solo es continua, sino que también tiene primera derivada continua. La linealidad de la integración es una de sus propiedades fundamentales.

Observación 2.2.8. No toda transformación que parece lineal lo es en realidad.

Ejemplo 2.2.9. Sea $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$T(x) = 2x+3$$

Entonces la gráfica de $\{(x, T(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, es una recta en el plano xy; pero T no es lineal porque

$$T(x+y) = 2(x+y)+3 = 2x+2y+3 \neq 2x+2y+6 = (2x+3)+(2y+3) = T(x)+T(y)$$

Observación 2.2.10. Las únicas transformaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son las funciones de la forma

$$f(x) = mx$$

para algún número real m. Así, entre todas las funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son lineales son aquellas que pasan por el origen.

En álgebra y cálculo una función lineal con dominio $\mathbb{R}$ está definida como una función que tiene la forma $f(x) = mx + b$. Así, se puede decir que una función lineal es una trasformación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si b (la ordenada en el origen) es cero.

Es importante observar que si T es una trasformación lineal de V en W, entonces $T(0) = 0$; en efecto

$$T(0) = T(0+0) = T(0)+T(0) \text{ , luego } T(0) = 0$$

Teorema 2.2.11. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sea $\{\alpha_1,\cdots\alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $\beta_1,\cdots,\beta_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única trasformación lineal de T de V en W tal que*

$$T\alpha_j=\beta_j \quad j=1,2,\dots,n.$$

Demostración. Para demostrar que existe una trasformación lineal T tal que $T\alpha_j=\beta_j$ se procede como sigue. Dado α de V, existe una única n-tupla $(x_1,\dots,x_n)$ tal que $\alpha = x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$.

Para ese vector α se define: $T\alpha=x_1\beta_1+\ldots+x_n\beta_n$.

Entonces, T es una correspondencia bien definida que asocia a cada vector α de V un vector $T\alpha$ de W. De la definición queda claro que $T\alpha_j=\beta_j$ par cada j. Para ver que T es lineal, sea

$$\alpha=x_1\alpha_1+\ldots+x_n\alpha_n$$

$$c\alpha=cx_1\alpha_1+\ldots+cx_n\alpha_n$$

$$\beta=y_1\alpha_1+\ldots+y_n\alpha_n$$

Un elemento de V y sea c cualquier escalar. Entonces:

$$c\alpha+\beta=(cx_1+y_1)\alpha_1+\ldots+(cx_n+y_n)\alpha_n$$

Luego:

$$T(c\alpha+\beta)=(cx_1+y_1)\beta_1+\ldots+(cx_n+y_n)\beta_n$$

Por otra parte:

$$c(T\alpha)+T\beta=c\sum_{i=1}^{n}xi+\sum_{i=1}^{n}y_i\beta_i=\sum_{i=1}^{n}(cx_i+y_i)\beta_i$$

Así $T(c\alpha+\beta)=c(T\alpha)+T\beta$. Si U es una transformación lineal de V en W con $U\alpha_j=\beta_j$, $j=1,2,\cdots,n$. Entonces para el vector

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$$

se tiene

$$U\alpha=U\sum_{i=1}^{n}(x_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i(U\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_i$$

Con lo que U es exactamente la misma correspondencia T que se definió antes, lo que demuestra que la trasformación lineal T con $T\alpha_j=\beta_j$ es única. ■

Ejemplo 2.2.12. Los vectores $\alpha_1=(1,2)$, $\alpha_2=(3,4)$ son linealmente independientes y por tanto forman una base de $\mathbb{R}^2$, como puede verificarse directamente.

De acuerdo con el teorema 2.2.11, existe una única trasformación lineal$T$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\alpha_1)=(3,2,1),\;\; T(\alpha_2)=(6,5,4)$$

De ser así se debe poder encontrar $T(\epsilon_1)$. Encontrados los escalares c_1, c_2 tales que $\epsilon_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$, se sabe entonces que $T(\epsilon_1) = c_1 T\alpha_1 + c_2 T\alpha_2$ si la combinación lineal $(1,0) = c_1(1,2) + c_2(3,4)$, entonces ; $c_1 + 3c_2 = 1$ y $2c_1 + 4c_2 = 0$ de donde $c_1 = -2$; $c_2 = 1$. Con lo que

$$T(1,0) = -2(3,2,1) + (6,5,4) = (0,1,2)$$

2.3. ALGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Teorema 2.3.1. *Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean T y U trasformaciones lineales de V en W. La función $(T+U)$ definida por $(T+U)(\alpha) = T(\alpha) + U(\alpha)$, es una trasformación lineal de V en W. si c es cualquier elemento de $\mathbb{K}$, la función (cT) definida por:*

$$(cT)(\alpha) = c(T\alpha)$$

es una transformación lineal de V en W. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W , junto con la adición y la multiplicación por escalar definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Demostración. Supongamos que T y U son trasformaciones lineales de V en W, entonces:

i)

$$\begin{aligned}(T+U)(\alpha+\beta) &= T(\alpha+\beta) + U(\alpha+\beta)\\ &= T(\alpha) + T(\beta) + U(\alpha) + U(\beta)\\ &= [T(\alpha) + U(\alpha)] + [T(\beta) + U(\beta)]\\ &= [T+U](\alpha) + [T+U](\beta).\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}(T+U)(c\alpha) &= T(c\alpha) + U(c\alpha)\\ &= c(T\alpha) + c(U\alpha)\\ &= c(T+U)(\alpha).\end{aligned}$$

■

Teorema 2.3.2. *Sean V, W y Z espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea T una trasformación lineal de V en W y U una transformación lineal de W en Z. Entonces la función compuesta $U \circ T$ definida por $(U \circ T)(\alpha) = U(T(\alpha))$ es una transformación lineal de V en Z.*

Demostración. i) $(U \circ T)(\alpha+\beta) = U[T(\alpha+\beta)] = U[T(\alpha)+T(\beta)] = (U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)$.

ii) $(U \circ T)(c\alpha) = U(cT(\alpha)) = c(U \circ T)(\alpha)$.

En lo que sigue consideremos trasformaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo. Como se tendrá a menudo que escribir T es una trasformación lineal de V en V, diremos que T es un operador lineal sobre V. ■

Definición 2.3.3. *Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un **operador lineal** sobre V es una transformación lineal de V en V.*

Lema 2.3.4. *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sean U, T_1 y T_2 operadores lineales sobre V, sea c un elemento de $\mathbb{K}$.*

i. $IU = UI = U$

ii. $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2; (T1 + T2)U = T_1U + T_2U;$

iii. $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$.

Demostración. i. $IU = UI = U$; porque I es la función idéntica

ii.

$$\begin{aligned} U[(T_1+T_2)](\alpha) &= U[(T_1+T_2)(\alpha)] \\ &= U(T_1\alpha + T_2\alpha) \\ &= U(T_1\alpha) + U(T_2\alpha) \\ &= (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha). \end{aligned}$$

Así, $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$
También,

$$\begin{aligned} [(T_1+T_2)U](\alpha) &= (T_1+T_2)(U\alpha) \\ &= (T_1(U\alpha) + T_2(U\alpha)) \\ &= (T_1U)(\alpha) + (T_2U)(\alpha) \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} c(UT_1) &= (cU)T_1 \\ &= U(cT_1) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2.3.5. Si A es una matriz $m \times n$ con elementos en F, se tiene la transformación lineal T definida por

$$T(x) = Ax$$

de $F^{n\times 1}$ en $F^{m\times 1}$, si B es una matriz $p \times m$, se tiene la transformación lineal U de $F^{m\times 1}$ en $F^{p\times 1}$ definida por $U(Y) = BY$. La composición UT se define por:

$$(UT)(x) = U(T(x)) = U(Ax) = B(Ax) = (BA)x$$

Así UT es (multiplicación a la izquierda por el producto de matrices BA).

Ejemplo 2.3.6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V el espacio vectorial de todas las funciones polinomiales de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$. Sea D el operador diferencial y sea T el operador lineal (multiplicación por x). $(Tf)(x) = xf(x)$. Entonces $DT \neq TD$, en efecto $DT - TD = I$ el operador identidad.

Teorema 2.3.7. *Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T una transformación lineal de V en W. Si T es inversible, entonces la función recíproca T^{-1} es una transformación lineal de W sobre V.*

Demostración. Para que T^{-1} sea una transformación lineal debe cumplir las dos condiciones de linealidad:

i) $T^{-1}(\beta_1+\beta_2) = T^{-1}(\beta_1)+T^{-1}(\beta_2)$.

ii) $T^{-1}(c\beta_1) = cT^{-1}(\beta_1)$

Sea $\alpha_i = T^{-1}(\beta_i)$; $i = 1,2$; esto es, sea α_i el único vector de V, tal que $T^{-1}(\alpha_i) = \beta_i$. Como T es lineal entonces:

1. $T(\alpha_1+\alpha_2) = T(\alpha_1)+T(\alpha_2) = \beta_1+\beta_2$.
2. $T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = c\beta_1$.

Así $c\alpha_1+\alpha_2$ es el único vector de V que es aplicado por T en $c\beta_1+\beta_2$ y así

i) $T^{-1}(\beta_1+\beta_2) = \alpha_1+\alpha_2 = T^{-1}(\beta_1)+T^{-1}(\beta_2)$.

ii) $T^{-1}(c\beta_1) = c\alpha_1 = c(T^{-1}\beta_1)$.

Luego T^{-1} es lineal. ■

Teorema 2.3.8. *Sea T una transformación de V en W. Entonces T es no singular si, y solo si, T aplica cada subconjunto linealmente independiente de V sobre un subconjunto linealmente independiente de W.*

Demostración. Supóngase primero que T es no singular. Sea S un subconjunto linealmente independiente de V. si $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$. son vectores pertenecientes a S, entonces los vectores $T\alpha_1,\cdots,T\alpha k$ son linealmente independientes, en efecto, si

$$c_1(T\alpha_1)+\cdots+ck(T\alpha_k) = 0$$

entonces

$$T(c_1\alpha_1+\cdots+ck\alpha_k) = 0$$

y como T es no singular

$$c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k = 0$$

De lo que sigue con que cada $c_i = 0$, pues S es un conjunto independiente.
Este razonamiento muestra que la imagen de S por T es independiente.

Supongamos que T aplica subconjuntos independientes sobre subconjuntos independientes. Sea α un vector no nulo de V. Entonces el conjunto S que consta del solo vector α es independiente.

La imagen de S es el conjunto que consta del solo vector $T\alpha$. Por tanto $T\alpha \neq 0$, pues el conjunto que consta del solo vector nulo es dependiente; lo que muestra que el espacio nulo de T es el subespacio nulo cero, es decir, T es no singular. ■

Observación 2.3.9. Una transformación lineal puede ser no singular sin ser sobreyectiva y puede ser sobreyectiva sin ser no singular, el ejemplo siguiente ilustra esta situación.

Ejemplo 2.3.10. Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números complejos y V el espacio de las funciones polinomiales sobre $\mathbb{K}$. Considérese el operador diferencial D, como D aplica todas las constantes sobre 0, D es singular; sin embargo, V no es de dimensión finita, la imagen de D es todo V y es posible definir una inversa a la derecha de D. Por ejemplo, si E es el operador integración definida:

$$E(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx_n) = c_0x + \frac{1}{2}c_1x^2 + \cdots + \frac{c_n}{(n+1)}x^{n+1}$$

Entonces E es un operador lineal en V y $DE = I$, por otro lado, $ED \neq I$, pues ED aplica las constantes sobre cero.
Si $f(x) = 0$ para todo x, entonces $f = 0$. Con lo que T es no singular y es posible hallar una inversa a la izquierda de T, por ejemplo, si U es la operación suprimir el término constante y dividir por x:

$$U(c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) = c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}$$

Entonces U es un operador lineal en V y $UT = I$. Pero $TU \neq I$, ya que cada función en la imagen de TU está en la imagen de T, que es el espacio de las funciones polinomiales f tales que $f(0) = 0$.

Teorema 2.3.11. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $dimV = dimW$. Si T es una transformación lineal de V en W, es decir $T : V \to W$ las siguientes las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) T es inversible

ii) T es no singular

iii) T es sobreyectiva; eso es, la imagen de T es W.

Demostración. Sea $n = dimV = dimW$ sabemos por definición que rango (T) = nulidad $(T) = n$.

Ahora bien sabemos que T es no singular si, y solo sí, la nulidad $(T) = 0$, y (como $n = dimW$) la imagen de T es W si, y solo si, rango $(T) = n$. Como el rango mas la nulidad es n, la nulidad es 0 precisamente cuando el rango es n. Por tanto, T es no singular si, y solo si, $T(V) = W$. Así, si rigen las condiciones $ii), iii)$, la otra se cumple también y T es inversible. ■

2.4. Representaciones matriciales

2.4.1. Representación de transformaciones por matrices

Cualquier transformación lineal $T : V \to W$ de un espacio vectorial de dimensión finita V, en otro espacio vectorial de dimensión finita W, se pude representar por una matriz. La *representación matricial de T depende tanto de la base de V como la de W. Sin embargo, una vez se han escogido un par de bases y se consideren como bases ordenadas, entonces la representación matricial está determinada en forma única.*

Definición 2.4.1. *Sea B una base ordenada $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una base ordenada para el espacio vectorial V. El vector coordenado de un vector X de V referido a la base ordenada de B, es el vector columna*

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los escalares determinados en forma única y tales que $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$. Los escalares $a_1, a_2, \ldots a_n$. Se llaman las coordenadas de X referidas a la base B. la notación $[X]_B$ se usa para denotar el vector coordenado X referido a la base B.

$[T]_B$ es la notación usada para recordar que T es una transformación que depende de la base ordenada B.

Teorema 2.4.2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y W un espacio vectorial de dimensión m sobre $\mathbb{K}$. Sea V una base ordenada de V y B' una base ordenada de W, para cada transformación lineal T de V en W, existe una matriz $m \times n$, A, cuyos elementos pertenecen a $\mathbb{K}$, tal que:*

$$[T\alpha]_{B'} = A[\alpha]_B.$$

Para todo vector α en V. Además $T \to A$ es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W y el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Ejemplo 2.4.3. Sean

$$B_1 = \left\{ X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad y \quad B_2 = \left\{ Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bases ordenadas para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:

$$T(X_1) = 2Y_1 + 3Y_2, \quad T(X_2) = 0Y_1 + (-1)Y_2, \quad T(X_3) = 3Y_1 - 4Y_2$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
T(X_1) &= 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(X_2) &= 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(X_3) &= 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Se expresarán las imágenes de la base B_1 como combinación lineal de la base B_2,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ luego } \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ luego } \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{luego } \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Referido a la base ordenada B_1, se tiene

$$[T(X_1)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [T(X_2)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, [T(X_3)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto se forma la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{array}\right] = [[T(X_1)]_{B_2}][[T(X_2)]_{B_2}][[T(X_3)]_{B_2}] = A$$

Para cualquier vector X de $\mathbb{R}^3$, afirmamos que

$$A[X]_{B_1} = [T(X)]_{B_2}$$

Para verificar esto, sea $X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$, cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$A[X]_{B_1} = \left[\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2x_1+0x_2+3x_3 \\ 3x_1-1x_2-4x_3 \end{array}\right]$$

A continuación se escribe $T(X)$ como una combinación lineal de los vectores en B_2. Como T es lineal, tenemos:

$$\begin{aligned} T(X) &= x_1T(X_1)+x_2T(X_2)+x_3T(X_3) \\ &= x_1(2Y_1+3Y_2)+x_2(0Y_1+(-1)Y_2)+x_3(3Y_1-4Y_2) \\ &= (2x_1+0x_2+3x_3)Y_1+(3x_1-1x_2-4x_3)Y_2 \end{aligned}$$

Entonces

$$[T(X)]_{B_2} = \left[\begin{array}{c} 2x_1+0x_2+3x_3 \\ 3x_1-1x_2-4x_3 \end{array}\right] = A[X]_{B_1}.$$

Por esta razón se dice que A es la matriz de T referida a las bases B_1 y B_2.

Ejemplo 2.4.4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal, de la cual se sabe que

$$\begin{aligned} f(1,2,3) &= (6,4,31) \\ f(2,0,1) &= (3,6,12) \\ f(0,1,0) &= (0,1,2) \end{aligned}$$

Hallar la matriz de f en la base natural.

Solución.

$B_1 = \{X_1 = (1,2,3),\ X_2 = (2,0,1),\ X_3 = (0,1,0)\}$

$$\begin{aligned} &= \Big[[f(1,2,3)]_{B_2}\,[f(2,0,1)]_{B_2}\,[f(0,1,0)]_{B_2}\Big] \\ &= \big[(6,4,31)_{B_2}\big]\big[(3,6,12)_{B_2}\big]\big[(0,1,2)_{B_2}\big] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 31 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 31\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ luego } \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 31 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ luego } \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ luego } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Luego la matriz referida a la base natural es
$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 31 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2.4.5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por:

$$T(X) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-3z+w \\ 2y+3z+4w \end{bmatrix}$$

Si B_1 y B_2 son las bases naturales para $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, encuentre

a) $A = [T]_{B_1 B_2}$.
b) Use A para encontrar a $T(X)$.

Solución:

a) De la definición de T se observa que:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+2(0) \\ 1-3(0)+(0) \\ 2(0)+3(0)+4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+2(1) \\ 0-3(0)+(0) \\ 2(1)+3(0)+4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0+2(0)\\1-3(1)+(0)\\2(0)+3(1)+4(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\\3\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0+2(0)\\0-3(0)+1\\2(0)+3(0)+4(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}$$

Como $[T(E_1)]_{B_2}=T(E_1)$, se tiene.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&0&-3&1\\0&2&3&4\end{bmatrix}=[T]_{B_1B_2}$$

b) Como $[X]_{B_1}=X$ y $[T(X)]_{B_2}=T(X)$. entonces tenemos que:

$$T(X)=AX=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&0&-3&1\\0&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}$$

que coincide con la definición dada de T.

Definición 2.4.6. *Sean $C=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ y $C_1=\{Y_1,Y_2,\dots,Y_n\}$ bases ordenadas para el espacio vectorial V, y sea $I:V\to V$ la transformación identidad. La matriz $Q=[I]_{CC_1}=[[X1]_{C_1}|[X2]_{C_1}|\dots|[Xn]_{C_1}]$ se llama la matriz **cambio de base** de C a C_1 (porque $Q[X]_B=[X]_{B_1}$).*

Teorema 2.4.7. *Sea $T:V\to V$ un operador lineal sobre V. Sea A la matriz de T referida a la base ordenada para $V,C=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$ si $C_1=\{Y_1,Y_2,\dots,Y_n\}$ es cualquier base ordenada para V entonces:*

a) La matriz $P=[[Y_1]_C|[Y_2]_C|\dots|[Y_n]_C]$ para el cambio de base de C_1 a C es inversible.

b) $P^{-1}=[[X_1]_{C_1}|[X_2]_{C_1}|\dots|[X_n]_{C_1}]$ es la matriz para el cambio de base de C a C_1.

c) La matriz T referida a C_1 es $B=P^{-1}AP$.

Ejemplo 2.4.8. Dada la base $C=\{E_1,E_2,E_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ y la "nueva" base

$$C=\left\{Y_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\ Y_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\ Y_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

encuentre

a) La matriz P para el cambio de la nueva base C_1 a la base C.

b) Encuentre la matriz P^{-1} para el cambio de base de C a la nueva base C_1.

c) Usando P^{-1}, escriba $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ como una combinación lineal de vectores de C'.

Solución

a) $P = [I]_{C_1C} = [[Y_1]_C|[Y_2]_C|[Y_3]_C] = [Y_1|Y_2|Y_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Encontramos a P^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

por tanto,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

c) $P^{-1}[X]_C = [X]_C$. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{2} - z \\ z \\ x - \frac{y}{2} + z \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{y}{2} - z\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(x - \frac{y}{2} + z\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4.2. Transformaciones lineales asociadas a una matriz

Teorema 2.4.9. *Si A y B son matrices $n \times n$ tales que B es similar con A, entonces para cualquier espacio vectorial V, de dimensión n existe un operador lineal $T : V \to V$, tal que*

A y B son representaciones matriciales de T.

2.5. Suma, producto y múltiplos escalares de las transformaciones lineales

Definición 2.5.1. *Sean $T : V \to W$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales. La* **suma** *$T+S$ es la transformación $T+S : V \to W$ definida por $(T+S)(X) = T(X)+S(X)$ para todo X de V. Si α es un escalar, el* **múltiplo escalar** *αT es la transformación $\alpha T : V \to W$, definida por $(\alpha T)(X) = \alpha(T(X))$, para todo X de V.*

Si T y S son transformaciones lineales con matrices A y B referidas a un par de bases, demostraremos que la matriz de $T+S$ es $A+B$.

Teorema 2.5.2. *Sean $T : V \longrightarrow W$ y $S : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales de un espacio vectorial V de dimensión n a un espacio vectorial W de dimensión m, y sean $C_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ y $C_2 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ bases para V y W respectivamente. Si $[T]_{C_1C_2} = A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ y $[S]_{C_1C_2} = B = [b_{ij}]_{(m,n)}$, y r es un escalar, entonces $[T+S]_{C_1C_2} = A+B$ y $[rT]_{C_1C_2} = rA$.*

Demostración. El vector coordenado $T(X_j)$ referido a la base C_2 es

$$A(j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Además,

$$B(j) = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$$

es el vector coordenado de $S(X_j)$ referido a la base C_2 entonces

$$\begin{aligned} (T+S)(X_j) &= T(X_j)+S(X_j) \\ &= (a_{1j}Y_1 + a_{2j}Y_2 + \ldots + a_{mj}Y_m) + (b_{1j}Y_1 + b_{2j}Y_2 + \ldots + b_{mj}Y_m) \\ &= (a_{1j}+b_{1j})Y_1 + (a_{2j}+b_{2j})Y_2 + \ldots + (a_{mj}+b_{mj})Y_m \end{aligned}$$

Por consiguiente el vector coordenado de $(T+S)(X_j)$ es

$$\begin{bmatrix} a_{1j} & + & b_{1j} \\ a_{2j} & + & b_{2j} \\ & \vdots & \\ a_{mj} & + & b_{mj} \end{bmatrix} = A_j + B_j = \text{la j-ésima columna de} A+B$$

Como es cierto para $j = 1, 2, \ldots, n$ tenemos que la matriz $T+S$ referida a las bases C_1 y C_2 es $A+B$. ■

Ejemplo 2.5.3. Sean $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $S:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dos transformaciones lineales definidas por

$$T(X) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3y+4z \\ -2x+5w \end{bmatrix}$$

y

$$S(X) = S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y+z+w \\ y+2z+w \\ 2x-3y+4z \end{bmatrix}$$

Para las bases,

$$C_1 = \left\{ X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ X_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$C_2 = \left\{ Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Muestre que C_1 y C_2 son bases para $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

b) Encuentre $A = [T]_{C_1C_2}$ y $B = [S]_{C_1C_2}$.

c) Encuentre $[T+S]_{C_1C_2}$ y demuestre que $[T+S]_{C_1C_2} = A+B$.

d) Encuentre $[\alpha T]_{C_1C_2}$ y demuestre $[\alpha T]_{C_1C_2} = \alpha A$.

Solución

a) Veamos la independencia lineal de C_1.

Si

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Luego $\alpha_4 = 0$, de aquí $\alpha_3+\alpha_4 = 0$ nos lleva a que $\alpha_3 = 0$, del hecho que $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0$ nos conduce a que $\alpha_2 = 0$, y puesto que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 0$ se tiene que $\alpha_1 = 0$.
Por lo tanto C_1 es linealmente independiente.

Ahora veamos que C_1 genera a $\mathbb{R}^4$

Si

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

entonces

$$x+y+z+w=a$$
$$y+z+w=b$$
$$z+w=c$$
$$w=d$$

de donde

$$w=d \ ; \ z=c-d \ ; \ y=b-(c-d)-d=b-c; \text{y}$$
$$x=a-w-z-y=a-d-(c-d)-(b-c)=a-b$$

Veamos ahora la independencia lineal de C_2

Si,

$$0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_3\end{bmatrix}$$

Luego $\alpha_3=0$; de aquí $\alpha_2+\alpha_3=0$ nos lleva a que $\alpha_2=0$, y por último, tenemos que $\alpha_1=0$.
Por lo tanto C_2 es linealmente independiente.

Veamos que C_2 genera a $\mathbb{R}^3$

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

Entonces
$z=c$; $y=b-z=b-c$; $x=a$
De lo anterior se logra concluir que C_1 y C_2 son bases.

b) Las columnas de la matriz A son los vectores coordenados de $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$, $T(X_4)$ referidos a la base C_1. De la definición de T, se tiene las columnas de la matriz A son los vectores coordenados de $T(X_1)$, $T(X_2)$, $T(X_3)$, $T(X_4)$
referidos a la base C_2. De la definición de T, se tiene

$$T(X_1)=T\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2(0)\\3(0)+4(0)\\-2(1)+5(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}$$

$$T(X_2)=T\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2(1)\\3(1)+4(0)\\-2(1)+5(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\-2\end{bmatrix}$$

$$T(X_3) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2(1) \\ 3(1)+4(1) \\ -2(1)+5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T(X_4) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2(1) \\ 3(1)+4(1) \\ -2(1)+5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$T(X_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = a_1Y_1 + a_2Y_2 + a_3Y_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$1 = a_1; \; 0 = a_2 + a_3 \text{ y } -2 = a_3$$

así que

$$a_1 = 1; \; , a_2 = 2 \text{ y } a_3 = -2$$

luego

$$T(X_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 1Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3$$

Similarmente

$$T(X_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = a_1Y_1 + a_2Y_2 + a_3Y_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$3 = a_1; \; 3 = a_2 + a_3 \text{ y } -2 = a_3$$

así que

$$a_1 = 3; \; , a_2 = 5 \text{ y } a_3 = -2$$

luego

$$T(X_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3Y_1 + 5Y_2 - 2Y_3$$

Además:

$$T(X_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad = \quad a_1Y_1 + a_2Y_2 + a_3Y_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

De donde

$$3 = a_1;\ a_2 + a_3 = 7 \text{ y } a_3 = -2$$

Por lo tanto

$$a_1 = 3;\ a_3 = -2 \text{ y } a_2 = 9$$

luego

$$T(X_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = 3Y_1 + 9Y_2 - 2Y_3$$

Por consiguiente

$$T(X_4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = a_1Y_1 + a_2Y_2 + a_3Y_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

De donde

$$a_1 = 3;\ a_2 + a_3 = 7 \text{ y } a_3 = 3$$

Por lo tanto,

$$a_1 = 3,\ a_2 = 4 \text{ y } a_3 = 3$$

luego

$$T(X_4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = 3Y_1 + 4Y_2 + 3Y_3$$

entonces,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

de igual forma las columnas de B se obtienen resolviendo,

$$S(X_1) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$S(X_2) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$S(X_3) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$S(X_4) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_3 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Así que

$$S(X_1) = 2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 \quad ; \quad S(X_2) = 3Y_1 + 2Y_2 - Y_3$$

$$S(X_3) = 4Y_1 + 0Y_2 + 3Y_3 \quad ; \quad S(X_4) = 5Y_1 + Y_2 + 3Y_3$$

de donde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Para encontrar $[T+S]_{C_1C_2}$ necesitamos los vectores coordenados de $(T+S)(X_1)$, $(T+S)(X_2), (T+S)(X_3)$ y $(T+S)(X_4)$ referidos a la base C_2 pero $(T+S)(X_i) = T(X_i) + S(X_i)$ y esto implica que

$$[(T+S)(X_i)]_{C_2} = [T(X_i)]_{C_2} + [S(X_i)]_{C_2}$$

Entonces cada columna de $[T+S]_{C_1C_2}$ es la suma de las correspondientes columnas de $[T]_{C_1C_2} y [S]_{C_1C_2}$.

$$[T+S]_{C_1C_2} = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 9 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

d) Para encontrar la matriz de αT, debemos encontrar los vectores coordenados de $\alpha T(X_i)$ referidos a la base C_2. pero $\alpha T(X_i) = \alpha(T(X_i))$ y esto implica $[\alpha T(X_i)]_{C_2} = \alpha[T(X_i)]_{C_2}$. Por tanto, cada columna de $[\alpha T]_{C_1C_2}$ es α-veces la correspondientes columna de $[\alpha T]_{C_1C_2}$. De donde

$$[\alpha T]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} 1\alpha & 3\alpha & 3\alpha & 3\alpha \\ 2\alpha & 5\alpha & \alpha & 4\alpha \\ -2\alpha & -2\alpha & -2\alpha & 3\alpha \end{bmatrix} = \alpha A$$

Ejemplo 2.5.4. Sea $P_n = \{P : \ P(x) \text{ son polinomios de grado } \leq n\}$
Definamos:

$$\begin{aligned} T \ : \ & P_2 \to P_1 \\ & p \to q \end{aligned}$$

donde $p(x) = a + bx + cx^2 \quad , \quad q(x) = (a-3c) + (b+2a)x \quad , \quad$ y

$$\begin{aligned} S \ : \ & P_2 \to P_1 \\ & p \to r \end{aligned}$$

donde $p(x) = a + bx + cx^2$ y $r(x) = (2a+b) + cx$. Si $C_1 = \{f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2\}$ y $C_2 = \{g_1(x) = 1, g_2(x) = x\}$ son bases para P_2 y P_1 respectivamente,

a) Encuentre $[T]_{C_1C_2}$

b) Encuentre $[S]_{C_1C_2}$

c) Encuentre $[T+S]_{C_1C_2}$ y observe que $[T+S]_{C_1C_2} = [T]_{C_1C_2} + [S]_{C_1C_2}$.

d) Encuentre $[rT]_{C_1C_2}$ y muestre que $[rT]_{C_1C_2} = r[T]_{C_1C_2}$.

Solución
Veamos que efectivamente C_1 y C_2 son bases,

Veamos la independencia lineal:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3)(x) = 0(x) = 0$$

luego,

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$$

de donde

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x^2) = 0$$

Así que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ Ahora veamos que los elementos de C_1 generan a P_2, sea $v \in P_2$, entonces $v(x) = a + bx + cx^2 = a \cdot (1) + b \cdot (x) + c \cdot (x^2)$ así que $\{1, x, x^2\}$ genera P_2.

Veamos que C_2, es linealmente independiente.

$$(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)(x) = 0(x) = 0$$

luego,

$$\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = 0$$

de donde

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(x) = 0$$

Así que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Veamos que los elementos de C_2 generan a P_1, sea $v \in P_1$, entonces $v(x) = a + bx = a \cdot (1) + b \cdot (x)$, así que $\{1, x,\}$ genera a todo P_1.

De lo anterior se concluye que C_1 y C_2 son bases.

a) $[T]_{C_1 C_2} = [[T(f_1)]_{C_2} | [T(f_2)]_{C_2} | [T(f_3)]_{C_2}]$

$$\begin{array}{rcl} T : P_2 & \longrightarrow & P_1; \\ a + bx + cx^2 & \longrightarrow & (a - 3c) + (b + 2a)x \\ 1 & \longrightarrow & (1 - 3(0)) + (0 + 2(1))x = 1 + 2x = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x \\ x & \longrightarrow & (0 - 3(0)) + (1 + 2(0))x = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ x^2 & \longrightarrow & (0 - 3(1)) + (0 + 2(0))x = -3 = -3 \cdot 1 + 0 \cdot x \end{array}$$

Luego la matriz asociada a la transformación T es :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $[S]_{C_1 C_2} = [[S(f_1)]_{C_2} | [S(f_2)]_{C_2} | [S(f_3)]_{C_2}]$

$$\begin{array}{rcl} S : P_2 & \longrightarrow & P_1 \\ a + bx + cx^2 & \longrightarrow & (2a + b) + cx \\ 1 & \longrightarrow & (2(1) + 0) + (0)x = 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ x & \longrightarrow & (2(0) + 1) + (0)x = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ x^2 & \longrightarrow & (2(0) + 0) + (1)x = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \end{array}$$

Luego la matriz asociada a la transformación S es :

$$[S] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $[T + S]_{C_1 C_2} = [[(T + S)(f_1)]_{C_2} [(T + S)(f_2)]_{C_2} | [(T + S)(f_3)]_{C_2}]$

$$\begin{array}{rcl} [T + S] : P_2 & \longrightarrow & P_1 \\ a + bx + cx^2 & \longrightarrow & (a - 3c) + (b + 2a)x + (2a + b) + cx \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & = & (3a-3c+b)+(b+2a+c)x \\ 1 & \longrightarrow & (3(1)-3(0)+0)+(0+2(1)+0)x = 3+2x = 3\cdot 1+2\cdot x \\ x & \longrightarrow & (3(0)-3(0)+1)+(1+2(0)+0)x = 1+x = 1\cdot 1+1\cdot x \\ x^2 & \longrightarrow & (3(0)-3(1)+0)+(0+2(0)+1)x = -3+x = -3\cdot 1+1\cdot x \end{array}$$

Luego la matriz asociada a la transformación $[T+S]$ es :
$[T+S] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+1 & -3+0 \\ 2+0 & 1+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$[T]+[S]$

d) $[rT]_{C_1C_2} = [[rT(f_1)]_{C_2}|[rT(f_2)]_{C^2}|[rT(f_3)]_{C_2}]$

$$\begin{array}{rcl} [rT]:P_2 & \longrightarrow & P_1 \\ a+bx+cx^2 & \longrightarrow & (a-3c)+(b+2a)x \\ r & \longrightarrow & (r-0)+(0+2(r))x = r+2rx = r\cdot 1+2r\cdot x \\ rx & \longrightarrow & (0-3(0))+(r+2(0))x = rx = 0\cdot 1+r\cdot x \\ rx^2 & \longrightarrow & (0-3(r))+(0+2(0))x = -3r = -3r\cdot 1+0\cdot x \end{array}$$

Luego la matriz asociada a la transformación $r[T]$ es :

$$[rT] = \begin{bmatrix} r & 0 & -3r \\ 2r & r & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = r[T]_{C_1C_2}$$

Ejemplo 2.5.5. Sea $T: P_2 \longrightarrow P_3$ la transformación lineal definida por:

$$T(a+bx+cx^2) = (a+bx+cx^2)+(a+b+c)x^3.$$

Supongamos que las bases de P_2 y P_3 sean $C_1 = \{1, x, x^2\}$ y $C_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ respectivamente, entonces:

$$\begin{array}{rcl} T:P_2 & \longrightarrow & P_3 \\ a+bx+cx^2 & \longrightarrow & (a+bx+cx^2)+(a+b+c)x^3 \\ 1 & \longrightarrow & (1+(0)x+(0)x^2)+(1+0+0)x^3 = 1+x^3 = 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot\ x^2+1\cdot x^3 \\ x & \longrightarrow & (0+(1)x+(0)x^2)+(0+1+0)x^3 = x+x^3 = 0\cdot 1+1\cdot x+0\cdot\ x^2+1\cdot x^3 \\ x^2 & \longrightarrow & (0+(0)x+(1)x^2)+(0+0+1)x^3 = x^2+x^3 = 0\cdot 1+0\cdot x+1\cdot x^2+1\cdot x^3 \end{array}$$

Luego la matriz asociada a la transformación T es :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 2.5.6. *Si $S: V \to W$ y $T: W \to U$ son transformaciones lineales, definimos la compuesta como la transformación $T\circ S: V \to U$, donde $(T\circ S)(X) = T(S(X))$ para todo X de V.*

Teorema 2.5.7. *Si $S : V \to W$ y $T : W \to U$ son transformaciones lineales, entonces $T \circ S : V \to W$ es una transformación lineal.*

Demostración. Se debe ver que,

i) $(T \circ S)(X+Y) = (T \circ S)(X) + (T \circ S)(Y)$

ii) $(T \circ S)(\alpha X) = \alpha((T \circ S)(X))$

Sean X y Y vectores de V y sea α un escalar. Entonces

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(X+Y) &= T(S(X+Y)) && \text{(definición de } T \circ S\text{)}\\
&= T(S(X)+S(Y)) && \text{(por ser } S \text{ lineal)}\\
&= T(S(X)) + T(S(Y)) && \text{(por ser } T \text{ lineal)}\\
&= (T \circ S)(X) + (T \circ S)(Y) && \text{(por definición de } T \circ S\text{)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$(T \circ S)(X+Y) = (T \circ S)(X) + (T \circ S)(Y)$.
ii)

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(\alpha X) &= T(S(\alpha X)) && \text{(Definición de } T \circ S\text{)}\\
&= T(\alpha S(X)). && \text{(por ser } S \text{ lineal)}\\
&= \alpha(T(s(X)). && \text{(Por ser } T \text{ lineal)}\\
&= \alpha((T \circ S)(X)) && \text{(aplicando la definición de } T \circ S\text{).}
\end{aligned}$$

Entonces $(T \circ S)(\alpha X) = \alpha((T \circ S)(X))$. ■

Ejemplo 2.5.8. Si $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, son transformaciones lineales definidas por

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ x-z \\ w+2z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y+4z \end{bmatrix}$$

Entonces $T \circ S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$. Sean C_1 y C_2 las bases naturales de $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

i) Encuentre $(T \circ S)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

ii) Encuentre $[S]_{C_1C_2}[T]_{C_1C_2}$ y $[T \circ S]_{C_1C_2}$

iii) Use $[T \circ S]_{C_1C_2}$ para calcular $(T \circ S)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

iv) Calcule la matriz producto $[T]_{C_1C_2}[S]_{C_1C_2}$.

Solución:

i) $(T\circ S)(X) = T(S(X)) = T\begin{bmatrix} x+2y \\ x-z \\ w+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2(x+2y)+(x-z) \\ 3(x-z)+4(w+2z)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y-z \\ 3x+5z+4w \end{bmatrix}$

ii)
- $[S]_{C_1} = [[S(E_1)]_{C_1}|[S(E_2)]_{C_1}|[S(E_3)]_{C_1}|[S(E_4)]_{C_1}]$

$$[S(E_1)]_{C_1} = S\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2(0) \\ 1-0 \\ 0+2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[S(E_2)]_{C_1} = S\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2(1) \\ 0-0 \\ 0+2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[S(E_3)]_{C_1} = S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2(0) \\ 0-1 \\ +2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[S(E_4)]_{C_1} = S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2(0) \\ 0-0 \\ 0+2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego

$$[S]_{C_1} = [[S(E_1)]_{C_1}|[S(E_2)]_{C_1}|[S(E_3)]_{C_1}|[S(E_4)]_{C_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $[T]_{C_1C_2} = [[T(E_1)]_{C_2}|[T(E_2)]_{C_2}|[T(E_3)]_{C_2}]$

$$T[E_1]_{C_2} = T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)+0 \\ 3(0)+4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T[E_2]_{C_2} = T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(0)+1 \\ 3(1)+4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T[E_3]_{C_2} = T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(0)+0 \\ 3(0)+4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

luego

$$[T]_{C_1C_2} = [[T(E_1)]_{C_2}|[T(E_2)]_{C_2}|[T(E_3)]_{C_2}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- $[T\circ S]_{C_1C_2} = [[(T\circ S)(E_1)]_{C_2}|[(T\circ S)(E_2)]_{C_2}|[(T\circ S)(E_3)]_{C_2}|[(T\circ S)(E_4)]_{C_2}]$

$$\begin{aligned} [(T\circ S)(E_1)]_{C_2} &= (T\circ S)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T\left(S\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 1+1 \\ 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(T\circ S)(E_2)]_{C_2} &= (T\circ S)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = T\left(S\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 2+0 \\ 3\cdot 0+4\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (T\circ S)(E_3)]_{C_2} &= (T\circ S)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T\left(S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 0-1 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(T\circ S)(E_4)]_{C_2} &= (T\circ S)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = T\left(S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 0+0 \\ 3\cdot 0+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} [T\circ S]_{C_1C_2} &= [[(T\circ S)(E_1)]_{C_2}|[(T\circ S)(E_2)]_{C_2}|[(T\circ S)(E_3)]_{C_2}|[(T\circ S)(E_4)]_{C_2}] \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} (T\circ S)(X) &= [(T\circ S)(X)]_{C2} = [(T\circ S)_{C_1C_2}(X)] \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y-z \\ 3x+5z+4w \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

iv) $[T]_{C_1C_2}[S]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} = [T \circ S]_{C_1C_2}$

2.6. Funcionales Lineales

Definición 2.6.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una **funcional lineal** en V es una transformación lineal $V \to \mathbb{K}$.*

Ejemplo 2.6.2. Sea $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida

$$\phi = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \sqrt{3}x_1 - 5x_2 + x_4$$

Veamos que ϕ es una funcional lineal.

Solución

i)

$$\text{Si} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \right) = \phi\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{bmatrix} \right) \\ &= \sqrt{3}(x_1+y_1) - 5(x_2+y_2) + (x_4+y_4) \\ &= (\sqrt{3}x_1 - 5x_2 + x_4) + (\sqrt{3}y_1 - 5y_2 + y_4) \\ &= \phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) + \phi\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

ii)

$$\phi(cx) = \phi\left(c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \phi\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \\ cx_4 \end{bmatrix} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{3}(cx_1) - 5(cx_2) + (cx_4)\\
&= c(\sqrt{3}x_1 - 5x_2 + x_4)\\
&= c\phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Aquí usamos las definiciones de las operaciones lineales en $\mathbb{R}^4$ y las propiedades de las operaciones aritméticas en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.6.3. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
Definida:

$$\phi = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 5x_1 - 7x_1x_2$$

Veamos que ϕ no es un funcional lineal.

Solución
Es suficiente mostrar con algún ejemplo que no se cumple cualquiera de las dos propiedades: la aditiva o la homogénea. En este ejemplo no se cumple ninguna de estas.

Mostremos que no se cumple la propiedad aditiva.
Sean

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Entonces

$$x + y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \phi(x+y) = 5 \cdot 2 - 7 \cdot 2 \cdot 3 = 10 - 42 = -32.$$

Por otro lado, $\phi(x) = -2$ y $\phi(y) = -9$ luego $\phi(x) + \phi(y) = -2 - 9 = -11$.

Tampoco se cumple la propiedad homogénea.

Sean $c = 10$ y $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces,

$$cx = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \phi(cx) = 5 \cdot 10 - 7 \cdot 10 \cdot 10 = 50 - 700 = -650$$

Por otro lado, $\phi(x) = -2$; $c\phi(x) = 10(-2) = -20$, así que ninguna de las dos propiedades se cumplen.

Ejemplo 2.6.4 (Ejemplo traza de matrices)**.** El funcional $tr : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ se define mediante la siguiente regla:

$$tr(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Veamos que la traza cumple con las propiedades aditiva y homogénea:

$$i) \quad tr(A+B) = \sum_{j=1}^{n} (a_{jj} + b_{jj}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} + \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = tr(A) + tr(b)$$

$$ii) \quad tr(cA) = \sum_{j=1}^{n} (ca_{jj}) = c\sum_{j=1}^{n} a_{jj} = ctr(A)$$

Ejemplo 2.6.5 (Funcional de evaluación de polinomios en un punto)**.** Sea $c \in \mathbb{C}$ un punto fijo, en el espacio $P_n(\mathbb{C})$ de polinomios de grado $\leq n$ y coeficientes complejos.
Se define el funcional de evaluación en el punto c, así:

$$eval_c(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n) = (\alpha_0 + \alpha_1 c + \cdots + \alpha_n c^n)$$

La expresión $(\alpha_0 + \alpha_1 c + \ldots + \alpha_n c^n)$ se denota por $f(c)$. Así que

$$eval_c(f) = f(c); \quad \forall f \in P_n(\mathbb{C}).$$

Efectivamente si

$$f(c) = \alpha_0 + \alpha_1 c + \ldots + \alpha_n c^n$$
$$g(c) = \beta_0 + \beta_1 c + \ldots + \beta_n c^n$$

entonces
i)

$$eval_c(f+g) = (f+g)(c) = f(c) + g(c) = eval_c f + eval_c g$$

ii)

$$eval_c(rf) = (rf)(c) = rf(c) = reval_c f.$$

Ejemplo 2.6.6. Se demostrará que el siguiente funcional

$$\begin{array}{rcl} \phi : P_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longrightarrow & 5f(-7) + 8f''(2) \end{array}$$

es lineal.

Se sabe que para todo $p \in \mathbb{C}$

i)

$$(f+g)(p) = f(p) + g(p) \qquad (cf)(p) = cf(p)$$

ii)

$$(f+g)''(x) = f''(x) + g''(x) \qquad (cf)''(x) = cf''(x)$$

Por lo tanto
i)

$$\phi(f+g) = 5(f+g)(-7) + 8(f+g)''(2)$$

$$\begin{aligned}
&= 5(f(-7) + g(-7)) + 8(f''(2) + g''(2)) \\
&= (5f(-7) + 8f''(2)) + (5g(-7) + 8g''(2)) \\
&= \phi(f) + \phi(g)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
\phi(bf) &= 5(bf)(-7) + 8(bf)''(2) \\
&= 5bf(-7) + 8bf''(2) \\
&= b(5f(-7) + 8f''(2)) \\
&= b\phi(f).
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

OTROS EJEMPLOS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

3.1. Otros ejemplos de Transformaciones Lineales

A continuación veremos más ejemplos de transformaciones lineales.

Ejemplo 3.1.1. Probar que la aplicación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix}$

es lineal.
Solución:
Sean $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

i)

$$\begin{aligned} T(x+y) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= T\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2(x_1+x_2) \\ (x_1+x_2)+(y_1+y_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1+2x_2 \\ x_1+x_2+y_1+y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= T(x)+T(y) \end{aligned}$$

ii)

$$T(\alpha(x)) = T\left(\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \alpha(2x_1) \\ \alpha(x_1+y_1) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} \\ &= \alpha T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.2. Verificar que la aplicación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x+2 \end{bmatrix}$ no es una transformación lineal.

Solución:

Para ver que una aplicación no es lineal basta con verificar que al menos una de las condiciones no se cumple para elementos particulares del espacio sobre el que está definida. En este caso particular, tomemos por ejemplo $a = 2$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} T(av) &= T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \\ &= T\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-6 \\ 2+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aT(v) &= 2T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} 1-3 \\ 1+2 \end{bmatrix} \\ &= 2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir, en este caso particular, $T(av) \neq aT(v)$, por lo que la transformación no es lineal.

Ejemplo 3.1.3. Determine si la aplicación $L: P_3 \longrightarrow P_2$ definida por

$$L(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2x^2 + a_0$$

es o no una transformación lineal .
Sean

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_3$$

$$Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P_3, \text{ y } k \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
i)\quad L[P(x)+Q(x)] &= L\left[(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)\right] \\
&= L\left[(a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)\right] \\
&= (a_2+b_2)x^2 + a_0 + b_0 \\
&= (a_2x^2 + a_0) + (b_2x^2 + b_0) \\
&= L(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + L(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) \\
&= L[P(x)] + L[Q(x)] \\
ii)\qquad L[kp(x)] &= L\left[k(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\right] \\
&= \left[L((ka_3)x^3 + (ka_2)x^2 + (ka_1)x + (ka_0))\right] \\
&= \left[ka_2x^2 + ka_0\right] = k\left[a_2x^2 + a_0\right] \\
&= k\left[L(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\right] \\
&= k\left[L(P(x))\right].
\end{aligned}$$

Así que L es lineal.

Ejemplo 3.1.4. Dada la base $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^2$ determinar $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ siendo $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$
.

Solución: Primero escribiremos al vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los elementos de la base B.
Es decir,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de donde $x = a + b$ y $y = a - b$. Despejando a y b en términos de x, y en el sistema anterior se obtiene que :

$$a = \frac{x+y}{2} \text{ y } b = \frac{x-y}{2}$$

Así podemos escribir $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de la siguiente forma :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{x-y}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \left(\frac{x+y}{2}\right)T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{x+y}{2}\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{x-y}{2}\right)\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x-2y \\ 0 \\ -x+y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3x-y \\ x+y \\ -x+y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.5. Sea $M_{2\times 2} \longrightarrow P_2$, una transformación lineal tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x^2+x,\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = x+1,\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = x^2-1,\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$$

Determinar $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$ y calcular $T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$.

Solución:

Tenemos que :

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= a(x^2+x) + b(x+1) + c(x^2-1) + d(2) \\ &= (a+c)x^2 + (a+b)x + b - c + 2d \end{aligned}$$

Luego:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = (1+1)x^2 + (1-1)x - 1 - 1 + 2(2) = 2x^2 + 2 = 2(x^2+1)$$

Ejemplo 3.1.6. Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 3x-z \end{bmatrix}.$$

Dadas las bases

$$C_1 = \left\{ U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, U_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \; y \; C_2 = \left\{ Y_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \; Y_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Obtener $[T]_{C_1C_2}$

Solución: Como $[T]_{C_1C_2} = [T(U_1)]_{C_2}|[T(U_2)]_{C_2}|[T(U_3)]_{C_2}$ entonces,
i)

$$T(U_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = a_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a_1 + 3a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$2 = 4a_1 + 3a_2 \quad y \quad 1 = a_1 + a_2.$$

Por lo tanto

$$a_1 = -1 \quad y \quad a_2 = 2.$$

luego

$$T(U_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1Y_1 + 2Y_2 = -Y_1 + 2Y_2$$

ii)

$$T(U_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix} = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = \begin{bmatrix} 4a_1 + 3a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

De donde

$$-3 = 4a_1 + 3a_2 \quad y \quad -10 = a_1 + a_2.$$

Por lo tanto

$$a_1 = 27 \quad y \quad a_2 = -37.$$

Luego

$$T(U_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix} = 27Y_1 - 37Y_2$$

iii)

$$T(U_3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 = \begin{bmatrix} 4a_1 + 3a_2 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

De donde

$$6 = 4a_1 + 3a_2 \quad y \quad 3 = a_1 + a_2.$$

Por lo tanto,

$$a_1 = -3 \quad y \quad a_2 = 6.$$

Luego

$$T(U_3) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = -3Y_1 + 6Y_2$$

entonces,

$$[T]_{C_1C_2} = \begin{bmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.1.7. Sea ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a+2b & a+b \\ 3a & -b \end{bmatrix} \text{ tal que } \quad a, b \in \mathbb{K} \right\}$$

y sean

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a. Demuestre que $B = \{X_1, X_2\}$ es una base de V .

b. Determine $\psi_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^2$.

c. Sea $X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.
Encuentre (si existen) $b_1, b_2 \in \mathbb{K}$ tales que $X = (b_1, b_2)_B$.

d. Sean $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $Y_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ y sea $B' = \{Y_1, Y_2\}$. Demuestre que B' es una base de V.

e. Determine la matriz $M_{BB'}$.

f. Si $X = (2,5)_B$, encuentre las coordenadas de X en la base B'.

g. Si $X = (-1,4)_{B'}$, encuentre las coordenadas de X en la base B.

h. Si $X = (-2,3)_{B'}$, encuentre a $Y \in V$ tal que $Y = (-2,3)_B$.

i. Determine $\psi_{B'} : V \longrightarrow \mathbb{K}^2$

Solución:

a. i. Veamos que son linealmente independientes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\alpha_1 = 0, \ \ y \ \ \alpha_2 = 0.$$

Lo cual significa que $\{X_1, X_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.
ii. Veamos que B genera a V.
Si

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b & a + b \\ 3a & -b \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\alpha_1 = a$, y $\alpha_2 = b$, así que

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a + 2b & a + b \\ 3a & -b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & a \\ 3a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b & b \\ 0 & -b \end{bmatrix} \\
&= a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= aX_1 + bX_2.
\end{aligned}
$$

Lo cual significa $\{X_1, X_2\}$ genera a V.

b.

$$
\begin{aligned}
\psi_B(X) &= \psi_B(a_1 X_1 + a_2 X_2) \\
&= a_1 \psi_B(X_1) + a_2 \psi_B(X_2) = (a_1, a_2).
\end{aligned}
$$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = b_1 X_1 + b_2 X_2 = b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + 2b_2 & b_1 + b_2 \\ 3b_1 & -b_2 \end{bmatrix}.$

De donde $-b_2 = 1$, y $3b_1 = 3$. Por lo tanto $b_1 = 1$ y $b_2 = -1$.

d. i. Veamos que son linealmente independientes.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \\
&= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

De donde $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 0$.

ii. Ahora veamos que B' genera a V.
Dado $\begin{bmatrix} a+2b & a+b \\ 3a & -b \end{bmatrix} \in V$, vamos a escribir a este elemento como combinación lineal de Y_1 y Y_2.
Es decir,

$$\begin{bmatrix} a+2b & a+b \\ 3a & -b \end{bmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+3\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2 \\ 3\alpha_1 3\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

De aquí se tiene que $\alpha_2 = b$ y $\alpha_2 = a-b$.
Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} a+2b & a+b \\ 3a & -b \end{bmatrix} = (a-b)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lo cual significa que $\{Y_1, Y_2\}$ genera a V.

e. Dado que $B = \{X_1, X_2\}$ y $B' = \{Y_1, Y_2\}$. Tratemos de expresar a X_1 y X_2 como combinación lineal de Y_1 y Y_2.
De $X_1 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ obtenemos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+3\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2 \\ 3\alpha_1+3\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

de aquí $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_1 = 1$.
Por lo tanto

$$X_1 = Y_1 = 1\cdot Y_1 + 0\cdot Y_2.$$

De $X_2 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ obtenemos,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+3\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2 \\ 3\alpha_1+3\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$$

De aquí $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 = -1$.
Así que

$$X_2 = -1\cdot Y_1 + 1\cdot Y_2.$$

Por lo tanto la matriz cambio de base

$$[M]_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

f.

$$\begin{aligned} X = (2,5)_B &= 2X_1 + 5X_2 \\ &= 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ahora escribiremos a X en la base B'.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} &= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \\
&= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

de donde $\alpha_2 = 5$ y $\alpha_1 = -3$, por lo tanto

$$X = (2,5)_B = -3Y_1 + 5Y_2 = (-3,5)_{B'}$$

g. Si

$$
\begin{aligned}
X = (-1,4)_{B'} &= -1Y_1 + 4Y_2 \\
&= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \\
&= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

de donde $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 4$, luego

$$X = (-1,4)_{B'} = 3X_1 + 4X_2 = (3,4)_B$$

h.

$$
\begin{aligned}
X = (-2,3)_{B'} &= -2Y_1 + 3Y_2 \\
&= -2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}_{B'} &= -2X_1 + 3X_2 \\ &= -2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}_B \end{aligned}$$

i.

$$\begin{aligned} \psi_{B'}(Y) &= \psi_{B'}(a_1 Y_1 + a_2 Y_2) \\ &= a_1\psi_{B'}(Y_1) + a_2\psi_{B'}(Y_2) = (a_1, a_2) \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Gerber, Harvey. *Álgebra Lineal*. 1 ed.en español. Iberoamérica Editorial, México, 1992.

[2] Hoffman,K; Kunze,R. *Álgebra Lineal*. 1 ed.en español. New Jersey E.E.U.U, Prentice-Hall Internacional, S.A. 1973.

[3] Francis G., Florey. *Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones*. Editorial, Prentice-Hall Internacional. Cali-Colombia, 1980

[4] Augusto Silva Silva. *Conceptos básicos del álgebra lineal*, Universidad Surcolombiana, Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física, Neiva (Colombia), 1.998.