Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Aplicaciones del Álgebra Lineal a los exámenes de admisión a Postgrado

Sandra Patricia Méndez Huergo
Vicky Liliana Endo Osorio

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Aplicaciones del Álgebra Lineal a los exámenes de Admisión a Postgrado

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciadas en matemáticas

Sandra Patricia Méndez Huergo
Código 2006133984
Vicky Liliana Endo Osorio
Código 2003200637

Asesor:
Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Junio de 2013

AGRADECIMIENTOS

Al lograr esta meta, queremos hacer llegar nuestro profundo agradecimiento a todas aquellas personas que de una u otra manera han participado en nuestra preparación profesional brindándonos conocimientos, consejos, motivación, apoyo y confianza.

A Dios, nuestros Padres y Esposos

Gracias Dios por darnos los mejores padres del mundo, por permitirnos llegar a la meta trazada una vez iniciada la carrera. Gracias a nuestros padres por darnos la vida, por conducirnos por el camino correcto, por formarnos como mujeres íntegras de buenos principios. A nuestros esposos, por que gracias al apoyo, acompañamiento constante y al ánimo que nos dieron, logramos cumplir con este proyecto que hace parte de nuestra vida.

Al profesor Ricardo Cedeño Tovar

Por ayudarnos, aportándonos sus conocimientos, por corregir nuestros errores con profesionalismo, por comprendernos, apoyarnos y tenernos paciencia. Gracias por su valiosa e inolvidable colaboración.

A nuestros compañeros con quienes recorrimos esta etapa de la vida, quienes nos enseñaron lo valioso de su amistad y porque con este trabajo fortalecimos el valor de la amistad y la familiaridad.

Agradecemos a todo el cuerpo docente del Programa de Licenciatura en Matemáticas, por darnos sus conocimientos con ética, profesionalismo y sobre todo, por tener la entereza para dirigirnos en esta carrera.

A todas las personas que aunque no aparecen en estas líneas, fueron personajes muy importantes en nuestra preparación como profesionales. Muchas gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La vida profesional inicia desde el momento en que terminamos la carrera universitaria. Es un escalón importante y crucial que abre muchas puertas hacia el campo laboral, teniendo en cuenta las competencias; el solo hecho de ser universitario, en la mayoría de los casos, no da para estar en el nivel que se espera; es por esta razón, que se hace necesario seguir en el proceso académico, es decir, realizando Postgrados que nos lleven a estar en un mayor nivel competitivo.

Teniendo en cuenta las preguntas realizadas en los exámenes de admisión del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México, en este trabajo se recopilará desde los conceptos básicos que son de gran importancia para el estudio del Algebra Lineal, hasta el desarrollo del exámen, teniendo como base la teoría aquí trabajada.

El trabajo se divide en cinco capítulos; en el primero se estudia las propiedades más elementales de las relaciones de equivalencia, relaciones de orden y las de funciones. En el segundo capítulo se trata de las estructuras algebraicas, operaciones binarias o ley de composición interna, las propiedades de las operaciones binarias y de manera muy somera, se muestra las estructuras algebraicas importantes, con características.

En el tercer capítulo se trata del álgebra vectorial, donde se habla un poco de su historia y su evolución en la matemática, del espacio vectorial de las $n-$plas de números reales, subespacios, el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y su interpretación geométrica, norma y producto interno, dependencia e independencia lineal, base de un espacio vectorial y ortogonalidad de vectores. En el cuarto capítulo trata del sistema de ecuaciones lineales y matrices, donde el propósito fundamental es demostrar que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las funciones lineales y el conjunto de las matrices; desde este punto de vista, podemos decidir que los dos conjuntos son en esencia uno solo, debido a que su comportamiento son casi indestinguibles.

Por último, el quinto capítulo se encuentra integrado por preguntas realizadas en los exámenes de admisión del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México, el cual aplica las definiciones, proposiciones y demás temas expuestos ya anteriormente.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Recopilar los elementos necesarios del ALGEBRA LINEAL para la solución de problemas y preguntas que tengan que ver con el exámen de admisión a los Postgrados de Matemáticas que efectúan algunas universidades.

Objetivo Específico

- Responder las preguntas de los exámenes de admisión, realizadas por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN de México, teniendo como base los conceptos relacionados con el Álgebra Lineal.

JUSTIFICACIÓN

Uno de los proyectos a corto plazo para una persona que está a punto de graduarse o para quienes ya tienen el título profesional, debe ser, el de mejorar el nivel académico realizando estudios de Postgrados. En las diferentes Universidades del País, como requisito para entrar a un Postgrado, es presentar una evaluación de admisión, pruebas donde los temas que se manejan son: Cálculo, Álgebra Lineal, entre otros.

Debido a que en muchas ocasiones hay dudas o lagunas que surgieron durante la carrera y que no se lograron resolver y/o ha pasado mucho tiempo donde se ha dejado de trabajar el tema del ALGEBRA LINEAL, se ha creado la necesidad de realizar este trabajo de grado con el fin de dar apoyo teórico, brindando estrategias para solucionar estos problemas y así, poder presentar en cualquier Universidad, evaluaciones para acceder al Postgrado.

CAPÍTULO

1

RELACIONES Y FUNCIONES

En el presente capítulo se estudiarán las propiedades más elementales de las relaciones de equivalencia, relaciones de orden y las de las funciones. Estos conceptos los de relaciones y las funciones, descansan en el de "pareja ordenada", motivo por el cual lo iniciaremos con una justificación de la definición dada por C. Kuratowski (1921), con la cual se redujo la teoría de las relaciones a la teoría de conjuntos, sin necesidad de introducir un nuevo axioma para caracterizar la pareja ordenada.

¿Qué significa disponer los elementos de un conjunto en algún orden?

Supongamos que deseamos considerar los elementos (distintos) en el orden x, w, y, z; aún sin saber lo que esto significa, podemos hacer lo siguiente: formemos el conjunto cuyo único elemento es el primero de los nombrados,es decir, $\{x\}$, luego el conjunto cuyos elementos son los dos primeros de los nombrados, es decir, $\{x, w\}$, a continuación el conjunto constituido por los tres primeros de los nombrados, es decir, $\{x, w, y\}$ y finalmente el conjunto completo.

Así obtenemos: $\{x\}$, $\{x, w\}$, $\{x, w, y\}$, $\{x, w, y, z\}$
Es decir, hemos obtenido la colección de conjuntos.

$$\mathscr{O} = \{ \{x\}, \{x, w\}, \{x, w, y\}, \{x, w, y, z\} \}$$

En la coleccón $\mathscr{O}$ existe un único conjunto que está contenido en todos los demás, y éste es $\{x\}$, y llamaremos a x primer elemento. Del conjunto $\mathscr{O}$ - $\{\{x\}\}$, obtenemos un único conjunto que está relacionados en todos los elementos de este, y ese es $\{x, w\}$, por lo tanto identificaremos a w como el segundo elemento y así sucesivamente obtenemos a y como el tercer elemento y z como el cuarto.

En conclusión aún cuando no sepamos exactamente lo que significa ordenar los elementos del conjunto B, podemos asociar a cada ordenación una cierta colección $\mathscr{O}$ de subconjuntos de B en forma tal que dicha colección $\mathscr{O}$ determina sin ambiguedad la ordenación dada.

Definición 1.0.1. *El conjunto $\{\ \{a\},\{a,b\}\ \}$ se notará por (a,b) y se llamará la pareja ordenada con primer componente a y con segunda componente b.*
En lugar de "componentes", se le acostumbra decir también "coordenadas".

Teorema 1.0.1. [1] *La igualdad entre parejas ordenadas se tiene cuando y solamente cuando son iguales componente a componente, es decir, $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$, y, $b = d$*

Demostración:
Sí $(a, b) = (c, d)$ entonces $\{\{a\},\{a, b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$. Puesto que $\{a\} \in (a, b)$ tenemos que $\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}$; luego $\{a\} = \{c\}$, ó, $\{a\} = \{c,d\}$, por lo tanto, $a = c$. Por otra parte, $\{a,b\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$, entonces $\{a,b\} = \{c\}$, ó, $\{a,b\} = \{c,d\}$, pero, $a = c$ así que, $b = d$

1.1. Producto Cartesiano

Definición 1.1.1. [2] *Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. El producto cartesiano de los conjuntos A y B denotado por* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *está formado por todos los pares ordenados* (a,b) *donde* $a \in \mathrm{A}$ *y* $b \in \mathrm{B}$*:*

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{(a,b) : \quad a \in \mathrm{A} \ y\ b \in \mathrm{B}\}$$

Es decir, $(a,b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *sí y solo sí* $a \in \mathrm{A}$ *y* $b \in \mathrm{B}$

En general $\quad \mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

Como $(a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$*, luego* $\{\{a\},\{a,b\}\} \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$*, ahora sí* $(a,b) \in \mathrm{B}\times\mathrm{A}$*, entonces,* $\{\{a\},\{a,b\}\} \in \mathrm{B}\times\mathrm{A}$*; luego, como* $\{a\} \in \mathrm{A}$ *y* $\{a,b\} \in \mathrm{B}$*, no es posible que* $\{a\} \in \mathrm{B}$ *(a menos que* $\mathrm{A} = \mathrm{B}$*), luego, podemos concluir,* $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

El producto cartesiano de un conjunto por sí mismo $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$*, se denota por* A^2

Nota [3]: El concepto de producto cartesiano de conjuntos puede extenderse a cualquier número finito de conjuntos en una forma natural. El conjunto producto cartesiano, de los conjuntos $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_m$ como $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \cdots \times \mathrm{A}_m$ es el conjunto formado por todas las m-uplas $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ donde $a_i \in \mathrm{A}_i$ para cada i.

PROPIEDADES

Si A, B, C y D son conjuntos cualesquiera, se cumple que:

a) $\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}\times\mathrm{C})$

b) $\mathrm{A}\times(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\times\mathrm{B}) \cap (\mathrm{A}\times\mathrm{C})$

c) $\mathrm{A}\times(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\times\mathrm{B}) - (\mathrm{A}\times\mathrm{C})$

Demostración:

[1] Int. a la teoría de conjuntos. José Muñoz Q. Profesor asociado UNAL.
[2] Algebra Lineal.Frank Ayres Jr.Serie Schaum
[3] Algebra Lineal.Frank Ayres Jr.Serie Schaum

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Debemos demostrar que $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times C) \cup (A \times C)$, y, $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Supongamos que existe un X tal que $X \in A \times (B \cup C)$, siendo $X = (x_1, y_1)$; entonces, $(x_1, y_1) \in A \times (A \cup C)$ por lo tanto, $x_1 \in A$ y $y_1 \in (B \cup C)$, luego, $y_1 \in B$, ó, $y_1 \in C$; por esto, $x_1 \in A$ y $y_1 \in B$ ó $y_1 \in C$; así que, ($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) ó ($x_1 \in A$ y $y_1 \in C$) lo cual significa que $(x_1, y_1) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

En conclusión,

$$A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$$

De la misma manera, demostraremos $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$

Supóngase que existe un X tal que $X \in (A \times B) \cup (A \times C)$, es decir, $X \in A \times B$, ó, $X \in A \times C$ por lo tanto, $X = (x_1, y_1)$, de donde $x_1 \in A, y_1 \in B$, ó, $x_1 \in A, y_1 \in C$. Luego, $x_1 \in A$ y ($y_1 \in B$, ó, $y_1 \in C$), así que, $x_1 \in A$, y, $y_1 \in (B \cup C)$ de donde $(x_1, y_1) \in A \times (B \cup C)$, lo cual significa que $X \in A \times (B \cup C)$, y esto muestra que $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Hemos demostrado la propiedad

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

La propiedad b) tiene el mismo procedimiento para su demostración, por lo tanto la omitiremos.

c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

Para realizar esta demostración probaremos que $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$ y $(A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C)$.

Supongamos que existe un X tales que $X \in A \times (B - C)$, siendo $X = (x_1, y_1)$. Luego, podemos decir que $(x_1, y_1) \in A \times (B - C)$; de modo que $x_1 \in A$ y $y_1 \in (B - C)$, así ($y_1 \in B$ y $y_1 \notin C$); asociando tenemos ($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) y $y_1 \notin C$. Supongamos que $(x_1, y_1) \notin (A \times C)$ entonces $x_1 \notin A$, ó, $y_1 \notin C$. Luego, (($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) y $x_1 \notin A$) ó (($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) y $y_1 \notin C$). Así pues, por la propiedad asociativa obtenemos ($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) y ($x_1 \notin A$ ó $y_1 \notin C$) es decir que ($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) , y, $\sim$ ($x_1 \in A$ y $y_1 \in C$), por lo tanto, $(x_1, y_1) \in (A \times B) - (A \times C)$.

En conclusión

$$A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$$

Del mismo modo, demostraremos que

$$(A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C).$$

Supongamos que existe un X tales que $X \in (A \times B) - (A \times C)$, siendo $X = (x_1, y_1)$ es decir que, $(x_1, y_1) \in (A \times B) - (A \times C)$, así podemos decir que ($(x_1, y_1) \in (A \times B)$ y $(x_1, y_1) \notin (A \times C)$); aplicando la distributividad entre conjuntos (($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) y $x_1 \in A$) ó (($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$) y $y_1 \notin C$). Ahora, como x_1 no puede pertenecer y pertenecer al mismo conjunto, la expresión ($x_1 \in A$ y $y_1 \in B$ y $x_1 \notin A$) es falsa. Luego, por la propiedad asociativa se tiene que ($x_1 \in A$ y ($y_1 \in B$ y $y_1 \in C$)) es decir que $(x_1, y_1) \in A \times (B - C)$. Por lo tanto,

$$(A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C)$$

Hemos demostrado la doble contenencia y llegamos a la conclusión

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

Ejemplo:

Hallar el conjunto solución S de $(O \times P) \bigcap (O \times Q)$, siendo

$O = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$, $P = \{x : x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 2\}$, $Q = \{x : x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 5\}$, donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Solución. Los conjuntos O, P y Q pueden ser escritos así:

$$O = \{1, 2, 3\}; \qquad P = \{-2, -1, 0, 1\}; \qquad Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Ahora,
$(O \times P) \bigcap (O \times Q) = \{(1,-2), (1,-1), (1,0), (1,1), (2,-2), (2,-1), (2,0), (2,1), (3,-2), (3,-1), (3,0), (3,1)\}$
$\bigcap \quad \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\} = \{(1,0),$
$(1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\} = S$.

El conjunto S, se puede graficar en el plano cartesiano así:

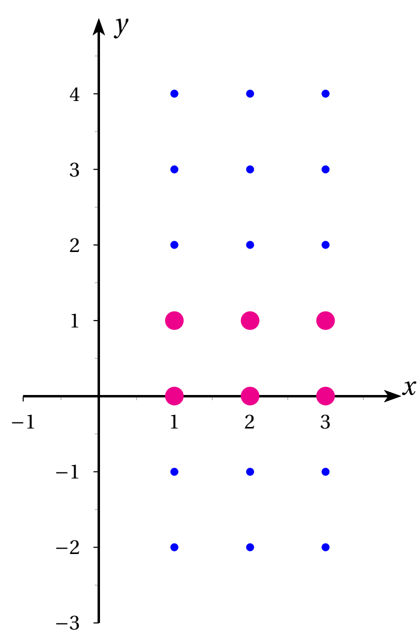


Figura 1.1: Representación gráfica del conjunto solución $S = (O \times P) \bigcap O \times Q$, es decir, $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$

1.2. Relaciones

Definición 1.2.1. [4] *Una relación* $\mathfrak{R}$ *de A en B es un subconjunto del producto cartesiano* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$*, es decir:*

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$$

De aquí se deduce que ϕ y $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ son relaciones de A en B

Definición 1.2.2. [5] *Sean* A *y* B *dos conjuntos. Toda proposición que sea verdadera para algunas parejas* (a, b) *de* $A \times B$ *se llama una relación binaria, o simplemente una relación* $\mathfrak{R}$ *de A a* B.
En otras palabras, una relación $\mathfrak{R}$ *de un conjunto* A *a un conjunto* B*, asigna a cada pareja ordenada* $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *exactamente una de las siguientes proposiciones:*

(i) " a está relacionada con b ", escrita $a\mathfrak{R}b$ o también $(a, b) \in \mathfrak{R}$.

(ii) " a no está relacionada con b". escrita $a\not{\mathfrak{R}}b$ o también $(a, b) \notin \mathfrak{R}$.

Cualquier relación $\mathfrak{R}$ de A en B define un subconjunto único $\hat{\mathfrak{R}}$ de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\mathfrak{R}} = \{(a, b) : \quad a\mathfrak{R}b\}$$

Recíprocamente, cualquier subconjunto $\hat{\mathfrak{R}}$ de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ define una relación de A en B de la siguiente manera:

$$a\mathfrak{R}b \text{ sí y solo sí } (a, b) \in \hat{\mathfrak{R}}$$

1.2.1. Relaciones Binarias en un Conjunto

[6]En esta parte se van a estudiar relaciones en un conjunto A, es decir, las del producto cartesiano $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$.

$i.$ Una relación binaria $\mathfrak{R}$ definida en un conjunto, es *reflexiva*, si cualquiera que sea el elemento a del conjunto, la pareja $(a, a) \in \mathfrak{R}$.

$ii.$ Una relación binaria $\mathfrak{R}$ definida en un conjunto A, es *simétrica*, si cualquiera que sea la pareja $(a, b) \in \mathfrak{R}$ esto implica que la pareja $(b, a) \in \mathfrak{R}$

En otras palabras, Sí $\mathfrak{R}$ es la relación considerada y (a, b) una pareja cualquiera en $\mathfrak{R}$, conlleva a que se verifique que $(b, a) \in \mathfrak{R}$

$iii.$ Una relación binaria $\mathfrak{R}$ definida en una conjunto A, es *transitiva* si, cualesquiera que sean las parejas (a, b) y (b, c) que están en $\mathfrak{R}$, entonces la pareja (a, c) también está en $\mathfrak{R}$, es decir, si $a\mathfrak{R}b$ y $b\mathfrak{R}c$ entonces $a\mathfrak{R}c$.

$iv.$ Una relación binaria $\mathfrak{R}$ definida en un conjunto A, es *antisimétrica*, si toda pareja (a, b) y su transpuesta (b, a) están en $\mathfrak{R}$; entonces a es igual a b, es decir, $\mathfrak{R}$ es antisimétrica si y solo si $[(a\mathfrak{R}b, \text{y}, b\mathfrak{R}a)$ entonces $a = b]$, para todo x y para todo y.

[4]Algebra Lineal.Frank Ayres Jr.Serie Schaum
[5]Conjuntos y estructuras.Alvaro Pinzon E.Colección Harper.Ed.Harla
[6]Conjuntos y estructuras.Alvaro Pinzon E.Colección Harper.Ed.Harla

1.2.2. Tipos de Relaciones

Relaciones de Equivalencia

Definición 1.2.3. [7] *Una relación binaria* $\mathfrak{R}$ *definida en un conjunto* $\mathrm{A} \neq \phi$*, es una relación de* ***equivalencia*** *si es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Si $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia, para traducir que una pareja (a,b) verifica la relación $\mathfrak{R}$ se remplaza la notación general $a\mathfrak{R}b$ por

$$x = y \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R}); \text{ que se lee “}a \text{ es equivalente a } b \text{ módulo } \mathfrak{R}\text{”}$$

Entonces si a, b y c son elementos cualesquiera de un conjunto A, y si $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia en A, se tiene que:

1. Para todo $a \in \mathrm{A}$, $\quad a = a\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R})$ (*reflexiva*)
2. Si $a = b\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R})$ entonces $b = a\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R})$ (*simétrica*)
3. Si $a = b\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R})$ y $b = c\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R})$ entonces $a = c\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{R})$(*transitiva*)

Ejemplo:

a) Consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación binaria “la diferencia de dos enteros es un múltiplo de 3”. (Relación llamada *congruencia*)

1. La relación es reflexiva porque para todo a, $a - a = 0$. Porque 0 es múltiplo de 3.
2. La relación es simétrica porque si $a - b$ es múltiplo de 3, es decir, $a - b = 3k$, tenemos que $b - a = 3(-k)$, luego, $(b - a)$ es múltiplo de 3.
3. La relación es transitiva porque si $a - b$ es múltiplo de 3, y, $b - c$ es múltiplo de 3, es decir, $a - b = 3m, b - c = 3n$, luego, $a - c = (a - b) + (b - c) = 3m + 3n = 3(m + n)$, por lo tanto, $a - c$ es múltiplo de 3.

En este caso las clases son:

$$\{\ldots,-9,-6,-3,0,3,6,\ldots\} = \bar{0}\ ; \{\ldots,-5,-2,1,4,\ldots\} = \bar{1}\ ; \{\ldots,-4,-1,2,5,\ldots\} = \bar{2}$$

Estos subconjuntos se llaman *clases de equivalencia*, que están formadas por los elementos equivalentes entre sí.

b) Sea P el conjunto de personas que habitan en la manzana sobre la calle Séptima, y sea $\mathfrak{R}$ “tiene el mismo nombre que". ¿La relación “tiene el mismo nombre que" sobre el conjunto P es una relación de equivalencia?.

Habrá que verificar la validez de lo que se establece en seguida entre elementos arbitrarios $x, y, z \in$ P:

i. x tiene el mismo nombre que x.

[7] Conjuntos y estructuras.Alvaro Pinzon E.Colección Harper.Ed.Harla

$ii.$ Si x tiene el mismo nombre que y, entonces y tiene el mismo nombre que x.

$iii.$ Si x tiene el mismo nombre que y y y tiene el mismo nombre que z, entonces x tiene el mismo nombre que z

Como todo es cierto, "tiene el mismo nombre que", es ($i.$) reflexiva, ($ii.$) simétrica y ($iii.$) transitiva y, por lo tanto, se trata de una relación de equivalencia sobre P.

c) En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, $\mathfrak{R}$ es una relación $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definida por:

$$(a,b)\mathfrak{R}(c,d) \text{ si y sólo si } a+d=b+c$$

En efecto,

$i.$ $\mathfrak{R}$ es reflexiva; ya que $(p,q)\mathfrak{R}(p,q)$ puesto que $p+q=q+p$

$ii.$ $\mathfrak{R}$ es simétrica; ya que si $(p,q)\mathfrak{R}(r,s)$ entonces $p+s=q+r$, y esto equivale a $r+q=s+p$, es decir, $(r,s)\mathfrak{R}(p,q)$.

$iii.$ $\mathfrak{R}$ es transitiva; ya que si $(p,q)\mathfrak{R}(r,s)$ y $(r,s)\mathfrak{R}(a,b)$, entonces, $p+s=q+r$, y $r+b=s+a$, así que, $(p+s)+b=q+r+b$, esto es igual a, $q+(r+b)=q+(s+a)$. Puesto que $(p+s)+b=q+(s+a)$, tenemos que, $p+b=q+a$; es decir, $(p,q)\mathfrak{R}(a,b)$ En conclusión, $\mathfrak{R}$ es una relación en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de equivalencia.

1.2.2.1.1 Clases de Equivalencia

Definición 1.2.4. [8] *Sea $\mathfrak{R}$ una relación de equivalencia en un conjunto* A $\neq \phi$ *y* $a\in$ A *definimos* ***la clase de*** *a* ***módulo*** $\mathfrak{R}$, *notada* $Cl(a)$, *ó*, $[a]$, *ó*, $\dot{a}$, *al conjunto* $Cl(a)=[a]=\{x\in \mathrm{A} : a\mathfrak{R}x\}$

Teorema 1.2.1. *Si* $a'\in[a]$, *entonces* $[a']=[a]$

En efecto, sea $x\in[a']$ *entonces* $x\mathfrak{R}a'$ *pues* $a'\mathfrak{R}a$, *luego* $x\mathfrak{R}a$; *esto significa que* $[a']\subseteq[a]$. *De igual forma se muestra que* $[a]\subseteq[a']$, *así que* $[a]=[a']$

Nota: Este teorema muestra que una clase de equivalencia queda determinada por uno cuando quiera de sus elementos, y a esto lo llamamos representante de la clase.

Definición 1.2.5. [9] *Una partición de un conjunto* A *es una familia de subconjuntos no vacío, dos a dos disjuntos, y tal que la unión de esos subconjuntos es igual a* A.

Teorema 1.2.2. *Las clases de equivalencia con respecto a una relación de equivalencia en un conjunto producen una partición de ese conjunto.*

Demostración:

1. Las clases de equivalencia son subconjuntos no vacíos de A. En efecto, cualquiera que sea la clase a, $Cl(a)$, contiene el elemento a ($a\mathfrak{R}a$ por la reflexiva).

2. La unión de todas las clases es el conjunto A, puesto que todo elemento x de A pertenece a una clase ($x\in Cl(x)$)

[8] Conjuntos y estructuras.Alvaro Pinzon E.Colección Harper.Ed.Harla
[9] Conjuntos y estructuras.Alvaro Pinzon E.Colección Harper.Ed.Harla

3. Dos clases distintas son disjuntas. En efecto, si dos clases $[a]$ y $[b]$ son tales que $[a] \cap [b] \neq \phi$, existe $x \in [a] \cap [b]$, entonces por el teorema anterior, $[a] = [x] = [b]$

Ejemplo:

Si A es el conjunto de los alumnos de un liceo, formado por clases de alumnos dos a dos disjuntas y la unión de todas las clases es el conjunto de los alumnos del liceo. Cada clase tiene alumnos, esto es no vacía. En este conjunto, la relación “está en la misma clase que” es reflexiva, simétrica y transitiva. Porlo tanto, es una relación de equivalencia.

Relaciones de Orden

Definición 1.2.6. *Una relación* $\mathfrak{R}$ *sobre un conjunto* S *es* ***una relación de orden****, si* $\mathfrak{R}$ *es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

A la relación de orden $\mathfrak{R}$ se representa por “$\prec$” y se lee “precede a” o “antes de”. Para traducir que la pareja (x, y) verifica la relación de orden $\prec$, se escribe $x \prec y$, que se lee “x está antes que y” o “x precede a y”. Entonces, si $x, y, z \in$ S, y si $\prec$ es una relación de orden definida en S, luego

1. Para todo$x \in$ S, $x \prec x$, *reflexiva*
2. Si $x \prec y$, y, $y \prec x$ entonces $x = y$, *antisimétrica*
3. Si $x \prec y$ y $y \prec z$ entonces $x \prec z$, *transitiva*

Un conjunto dotado de una relación de orden se llama un conjunto ordenado.

Ejemplo

a) En $\mathscr{P}$(S), la relación de inclusión es una relación de orden. Dos elementos x y y de un conjunto S, dotado de una relación de orden ($\prec$), son comparables si una de las relaciones $x \prec y$, o, $y \prec x$ es verdadera.

   Nota: Cuando todos los elementos de S se pueden comparar dos a dos, el orden se llama *total*; en caso contrario, *parcial*.

   En el primer caso se dice que el conjunto S es totalmente ordenado y en el segundo que es ordenado. Cuando S es una cadena para la relación de orden.

b) La relación $\leq$ es un orden total en $\mathbb{N}$

c) Los números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$ y los reales $\mathbb{R}$, con el orden usual de las relaciones $<$, ó, $>$ son conjuntos bien ordenados.

1.3. Función

La palabra “función", fue introducido por Leibniz, que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vió que la idea de función de Leibniz tenía un alcance muy reducido, y posteriormente el significado de la palabra función fue experimentando generalizaciones progresivas. Actualmente, la definición de función es esencialmente la siguiente:

Definición 1.3.1. [10] *Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto* X *y el conjunto* Y*, una función es*

[10]Calculus.Volúmen I.Tom M. Apostol

una ley que asocia a cada objeto de X un y solo un objeto en Y.

El conjunto X es el dominio de f; el conjunto Y es el codominio de f. El elemento $y\in \mathrm{Y}$ en el cual se aplica un punto $x\in \mathrm{X}$ se llama imágen de x, se denota por $f(x)$, un símbolo que se lee "efe de equis". La imágen de x se llama "valor de la función f en x".

El conjunto $\{y : y = f(x)$ para algún $x \in \mathrm{X}\}$ es el conjunto de las imágenes de los puntos de X. Se llama dominio de imágenes ó dominio de valores de f y se denota por $f(\mathrm{X})$. El dominio de imágenes de $f(\mathrm{X})$ es necesariamente, un subconjunto de Y. Puede que $f(\mathrm{X}) = \mathrm{Y}$ o que $f(\mathrm{X})$ sea un conjunto propio Y; es decir, $f(X) \subseteq Y$. [11]

Dos funciones son iguales sí y solo sí tienen el mismo dominio y para cualquier elemento del dominio mediante la imágen es igual a la imágen de la otra.

1.3.1. Notaciones

Existen varias notaciones usuales para denotar las funciones:[12]

1 $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$	1 Se lee "f es la función de X hacia Y". Esta notación es genérica y no específica.
2 $x \xrightarrow{f} f(x)$	2 Se lee "por la función f, x se aplica sobre $f(x)$".
3 $\{(x, y) : y = f(x)\}$	3 Se lee "f es la función cuyos pares ordenados son (x, y) donde la regla es $y = f(x)$"
4 $f : y = f(x)$	4 Se lee "f es la función determinada por la regla $y = f(x)$. Es una forma abreviada de (3)".
5 $f : (x, y)$	5 Se lee "f es la función constituida por el conjunto de los pares ordenados (x, y)". Los pares ordenados pueden estar determinados por una regla dada o, en los casos sencillos, pueden enumerarse.

Ejemplos de funciones:

i. Sí $\mathrm{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\mathrm{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $f\colon \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$ es un función de A en B. También se hubiese podido definir de la siguiente manera:

$$f:\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{ó}, \quad f = \{(x, x^2) : x\in \mathrm{A}\} \text{ de A en B}$$

ii. Sí $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ es una función de A en A. Representémosla mediante un diagrama.

[11] Fundamentos de Matemáticas Universitarias.Allendofer y Oakley.Tercera edición.Mc Graw Hill
[12] Fundamentos de Matemáticas Universitarias.Allendofer y Oakley.Tercera edición.Mc Graw Hill

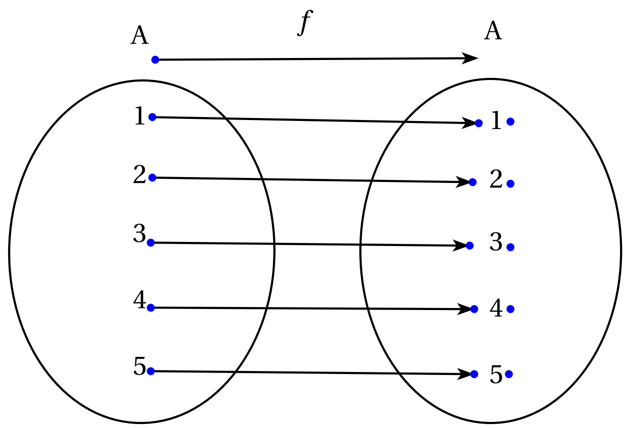


Figura 1.3.1: Ejemplo de Función

Observemos que a cada elemento de A le hace corresponder precisamente el mismo.

iii. Consideremos la función que asigna a cada número real x el número no negativo $|x|$. Una parte de su gráfica está representada en la siguiente figura. Designamos esta función con la letra φ, se tiene $\varphi(x) = |x|$ para todo real x.

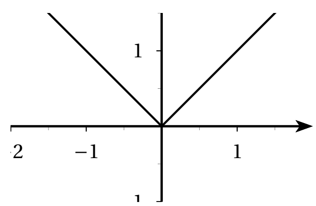


Figura 1.3.2: Función de Valor Absoluto

1.3.2. Tipos de Funciones

Función Idéntica

Definición 1.3.2. [13] *Si A es un conjunto cualquiera, a la función que a todo x le asigne el mismo valor de x se llama la* ***función identidad*** *y se nota $\mathrm{I}_A : A \to A$, es decir, $I_A(x) = x$, para todo $x \in A$.*

Función Inyectiva o Función Uno a Uno

Definición 1.3.3. [14] *Una función f con dominio X se llama* ***función inyectiva*** *ó* ***uno a uno****, si elementos diferentes de X producen imágenes diferentes en Y; es decir, sí $x_1 \neq x_2$, entonces, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Algunas veces es útil usar la forma contrarecíproca es decir; sí $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$*

En los siguientes diagramas se representan una función inyectiva y una función no inyectiva.

[13] Introducción a la teoría de conjuntos. Jose M Muñoz.UNAL
[14] Introducción al Cálculo.Santillana

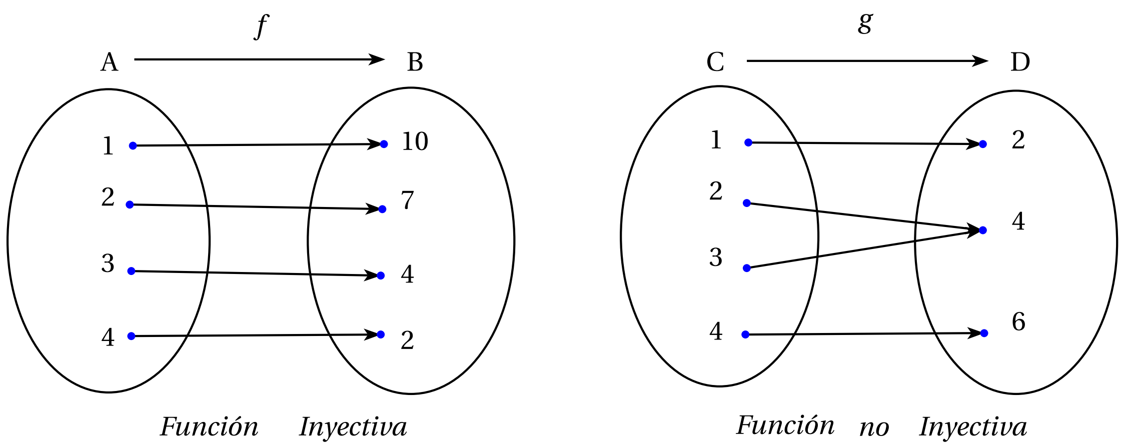


Figura 1.3.2.2.1: Función inyectiva y no inyectiva

En la gráfica de la función f se observa que elementos diferentes del dominio tienen imágenes diferentes en el codominio cuando se verifica esta condición se dice que la función es inyectiva o uno a uno; por otro lado, la función g no es función inyectiva, ya que hay dos elementos del dominio que tienen la misma imágen en el codominio.

Ejemplo: En el conjunto de los números reales, la función $f(x) = 3x + 2$ es inyectiva.

En efecto, supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$ con x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$, entonces $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, así que $3x_1 = 3x_2$ de donde $x_1 = x_2$.

Función Sobreyectiva

Definición 1.3.4. [15] *Sea f una función de A en B, si* $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ *diremos que f es una* ***función sobreyectiva*** *(ó también llamada* ***sobre****) de* A *sobre* B*, sí y solo sí todo elemento de* B *es imágen de al menos un elemento de* A*, bajo f, es decir:*

$$f : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \textit{ es sobre sí y solo sí para todo } y \in \mathrm{B} \textit{ existe un } x \in \mathrm{A} \textit{ tal que } f(x) = y.$$

En la siguiente figura se representan una función sobreyectiva y una función no sobreyectiva.

[15] Teoría de Conjuntos y Temas Afines. serie Schaum

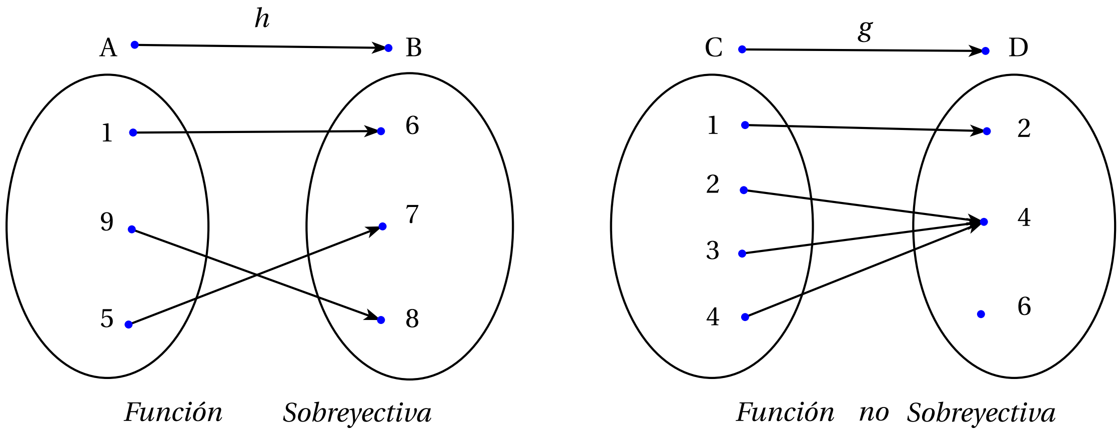


Figura 1.3.2.2.2: Función Sobreyectiva y no sobreyectiva

En la gráfica de la función h se observa que todos los elementos del codominio o conjunto de llegada son imágenes de por los menos un elemento del codominio. Cuando se verifica esta condición, se dice que la función es sobreyectiva.

Por otro lado, la función g no es una función sobre ya que existe un elemento en el codominio que no es imágen de ningún elemento del dominio.

Función Biyectiva

Definición 1.3.5. [16] *Se dice que una función $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ es* ***biyectiva*** *(ó que f es una correspondencia biunívoca) si f es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 1.3.6. [17] *Sea $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ y sea $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{A}$; se llama* ***imagen*** *ó* ***imagen directa*** *de M por f al conjunto de las imágenes por f de los elementos de M. Si lo notamos f (M), se tiene:*

$$f\ (\mathrm{M}) = \{f(x) \colon x \in \mathrm{M}\}$$

O más formalmente

$$f(\mathrm{M}) = \{\mathrm{y} \in \mathrm{B} : \text{existe un } x \in \mathrm{M} \text{ y } f(x) = y\}$$

Definición 1.3.7. ***Imágen Recíproca*** [18] *Sea f una función de A en B, y sea $b \in B$. Entonces la imagen recíproca de b, que se denota por $f^{-1}(b)$; consiste en los elementos de A que están aplicados sobre b, esto es, de aquellos elementos de A que tienen a b por imagen. Dicho más brevemente: Si $f : A \longrightarrow B$, entonces*

$$f^{-1}(b) = \{x : x \in A, f(x) = b\}.$$

Nótese que $f^{-1}(b)$ es siempre un subconjunto de A. Se lee f^{-1} “f recíproca".

[16] Introducción a la Teoría de conjuntos. José M. Muñoz. UNAL
[17] Introducción a la Teoría de conjuntos. José M. Muñoz. UNAL
[18] Teoría de Conjuntos y Temas Afines. Serie Schaum

Función Producto Composición

Definición 1.3.8. ***Función Producto Composición***[19] *Sean f una función de A en B y g una función de B en C, sea a* $\in$ *A; su imagen f(a) está en B, que es el dominio de definición de g. De acuerdo con esto, se puede encontrar la imagen de f(a) por la aplicación de g, es decir, se puede hallar g(f(a)). Así se tiene, pues, que a cada elemento de a* $\in$ *A se hace corresponder un elemento* $g(f(a)) \in C$*. En otras palabras, se tiene una función de A en C.*

Esta nueva función se llama *función compuesta* de f y g y se denota por $(g \circ f)$.

Más brevemente, sí $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, se define una función $(g \circ f)(a) \equiv g(f(a))$. Se usa aquí $\equiv$ para significar “igual por definición". Ahora se puede completar el diagrama:

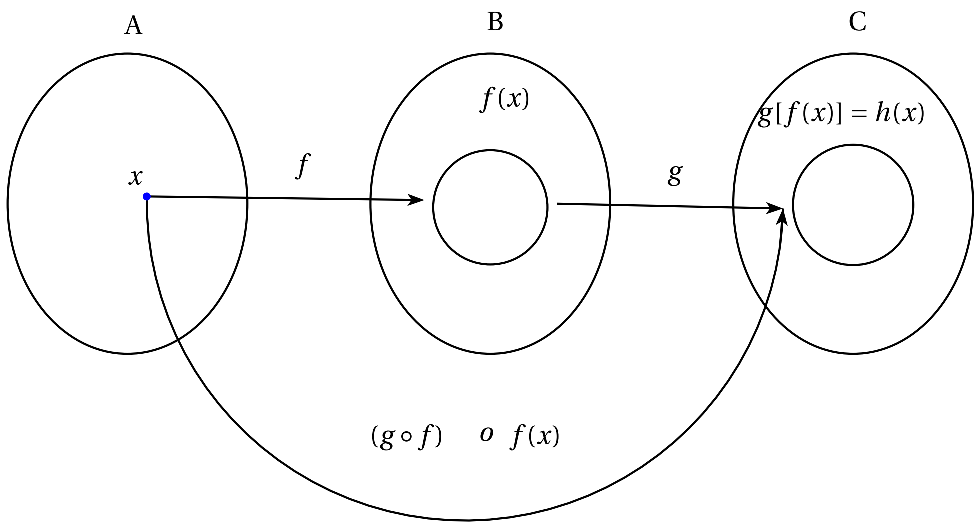


Figura 1.3.2.4.1: Función Composición

Ejemplo

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, hallar $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

Así, $f[g(x)] = [g(x)]^2 - 5[g(x)] + 3 = (x^2)^2 - 5x^2 + 3 = x^4 - 5x^2 + 3$

$g[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^2 - 5x + 3)^2$

[19] Teoría de Conjuntos y Temas Afines. Serie Schaum

CAPÍTULO

2 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Una estructura algebraica es un conjunto de elementos con unas propiedades operacionales determinadas; es decir, lo que define la estructura del conjunto son las operaciones que se pueden realizar con los elementos de dicho conjunto y las propiedades matemáticas que dichas operaciones poseen. Un objeto matemático constituido por un conjunto no vacío y una ley de composición interna definida en el, es una estructura algebraica.

2.1. Operación Binaria o Ley de Composición Interna

Si A es un conjunto no vacío y $*$ es una función. Entonces $*$ es llamada una operación binaria sobre A, si y solo si

$$* : A \times A \longrightarrow A$$

En otras palabras, se dice que sobre un conjunto A está definida una ley de composición interna u operación interna $*$, si está dada una regla mediante la cual a todo par ordenado (a, b) de elementos de A se le asigna un único elemento de A que se representa por $a * b$.[1] Es decir:

$$\begin{aligned} * : \quad A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow \quad a * b \end{aligned}$$

Si A es un conjunto en el que se han definido una o varias leyes de composición interna, se dice que es una estructura algebraica.

Veamos los siguientes ejemplos:

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ definimos a través de una tabla las operaciones $* : \circledast$ así,

[1] Números, Conjuntos y Expresiones algebraicas.Santillana.Imago 4 edición

a) $a * b = a$

b) $a \circledast b = a + b$

Dos leyes de composición A × A en A.

$*$	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

$\circledast$	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

$*$ es una ley de composición interna con el conjunto A

La relación $\circledast$ no es una ley de composición interna en el conjunto A, ya que la correspondencia que origina $\circledast$ no es una aplicación del conjunto A × A en A, porque $2 \circledast 3 = 5 \notin$ A.

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales (teniendo en cuenta el cero), $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y $\mathbb{Q}^*$ el conjunto de los números racionales distintos del cero. Entonces, si se consideran la suma, la resta, el producto y la división habituales en los anteriores conjuntos se dice que:

- En $\mathbb{N}$, sólo la suma y el producto son leyes de composición interna.
- En $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, la suma, la resta y el producto son leyes de composición interna.
- En $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$; el producto y la división son leyes de composición interna

Veamos el siguiente ejemplo
* Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Siendo a y b elementos de $\mathbb{Z}$, consideremos las siguientes operaciones $*, \circledast, \top, \perp, \bigtriangleup, \bigtriangledown$, definidas por:

a) $a * b = b$

b) $a \circledast b = 2a + 3b$

c) $a \top b = a - b$

d) $a \perp b = a/b$

e) $a \bigtriangleup b = a^2 + b^2$

f) $a \bigtriangledown b = \sqrt{a^2 + b^2}$

¿Cual de ellas, son binarias?

Las operaciones $*, \circledast, \top$ y $\bigtriangleup$ son operaciones binarias en $\mathbb{Z}$, mientras $\perp$ y $\bigtriangledown$ no lo son.

$\perp$ no es una operación porque si $a, b \in \mathbb{Z}$, el número a/b, no necesariamente pertenece a $\mathbb{Z}$. Por ejemplo: $1 \perp 2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\quad -3 \perp 4 = \frac{-3}{4} \notin \mathbb{Z}$, $\quad 5 \perp 8 = \frac{5}{8} \notin \mathbb{Z}, etc.$.

$\bigtriangledown$ no es una operación porque si $a, b \in \mathbb{Z}, \sqrt{a^2 + b^2}$ no es, en general, un número entero. Por ejemplo: $1 \bigtriangledown 2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$, $\quad 2 \bigtriangledown 3 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \notin \mathbb{Z}, etc.$

2.2. Propiedades de las Operaciones Binarias

2.2.1. Cerrado

Si $*$ es una operación binaria sobre A y S es subconjunto de A. Entonces el subconjunto S es **Cerrado** con respecto a la operación binaria $*$, sí y solo sí, para todo x, y que pertenece a S, $x*y$ pertenece a S

$$\begin{aligned} *: \quad & S \times S \longrightarrow S \\ & (x,y) \longrightarrow x*y \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ejemplos

i. Sea $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, definamos en $\mathbb{Z}$ la suma usual, aquí + es una operación interna ya que todo par ordenado (a,b) se le asigna otro valor $a+b$, el cual también pertenece a $\mathbb{Z}$. Por ejemplo: $+(2,4)=6$, y, $+(6,-5)=6+(-5)=1$

ii. La resta en $\mathbb{N}$ no es una operación interna ya que para todo par ordenado (a,b) no siempre se le puede asignar algún valor de $\mathbb{N}$. Por ejemplo: $-(4,2)=4-2=2\in\mathbb{N}$, mientras que $-(6,8)=6-8=-2\not\subset\mathbb{N}$. Por tanto la resta no es una operación interna en $\mathbb{N}$.

2.2.2. Conmutativa

Una ley de composición interna $*$ definida sobre un conjunto A es **conmutativa** si $a*b=b*a$ para cualesquiera elementos $a,b\in$ A.

Ejemplo:

Si $x*y=x^2+y^2$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$, entonces $x*y=y*x$, ya que $x^2+y^2=y^2+x^2$.

Tomemos como ejemplo el par ordenado $(-3,2)$ e ilustraremos este hecho.

Efectivamente, $(-3)*2=(-3)^2+2^2=9+4=2^2+(-3)^2=2*(-3)$

2.2.3. Asociativa

Una ley de composición interna $*$ definida sobre un conjunto A es **asociativa** si
$a*(b*c)=(a*b)*c$ para cualesquiera elementos $a,b,c\in$ A.

2.2.4. Elemento Identidad o Elemento Neutro

Una ley de composición interna $*$ definida sobre un conjunto A tiene un elemento neutro o idéntico, si existe un elemento e tal que, $a*e=e*a=a$ para todo $a\in$ A.

2.2.5. Existencia de Inversos

Si $a\in$ A y $a'\in$ A, son tales que $a' * a = a * a' = e$, diremos que a' es el inverso de a respecto a $*$; ó que a es el inverso de a' respecto a $*$.

Para hablar del elemento inverso se requiere que exista la identidad. Cuando hablamos de la operación suma, nos referimos a **inversos aditivos**; en tal caso para referirnos al inverso de un elemento a, lo notaremos así $-a$; es decir, si $a + b = 0$ entonces $b = -a$; de igual manera, si trabajamos con la operación multiplicación, nos referimos al **inverso multiplicativo**, en tal caso el inverso multiplicativo de un elemento a lo notaremos así a^{-1}, ó, $\frac{1}{a}$.

En el siguiente cuadro se mostrarán las estructuras algebraicas más importantes, con sus caracteristicas:

Estructura	Ley Interna	Asociatividad	Neutro	Inverso	Conmutatividad
Semigrupo	*	*			
Monoide	*	*	*		
Monoide Abeliano	*	*	*		*
Grupo	*	*	*	*	
Grupo Abeliano	*	*	*	*	*

Estructura (A,+,·)	(A,+)	(A,·)
Semianillo	Monoide Abeliano	Monoide
Anillo	Grupo Abeliano	Semigrupo
Cuerpo	Grupo Abeliano	Grupo Abeliano

CAPÍTULO

3

ALGEBRA VECTORIAL

3.1. Introducción Histórica

El cálculo y la geometría analítica estuvieron intimamente relacionados en su desarrollo histórico; cada nuevo descubrimiento en uno de ellos dio lugar a un progreso en el otro. el problema de trazar tangentes a las curvas se resuelve con el descubrimiento de la derivada; el del área conduce a la integral; y las derivadas parciales se introdujeron para estudiar superficies de curvas en el espacio. Junto con estos descubrimientos se observa un desarrollo paralelo de la Mecánica y la Física matemática.

En 1788, Lagrange publicó su obra maestra, *Mécanique analytique*, que mostró gran flexibilidad y tremenda potencia alcanzada al utilizar métodos analíticos en el estudio de la mecánica. Más tarde, en el siglo XIX, el matemático William Rowan Hamilton (1805 - 1865) introdujo su *Theory of quaternions*, nuevo método y nuevo punto de vista que contribuyó mucho a la compresión tanto del Algebra como de la Física. Las más notables caracteríticas del análisis de los cuaterniones y de la geometría cartesiana se unieron más tarde, en gran parte debido a los esfuerzos de J. W. Guibbs (1839 - 1903) y O. Heaviside (1850 - 1925) para dar lugar a la llamada *Algebra Vectorial*. Pronto se vió que los vectores eran los instrumentos ideales para la exposición y simplificación de muchas ideas importantes en Geometría y Física. En este capítulo nos propondremos a estudiar los elementos del Algebra Vectorial. Existen tres maneras esencialmente distintas para introducir el Álgebra Vectorial: *geométricamente, analíticamente* y *axiomáticamente*.

En la introducción geométrica, los vectores se representan por segmentos orientados, o flechas; las operaciones algebráicas con vectores, tales como la adición, sustracción y multiplicación por números reales, se definen y estudian por métodos geométricos.

En la introducción analítica, los vectores y las operaciones se expresan mediante *números* llamados *componentes*; las propiedades de las operaciones con vectores se deducen entonces a partir de las propiedades correspondientes de los números. La descripción analítica de los vectores surge espontáneamente de la representación geométrica en cuanto se introduce un sistema coordenado.

En la introducción axiomática, no se intenta describir la naturaleza de un vector o de las operaciones algebraicas con vectores; en lugar de ello, los vectores y las operaciones con ellos se imaginan como *conceptos no definidos* de los que nada se sabe excepto que satisfacen un cierto conjunto de axiomas. Un tal sistema algebráico, con los axiomas apropiados, se llama *Espacio Lineal* o *Espacio Vectorial.*

3.2. El Espacio Vectorial de las n - plas de Números Reales

La idea de emplear un número para situar un punto en una recta fue conocida por los antiguos griegos; en 1637 Descartes extendió la idea utilizando un par de números (a_1, a_2) para situar un punto en el plano, y una terna de números (a_1, a_2, a_3) para situar un punto en el espacio. En el siglo XIX los matemáticos A. Cayley (1821 - 1895) y H.G. Grassman (1809 - 1877) probaron que no era necesario detenerse en las ternas de números. Se puede también considerar una *cuaterna* de números (a_1, a_2, a_3, a_4) o, más general, una n -pla de números reales.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Para todo entero $n \geq 1$, una tal n-upla se llama *punto n-dimensional* o *vector n-dimensional*, siendo los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las *coordenadas* o *componentes* del vector. El conjunto de todos los vectores *n-dimensionales* se llama *espacio vectorial de n-uplas* o simplemente *n-espacio*; lo designamos con V_n.

Las representaciones geométricas que son una gran ayuda en la ilustración y justificación de conceptos sobre vectores, cuando $n = 1, 2$, y 3, no pueden utilizarse cuando $n > 3$; por ello, el estudio del Algebra Vectorial en espacios de tres dimensiones debe hacerse por entero con medios analíticos.

En este capítulo designaremos los vectores con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ y los componentes con las correspondientes minúsculas $a, b, c, \ldots$ así escribimos:

$$A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Para convertir V_n en una estructura algebraica introducimos la *igualdad* de vectores y dos operaciones la *adición* y la *multiplicación* por escalares. La palabra “escalar"se utiliza aquí como sinónimo de “número real”.

Definición 3.2.1. [1] $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son llamados puntos o vectores.

Ejemplos:

$$(2,3,4) \in \mathbb{R}^3; (-3,2,1,5) \in \mathbb{R}^4; (3,-4) \in \mathbb{R}^2; (-2, i, 4) \in \mathbb{R}^3.$$

Definición 3.2.2. *Dos vectores A y B de V_n son iguales siempre que coincidan sus componentes. Esto es, si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, la ecuación vectorial* A = B *tiene exactamente el mismo*

[1] Fundamentos del Algebra Lineal.Rubén E. Sánchez. Editorial Trillas

significado que las n ecuaciones escalares $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

Ejemplo: *Si* $(3-a_1, 2+a_2, 5-a_3) = (-3, 4, 8)$, *entonces* $3-a_1 = -3; 2+a_2 = 4$ *y* $5-a_3 = 8$ *de donde* $a_1 = 6, a_2 = 2$ *y* $a_3 = -3$.
La suma $A+B$ *se define como el vector obtenido sumando los componentes correspondientes:* $A+B = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$.

Ejemplo:
Si $A = (3, 5, -6), B = (-4, 8, 5)$, *entonces* $A+B = (-1, 13, -1), 5A = (13, 25, -30), -3B = (12, -24, -15)$

Si c *es un escalar, definimos* cA *o* Ac *como el vector obtenido multiplicando cada componente de* A *por* c*:* $cA = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_n)$

El vector de $\mathbb{R}^n$ que tiene todas sus componentes iguales a cero, se denota por 0, $0 = (0, 0, \ldots, 0)$, y se denomina el vector cero (o vector nulo).

Definición 3.2.3. [2] *Si* $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $-A = (-1)A$ *y* $A-B = A+(-1)B$ *es decir, si* $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *entonces* $-A = (-a_1, -a_2, \ldots, a_n)$ *y* $A-B = A+(-1)B = (a_1-b_1, a_2-b_2, \ldots, a_n-b_n)$.

Diremos que V_n *es un espacio vectorial si se satisface los siguentes axiomas llamados leyes vectoriales*

EV1. $A+B = B+A$ para todo $A, B \in V_n$.

EV2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ para todo $A, B, C \in V_n$.

EV3. Existe en V_n un único elemento notado $\mathbf{0}$, llamado vector nulo tal que $A+\mathbf{0} = A$ para todo $\mathrm{A} \in \mathrm{V}_n$.

EV4. Para cada $A \in V_n$, existe un único vector $-A$ llamado el opuesto o negativo de A, tal que $A+(-A) = \mathbf{0}$

EV5. $a\cdot(A+B) = a\cdot A + a\cdot B$ para todo a escalar y para todo $A, B \in V_n$.

EV6. $(a+b)\cdot A = a\cdot A + b\cdot A$ para todo a, b escalares y para todo $A \in V_n$.

EV7. $a\cdot(b\cdot A) = (a\cdot b)\cdot A = b\cdot(a\cdot A)$ para todo a, b escalares y para todo $A \in V_n$.

EV8. $1\cdot A = A$ para todo $A \in V_n$.

Ejemplos:

1. Sea $V_2 = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)$ tal que $x, y \in \mathbb{R}\}$

Para $A = (a_1, b_1), B = (a_2, b_2)$ y $x \in \mathbb{R}$ se definen $A+B = (a_1+a_2, b_1+b_2)$, y, $x\cdot A = (xa_1, xb_1)$.

Fácilmente se comprueban los ocho axiomas anteriores, así por ejemplo, el vector nulo es $\mathbf{0} = (0, 0)$ y para cada $A = (a_1, b_1)$ el vector $B = (-a_1, -b_1)$ es tal que $A+B = \mathbf{0}$. En total se tiene que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial.

2. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n, es decir,

[2]Fundamentos del Algebra Lineal.Rubén E. Sánchez. Editorial Trillas

$$P_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : n \in \mathbb{N}; a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Se define la suma entre elementos de P_n por:

$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ y la multiplicación de un escalar real α por un elemento de P_n por $\alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$.

Entonces P_n con las operaciones indicadas es un espacio vectorial real.

Teorema 3.2.1. *Sea V_n un espacio vectorial, A un vector y a un escalar, entonces:*

i) $0 \cdot A = \mathbf{0}$ para todo $A \in V_n$

ii) $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo a escalar

iii) $(-a) \cdot A = a \cdot (-A)$ para todo a escalar, y todo $A \in V_n$

iv) Si $a \cdot A = \mathbf{0}$ entonces $a = 0$ ó $A = \mathbf{0}$

v) Si $a \cdot A = b \cdot A, A \neq \mathbf{0}$, entonces $a = b$

vi) Si $a \cdot A = a \cdot B, a \neq 0$, entonces $A = B$

vii) $A + A = 2 \cdot A$, y, $A + \cdots + A = n \cdot A$

Demostración

i) Aplicando los axiomas $EV8$ y $EV5$, tenemos, $A = 1A = (1+0)A = 1A + 0A$ entonces $A = A + 0A$; luego $0A$ está haciendo el papel de $\mathbf{0}$, y por el axioma $EV3$ sabemos que $\mathbf{0}$ es único, luego $0A = \mathbf{0}$.

ii) Es similar a la demostración anterior.

iii) Por el axioma $EV6$ y por la parte ii) de este teorema, tenemos, $aA + a(-A) = a[A + (-A)] = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ entonces $aA + a(-A) = \mathbf{0}$, luego, $a(-A)$ está haciendo el papel de negativo de aA y por el axioma $EV4$, sabemos que el negativo es único, por lo tanto $(-a)A = -(aA)$.

iv) Si $aA = \mathbf{0}$, y $a \neq 0$, existe $a^{-1} \neq 0$, luego $a^{-1}(aA) = a^{-1}0 = 0$, así $A = \mathbf{0}$. Si $A \neq \mathbf{0}$; decimos que $a = 0$, pues si $a \neq 0$ tendríamos por lo anterior expuesto que $A = \mathbf{0}$, y esto contradice el segundo principio.

v) Si $aA = bA$, entonces $aA - bA = \mathbf{0}$, es decir $(a - b)A = \mathbf{0}$ puesto que $A \neq \mathbf{0}$, por $iv)$ $a - b = 0$, es decir, $a = b$.

vi) Es similar a la demostración anterior.

vii) Por el axioma EV8; tenemos que $A + A = 1 \cdot A + 1 \cdot A = (1+1)A = 2A$. Un razonamiento inductivo demuestra que

$$\underbrace{A + \cdots + A}_{n-veces} = n \cdot A$$

3.3. Subespacios

A partir de éste parágrafo K denotará el campo de números complejos o el campo de números reales.

Si V_n es un K espacio vectorial, son de particular importancia los subconjuntos W de V_n que son a su vez espacios vectoriales sobre K con las operaciones definidas en V_n.

Definición 3.3.1. [3] *Sea V_n un K espacio vectorial. Un subconjunto W de V_n, W diferente de vacío, es un* ***subespacio*** *de V_n en el caso de que W sea un K espacio vectorial con las mismas operaciones de V_n.*

La proposición siguiente proporciona una técnica para decidir si un subconjunto W de V_n es o no un subespacio.

Proposición 3.3.1. *Sean V_n un K espacio vectorial y $W \subseteq V_n, W \neq \phi$, son condiciones necesarias y suficientes para que W sea un subespacio de V_n, las siguientes:*

SV1. Si $X, Y \in W$, entonces $(X+Y) \in W$

SV2. Si $X \in W$, $a \in K$ entonces $aX \in W$

Demostración

Es claro que si W es un subespacio, entonces se verifican las condiciones SV1. y SV2.

Veamos que si en W se verifican las condiciones SV1 y SV2, entonces W es un subespacio. Debemos probar que en W se cumplen las ocho leyes vectoriales. Como W es un subconjunto V_n, entonces las condiciones EV1, EV2, EV5, EV6, EV7 y EV8 de la definición 1 se verifican en W. Si $X \in W$ por la condición SV2. $(-1)X = -X \in W$ y por la condición SV1. $X + (-X) = \mathbf{0} \in W$ y los axiomas EV3 y EV4 se satisfacen en W.

En las condiciones SV1 y SV2 son equivalentes a la única condición siguiente: W es un subespacio de V_n si $aX + bY \in W$ para todo $a, b \in K$ y todo $X, Y \in K$.

Ejemplos:

i) Sean $V_n = \{(x_n) : (x_n)$ una sucesión de números reales$\}$, $K = \mathbb{R}$ y $W = \{(x_n) : x_n = 0$, para todo $n \geq N\}$. V_n es un espacio vectorial sobre K, y W es un subespacio vectorial de V_n. En efecto, si $X = (x_n), Y = (y_n)$ son elementos de W y si $a \in \mathbb{R}$ entonces existen N_1, N_2 tales que $x_n = 0$ para todo $n \geq N_1$ y $y_n = 0$ para todo $n \geq N_2$. Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$ entonces $x_n = 0$, y, $y_n = 0$ para todo $n \geq N$; así que la sucesión $(x_n + y_n)$ es tal que $x_n + y_n = 0$ para todo $n \geq N$. Es claro que la sucesión (ax_n) es tal que $ax_n = 0$ para todo $n \geq N_1$.

Observaciones:

i. Si W es un subespacio del espacio vectorial V_n entonces el vector nulo de V_n está necesariamente en W. Esto constituye un buen criterio para decidir si W es un subespacio o no; por ejemplo el conjunto $W = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 2\}$ no es subespacio de $\mathbb{R}^3$, ya que $\mathbf{0} = (0,0,0) \notin W$.

[3] Conceptos Básicos de Algebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO)

ii. Si W_1, W_2 son subespacios de V_n, la intersección $W_1 \cap W_2$ es de nuevo un subespacio de V_n, mientras que $W_1 \cup W_2$ no necesariamente es subespacio. Por ejemplo, los conjuntos

$$W_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, \quad y, \quad W_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$$

son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $W = W_1 \cup W_2$ no es subespacio. En efecto para $a \neq 0, b \neq 0$.

$$X = (0,b) \in W, \quad y, \quad Y = (a,0) \in W$$

Se tiene que $X + Y = (a,b) \in W$

3.4. El Espacio Vectorial R^n

3.4.1. Interpretación Geométrica

Si bien las definiciones anteriores son completamente independientes de la Geometría, los vectores y las operaciones con ellos tienen una interesante interpretación geométrica para espacios de dimensión tres o menor que tres. Haremos representaciones para dos dimensiones. Se dice que a cada punto del plano $P(a,b)$ le podemos asignar una “flecha”, que va de $(0,0)$ al punto P. Recíprocamente a cada “flecha”, que parte del orígen le podemos asignar un punto $P(a,b)$ del plano, a saber, el punto a donde llega la “flecha”. De esta manera, existe una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y las “flechas”, que parten del origen, es decir, que cada vector de $\mathbb{R}$ puede verse como una “flecha”, que va de 0 a p.

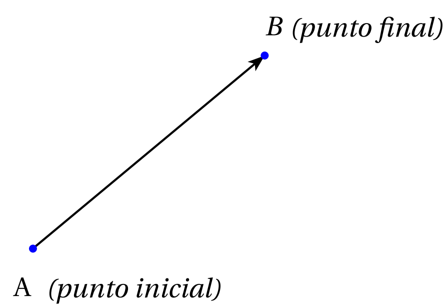


Figura 3.1: El vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ del punto A al B

Un par de puntos A y B se llama **vector geométrico** si uno de los puntos, por ejemplo A, es el punto inicial y el otro, B, es **punto extremo**. Representamos un vector geométrico con una flecha de A a B, como vemos en la figura 3.1, y empleamos la notación $\overrightarrow{AB}$. Los vectores geométricos son especialmente útiles para representar ciertas magnitudes físicas tales como fuerzas, desplazamientos, velocidades y aceleraciones, que poseen magnitud y dirección. La longitud de la flecha es una medida de la magnitud y la punta de la flecha indica la dirección que se precisa.

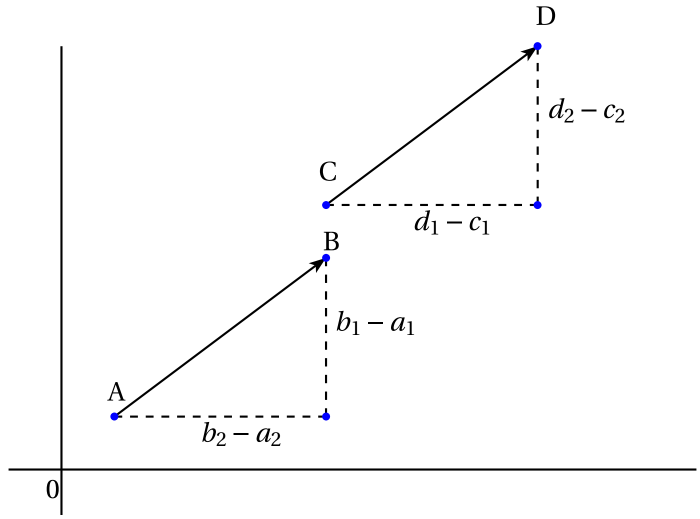


Figura 3.2: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes porque B − A = D − C

Supongamos que introducimos un sistema coordenado con origen O. La figura 3.2 muestra dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tales que $B - A = D - C$. En función de los componentes, esto significa que:

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \text{ y } b_2 - a_2 = d_2 - c_2$$

Comparando los triángulos congruentes de la figura 3.2, vemos que las dos flechas que representan $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ tiene la misma longitud, son paralelos, e indican la misma dirección. Llamamos a tales vectores geométricos *equivalentes*. Esto es, decimos $\overrightarrow{AB}$ es equivalente a $\overrightarrow{CD}$ siempre que:

$$B - A = D - C$$

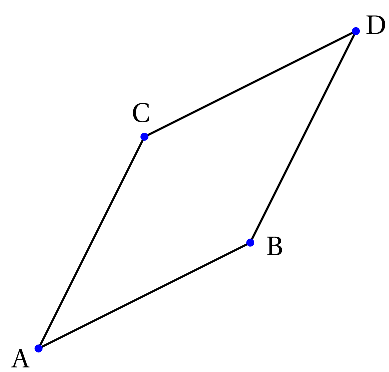


Figura 3.3: Los vértices opuestos de un paralelogramo tienen la misma suma: $A + D = B + C$

Obsérvese que los cuatro puntos A, B, C, D son vértices de un paralelogramo. La ecuación $B - A = D - C$ también se puede escribir en la forma $A + D = B + C$ lo que nos dice que los *vértices opuestos del paralelogramo tiene la misma suma*. En particular, si uno de los vértices, por ejemplo A, es el origen O, como en la figura 3.4, el vector geométrico que une O al vértice opuesto D corresponde al vector suma $D = B + C$. Esto se expresa diciendo que la adición de vectores corresponde geométricamente a la adición de vectores geométricos por medio de la ley del paralelogramo. La importancia de los vectores en la física proviene del hecho notable de que muchas magnitudes físicas (tales como fuerza, velocidades y aceleraciones) se combinan por medio de la ley del paralelogramo.

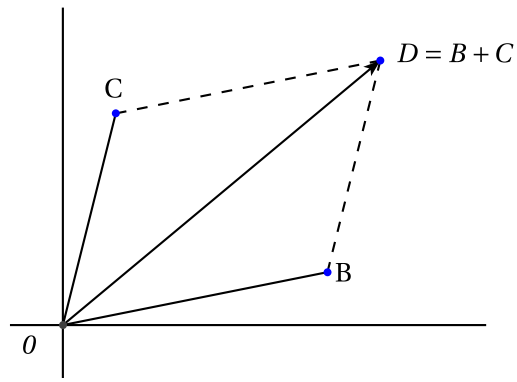


Figura 3.4: La adición de vectores interpretada geométricamente con la ley del paralelogramo.

A fin de simplificar la notación, utilizaremos el mismo símbolo para designar un punto de V_n (cuando $n \leq 3$) y el vector geométrico que une el origen a ese punto. Así pues, escribimos A en lugar de $\overrightarrow{OA}$, B en lugar de $\overrightarrow{OB}$, etc. También escribiremos algunas veces A en lugar de cualquier vector geométrico equivalente a $\overrightarrow{OA}$. Por ejemplo, la figura 3.5 representa geométricamente la sustracción de vectores.

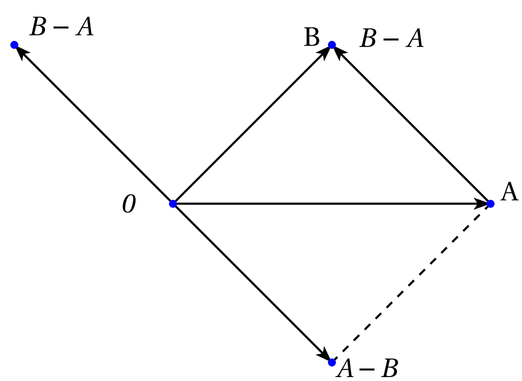


Figura 3.5: Significado de la sustracción de vectores

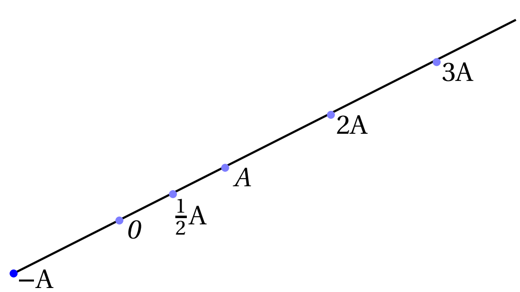


Figura 3.6: Multiplicación de vectores por escalares

La interpretación geométrica de los vectores en V_n para $n \leq 3$ sugiere una manera de definir el paralelismo en un espacio de dimensión n cualquiera.

Definición 3.4.1. [4] *Dos vectores A y B de V_n tienen la misma dirección sí $B = cA$ para cierto escalas positivo c, y la dirección opuesta sí $B = cA$ par acierto c negativo. Se llaman paralelos sí $B = cA$ para un cierto c no nulo.*

Obsérvese que esta difinición permite considerar que todo vector tiene la misma dirección que él mismo; también se observa que esta definición asigna el valor cero las siguientes propiedades: El vector cero es el único que tiene la dirección de su opuesto y por tanto el único vector que tiene la dirección opuesto a sí mismo. El vector cero es el único vector paralelo al vector cero.

Definición 3.4.2. [5] *Sí $P_1(a_1,\ldots,a_n)$, $P_2(b_1,\ldots,b_n)$ son dos puntos de $\mathbb{R}^n$ el vector que va de P_1 a P_2 notado $\overrightarrow{p_1p_2}$ se define por*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (b_1 - a_1,\ldots,b_n - a_n)$$

Obsérvese que la definición anterior está elaborada de manera que $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$ o sea que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ y además el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ es equivalente al vector de $(0,\ldots,0)$ al punto $Q(b_1 - a_1,\ldots,b_n - a_n)$. La figura 3.7 ilustra la situación para el caso $\mathbb{R}^2$

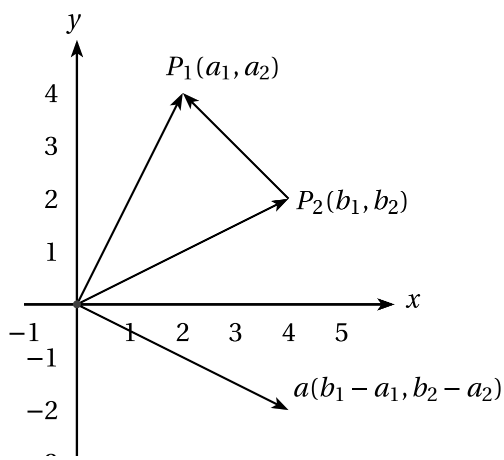


Figura 3.7: $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

Definición 3.4.3. [6] *(vectores coordenados unitarios) los vectores de $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{gathered}E_1^n = (1,0,0,\ldots,0)\\ E_2^n = (0,1,0,\ldots,0)\\ E_3^n = (0,0,1,\ldots,0)\\ \vdots\\ E_n^n = (0,0,0,\ldots,1)\end{gathered}$$

[4] Calculus. Volúmen I. Tom Apostol. Editorial Reverté
[5] Conceptos básicos de algebra lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana
[6] Conceptos básicos de algebra lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana

Son los vectores coordenados unitarios de $\mathbb{R}^n$; estos vectores tienen la propiedad siguiente: Sí $A=(a_1,\ldots,a_n)$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$, A puede escribirse como combinación lineal de $E_1^n, E_2^n, \ldots, E_n^n$. En efecto:

$$\begin{aligned} A = & \ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ = & \ (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, a_n) \\ = & \ a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1) \\ = & \ a_1 E_1^n + a_2 E_2^n + \ldots + a_n E_n^n \end{aligned}$$

En el caso especial de $\mathbb{R}^3$ los vectores coordenados unitarios se denotan por i, j, k así:

$$\begin{aligned} i &= (1,0,0) \\ j &= (0,1,0) \\ k &= (0,0,1) \end{aligned}$$

3.4.2. Norma y Producto Interno

Si $A = ai + bj$, $B = ai + bj + ck$ son vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, la **longitud** o **norma usual** de A notada $\|A\|$, $\|B\|$se define por:

$$\|A\| = \sqrt{a^2+b^2}; \ \|B\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

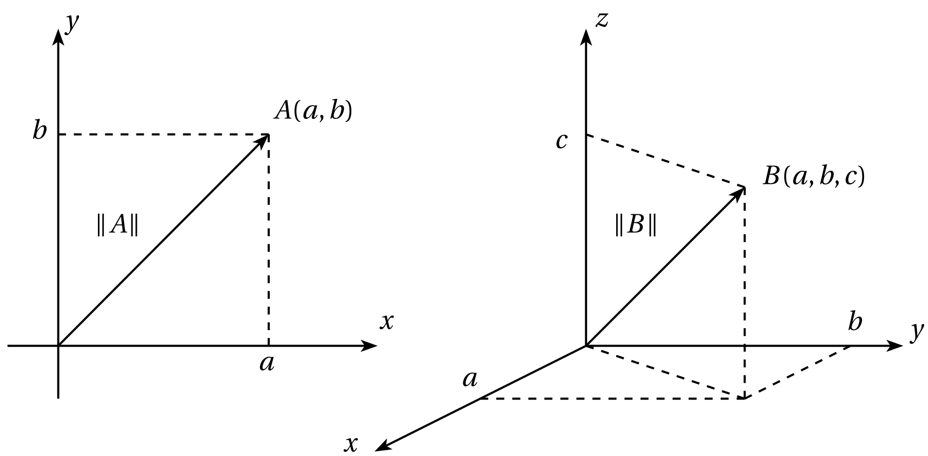


Figura 3.8: NORMA

Las propiedades se establecen en la siguiente proposición:

Proposición 3.4.1. *Para A y B vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *se verifican las siguientes propiedades:*

i. $\|A\| = 0$ si y solo si $A = 0$

ii. $\|aA\| = |a| \, \|A\|$

iii. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (desigualdad triangular)

Demostración:

i. Si $\|A\| = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$ y de aquí $a_k^2 = 0$ para todo k, y en consecuencia $A = 0$.

ii. Si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, entonces $\|a \cdot A\| = \left[\sum_{k=1}^{n} a^2 a_k^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} = |a|\|A\|$

La prueba de la desigualdad triangular la haremos más adelante con la ayuda del producto interno.

Definición 3.4.4. [7] *Sean A y B dos vectores de $\mathbb{R}^n$. A y B tienen la misma dirección si $A = cB$ para algún $c > 0$, tienen dirección si $A = cB$ para $c < 0$ y son paralelos si $A = cB$ para algún $c \neq 0$*

Definición 3.4.5. [8] *Sean $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$ se define su* ***producto interno*** *ó* ***producto escalar*** *denotado por $X \cdot Y$ como*

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Nótese que el producto interno es un escalar, de ahí el nombre de producto escalar.

Con esta definición podemos escribir

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad X, Y \neq 0$$

y concluir que si X es perpendicular (ortogonal) a Y, $X \perp Y$, entonces $\cos\theta = 0$, luego $\frac{X \cdot Y}{\|X\| \cdot \|Y\|} = 0$, y por lo tanto $X \cdot Y = 0$. Si $X \cdot Y = 0$ entonces $\cos\theta = 0$ y, por lo tanto, $\theta = \frac{\pi}{2}$ luego, X es perpendicular a Y.

Definición 3.4.6. [9] *Si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), B = (b_1, b_2, \ldots, b_n), C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ y si $a \in \mathbb{R}$, entonces:*

i $A \cdot B = B \cdot A$

ii $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

iii $A \cdot A = \|A\|^2$

iv $(aA) \cdot (B)$ *y* $A \cdot (aB) = a(A \cdot B)$

v *Si $A \neq 0, A \cdot A > 0$, pero si $A = 0$, entonces $A \cdot A = 0$*

Demostración:

i $A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = B \cdot A$

ii
$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k + c_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k + a_k c_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k = A \cdot B + A \cdot C \end{aligned}$$

[7]Fundamentos del Algebra Lineal.Augusto Silva Silva.Universidad Surcolombiana
[8]Fundamentos Algebra Lineal. Rubén E. Sanchez. Editorial Trillas
[9]Fundamentos del Algebra Lineal.Augusto Silva Silva.Universidad Surcolombiana

iii $A\cdot A=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2=\|A\|^2$

iv Sean $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n), B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ y a escalar.
$(aA)\cdot B=(aa_1,aa_2,\ldots,aa_n)\cdot(b_1,b_2,\ldots,b_n)=aa_1b_1+aa_2b_2+\ldots+aa_nb_n=a(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)=a(A\cdot B)$
$A\cdot(aB)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot(ab_1,ab_2,\ldots,ab_n)=aa_1b_1+aa_2b_2+\cdots+aa_nb_n=a(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)=a(A\cdot B)$

v Si $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\neq\mathbf{0}$ entonces algún $a_i\neq 0$ y, por lo tanto $a_i^2>0$, luego $A\cdot A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2+\cdots+a_n^2>0$. Si $A=(0,0,\ldots,0)$ entonces $A\cdot A=\sum_{i=0}^{n}0=0$.

Proposición 3.4.2. [10] *(Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Si A y B son vectores de* $\mathbb{R}^n$*, entonces*

$$|A\cdot B|\leq\|A\|\|B\|$$

Demostración

$$|A\cdot B|=\|A\|\quad\|B\|\quad|\cos\theta|\quad\leq\quad\|A\|\quad\|B\|,\text{ porque }|\cos\theta\leq 1|$$

Proposición 3.4.3. [11] *(Desigualdad triangular). Si A y B son dos vectores de* $\mathbb{R}^n$ *entonces,*

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$$

Demostración: Calculamos $\|A+B\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|A+B\|^2 &= A\cdot A+A\cdot B+B\cdot A+B\cdot B\\
&= A\cdot A+A\cdot B+A\cdot B+B\cdot B\\
&= \|A\|^2+2A\cdot B+\|B\|^2\\
&\leq \|A\|^2+2|A\cdot B|+\|B\|^2\\
&\leq \|A\|^2+2\|A\|\|B\|+\|B\|^2\\
&= (\|A\|+\|B\|)^2
\end{aligned}$$

Luego, $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

3.4.3. Dependencia e Indepencia Lineal

Definición 3.4.7. [12] *Sea V_n un espacio vectorial y, $v_1,v_2,\ldots,v_n$ un conjunto finito de vectores. Una **combinación lineal** de tales vectores es una expresión de la forma,*

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i$$

donde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ son escalares.

Definición 3.4.8. [13] *Si $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ es un conjunto no vacío de vectores, entonces la ecuación vectorial*

$$k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n=\mathbf{0}$$

[10] Fundamentos del Algebra Lineal.Augusto Silva Silva.Universidad Surcolombiana
[11] Fundamentos del Algebra Lineal.Augusto Silva Silva.Universidad Surcolombiana
[12] Fundamentos de álgebra lineal.Rubén E. Sánchez C.Editorial Trillas de Colombia
[13] Introducción al Álgebra lineal. Howard Anton. Noriega Editores. Segunda Edición

tiene por lo menos una solución, a saber,

$$k_1 = 0, \quad k_2, \quad \dots, \quad k_r = 0$$

Si esta es la única solución, entonces S se denomina conjunto ***linealmente independiente****. Si existen otras soluciones, entonces S se denomina conjunto* ***linealmente dependiente***

Teorema 3.4.1. [14] *Es un espacio vectorial V_n, un conjunto de vectores $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los dos vectores del conjunto C se puede escribir como una combinación lineal de los otros.*

Demostración

a) Supongamos que C es linealmente independiente, entonces $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0$, donde α no son todos iguales a cero. Supongamos que $\alpha \neq 0$; de no ser así reordenemos los vectores para que esto no suceda, entonces,

$$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_n v_n, \text{ luego,}$$
$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) v_3 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) v_n$$

y esto demuestra que por lo menos v_1 es combinación lineal de los otros vectores de C

b) Si al menos un vector de C es combinación lineal de los otros, podemos suponer que es v_1, de no serlo los reordenamos para que esto suceda, por lo tanto $v_1 = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$, luego, $0 = (-1)v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$, entonces $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente pues $\alpha_1 \neq 0$ ya que $\alpha_1 = -1$

Definición 3.4.9. [15] *Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V_n, entonces el subespacio W de V_n que consta de todas las combinaciones lineales de los vectores en S se denomina espacio generado por $v_1, v_2, \dots, v_n$, y se dice que los vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ generan a W.*

3.4.4. Base de un Espacio Vectorial

Definición 3.4.10. [16] *Si V_n es cualquier espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores en V_n, entonces S se llama* ***base de*** *V si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

a) S es linealmente independiente

b) S genera a V_n

Una base es la generalización del espacio vectorial de un sistema de coordenadas en el espacio bidimencional y en el espacio tridimensional.

Teorema 3.4.2. [17] *Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V_n, entonces todo vector A en V_n se puede expresar en forma única como $A = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$*

[14] Fundamentos de álgebra lineal.Rubén E. Sánchez C.Editorial Trillas de Colombia
[15] Introcucción al Álgebra Lineal.segunda edición.Howard Anton.limusa.Noriega Editores
[16] Introcucción al Álgebra Lineal.segunda edición.Howard Anton.limusa.Noriega Editores
[17] Introcucción al Álgebra Lineal.segunda edición.Howard Anton.limusa.Noriega Editores

Demostración

Como S genera a V_n, por la definición de conjunto generador se concluye que todo vector A en V_n se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S. Para ver que sólo existe una manera de expresar un vector como una combinación lineal de S, supóngase que algún vector A se puede escribir como $A = c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n$, y también como $A = k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n$. Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene $\mathbf{0} = (c_1 - k_1)a_1 + (c_2 - k_2)a_2 + \cdots + (c_n - k_n)a_n$. Como el lado derecho de esta ecuación lineal de vectores en S indica que $c_1 - k_1 = 0, c_2 - k_2 = 0, \ldots, c_n - k_n = 0$, es decir, $c_1 = k_1, c_2 = k_2, \ldots, c_n = k_n$; así, las dos expresiones para A son iguales.

Teorema 3.4.3. [18] *Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V_n y $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ un conjunto de m vectores de V_n. Si $n < m$, entonces, U es linealmente dependiente.*

Demostración

Como $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V_n, se puede escribir como combinación lineal de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en particular los elementos de U, por tanto tenemos:

$$\begin{gathered}
u_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{n1}v_n \\
u_2 = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{n2}v_n \\
\vdots \\
u_m = \alpha_{1m}v_1 + \alpha_{2m}v_2 + \cdots + \alpha_{nm}v_n
\end{gathered}$$

Como debemos demostrar que $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ es linealmente dependiente, formemos una combinación lienal de ellos igualada a cero $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m = 0$, y probemos que no todo los c son cero.

Reemplazando los valores de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ en esta expresión tenemos $(c_1\alpha_{11} + c_2\alpha 12 + \cdots + c_m\alpha_{1m})v_1 + (c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \cdots + c_m\alpha 2m)v_2 + \cdots + (c_1\alpha_{n1} + c_2\alpha_{n2} + \cdots + c_m\alpha_{nm})v_n = 0$; pero esto es una combinación lineal de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ igualada a cero y como $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base, y por lo tanto linealmente independiente, se concluye que

$$\begin{gathered}
c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \cdots + c_mu_{1m} = 0 \\
c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \cdots + c_mu_{2m} = 0 \\
\vdots \\
c_1\alpha_{n1} + c_2\alpha_{n2} + \cdots + c_mu_{nm} = 0
\end{gathered}$$

que es un sistema de combinación lineal de n ecuaciones con m incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_m$ que tiene solución fuera de la trivial por ser un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones pues por hipótesis $n < m$. Luego, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ es lienalmente dependiente

3.4.5. Ortogonalidad de Vectores

A lo largo de la demostración de la desigualdad triangular, se obtuvo la expresión

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B \tag{3.1}$$

[18] Fundamentos de Álgebra Lineal.Rubén E. Sánchez C.Editorial Trillas de Colombia

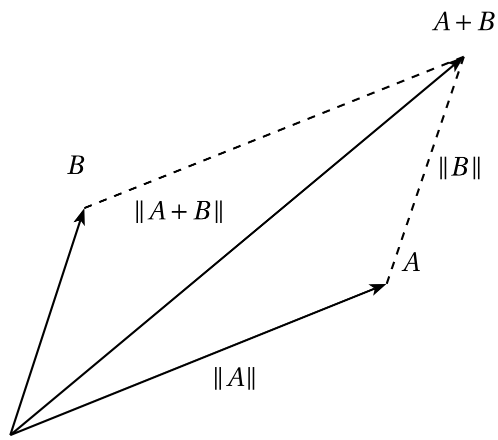


Figura 3.1 *Significado geométrico de la desigualdad triangular* $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

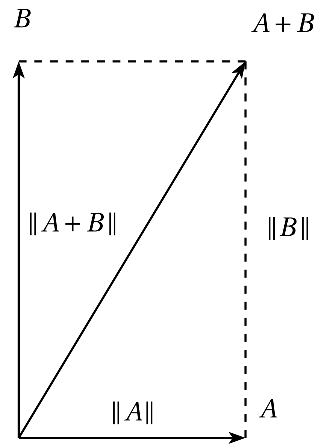


Figura 3.2 *Dos vectores perpendiculares satisfacen la identidad pitagórica*

$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$

que es válida para dos vectores cualesquiera A y B de V_n. La figura 3.4.5.2 muestra dos vectores geométricos perpendiculares en el plano. Forman un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes $\|A\|$ y $\|B\|$ y cuya hipotenusa tiene longitud $\|A+B\|$. El teorema de Pitágoras establece que

$$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 \tag{3.2}$$

Comparando este resultado con la expresión 3.1, vemos que $A \cdot B = 0$. Dicho de otro modo, el producto escalar de dos vectores prependiculares del plano es cero. Esta propiedad da origen a la definición de vectores perpendiculares en V_n.

Definición 3.4.11. [19] *Dos vectores A y B de V_n son **perpendiculares** u **ortogonales** si $A \cdot B = 0$. La igualdad $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B$, muestra que dos vectores A y B de V_n son ortogonales si y sólo si $\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B$. Esta es la identidad de Pitágoras en V_n*

3.4.6. Método de Gram - Schmidt

Definición 3.4.12. [20] *Sea $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una **base de** $\mathbb{R}^n$ podemos obtener otra base $B_1 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que los Y_i sean mutuamente ortogonales (perpendiculares), es decir, si $i \neq j$ entonces $Y_i \cdot Y_j = 0$. En otras palabras, un conjunto de vectores en un espacio con producto interior se denomina **base ortogonal** si todas las parejas de vectores distintos en el conjunto son perpendiculares.*

Analicemos el caso de $\mathbb{R}^2$. Sea $B = \{X_1, X_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y hallemos $B_1 = \{Y_1, Y_2\}$.

[19] Calculus.Tom Apostol.Vol I.segunda edición.Editorial Reverté S.A

[20] Fundamentos de Álgebra Lineal.Rubén E. Sánchez C.Editorial Trillas de Colombia

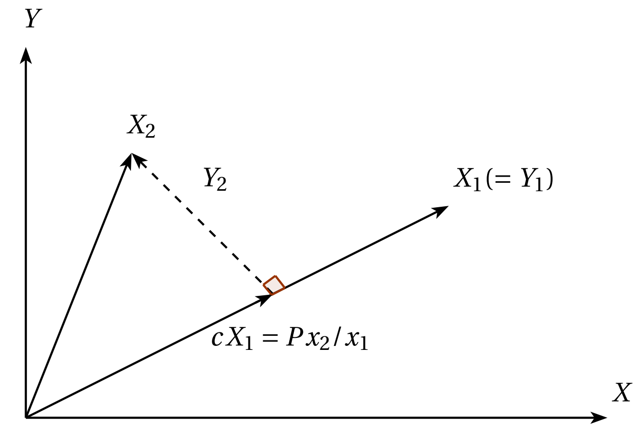


Figura 3.3

Como se aprecia en la figura 3.3, sea $Y_1 = X_1$, luego $Y_2 = X_2 - cX_1 = X_2 - \frac{X_2 \cdot X_1}{\|Y_1\|^2} X_1 = X_2 - \frac{X_2 \cdot Y_1}{\|Y_1\|^2} Y_1$ comprobemos que $Y_2 \perp Y_1$, ahora $Y_2 \cdot Y_1 = \left(X_2 - \frac{X_2 \cdot Y_1}{\|Y_1\|^2} Y_1 \right) \cdot Y_1 = X_2 \cdot Y_1 - \left(\frac{X_2 \cdot Y_1}{\|Y_1\|^2} \cdot Y_1 \right) \cdot Y_1 = X_2 \cdot Y_1 - \frac{X_2 \cdot Y_1}{\|Y_1\|^2} \|Y_1\|^2 = X_2 \cdot Y_1 - X_2 \cdot Y_1 = 0$ entonces $Y_2 \perp Y_1$.

Luego $B_1 = \{Y_1, Y_2\}$ es linealmente independiente y genera a $\mathbb{R}^2$, por lo tanto $B_1 = \{Y_1, Y_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.4.13. [21] *Si se vuelven todos los elementos de la base ortogonal $B_1 = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ unitarios, es decir, que cada verctor tiene norma 1 entonces se obtiene una base conocida como base ortonormal.*

Ejemplo:

Dada la base $B = \{(1,1,1), (-1,1,1), (2,1,3)\}$ de $\mathbb{R}^3$ obtener una base ortogonal y una ortonormal.

Sean $X_1 = (1,1,1), X_2 = (-1,1,1), X_3 = (2,1,3)$, entonces $Y_1 = X_1 = (1,1,1)$, luego $Y_2 = X_2 - P_{X_2/Y_1} = X_2 - c_1 Y_1 = X_2 - \frac{X_2 \cdot Y_1}{\|Y_1\|^2} Y_1 = (-1,1,1) - \frac{(-1,1,1)\cdot(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) = (-1,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{2}{3}(-2,1,1)$

$Y_3 = X_3 - P_{X_3/Y_1} - P_{X_3/Y_2} = X_3 - d_1 Y_1 - d_2 Y_2 = X_3 - \frac{X_3 \cdot Y_1}{\|Y_1\|^2} Y_1 - \frac{X_3 \cdot Y_2}{\|Y_2\|^2} Y_2 = (2,1,3) - \frac{(2,1,3)\cdot(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) - \frac{(2,1,3)\cdot\frac{2}{3}(-2,1,1)}{\|\frac{2}{3}(-2,1,1)\|} \frac{2}{3}(-2,1,1) = (0,-1,1)$. Por lo tanto la base $B_1\{(1,1,1), \frac{2}{3}(-2,1,1), (0,-1,1)\}$es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Sean ahora $Z_1 = \frac{1}{\|Y_1\|} Y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$; $Z_2 = \frac{1}{\|Y_2\|} Y_2 = \frac{3}{\sqrt{23}} \frac{2}{3}(-2,1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$; $Z_3 = \frac{1}{\|Y_3\|} Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$. Y por consiguiente $B_2 = \{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

[21] Fundamentos de Álgebra Lineal.Rubén E. Sánchez C.Editorial Trillas de Colombia

CAPÍTULO

4

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

El propósito fundamental de este capítulo es demostrar que existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las funciones lineales y el conjunto de las matrices; desde este punto de vista podemos decidir que los dos conjuntos son en esencia uno solo, sus elementos, debido a que su comportamiento son casi indistinguibles.

4.1. Introducción a las Matrices

Definición 4.1.1. [1] *Una* ***matriz*** A *de tamaño $n \times m$ con elementos en k es un arreglo rectangular de $n \times m$ números de la forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Los números dispuestos horizontalmente son las filas de A y los dispuestos verticalmente sus columnas. Si un número "a" es el elemento de una matriz y su ubicación dentro del arreglo se determina colocando subíndices como a_{ij} lo cual significa que a es de la fila i y la columna j.

Definición 4.1.2. [2] *Dos matrices A y B de tamaño $n \times m$ son iguales en el caso de que $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i y todo j; $i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,m$.*

Definición 4.1.3 (Operaciones entre matrices)**.** [3] *Dadas las matrices A y B de tamaño $n \times m$*

[1] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[2] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[3] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

la **suma** de A y B, notada $A+B$ es la matriz

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Si además $a \in K$, el **producto** de a con A, notado aA es la matriz de tamaño $n \times m$

$$B = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \dots & aa_{1m} \\ aa_{21} & aa_{22} & \dots & aa_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ aa_{n1} & aa_{n2} & \dots & aa_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

el conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times m$, con todos los elementos en K, lo notaremos $M_{nm}(K)$

Proposición 4.1.1. *El conjunto $M_{nm}(K)$, con todas las operaciones definidas antes es un espacio vectorial sobre K.*

Demostración: Las ocho leyes vectoriales, se verifican sin mayor dificultad; asi por ejemplo si $A, B, C \in M_{nm}(K)$ y si $a, b \in K$ entonces $A+B = B+A; A+(B+C) = (A+B)+C; a(A+B) = aA+aB; (a+b)\cdot A = aA+bA$, etc.

El vector nulo de $M_{nm}(K)$ es la matriz nula 0

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Definición 4.1.4. [4] *Una matriz $A \in M_{nm}(K)$ es **cuadrada** si $n = m$. En este caso los elementos de la forma a_{ii} forma una diagonal principal de A; A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$; **A** es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$; A es diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. El conjunto de todas las matrices de tamaño $n \times m$, lo notaremos $M_n(K)$.*

[4]Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

4.2. La Matriz de la Función Lineal

Los vectores

$$\begin{gathered}E_1^n = (1,0,0,\dots,0,0)\\ E_2^n = (0,1,0,\dots,0,0)\\ \vdots\\ E_n^n = (0,0,0,\dots,0,1)\end{gathered}$$

se llaman los **vectores coordenados** unitarios de K^n. Estos vectores tienen la propiedad de que cualquier $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ se escribe de manera única como combinación lineal de $E_n^1, E_n^2, \dots, E_n^n$. En efecto,

$$\begin{aligned}X &= (x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &= (x_1, 0, \dots, o) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0,0,\dots,x_n)\\ &= x_1(1,0,0,\dots,0) + x_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1)\\ &= x_1E_1^n + x_2E_2^n + \dots + x_nE_n^n\end{aligned}$$

Además, la escritura es única, pues si

$$\begin{aligned}X &= a_1E_1^n + a_2E_2^n + \dots + a_nE_n^n\\ &= b_1E_1^n + b_2E_2^n + \dots + b_nE_n^n\end{aligned} \tag{4.2}$$

entonces $(a_1 - b_1)E_1^n + (a_2 - b_2)E_2^n + \dots + (a_n - b_n)E_n^n = 0$ lo cual significa que $a_i - b_i = 0$ para todo i, es decir, $a_i = b_i$ para todo i, así que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

Si $f \in L(K^n, K^m)$ y se conocen las imágenes de los vectores coordenados unitarios por medio de f, es posible conocer el valor de la función en cualquier punto $X \in K^n$. En efecto, si $X = (x_1, \dots, x_n)$, entonces,

$$\begin{aligned}f(X) &= f(x_1, \dots, x_n)\\ &= f(x_1E_1^n + \dots + x_nE_n^n)\\ &= x_1f(E_1^n) + \dots + x_nf(E_n^n)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ejemplo: Una función $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ es tal que $f(1,0) = (1,-1,3); f(0,1) = (2,3,-5)$. calcular $f(2,3), f(-1,-4), f(a,b)$.

$$\begin{aligned}f(2,3) &= f(2E_1^2 + 3E_2^2) = 2f(E_1^2) + 3f(E_2^2)\\ &= 2(1,-1,3) + 3(2,3,-5) = (2,-2,6) + (6,9,-15)\\ &= (8,7,-9)\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}f(-1,-4) &= f(-1\cdot E_1^2 + (-4E_2^2))\\ &= -1\cdot f(E_1^2) - 4\cdot f(E_2^2)\\ &= -1\cdot(1,-1,3) - 4\cdot(2,3,-5)\\ &= (-1,1,-3) + (-8,-12,20)\\ &= (-9,-11,17)\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} f(a,b) &= f(a\cdot E_1^2 + bE_2^2) \\ &= af(E_1^2) + bf(E_2^2) \\ &= a\cdot(1,-1,3) + b\cdot(2,3,-5) \\ &= (a,-a,3a) + (2b,3b,-5b) \\ &= (a+2b,-a+3b,3a-5b) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definición 4.2.1. [5]. *Si $f \in L(K^n, K^m)$, la matriz de f notada $M(f)$ es*

$$M(f) = \begin{bmatrix} f(E_1^n) \\ f(E_2^n) \\ \vdots \\ f(E_n^n) \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Ejemplo: Calcular la matriz de f para cada uno de los siguientes casos

i) $f(x,y,z) = (2x+y-z, -x-y-z, x+y-z)$

ii) $f(x,y) = (x-y, x+y, 2x-y, 2x+y)$

iii) $f(x,y,z,w) = (2x-y+z, x+y-2z+3w)$

Solución:

i) $\mathrm{M}(f) = \begin{bmatrix} f(E_1^3) \\ f(E_2^3) \\ f(E_3^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1,0,0) \\ f(0,1,0) \\ f(0,0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

ii) $\mathrm{M}(f) = \begin{bmatrix} f(E_1^2) \\ f(E_2^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1,0) \\ f(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $\mathrm{M}(f) = \begin{bmatrix} f(E_1^4) \\ f(E_2^4) \\ f(E_3^4) \\ f(E_4^4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(1,0,0,0) \\ f(0,1,0,0) \\ f(0,0,1,0) \\ f(0,0,0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Definición 4.2.2. [6] *Las matrices de las funciones $f \in L(K^n, K)$*

$$M(f) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

[5] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[6] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

se llama **vector columna**.

En realidad, en la definición (4.2.1), hemos definido una función

$$\begin{array}{rlcl} M: & \mathrm{L}(\mathrm{K}^n, \mathrm{K}^m) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{nm}(K) \\ & f & \longrightarrow & \mathrm{M}(f) = \mathrm{A} \end{array}$$

Teorema 4.2.1. [7] *La función M así definida es lineal; es decir, para todo $a \in K$ y $f, g \in L(K^n, K^m) = \{f : K^n \longrightarrow K^m : f$ es lineal$\}$, $M(f+g) = M(f) + M(g); M(af) = aM(f)$,*

Demostración: Sean $f, g \in L(K^n, K^m), a \in K$

$$M(f) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad , \quad B = M(g) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad \text{entonces}$$

$$M(f+g) = \begin{bmatrix} (f+g)(E_1^n) \\ \vdots \\ (f+g)(E_n^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(E_1^n) + g(E_1^n) \\ \vdots \\ f(E_n^n) + g(E_n^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}, \dots, a_{1m}) & + & (b_{11}, \dots, b_{1m}) \\ & \vdots & \\ (a_{n1}, \dots, a_{nm}) & + & (b_{n1}, \dots, b_{nm}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = M(f) + M(g)$$

$$M(af) = \begin{bmatrix} (af)(E_1^n) \\ \vdots \\ (af)(E_n^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot f(E_1^n) \\ \vdots \\ a \cdot f(E_n^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot (a_{11}, \dots, a_{1m}) \\ \vdots \\ a \cdot (a_{n1}, \dots, a_{nm}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a \cdot a_{11} & \dots & a \cdot a_{1m} \\ & \vdots & \\ a \cdot a_{n1} & \dots & a \cdot a_{nm} \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = a \cdot M(f)$$

4.3. La Función Lineal de una Matriz

El propósito fundamental de este parágrafo es definir de manera natural una función F que sea la inversa de la función M del parágrafo anterior.

Si **A** es una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

[7] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

y si llamamos

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) \\ A_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}) \\ &\vdots \\ A_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}) \end{aligned}$$

La matriz **A** puede escribirse como

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Definición 4.3.1. [8]. *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

*una matriz de tamaño $n \times m$. La **función asociada** a **A**, notada* $\mathrm{F_A}$ *es,*

$$\begin{array}{rccl} F_A : & \mathrm{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{K}^m \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longrightarrow & x_1 \cdot \mathrm{A}_1 + x_2 \cdot \mathrm{A}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathrm{A}_n \end{array}$$

Proposición 4.3.1. [9] *La función asociada a una matriz* A, $\mathrm{F_A}$*, es lineal. En efecto,*

$$\begin{aligned} F_A(X+Y) &= F_A((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ &= F_A((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots, (x_n + y_n)) \\ &= (x_1 + y_1) A_1 + (x_2 + y_2) A_2 + \ldots + (x_n + y_n) A_n \\ &= (x_1 A_1 + y_1 A_1) + (x_2 A_2 + y_2 A_2) + \ldots + (x_n A_n + y_n A_n) \\ &= (x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n) + (y_1 A_1 + y_2 A_2 + \ldots + y_n A_n) \\ &= F_A(X) + F_A(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_A(a \cdot X) &= F_A(a x_1, a x_2, \ldots, a x_n) \\ &= a x_1 A_1 + a x_2 A_2 + \ldots + a x_n \\ &= a(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n) \\ &= a F_A(X) \end{aligned}$$

De acuerdo con la defición (4.3.1), tenemos una función

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathrm{M}_{nm}(K) & \longrightarrow & \mathrm{L}(\mathrm{K}^n, \mathrm{K}^m) \\ & A & \longrightarrow & F_A \end{array}$$

El diagrama que sigue ilustra la situación

[8] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[9] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{L}(\mathrm{K}^n,\mathrm{K}^m) \arrow[r, "\mathrm{M}"] \arrow[dr, "(\mathrm{F}\circ\mathrm{M})"'] & \mathrm{M}_{nm}(K) \arrow[d, "\mathrm{F}"] \arrow[dr, "(\mathrm{M}\circ\mathrm{F})"] & \\
& \mathrm{L}(\mathrm{K}^n,\mathrm{K}^m) \arrow[r, "\mathrm{M}"] & \mathrm{M}_{nm}(K)
\end{tikzcd}
$$

Proposición 4.3.2. [10] *Las funciones* M *y* F *son inversa la una de la otra, esto es*

$$\mathrm{F}\circ\mathrm{M} = id_{\mathrm{L}(\mathrm{K}^n,\mathrm{K}^m)}, \mathrm{M}\circ\mathrm{F} = id_{\mathrm{M}mn(\mathrm{K})}$$

Demostración: A manera de ilustración, vamos a probar que $M\circ F = id_{Mnm(K)}$. Sea

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \quad \begin{matrix} A_1 & = (a_{11},\dots,a_{1m}) \\ \vdots & \vdots \\ A_n & = (a_{n1},\dots,a_{nm}) \end{matrix}$$

La función lineal asociada a A es

$$F_A(x_1,\dots,x_n) = a_1\cdot A_1 + \dots + x_n A_n$$

Además,

$$\begin{aligned} F_A(1,0,\dots,0) &= A_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ F_A(0,0,\dots,1) &= A_n \end{aligned}$$

Luego, $M(F_A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = A$; lo cual significa que $(M\circ F)(A) = A$ y así $(M\circ F) = id_{Mmn(K)}$. De la misma forma se prueba que $(F\circ M) = id_{L(K^n,K^m)}$

4.4. Multiplicación de Matrices

Definición 4.4.1. [11] *Llamaremos matriz* ***idéntica*** *de tamaño n a la matriz de la función idéntica de* K^n*. La notaremos* I_n

$$\begin{aligned} id_{k^n}: \quad & K^n \to K^n \\ & X \to X \end{aligned}$$

como $id_{K^n} = E_i^n$ para todo $i = 1,2,...,n$, entonces

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[10] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[11] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

Definición 4.4.2. [12] *Sean $f \in L(K^n, K^m), g \in L(K^m, K^p), A = M(f), B = M(g)$. El* ***producto*** *o* ***multiplicación*** *de A con B, notado $A \times B$ se define por $A \times B = M(g \circ f)$.*

Proposición 4.4.1. [13] *En las condiciones de la definición anterior si $C = A \times B$, el elemento de C que ocupa el lugar ij se obtiene haciendo el producto interno de la fila i de A con la columna j de B.*

Demostración: Sean $F : K^n \leftrightarrow K^m$ lineal.

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} f(E_1^n) \\ f(E_2^n) \\ \vdots \\ f(E_n^n) \end{pmatrix}_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} f : K^n \arrow[r] \arrow[dr, "(g\circ f)"'] & K^m \arrow[d, "g"] \\ & K^p \end{tikzcd}$$

$$M(g\circ f) = \begin{pmatrix} (g\circ f)(E_1^n) \\ (g\circ f)(E_2^n) \\ \vdots \\ (g\circ f)(E_n^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g[f(E_1^n)] \\ g[f(E_2^n)] \\ \vdots \\ g[f(E_n^n)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}) \\ g(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}) \\ \vdots \\ g(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} g(a_{11}E_1^m + a_{12}E_2^m + \dots + a_{1m}E_m^m) \\ g(a_{21}E_1^m + a_{22}E_2^m + \dots + a_{2m}E_m^m) \\ \vdots \\ g(a_{n1}E_1^m + a_{n2}E_2^m + \dots + a_{nm}E_m^m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}g(E_1^m) + a_{12}g(E_2^m) + \dots + a_{1m}g(E_m^m) \\ a_{21}g(E_1^m) + a_{22}g(E_2^m) + \dots + a_{2m}g(E_m^m) \\ \vdots \\ a_{n1}g(E_1^m) + a_{n2}g(E_2^m) + \dots + a_{nm}g(E_m^m) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_1p) + a_{12}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2p}) + \dots + a_{1m}(b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mp}) \\ a_{21}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_1p) + a_{22}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2p}) + \dots + a_{2m}(b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mp}) \\ \vdots \\ a_{n1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_1p) + a_{n2}(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2p}) + \dots + a_{nm}(b_{m1}, b_{m2}, \dots, b_{mp}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} & ; & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k2} & ; & \dots & ; & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{k1} & ; & \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{k2} & ; & \dots & ; & \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & & & & & & \\ \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{k1} & ; & \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{k2} & ; & \dots & ; & \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{kp} \end{pmatrix}$$

[12] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[13] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

Como podemos observar, en el producto $A\times B$ el elemento que está en la posición 11, es el producto interno de la primera fila de A con la primera columna de B, el elemento de la posición 22 es el producto interno de la segunda fila de A con la segunda columna de B. En general el elemento C_{ij} de la matriz $A\times B$ se obtiene haciendo el producto interno de la fila i de A con la columna j de B.

Observaciones:

1. No siempre es posible realizar el producto de dos matrices A y B. Dicho producto solo se puede hacer si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B. La razón es que la compuesta $(g\circ f)$ de dos funciones lineales solo se puede hacer si el dominio de g coincide con el recorrido de f.
2. En general $A\times B\neq B\times A$. La razón es que la composición de funciones no es conmutativa. Más aún, puede suceder que $A\times B$ se puede realizar y $B\times A$ no exista.
3. De la definición de producto entre matrices se sigue que $M(g\circ f)=M(f)\times M(g)$.
4. Si $A=M(f), B=M(g)$ entonces $F_{A\times B}=F_B\circ F_A$. En efecto,

$$\begin{aligned} M(F_{A\times B}) = &\quad A\times B \\ = &\quad M(f)\times M(g) \\ = &\quad M(g\circ f) \\ = &\quad M(F_B\circ F_A) \end{aligned}$$

   y como M es una función 1 a 1 entonces se verifica que $F_{A\times B}=F_B\circ F_A$

La proposición que sigue establece las propiedades del producto de matrices, las cuales son heredadas de las propiedades de las funciones lineales. Para la prueba usaremos la correspondencia entre el conjunto de las funciones lineales y el conjunto de matrices; usaremos propiedades de las funciones lineales para probar propiedades de las matrices.

Proposición 4.4.2. [14] *Si $A,B\in M_{nm}(K)$; $C,D\in M_{mp}(K)$; $E\in M_{pq}(K)$ y $a\in K$ entonces*

i) $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$

ii) $A\times(C+D)=(A\times C)+(A\times D)$

iii) $A\times(C\times E)=(A\times C)\times E=A\times C\times E$

iv) $a\cdot(A\times C)=(aA)\times C=A\times(aC)$

v) Si I_n, I_m son las matrices idénticas de tamaño $n\times n$ y $m\times m$ entonces $A\times I_m=I_n\times A=A$

Demostración:

i)

$$\begin{aligned} F_{(A+B)\times C} = &\quad F_C\circ F_{A+B} \\ = &\quad F_C\circ(F_A+F_B) \\ = &\quad (F_C\circ F_A)+(F_C\circ F_B) \\ = &\quad F_{(A\times C)}+F_{(B\times C)} \\ = &\quad F_{(A\times C)+(B\times C)} \end{aligned}$$

[14]Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

Luego, $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$

iii)

$$\begin{aligned} F_{A\times(C\times E)} &= F_{(C\times E)}\circ F_A \\ &= (F_E\circ F_C)\circ F_A \\ &= F_E\circ(F_C\circ F_A) \\ &= F_E\circ(F_{A\times C}) \\ &= F_{(A\times C)\times E} \end{aligned}$$

y en consecuencia $A\times(C\times E)=(A\times C)\times E$

v)

$$\begin{aligned} F_{A\times I_m} &= F_{I_m}\circ F_A \\ &= id_{K^m}\circ F_A \\ &= F_A \end{aligned}$$

luego, $A\times I_m=A$. De la misma forma se prueba que $I_n\times A=A$

4.5. El Algoritmo de Hermite

En términos muy generales un “algoritmo", es un conjunto finito de instrucciones que de aplicarse sucesivamente en una determinada situación, permiten al final del proceso tomar una decisión u obtener algunos resultados. Ya hemos dado algunos algoritmos; sabemos cual es el procedimiento para decidir si un conjunto es o no lineal. Más aún se tiene algoritmos para todas las operaciones en $\mathbb{Z}$, los cuales conocemos hace algunos años. Los programas de computadores son ejemplos de algoritmos.

Dada $f\in L(K^n,K^m)$ se trata de establecer si f es o no uno a uno, si es o no sobre o si es o no biyectiva; el objeto del capítulo es dar un algoritmo, que aplicado a una función dada $f\in L(K^n,K^m)$ nos permite decidir en forma muy simple si f es o no uno a uno, sobre o biyectiva. En el camino que tenemos que hacer para llegar a la formulación del algoritmo de Hermite, estableceremos otro resultados de gran importancia dentro del álgerba lineal.

4.5.1. Isomorfimos y Matrices Invertibles

Definición 4.5.1. [15] *Si U,U' son espacios vectoriales sobre un campo K, una función $f\in L(U,U')$ es un **isomorfismo** en el caso que f sea biyectiva.*

Las propiedades más importantes de los isomorfismos son los siguientes:

F1. Si $f\in L(K^n,K^m)$ es un isomorfismo, existe un isomorfismo $g\in L(K^n,K^m)$ tal que $(f\circ g)=id_{K^m}$, $(g\circ f)=id_{K^n}$, g es la inversa de f y se nota $g=f^{-1}$; g es única y su inversa es f.

F2. La función idéntica de K^n, id_{K^n}, es un isomorfismo y su inversa es la misma función.

[15] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

F3. Si $f \in L(K^n, K^m)$, $g \in L(K^m, K^p)$ son isomorfismos, entonces $g \circ f$ también es un isomorfismo y su inversa es $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Definición 4.5.2. [16] *Una matriz $A \in M_{nm}(K)$ es **inversible** en el caso de que su función lineal asociada a F_A sea un isomorfismo.*

M1. Si $A \in M_{nm}(K)$ es inversible, existe una matriz invertible $B \in M_{nm}(K)$ tal que $A \times B = I_n$, $B \times A = I_m$, B es la inversa de A y se nota $B = A^{-1}$. B es única y su inversa es A.

M2. La matriz idéntica I_n es inversible y su inversa es la misma, esto es $I_n^{-1} = I_n$.

M3. Si $A \in M_{nm}(K), B \in M_{nm}(K)$ son inversibles entonces $A \times B$ es inversible y además $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

Observemos que las propiedades M1, M2 y M3 son una traducción de las propiedades F1, F2 y F3 de los isomorfismos al lenguaje de las matrices.

4.5.2. Matrices y Funciones Elementales

Las matrices elementales son ciertas matrices que se obtienen a partir de la idéntica, son inversibles y tienen un comportamiento muy definido con respecto al producto de matrices. Estas matrices son de tres tipos: de **permutación**, **simples** y **propiamente elementales**. Cada una de estas matrices da orígen a un tipo de función lineal que es un isomorfismo y que tiene un comportamiento muy definido con respecto a la composición de funciones.

Con el fin de facilitar la comprensión usaremos las letras $F_1, F_2, \ldots, F_n$ para notar las filas de la matriz y las letras $C_1, C_2, \ldots, C_m$ para denotar las columnas. El simbolismo $F_i \longleftrightarrow F_j$ implica que se han intercambiado las filas *i* y *j* de una matriz; $F_i = aF_i$ nos indica que la fila *i* se ha multiplicado por "a"; $F_i = F_i + aF_j$ significará que a la fila *i* se le ha agregado la fila *j* multiplicada por "a". Significados análogos para columnas tendrán los simbolismos

$$C_i \longleftrightarrow C_j$$
$$\mathrm{C}_i = aC_i$$
$$\mathrm{C}_i = C_i + aC_j$$

Matrices y Funciones de Permutación

Definición 4.5.3. [17] *Si $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ una **permutación** de los elementos de A es una biyección de A en A. Simbólicamente, si*

$$\sigma : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A} \tag{4.7}$$

es biyectiva, σ es una permutación

Si el conjunto A tiene n elementos, existe exactamente $n!$ biyecciones de A en A que corresponden al número de maneras de numerar los elementos de A

[16] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[17] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

Definición 4.5.4. [18] *Sea σ una permutación del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ una matriz de permutación P se obtiene a partir de I_n, permutando sus filas (o columnas) de acuerdo a σ.*

Como las permutacioens son inversibles y sus inversas son también permutaciones se sigue que las matrices de permutación son inversibles y sus inversas son del mismo tipo; más aún si P es la matriz de permutación obtenida por la permutación σ, su inversa se obtiene de I_n permutando sus filas (columnas) de acuerdo con la permutación σ^{-1}.

Las matrices de permutación tienen un comportamiento bien definido con respecto al producto de matrices: si P es una matriz de permutación obtenida de I_n de acuerdo a σ y si A, B son matrices cualesquiera, entonces en el producto $P \times A$, las filas A se permutan de acuerdo a σ y el producto $B \times P$ las columnas de B se intercambian de acuerdo a σ.

Las funciones de permutación, son las que corresponden a las matrices de permutación, son isomorfismos, sus inversas son del mismo tipo y tiene un comportamiento bien definido con respecto a la composición de funciones.

Matrices y Funciones Simples

Definición 4.5.5. [19] *La función*

$$\begin{array}{rccl} S_{(i,a)}: & K^n & \longrightarrow & K^n \qquad (a \neq 0) \\ & (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) & \longrightarrow & (x_1, \ldots, a x_i, \ldots, x_n) \end{array}$$

*es una **función simple.***

Las funciones simples son lineales, en efecto, si

$$X = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \qquad Y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$$

entonces

$$\begin{aligned} S_{(i,a)}(X+Y) &= S_{(i,a)}((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \\ &= S_{(i,a)}(x_1 + y_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, a(x_i + y_i), \ldots, x_n + y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, a x_i + a y_i, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (x_1, \ldots, a x_i, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, a y_i, \ldots, y_n) \\ &= S_{(i,a)}(X) + S_{(i,a)}(Y) \end{aligned}$$

De la misma forma se prueba que $S_{(i,a)}(\alpha X) = \alpha \cdot S_{(i,a)}(X)$

Las funciones simples son inversibles y su inversa es del mismo tipo: $(S_{(i,a)})^{-1} = S_{(1,\frac{1}{a})}$. *En efecto:*

$$\begin{aligned} (S_{(i,a)} \circ S_{(i,\frac{1}{a})})(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) &= S_{(i,a)}(x_1, \ldots, \tfrac{1}{a} x_i, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

[18] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[19] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

De la misma forma se prueba que $S_{(i,\frac{1}{a})} \circ S_{(i,a)} = id_{K^n}$

Definición 4.5.6. [20] *Las matrices correspondientes a las funciones simples son las **matrices simples**; las matrices simples son inversibles y su inversa es del mismo tipo.*

En general podemos decidir que las matrices simples se obtienen de I_n, multiplicando una de sus filas (o una de sus columnas) por un elemento $a \in K, a \neq 0$.

Las matrices simples tienen un comportamiento bien definido con respecto al producto. Si S es simple obtenida de I_n multiplicando la fila i por "a", y si A, B son matrices cualesquiera en el producto $C = S \times A$, la matriz C se puede obtener de A multiplicando la i-ésima fila por a; en el producto $D = B \times S$, D puede obtenerse de B multiplicando su i-ésima columna por a.

Matrices y Funciones Propiamente Elementales

Si $i \neq j$ y $a \in K$, la función

$$\begin{array}{rccc} e_{i,j}(a): & K^n & \longrightarrow & K^n \\ & (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) & \longrightarrow & (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j + ax_i,\ldots,x_n) \end{array}$$

es una función **propiamente elemental**.

Las funciones propiamente elementales son lineales, inversibles y sus inversas son del mismo tipo. En efecto:

$$\begin{aligned} (e_{ij}(a) \text{ ó } e_{ij}(-a))(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) &= e_{i,j}(a)[e_{ij}(-a)(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)] \\ &= e_{i,j}(a)(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j - ax_i,\ldots,x_n) \\ &= (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

lo cual prueba que $e_{i,j}(a)$ ó $e_{i,j}(-a) = id_{K^n}$; de la misma forma se prueba que $e_{i,j}(-a)$ ó $e_{i,j}(a) = id_{K^n}$

Definición 4.5.7. [21] *Las matrices correspondientes a las funciones propiamente elementales son las **matrices propiamente elementales**; las matrices propiamente elementales son inversibles y su inversa es del mismo tipo.*

Las matrices propiamente elementales, se obtienen a partir de I_n *agregándole a una fila (columna) un múltiplo de otra fila (columna) así por ejemplo la matriz*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene de I_3 haciendo $F_3 = 2F_2 + F_3$ o haciendo $C_2 = 2C_3 + C_2$

Las matrices propiamente elementales tienen un comportamiento bien definido con respecto al producto de matrices: si E es una matriz propiamente lineal y A, B son matrices cualesquiera en el producto $C = E \times A$, realizando en las filas de A el mismo cambio que se hizo en las filas de I_n para obtener a E. Situación similar se da en el producto $D = B \times E$.

[20] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[21] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

4.5.3. Cambios Elementales en las Filas y/o Columnas de una Matriz

Definición 4.5.8. [22] *Si $A \in M_{nm}(K)$ llamaremos* ***cambios elementales*** *en las filas de A a las siguientes operaciones*

DE1. Intercambiar las filas de A.

DE2. Multiplicar todos los elementos de una fila por un número $a, a \neq 0$.

DE3. Agregar a una fila A un múltiplo de otra fila.

En otra forma similar se definen los cambios elementales en las columnas de A; realizar un cambio elemental en las filas o columnas de A es equivalente a multiplicar a la izquierda o a la derecha o por una matriz propiamente elemental.

Proposición 4.5.1. *Si A y B son matrices de tamaño $n \times m$ y la matriz B se pueden obtener de A realizando en sus filas y columnas cambios elementales, entonces existen matrices inversibles $P \in M_n(K)$ y $Q \in M_m(K)$ tales que $B = P \times A \times Q$*

Demostración: Cada cambio elemental en las filas y columnas de A significa multiplicar a la izquierda o a la derecha de A por una matriz B son necesarios s cambios en las filas de A y r cambios en las columnas de A, entonces existen $P_1, P_2, ..., P_s, Q_1, Q_2, ..., Q_r$ matrices elementales tales que

$$B = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k \times A \times Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_r$$

Como el producto de matrices inversibles es una matriz inversible entonces las matrices

$$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_s$$
$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_r$$

son inversibles y $B = P \times A \times Q$

4.5.4. La relación de Semejanza

Definición 4.5.9. [23] *Dos funciones f y $g \in L(K^n, K^m)$ son* ***semejantes*** *y se nota $f \sim g$ si existen isomorfismos p y $q \in L(K^n, K^m)$ tales que $g = q \circ f \circ p$*

El diagrama que sigue ilustra la situación:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "f"] & K^m \arrow[d, "q"] \\
K^n \arrow[u, "p"] & K^m \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

[22] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

[23] Conceptos básicos de Álgebra Lineal. Augusto Silva Silva. Universidad Surcolombiana (USCO). Facultad de Educación. Licenciatura en Matemáticas y Física. Marzo 1998

Definición 4.5.10. *Dos matrices $A, B \in M_{nm}(K)$ son semejantes y se nota $A \sim B$ si existen matrices inversibles $P \in M_n(K), Q \in M_m(K)$ tales que $B = P \times A \times Q$*

De las definiciones 4.5.8 y 4.5.9, se sigue que si B se obtiene de A, realizando cambios elementales en la matriz A, entonces A y B son semejantes

Proposición 4.5.2. *La relación de semejaza para funciones es de equivalencia, es decir, se satisfacen las propiedades*

(i) Reflexiva: Si $f \in L(K^n, K^m), f \sim f$

(ii) Simétrica: Si $f, g \in L(K^n, K^m)$ y $f \sim g$ entonces $g \sim f$

(iii) Transitiva: Si $f, g, h \in L(K^n, K^m), f \sim g$ y $g \sim h$ entonces $f \sim h$

Demostración:

(i) $f \sim f$, pues $f = id_{K^m} \circ f \circ id_{K^n}$ y la función idéntica es un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f"] & K^m \arrow[d, "id_{K^m}"] \\ K^n \arrow[u, "id_{K^n}"] & K^m \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

(ii) Si $f \sim g$, existen isomorfismos p, q tales que $g = q \circ f \circ p$ y en consecuencia $f = q^{-1} \circ g \circ p^{-1}$ lo cual significa que $g \sim f$, pues q^{-1} y p^{-1} también son ismorfismos. Los diagramas siguientes ilustran la situación:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f"] & K^m \arrow[d, "q"] \\ K^n \arrow[u, "p"] & K^m \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "f"] & K^m \arrow[d, "q^{-1}"] \\ K^n \arrow[u, "p^{-1}"] & K^m \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

$g = q^{-1} \circ f \circ p^{-1}$ $\qquad$ $g = q^{-1} \circ f \circ p^{-1}$

(iii) Si $f \sim g, g \sim h$, existen isomorfismos p, p', q, q' tales que $g = q \circ f \circ p, h = q' \circ g \circ p'$ y entonces

$$\begin{aligned} h &= q' \circ (g \circ f \circ p) \circ p' \\ &= (q' \circ q) \circ f \circ (p \circ p') \end{aligned}$$

Lo cual significa que $f \sim h$, pues la composición de isomorfismos es de nuevo un isomorfismo, la situación se presenta en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "f"] & K^m \arrow[d, "q"] \arrow[dd, bend left=60, "q' \circ q"] \\
K^n \arrow[u, "p"] \arrow[r, "g"] & K^m \arrow[d, "q'"] \\
K^n \arrow[u, "p'"] \arrow[uu, bend left=60, "p \circ p'"] & K^m \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

Proposición 4.5.3. *La relación de semejanza para matrices es de equivalencia, en el cual se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) Reflexiva: Si $A \in M_{nn}(K)$, $A \sim A$

(ii) Simétrica: Si $A, B \in M_{nm}(K)$ y $A \sim B$ entonces $B \sim A$

(iii) Transitiva: Si $A, B, C \in M_{nm}(K)$, $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$

4.5.5. Matrices y Funciones Canónicas

Definición 4.5.11. *Una matriz A de tamaño $n \times m$ es **canónica** si es la matriz nula o si es de la forma*

$$A = \begin{bmatrix} E_1^m \\ E_2^m \\ \vdots \\ E_r^m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1 \leq r \leq n)$$

*Las **funciones canónicas** son las funciones lineales correspondientes a las matrices canónicas; estas fuciones son tan sencillas que por simple inspeción podemos decidir si son o no uno a uno, sobreyectivas ó biyectivas.*

Ejemplo 4.5.1. *Las matrices canónicas en $M_{3,4}(K)$ son las siguientes:*

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Las funciones canónicas en $L(K^3, K^4)$ *son* $C_0(x,y,z) = (0,0,0,0)$*; no es 1 a 1, no es sobre.*

$$C_1(x,y,z) = (x,0,0,0); \textit{ no es 1 a 1, no es sobre}$$
$$C_2(x,y,z) = (x,y,0,0); \textit{ no es 1 a 1, no es sobre}$$
$$C_3(x,y,z) = (x,y,z,0); \textit{ si es 1 a 1, si es sobre}$$

Ejemplo 4.5.2. *Las matrices canónicas en* $M_{3,3}(K)$ *son las siguientes:*

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Las funciones canónicas en $L(K^3, K^3)$ *son:*

$$C_0(x,y,z) = (0,0,0,0); \textit{ no es 1 a 1, no es sobre}$$
$$C_1(x,y,z) = (x,0,0,0); \textit{ no es 1 a 1, no es sobre}$$
$$C_2(x,y,z) = (x,y,0,0); \textit{ no es 1 a 1, no es sobre}$$
$$C_3(x,y,z) = (x,y,z,0) = id_{K^3}(x,y,z); \textit{ que es biyectiva.}$$

Proposición 4.5.4. *Toda matriz* A *de tamaño* $n \times m$ *es semejante a una matriz* A'' *del mismo tamaño*

Demostración: Para la demostración de esta proposición, la cual es fundamental dentro del álgebra lineal, usaremos la inducción sobre n. Si $n = 1$, $A = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m})$, si $A = 0$, A es canónica por definición: Si $A \neq 0$, existe $a_{ij} \neq 0$ y así podemos intercambiar las columnas 1 y j, luego dividir por a_{ij} para obtener una matriz de la forma.

$$A' = (1, b_{12}, \ldots, b_{1m})$$

Si multiplicamos la primera columna por $-b_{ij}$ y sumamos a la columna j y esto lo hacemos cada $j = 2,3,\ldots,m$, llegamos a la matriz

$$A'' = (1,0,0,\ldots,0)$$

que es una matriz canónica. En total la proposición es válida para matrices de tamaño $1 \times m$. Supongamos ahora que el resultado se verifica para toda matriz que tenga $(n-1)$ filas y veamos que se cumple para matrices de n filas.

De nuevo si $A = 0$, no hay nada que probar, puesto que ya es canónica. Si $A \neq 0$, existe $a_{ij} \neq 0$ y si intercambiamos las filas 1 e i, luego las columnas 1 y j, luego dividimos la primera fila por a_{ij} obtenemos una matriz de la forma.

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos enseguida la primera columna por $-b_{ij}$ y la sumamos a la columna j y esto lo hacemos cada $j = 2,\ldots,m$; luego multiplicamos la primera fila por $-b_{ij}$ y la sumamos a la fila i, para $i = 2,\ldots,n$, llegamos a una matriz de la forma

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

como la matriz

$$D = \begin{bmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

Tiene $(n-1)$ filas, por nuestra hipótesis de inducción, es semejante a una matriz canónica. Así A'' es semejante a una canónica y en consecuencia A también. Observemos que finalmente D puede ser transformada en una matriz canónica sin que la primera fila y la primera columna de A'' sufran modificación alguna.

4.6. Algoritmo de Gauss - Jordan

En este parágrafo resolveremos otro problema central del álgebra lineal que consiste en hallar todas las soluciones de un sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas.

Definición 4.6.1. *Un **sistema** de n ecuaciones lineales con m incógnitas es de la forma*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \quad (4.8) \end{aligned}$$

donde $a_{ij}, b_i (i = 1,2,\ldots,m)$ son elementos de campo K; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son las incógnitas del sistema.

Si llamamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Del sistema 4.8 puede escribirse en forma matricial como

$$AX = B \tag{4.9}$$

A es la matriz de coeficientes del sistema 4.8 y B la matriz de términos independientes. En el caso especial de que $B = 0$ el sistema es **homogéneo**.

Resolver el sistema 4.8 o el sistema 4.9 es encontrar todas las marices $X \in M_{nm}(K)$ que verifican la igualdad $AX = B$. Si tales X existen, se dice que el sistema es **consistente** o **compatible**; en caso contrario se dice que es **inconsistente** o **incompatible** y carece de solución. Es de anotar que los sistemas homogéneos siempre son consistentes, pues la matriz $0 \in M_{m1}(K)$ siempre verifica la ecuación $AX = 0$. La solución **canónica, trivial** o solución **evidente** del sistema. Lo interesante entonces de los sistemas homogéneos es determinar si tienen o no soluciones distintas de la solución canónica.

Definición 4.6.2. *Dos sistemas de n ecuaciones con m incógnitas $AX = B$, $A'X = B'$ son **equivalentes** si tienen la misma solución*

Proposición 4.6.1. *Si C es una matriz inversible, los sistemas $AX = B$ y $(CAX) = CB$ son equivalentes.*

Demostración: Si X_0 es solución de $AX = B$, entonces $AX_0 = B$, en consecuencia $C(AX_0) = CB$ o $(CA)X_0 = CB$ lo cual significa que X_0 es solución de $(CA)X = CB$. Recíprocamente si Y_0 es solución de $(CA)X = CB$, entonces $(CA)Y_0 = CB$ y como C es inversible, se sigue que $C^{-1}(CA)Y_0 = C^{-1}(CB)$ o sea que $AY_0 = C^{-1}(CB)$ es decir que $AY_0 = B$ lo que significa que Y_0 es solución de $AX = B$.

Definición 4.6.3. *La matriz $[A|B]$ es la **matriz aumentada** del sistema $AX = B$*

La matriz aumentada de un sistema representa fielmente el sistema correspondiente, o en otras palabras, tener el sistema es equivalente a tener la matriz aumentada; las matrices aumentadas de la forma $[A|B]$ donde A es una matriz canónica correspondiente a sistemas de ecuaciones tan sencillos que su solución puede darse por simple inspección. La proposición 4.6.1 significa en últimas que si la matriz $[A|B]$ se multiplica a la izquierda por una matriz inversible C, se obtiene otra matriz aumentada $[A'|B']$ que representa un sistema equivalente al inicial.

En este orden de ideas, dado el sistema $AX = B$, éste se puede transformar en otro sistema equivalente cuya solución sea inmediata, multiplicando la matriz $[A|B]$ a izquierda por matrices inversibles C las simples o las propiamente elementales. De aquí se deduce que las soluciones del sistema $AX = B$ no se modifican cuando se realizan en él las siguientes operaciones:

OE1. Intercambiar dos ecuaciones

OE2. Multiplicar una ecuación por un número $a, a \neq 0$.

OE3. Agregar a una ecuación un múltiplo de otra.

Dado el sistema $AX = B$, el algoritmo de Gauss-Jordan para hallar todas sus soluciones es como sigue:

GJ1. Elaborar la matriz aumentada $[A|B]$

GJ2. Con cambios únicamente en las filas de $[A|B]$, transformar esta matriz en otra que representa un sistema equivalente y cuya solución sea fácil determinar.

GJ3. Hallar la solución del sistema correspondiente a la última matriz aumentada.

Cuando el sistema es homogéneo la matriz aumentada es de la forma $[A|0]$, y como estamos restringidos de hacer cambios elementales solo en filas, durante todo el proceso la última columna será de ceros, por esta razón podemos trabajar solo en la matriz $[A]$.

Lo ideal es que la matriz aumentada $[A|B]$ se transforma en otra en la cual el lugar de A aparezca una matriz canónica; naturalmente esto no es posible por dos razones principalmente: La restricción que se tiene que hacer cambios solo en filas y porque posiblemente A no es una matriz cuadrada. El algoritmo consiste entonces en transformar la martiz $[A|B]$ en otra donde en lugar de A aparezca o una canónica o una matriz muy similar a una canónica.

4.7. Determinantes

En la presente sección tomaremos en consideración el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño n, $M_n(K)$. A cada matriz $A \in M_n(K)$ le asignaremos un elemento de K llamado el determinante de A y notado $det(A)$ ó $|A|$. La definición del determinante de una matriz la hacemos por inducción sobre n.

4.7.1. Determinates de Orden 1 y 2

Definición 4.7.1. *Si A es una matriz de tamaño* 1×1*, digamos* $A = [a_{11}]$*, el* ***determinante*** *de A es*

$$|A| = a_{11}$$

Si A es una matriz de tamaño 2×2*, digamos* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *el determinante de A es*

$$|A| = \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right| \quad = \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.7.2. Determinantes de Orden n

Definición 4.7.2. *Si* $A \in M_n(K)$*, el* ***menor*** *de* a_{ij}*, notado* M_{ij} *es una matriz de tamaño* $(n-1) \times (n-1)$ *obtenida de A, eliminando la fila i y la columna j.*

Definición 4.7.3. *Si* $A \in M_n(K)$*, el* ***cofactor*** *de* a_{ij}*, notado* A_{ij} *se define por*

$$A = \quad (-1)^{i+j} detM_{ij} = \quad (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Definición 4.7.4. *Sea* $A \in M_n(K)$ *e i un número fijo* $(1 \leq i \leq n)$*. El* ***determinante*** *de A desarrollado por la fila i, se define por,*

$$detA = |A| \quad = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}Aij \quad = \textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{1j}|M_{1j}|$$

En particular si $i = 1$*, se obtiene*

$$|\ A\ | = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}|$$

que es el desarrollo del determinante de A por la primera fila.

El determinante de una matriz no depende de la escogencia de la fila, es decir, el desarrollo de $|A|$ por la fila i es exactamente igual al desarrollo de $|A|$ por la columna j, se obtiene una fórmula semejante para $|A|$ si en lugar de fijar una fila, escogemos como fila una columna cualquiera, es decir,

$$|\ A\ | = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}|M_{ij}|$$

y en particualr si $j = 1$, entonces

$$| A |= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |M_{i1}|$$

que es el desarrollo de $|A|$ por la primera columna

La definición 4.7.1 para el caso de determinantes 2×2 es un caso particular de la definición 4.7.4. Luego, podemos definir, en forma general, el determinante de una matriz $A \in M_n(K)$ de la siguiente forma

$$|A| = \begin{cases} a_{11} & \text{si } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |Aij| & \text{si } n \geq 2 \\ & (i, \text{ fijo }, 1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

4.7.3. Propiedades de los Determinantes

En general el cálculo del determinante de una matriz $A \in M_n(K)$ cuando $n \geq 4$ usando la definición es un trabajo dispendioso y propenso a cometer errores; por ejemplo el cálculo de un determinante de orden cinco conduce a resolver veinte determinantes de orden tres; en el presente parágrafo estableceremos las propiedades más importantes de los determinantes, que permiten calcular de forma rápida y segura determinantes de cualquier orden.

Definición 4.7.5. [24] *La suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los correspondientes cofactores de esa fila (o columna), da el valor del determinante; pero la suma de los elementos de una fila (o columna) por los correspondientes cofactores de otra fila (o columna), da cero.*

Proposición 4.7.1. *Si una fila o columna de una matriz $A \in M_n(K)$, se compone de ceros su determinante es cero*

Demostración: si la fila i de A es de ceros al desarrollar $|A|$ por la fila i se obtiene:

$$| A |= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

como $a_{ij} = 0$ para todo $j = 1, 2, ..., n, |A| = 0$.

Definición 4.7.6. *Si $A \in M_{nm}(K)$ es una matriz de tamaño $m \times n$, la **transpuesta** de A notada A^t es la matriz de tamaño $n \times m$ obtenida de A al intercambiar filas por columnas*

Proposición 4.7.2. *Si $A \in M_n(K)$, entonces $|A| = |A|^t$*

Demostración: (por inducción sobre n)

i) Para $n = 1, |A| = |A|^t$, pues $A = A^t$

[24] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

ii) Supongamos que el resultado es válido para matrices de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ y veamos que se verifica para matrices de tamaño $n\times m$. Sean

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \quad , \quad A^t=A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

desarrollando $|A|$ y $|A|^t$ por la primera fila y la primera columna se tiene que:

$$\mid A\mid=\textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}|$$

$$\mid A\mid^t=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}|M_{1j}^t|$$

como $|M_{1j}^t|=|M_{1j}|$ entonces $|A|=|A^t|$

Esta proposición significa que toda propiedad de los determinantes enunciada para filas se verifica también para columnas.

Definición 4.7.7. [25] *Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no se encuentran en la diagonal principal son 0.*

Ejemplo 4.7.1. $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&7\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-4&0\\0&0&6\end{bmatrix}$ *son matrices diagonales*

Definición 4.7.8. [26] *Una matriz escalar es una matriz diagonal que tiene todos sus elementos diagonales iguales*

Ejemplo 4.7.2. $\begin{bmatrix}2&0\\2&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$ *son matrices escalares*

Definición 4.7.9. [27] *Una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero, se denomina matriz triangular superior.* $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *es triangular superior si* $a_{ij}=0$ *para* $i>j$.

Ejemplo 4.7.3. $\begin{bmatrix}8&4\\0&-5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&-3\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}5&8&4\\0&8&-9\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-8&-5&4\\0&-9&5\\0&0&3\end{bmatrix}$

[25] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[26] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[27] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

Definición 4.7.10. [28] *Una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal son cero, se denomina matriz diagonal inferior.* $A = (a_{ij})_{n\times m}$ *es triangular inferior si* $a_{ij} = 0$ *para* $i < j$.

Ejemplo 4.7.4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ x & \lambda & 0 \\ x & y & \lambda \end{bmatrix}$

Definición 4.7.11. [29] *Una matriz es triangular si ella es triangular superior, o triangular inferior*

Proposición 4.7.3. *El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de la diagonal.*

Demostración: (por inducción sobre n)

i) Si $n = 1, A = [a_{11}], |A| = a_{11}$ y el resultado se verifica.

ii) Supongamos que la proposición es cierta para matrices triangulares superiores de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ y sea A una matriz triangular superior de tamaño $n \times m$. Desarrollando $|A|$ por la primera columna se obtiene

$$|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \mid M_{i1} \mid = a_{11}|M_{11}| \text{ pues } a_{i1} = 0 \text{ para } i \geq 2$$

como M_{11} es triangular superior de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ entonces

$$|M_{11}| = a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

así que

$$|A| = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

Colorario 4.7.1. *i. El determinante de una matriz triangular inferior es el producto de los elementos de la diagonal*

ii. El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal.

iii. El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal.

iv. El determinante de I_n *es 1*

Proposición 4.7.4. *Si dos filas de un determinante son intercambiables su valor cambia de signo*

Demostración: (por inducción sobre n)

i. Para $n = 2$, sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

Entonces

[28] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[29] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ |B| &= a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \end{aligned}$$

es decir que $|B| = -|A|$

ii. Supongamos que el resultado se verifica para determinantes de orden $(n-1)$ y consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Desarrollando $|B|$ por la fila $K, K \neq i, K \neq j$ se tiene que

$$|B| = -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{K+j} a_{Kj} |M'_{Kj}|$$

donde M'_{Kj} es el menor de a_{Kj} en la matriz de B. Por la hipótesis de inducción $M'_{Kj} = |M_{Kj}|$, luego

$$\begin{aligned} |B| = & \quad -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{K+j} a_{Kj} |M_{Kj}| \\ = & \quad -|A| \end{aligned}$$

Proposición 4.7.5. *Si en un determinante dos filas son iguales su valor es cero.*

Demostración: Si las filas i, j de A son iguales al intercambiarlas se obtiene $|A| = -|A|$ y de aquí necesariamente $|A| = 0$.

Proposición 4.7.6. *Si cada uno de los elementos de una fila se multiplican por un número a, el determinante queda multiplicado por a.*

Demostración:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ aa_{i1} & \dots & aa_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Desarrollando $|B|$ por la $i-$ ésima fila obtenemos

$$
\begin{aligned}
|B| = & \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a\cdot a_{ij}\mid M_{ij}\mid \\
= & \; a\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\mid M_{ij}\mid \\
= & \; a\mid A\mid
\end{aligned}
$$

Proposición 4.7.7. *Si cada uno de los elementos de una fila es la suma de dos términos, el determinante puede escribirse como la suma de dos determinantes.*

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \;;\; B=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \;;\; C=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}
$$

Vamos a probar que $|A| = |B| + |C|$; desarrollando $|A|$ por la $i-$ésima fila obtenemos,

$$
\begin{aligned}
|A| = & \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(a_{ij}+b_{ij})\mid M_{ij}\mid \\
= & \; a\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\mid M_{ij}\mid + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\mid M_{ij}\mid \\
= & \; |B|+|C|
\end{aligned}
$$

4.8. Cálculo de Inversas

Definición 4.8.1. [30] *Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$. Se dice que A es **invertible** o **no singular** si existe una matriz cuadrada de tamaño $n\times n$, tal que*

$$AX = XA = I$$

y X se denomina una inversa de A.

Teorema 4.8.1. [31] *Si A tiene inversa, es única*

Demostración:

Supongamos

[30] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[31] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

$$\begin{array}{llllll} AX & = XA & = I & & & \\ AY & = YA & = I & & & \\ X & = XI & = X(AY) & = (XA)Y & = IY & = Y \end{array}$$

Por consiguiente hablaremos de la inversa de la matriz A y la denotaremos por A^{-1}

Definición 4.8.2. [32] *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$. Formemos la matriz con los cofactores de los elementos del determinante de A y tomemos su transpuesta. La matriz así obtenida se llama la adjunta de A. Es decir,*

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 4.8.2. [33] $A \times adj(A) = adj(A) \times A = |A| I_n$

Demostracion: Por la definicion 4.7.5 de los determinantes, tenemos

$$A \times adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| I_n$$

De manera análoga se demuestra que $adj(A) \times A = |A| I_n$

Colorario 4.8.1. [34] *Si $|A| \neq 0$, la inversa de la matriz A es*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Demostración: Multiplicando la ecuación $A \times adj(A) = adj(A) \times A = |A| I_n$ por $\frac{1}{|A|}$ tenemos:

$$A\left(\frac{1}{|A|} adj(A)\right) = \left(\frac{1}{|A|} adj(A)\right) A = I_n, \text{ luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Teorema 4.8.3. [35] *Si A es invertible, entonces, $|A| \neq 0$*

Demostración: Supongamos que A es invertible, entonces, $AX = XA = I_n$, por consiguiente, $|AX| = |I_n|$, entonces $|A||X| = 1$, luego $|A| \neq 0$

[32] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[33] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[34] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

[35] Fundamentos de Algebra Lineal. Rubén E. Sánchez C. Profesor de Escuela Colombiana de Ingeniería.Editorial Trillas de Colombia Ltda.2005

4.9. Solución de un Sistema de Ecuaciones

Un sistema de n incógnitas es de la forma

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{gathered}$$

o en forma matricial $AX = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{j1} & \ldots & A_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_{1n} & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Si $|A| \neq 0$, A es inversible, luego, $X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B$.

Este resultado permite, resolver usando determinantes de sistemas de ecuaciones.

4.10. Valores Propios, Vectores Propios y Diagonalización

Sabemos que si $A \in M_{nm}(K)$, entonces podemos encontrar una matriz canónica C tal que $A \sim C$ y matrices inversibles P y Q tales que $A = P \times C \times Q$. Este resultado nos da una manera de factorizar cualquier matriz como producto de un matriz inversible por una canónica por otra inversible. El propósito fundamental es mostrar que existe otra manera de factorizar matrices en términos de matrices inversibles y matrices diagonales.

4.10.1. Valores Propios y Vectores Propios

Definición 4.10.1. *Sea $A \in M_n(K)$. Los números (reales o complejos) λ que verifican la ecuación $|A - \lambda I_n| = 0$, son llamados **valores propios de A**.*

La expresión $det(A - \lambda I_n)$ es un polinomio de grado n lo cual significa que una matriz $A \in M_n(K)$ tiene exactamente n valores propios. La proposición que sigue da una buena caracterización de los valores propios de una matriz.

Proposición 4.10.1. *Si $A \in M_n(K)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) λ es un valor propio de A.

ii) El sistema $(\lambda I_n)X = 0$ tiene soluciones no triviales.

iii) Existe un vector $X \in K^n, X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$

Demostración:

i) $\Longrightarrow$ ii) Si λ es un valor propio de A entonces $det(A-\lambda I_n) = 0$ asi que el sistema $(A-\lambda I_n)X = 0$ tiene soluciones distintas de la solución evidente.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Si existe $X \neq 0$ tal que $(A-\lambda I_n)X = 0$ entonces existe $X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Si existe $X \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$, entonces existe $X \neq 0$ tal que $(A-\lambda I_n) = 0$ es decir que λ es un vector propio de A.

Definición 4.10.2. *Sea $A \in M_n(K)$ y λ un valor propio de A. El subespacio correspondiente al sistema de ecuaciones $(A-\lambda I_n) = 0$ es el espacio característico de A correspondiente a λ. Los vectores distintos de cero que pertenecen al espacio característico son los vectores propios de A correspondientes a λ.*

Dada una matriz $A \in M_n(K)$ es posible encontrar bases formadas por vectores propios para cada uno de los espacios característicos de A.

4.10.2. Diagonalización

Dada una matriz $A \in M_n(K)$, se trata de encontrar una matriz inversible P de manera que el producto $D = P^{-1} \times A \times P$ sea una matriz diagonal que tiene exactamente los valores propios de A sobre su diagonal, significa que A puede factorizarse como $A = P \times D \times P^{-1}$. Evidentemente esa forma de factorizar a A no siempre es posible; estableceremos condiciones necesarias y suficientes bajo los cuales ese proceso puede realizarse.

Definición 4.10.3. *Una matriz $A \in M_n(K)$ es diagonizable si existe una matriz inversible P tal que $D = P^{-1} \times A \times P$ sea diagonal. Se dice además que P diagonaliza a A.*

Proposición 4.10.2. *Sea $A \in M_n(K)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A es inversible.

ii) A tiene n vectores caraterísticos linealmente independientes.

Demostración:

i) $\Longrightarrow$ ii) Como A es diagonizable, sea

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz inversible tal que $D = P^{-1} \times A \times P$, donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Luego,

$$A \times P = P \times D = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \dots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \dots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \dots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

Si llamamos

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \vdots \\ P_{n1} \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{n2} \end{bmatrix} \quad , \dots , \quad P_n = \begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{bmatrix}$$

Observemos que las columnas de la matriz $A \times P$ son los vectores $AP_1, AP_2, \dots, AP_n$ entonces se verifican las igualdades

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, AP_2 = \lambda_2 P_2, \dots, AP_n = \lambda_n P_n$$

Como P es inversible, los vectores $P_1, P_2, \dots, P_n$ son diferentes de cero y linealmente independientes asi que $P_1, P_2, \dots, P_n$ son n vectores característicos que son independientes.

ii) $\Longrightarrow$ i) Supongamos que A tiene n vectores característicos independientes, digamos

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \vdots \\ P_{n1} \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{n2} \end{bmatrix} \quad , \dots , \quad P_n = \begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{bmatrix}$$

y que corresponden a los valores propios de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda n$.

Sea P la matriz

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz P es inversible; así que $A \times P = P \times D$ ó $D = P^{-1} \times A \times P$ donde D es la matriz diagonal que tiene los valores de $A, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sobre la diagonal principal.

La demostración del teorema anterior sugiere un algortimo para diagonalizar una matriz A, el cual puede formularse de la siguiente forma:

D1. Encuentre n vectores característicos linealmente independientes $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

D2. Elabore la matriz P que tenga a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ como vectores columnas.

D3. Calcular P^{-1}.

D4. La matriz $D = P^{-1} \times A \times P$ será diagonal y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ serán los elementos sucesivos de la diagonal principal.

CAPÍTULO

5 APLICACIONES

En el presente capítulo se realizarán algunos ejercicios de álgebra lineal, tomados de exámenes aplicados en el **Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemáticas y de la UNAM.**

De ahora en adelante $f_k \leftrightarrow f_j$ indica que se intercambian la fila k con la fila j, $c \cdot f_k$ significa que la fila k se ha multiplicado por c, $f_k + f_j$ que a la fila k se le suma la fila j

EJERCICIO 5.1.1

Usar operaciones elementales para determinar la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Colocamos junto a la matriz A la matriz identidad I así:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz de la izquierda la vamos a transformar en la matriz identidad y la matriz de la derecha vamos a efectuar las transformaciones; cuando lleguemos a la matriz identidad en el lado izquierdo, la matriz de la derecha será la inversa de la matriz A, la cual se notará A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{f_2 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{-f_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{f_4 - f_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{(-1)f_4}{\overset{(-1)f_3}{\approx}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{f_3 \leftrightarrow f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Verifiquemos el resultado como un ejercicio adicional

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.1.2

Encontrar los valores propios de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para encontrar los valores propios debemos resolver la ecuación

$$|A - \lambda I_3| = 0$$

Luego,

$$0 = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-1)+(\lambda-1) = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1-1) = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

así, $\lambda = 1; \lambda = 2; \lambda = -1$

EJERCICIO 5.1.3

Para qué valores $t \in \mathbb{R}$ **la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

no es invertible?

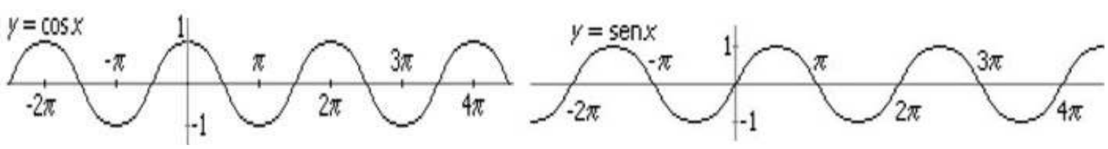
Solución:

Para saber si la matriz A no es invertible, su determinante debe ser igual a cero, es decir:

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \quad \text{y} \quad 1 \neq 0$$

Debemos mirar dos casos especiales, cuando $t = n\pi$ y $(2n-1)\frac{\pi}{2}$.

Sea $t = 0$



Si $t = n\pi$, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y si $t = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; cuyas inversas son, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivamente

Consideremos $t \neq n\pi$, y $t \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos t & -\operatorname{sen} t & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} t & \cos t & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{\cos t \cdot f_2}{\overset{\operatorname{sen} t \cdot f_1}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos t \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen}^2 t & \operatorname{sen} t & 0 \\ \cos t \operatorname{sen} t & \cos^2 t & 0 & \cos t \end{array} \right) \overset{f_2 - f_1}{\approx}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos t \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen}^2 t & \operatorname{sen} t & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array} \right) \overset{\frac{f_1}{\operatorname{sen} t}}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} \cos t & -\operatorname{sen} t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array} \right) \overset{\operatorname{sen} t \cdot f_2 + f_1}{\approx}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos t & 0 & 1-\operatorname{sen}^2 t & \cos t \operatorname{sen} t \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array}\right) \underset{\approx}{\frac{f_1}{\cos t}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{array}\right)$$

luego la inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$

Verifiquemos que efectivamente la inversa de $A = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.1.4

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) **Determine el polinomio característico de** A

b) **¿Es** A **semejante a una matriz diagonal?**

Solución:

a) Recordemos que el polinomio característico de A está dado por $\det(A - \lambda I) = 0$, luego,

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \left| \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 6 \\ -1 & -\lambda & 3 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 6 \\ -1 & -\lambda & 3 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$(-1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 2(\lambda - 4 + 3) + 6(1-\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) + 2(\lambda-1) + 6(1-\lambda) =$
$(\lambda-1)[(3-\lambda)(1+\lambda)-4] = (\lambda-1)[(3+3\lambda-\lambda-\lambda^2)-4] = (\lambda-1)(-\lambda^2+2\lambda-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)^2 = (1-\lambda)^3$

b) Una matriz A es semejante a una matriz diagonal si por operaciones elementales se llega a la matriz identidad. Así,

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\approx}{f_1 \longleftrightarrow -f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \underset{f_1+f_3}{\overset{f_1+f_2}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\approx}{f_2 \longleftrightarrow -f_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\approx}{2f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_3+f_2}{\overset{3f_3+f_1}{\approx}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que la matriz A es semejante a una matriz diagonal.

EJERCICIO 5.1.5

Encontrar una base para el subespacio de $\mathbb{R}^3$ **generado por los vectores** $(1,2,3),(1,3,0),(0,1,-1)$ **y** $(1,1,2)$.

Solución:

Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,2,3,),(1,3,0),(0,1,-1)$ y $(1,1,2)$. Puesto que tenemos cuatro vectores y $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la dimensión de S debe ser menor o igual a tres, lo cual significa que por lo menos uno de los tres vectores debe ser una combinación lineal de los otros.

Veamos que $(1,1,2)$ es combinación lineal de $(1,2,3,),(1,3,0)$ y $(0,1,-1)$

$$(1,1,2) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,3,0) + \alpha_3(0,1,-1)$$

Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
1 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\
2 &= 3\alpha_1 - \alpha_3
\end{aligned}$$

Luego $3 = 1 + 2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_1 - \alpha_3 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2$

$0 = 3 + (-3) = 5\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha_1$, de donde $\alpha_1 = 0$.

Así que $3 = 3\alpha_2$, por lo tanto $\alpha_2 = 1$, tambien $1 = 3 + \alpha_3$, de aquí $\alpha_3 = -2$.

De esto podemos concluir que $(1,1,2) = \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,3,0) + \alpha_3(0,1,-1) = (1,3,0) - 2(0,1,-1)$

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, tales que $\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,3,0) + \alpha_3(0,1,-1) = (0,0,0)$, entonces:

$$0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_1 - \alpha_3$$

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
0 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\
0 &= 3\alpha_1 - \alpha_3
\end{aligned}$$

De aquí $0 = 0 + 0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_1 - \alpha_3 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2$

También $0 = 0 - 0 = 5\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 2\alpha_1$, así que $\alpha_1 = 0$, de $5\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0$ y de que $\alpha_1 = 0$ tenemos que $\alpha_3 = 0$.

De $0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ y, del hecho que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_3 = 0$ concluímos que $\alpha_2 = 0$

Luego, los vectores {(1,2,3),(1,3,0),(0,1,-1)} son linealmente independientes.

Sea $X \in \mathbb{R}^3, X = (x,y,z)$

$$\begin{aligned}
X &= \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,3,0) + \alpha_3(0,1,-1) \\
(x,y,z) &= \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(1,3,0) + \alpha_3(0,1,-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & \alpha_1+\alpha_2 \\ y & = & 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 \\ z & = & 3\alpha_1-\alpha_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 2 & 3 & 1 & y \\ 3 & 0 & -1 & z \end{array}\right) \underset{-3f_1+f_3}{\overset{-2f_1+f_2}{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & -2x+y \\ 0 & -3 & -1 & -3x+z \end{array}\right) \overset{f_3+f_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -2 & 0 & y+z-5x \\ 0 & -3 & -1 & z-3x \end{array}\right) \underset{-f_3}{\overset{-\frac{f_2}{2}}{\approx}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5x-y-z}{2} \\ 0 & 3 & 1 & 3x-z \end{array}\right) \underset{-3f_2+f_3}{\overset{-f_2+f_1}{\approx}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{y+z-3x}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5x-y-z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{z+3y-9x}{2} \end{array}\right)$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{y+z-3x}{2} \\ y & = & \frac{5x-y-z}{2} \\ z & = & \frac{z+3y-9x}{2} \end{array}$$

$$\left(\frac{y+z-3x}{2}\right)(1,2,3) + \left(\frac{5x-y-z}{2}\right)(1,3,0) + \left(\frac{z+3y-9x}{2}\right)(0,1,-1) =$$
$$\left(\left(\frac{y+z-3x}{2}+\frac{5x-y-z}{2}\right), \left(2\left(\frac{y+z-3x}{2}\right)+3\left(\frac{5x-y-z}{2}\right)+\left(\frac{z+3y-9x}{2}\right)\right), \left(3\left(\frac{y+z-3x}{2}\right)-\left(\frac{z+3y-9x}{2}\right)\right)\right) = (x,y,z)$$

De aquí se tiene que $x=z$, $y=-z$ y $z=-2z$, luego $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ -2z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

El espacio generado por los tres vectores (1,2,3),(1,3,0),(0,1,-1) es

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=z, y=-z, z=-2z\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z(1,-1,-2)\},=\{(z,-z-2z)\in\mathbb{R}^3/z\in\mathbb{R}\}.$$

Luego por ser los vectores antes mencionados linealmente independiente y generadores del subespacio S, entonces $B=\{(1,2,3),(1,3,0),(0,1,-1)\}$ es una base del subespacio S.

EJERCICIO 5.1.6

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine los vectores propios de A y una base para los subespacios de vectores propios correspondientes.

Solución:

$$\det(A-\lambda I_3) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

así que,

$$0 = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1]-(1-\lambda) =$$

$(1-\lambda)[2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-1-1] = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$ de donde, $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$ ó $\lambda = 3$

Ahora, para determinar los vectores propios de la matriz A, debemos reemplazar los valores que tiene λ en la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_1+f_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2+f_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Así que,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces, $x - y = 0$, y, $y - z = 0$; así, $x = y = z$

De aquí,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El espacio generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $S = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \neq \{0\} \right\}$

Si $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{-f_1+f_3}{\overset{f_1+f_2}{\approx}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{luego} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

implica que, $y = 0$, y, $z = -x$; por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El espacio generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es $S = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \neq \{0\} \right\}$

Si $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{-f_3+f_2}{\approx} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{luego} \quad \text{si}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-y \\ -x+z \\ -y-2z \end{pmatrix}$$

así $y = -2x, x = z$, y, $y = -2z$; por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El espacio generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es $S = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \neq \{0\} \right\}$

los vectores propios son:

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como los vectores propios son subespacios generados y, además son linealmente independientes, constituyen una base de la matriz A

EJERCICIO 5.1.7

Sea V_4 el subespacio de $\mathbb{R}^4$ que consiste de todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & -y & +2z & +w & = & 0 \\ x & +y & +z & -w & = & 0 \\ 2x & & -4z & -w & = & 0 \end{array}$$

Determina una base para V_4

Solución:

Para determinar una base para V_4, debemos comprobar que los valores son linealmente independientes y que genera a $\mathbb{R}^4$; luego, desarrollarlo por el método de eliminación de Gauss, tenemos que:

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix} \overset{f_2+f_1}{\approx} \begin{pmatrix}3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix} \overset{\frac{f_1}{3}}{\approx} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4 & -1\end{pmatrix} \underset{-2f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\approx}}$$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{pmatrix}$ así que,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -6 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+z\\ y-w\\ -6y-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

luego, $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / z = -x, w = 6x, y = -6x\} = \{(x, -6x, -x, 6x) \in \mathbb{R}^4 / x \in \mathbb{R}\}$

Luego por ser los vectores linealmente independientes y generadores en el subespacio, la base es $B = \{(1, -6, -1, 6)\}$

EJERCICIO 5.1.8

Calcule A^6 si

$$A = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-12 & -6+15\\ 8-20 & -12+25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8 & 9\\ -12 & 13\end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix}-8 & 9\\ -12 & 13\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8 & 9\\ -12 & 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}64-108 & -72+177\\ 96-156 & -108+169\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-44 & 45\\ -60 & 61\end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^4 \cdot A^2 = \begin{pmatrix}-44 & 45\\ -60 & 61\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8 & 9\\ -12 & 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}352-540 & -396+585\\ 480-732 & -540+793\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-188 & 189\\ -252 & 253\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.1.9

Calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix}-3 & -2 & -1\\ 6 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_1+f_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-6f_3+f_2}{\overset{3f_3+f_1}{\approx}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -6 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_1+f_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2f_2+f_1}{\approx}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-f_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_1 \longleftrightarrow f_3}{\approx}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right);\text{efectivamente,}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y,}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.1.10

¿Bajo qué condiciones sobre $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **, la ecuación** $Ax = b$ **tiene una solución** $x \in \mathbb{R}^2$**, para**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:
Como debemos buscar condiciones que sean consistentes sobre el vector b que tiene dos componentes que no conocemos y que además la ecuación $Ax = b$ tiene una sola solución. Podemos resolver la ecuación por el método de Gauss. Tenemos que

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 4 & 5 & b_2 \\ 7 & 8 & 1 \end{array}\right) \underset{-7f_1+f_3}{\overset{-4f_1+f_2}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -3 & -4b_1+b_2 \\ 0 & -6 & -7b_1+1 \end{array}\right) \underset{-\frac{f_3}{6}}{\overset{-\frac{f_2}{3}}{\approx}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & \frac{-4b_1+b_2}{-3} \\ 0 & 1 & \frac{-7b_1+1}{-6} \end{array}\right) \overset{-f_2+f_3}{\approx}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & \frac{4b_1-b_2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-4b_1+b_2}{3}+\frac{-7b_1+1}{-6} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & \frac{4b_1-b_2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2b_2-b_1-1}{6} \end{array}\right) \overset{-2f_2+f_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2b_2-5b_1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4b_1-b_2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2b_2-b_1-1}{6} \end{array}\right)$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{2b_2-5b_1}{3} \\ y & = & \frac{4b_1-b_2}{3} \\ 0 & = & \frac{2b_2-b_1-1}{6} \end{array}$$

Para que la condición sea consistente es necesario que $2b_2 - b_1 - 1 = 0$, o también, $b_1 = 2b_2 - 1$

Como, $\boxed{b_1 = 2b_2 - 1}$, podemos escribir las igualdades de x e y en términos de b_2, así

$$\begin{array}{rcccccccl} x & = & \frac{2b_2-5b_1}{3} & = & \frac{2b_2-5(2b_2-1)}{3} & = & \frac{2b_2-10b_2+5}{3} & = & \frac{5-8b_2}{3} \\ y & = & \frac{4b_1-b_2}{3} & = & \frac{4(2b_2-1)-b_2}{3} & = & \frac{8b_2-4-b_2}{3} & = & \frac{7b_2-4}{3} \end{array}$$

Esto quiere decir que b_1 ó b_2 tiene infinitas posibilidades o valores que generan una sola solución.

EJERCICIO 5.1.11

Sea $A \in M_{n\times n}(F)$ tal que $A \neq 0, A^2 = 0$. Pruebe que $A + I_n$ es invertible (I_n denota la matriz identidad)

Solución:

Puesto que tiene que aparecer A^2, lo lógico es, multiplicar a $A + I_n$ por $A + B$, pero si I_n es la matriz identidad, entonces B debe ser I_n; así que $(A + I_n) \cdot (I_n - A) = I_n^2 - A^2 = I_n - 0 = I_n$, lo cual significa que $A + I_n$ es invertible y su inversa es $I_n - A$.

Podemos avanzar más y mostrar por lo menos un ejemplo que ilustre esto:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $a^2 + bc = 0; b(a + d) = 0; c(a + d) = 0; cb + d^2 = 0$.

Si $b = 0$, entonces $a = 0, d = 0, c$ puede ser cualquier valor.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}; \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}; \quad I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+I_2)\cdot(I_2-A) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ c & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ -c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (A+I_2)^{-1} = I_2 - A.$$

Si $b \neq 0, d = -a$, se debe cumplir que $bc = -a^2, c = -\frac{a^2}{b}$

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ -\frac{a^2}{b} & -a\end{pmatrix}; \quad A+I_2 = \begin{pmatrix}a+1 & b\\ -\frac{a^2}{b} & -a+1\end{pmatrix}; \quad I_2 - A = \begin{pmatrix}1-a & -b\\ \frac{a^2}{b} & 1+a\end{pmatrix}$$

$$(A+I_2)\cdot(I_2-A) = \begin{pmatrix}a+1 & b\\ -\frac{a^2}{b} & -a+1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1-a & -b\\ \frac{a^2}{b} & 1+a\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1-a^2+a^2 & -ab-b+b+ab\\ -\frac{a^2}{b}(1-a)+\frac{a^2}{b}(-a+1) & a^2+1-a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5.1.12

Sea $A(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Demuestre por inducción que

$$[A(\theta)]^n = A(n\theta)$$

Solución:

$$(A(\theta))^2 = A(\theta)\cdot A(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta & -\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\operatorname{sen}2\theta\\ \operatorname{sen}2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

Supongamos que $[A(\theta)]^k = A(k\theta)$ y mostremos que $[A(\theta)]^{k+1} = A((k+1)\theta)$

$$[A(\theta)]^{k+1} = [A(\theta)]^k\cdot A(\theta) = A(k\theta)\cdot A(\theta) = \begin{pmatrix}\cos k\theta & -\operatorname{sen}k\theta\\ \operatorname{sen}k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\cos k\theta\cos\theta - \operatorname{sen}k\theta\operatorname{sen}\theta & -\cos k\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}k\theta\\ \operatorname{sen}k\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos k\theta & -\operatorname{sen}k\theta\operatorname{sen}\theta + \cos k\theta\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(k\theta+\theta) & -\operatorname{sen}(k\theta+\theta)\\ \operatorname{sen}(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta)\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\cos(k+1)\theta & -\operatorname{sen}(k+1)\theta\\ \operatorname{sen}(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{pmatrix} = A((k+1)\theta)$$

EJERCICIO 5.1.13

Calcule A^{13} si

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^3\cdot A^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{12} = A^6\cdot A^6 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{13} = A^{12}\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

Esto indica que $A^{12k+1} = A, k \in \{1,2,3,\dots\}$

EJERCICIO 5.1.14

Hallar los valores propios de $A = \begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}$

Solución:

Identifiquemos por A_n la matriz cuadrada $n\times n$ cuyos elementos por todos 1.

Así que $0 = \det(A_1 - \lambda I_1) = 1-\lambda$,por lo tanto $\lambda = 1$

$0 = \det(A_2 - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda)$, por lo tanto $\lambda = 0$, ó, $\lambda = 2$

$0 = \det(A_3 - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)) + 2\det\begin{pmatrix}1 & 1-\lambda\\ 1 & 1\end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 2(1-1+\lambda) = -\lambda(2-3\lambda+\lambda^2) + 2\lambda = \lambda(2-2+3\lambda-\lambda^2) = \lambda^2(3-\lambda)$, por lo tanto $\lambda = 0,$ ó, $\lambda = 0,$ ó, $\lambda = 3$

$0 = \det(A_4 - \lambda I_4) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\det(A_3-\lambda I) - \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} +$

$\det\begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2(3-\lambda)) + \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} +$
$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-\lambda\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)(3-\lambda)+3((1-\lambda-1)-0+(1-\lambda)(1-1+\lambda)) =$
$\lambda^2(1-\lambda)(3-\lambda)+3(\lambda)(1-\lambda-1) = \lambda^2(1-\lambda)(3-\lambda)-3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2-4\lambda+3)-3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2-4\lambda+3-3) =$
$\lambda^3(\lambda-4)$, por lo tanto $\lambda = 0$, ó, $\lambda = 0$, ó, $\lambda = 0$, ó, $\lambda = 4$.

Afirmamos que los valores de A_n son 0 de multiplicidad $n-1$ y n.

La demostración se hace por inducción matemática.

CAPÍTULO

6

CONCLUSIONES

El objetivo fundamental de este trabajo de grado fue recopilar los elementos necesarios del Álgebra Lineal para la solución de problemas que tienen que ver con el exámen de admisión a los postgrados de matemáticas que efectúan algunas unversidades, en especial de México.

Así pues, la aportación principal de este trabajo consistió en responder las preguntas de algunos exámenes de admisión, realizados por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México, teniendo como base los conceptos relacionados con el tema ya antes mencionado.

Cada capítulo nos deja una enseñanza en particular; fue necesario tomar como primera medida los temas enlazados con las relaciones y funciones, para luego hablar de estructuras algebraicas, algebra vectorial, seguido de sistemas de ecuaciones lineales y matrices para así concluir con las aplicaciones del tema de nuestro interés.

A lo largo de este trabajo se enfatizó en las definiciones, teoremas, proposiciones y colorarios, con el fin de ofrecer al lector, herramientas o bases teóricas, para que en el momento de solucionar algún ejercicio que tenga que ver con nuestro tema en cuestión, pueda llevarlos a cabo sin ningún problema.

Creemos que en este trabajo se logró las metas propuestas desde el principio; se abarcó gran parte del tema y las aplicaciones de este. El contenido teórico y los ejercicios resueltos servirán como una herramienta de estudio a los alumnos de la carrera de Licenciatura en Matemáticas y, a personas que deseen ingresar a un postgrado en el área de matemáticas.

Logramos todo lo que nos propusimos llegando a un final satisfactorio.

BIBLIOGRAFÍA

[1] José M. Muñoz Quevedo. *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Profesor asociado Universidad Nacional de Colombia. Universidad Nacional, Bogotá D.C. (Colombia), 1983.

[2] Serie de compendios Schaum. *Teoría y Problemas de Teoría de Conjuntos y Temas Afines*. McGraw-Hill de México S.A., México D.F., 1970.

[3] Tom M. Apostol. *Calculus Vol I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Editorial Reverté Colombiana S.A., Bogotá D.C.(Colombia), 1972.

[4] Howard Anton. *Introducción al Álgebra Lineal*. Noriega Editores, editorial Limusa, México D.F., 1998.

[5] Augusto Silva Silva. *Conceptos Básicos de Álgebra Lineal*. Universidad Surcolombiana. Facultad de Educación. Programa de Matemáticas y Física, Neiva (Colombia), 1998.

[6] Rubén E. Sánchez C. *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Editorial Trillas de Colombia Ltda, Bogotá D.C. (Colombia), 2005.