Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Actividades Heúristicas y Lúdicas para motivar la enseñanza de la matemática en la educación básica

María Emma Catalina López Gutiérrez

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Actividades Heúristicas y Lúdicas para motivar la enseñanza de la matemática en la educación básica

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

María Emma Catalina López Gutiérrez
código: 2007165968

Asesor:
Profesor Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Agosto de 2013

AGRADECIMIENTOS

A Dios por iluminar mi camino y ayudarme a vencer todo obstáculo, brindándome así la oportunidad de culminar una meta tan importante en mi vida como lo es este logro profesional.
A mis padres por su apoyo incondicional, porque sin sus buenos concejos y colaboración este logro no habría sido posible.
Al asesor y amigo el profesor Mauricio Penagos por la participación directa con el trabajo dedicando tiempo en sus lecturas constantes y correcciones acertadas.
Al segundo lector, el profesor Augusto Silva por su buena disposición y su detallada lectura que permitieron mejorar el trabajo en aspectos importantes.
A todos los profesores de la universidad Surcolombiana que aportaron su experiencia y conocimiento en mi proceso de formación humana y académica en el transcurso de la carrera.

A todos ellos infinitas gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Para despertar el interés del estudiante hacia el aprendizaje de las matemáticas se debe utilizar una metodología activa y motivadora. La utilización de materiales concretos y actividades de carácter lúdico permiten que el niño se sienta motivado a participar activamente en su aprendizaje. Una vez logrado esto se pueden utilizar técnicas heurísticas para fortalecer lo ya aprendido y formular conceptos más elevados al resolver problemas partiendo de experiencias concretas.

Una buena parte de los fracasos en los cursos de matemáticas de los estudiantes se debe a la inadecuada o escasa motivación por parte de sus maestros al introducir los temas de la clase. Por eso, en este trabajo se proponen diversos problemas, acertijos, trucos y demás ejercicios para que los jovenes perciban el sentimiento estético y el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos en ella de un modo más personal y humano.

Se quiere poner de manifiesto la importancia de emplear la heurística para resolver problemas matemáticos como metodología para conseguir aprendizajes significativos en matemáticas. La heurística y la lúdica juegan un papel fundamental en la docencia de las matemáticas y, como tal, debieran ser usadas en la práctica educativa de forma habitual, ya que permite fundamentar la atención en los procesos de pensamiento y además, los contenidos matemáticos son vistos como herramientas indispensables para aplicar estrategias de resolución.

Se presentan problemas matemáticos con enunciados interesantes para los alumnos, de manera que se establezcan conexiones de la matemática con la vida real, con otras áreas del conocimiento, ramas de la propia matemática y de la historia. La idea es que estos problemas llamativos, por así decirlo, despierten en el estudiante el gusto por resolverlos utilizando estrategias sencillas y con el acompañamiento del docente.

Esta estrategia de la enseñanza basada en la solución de problemas va a fortalecer en los estudiantes la reflexión y los procesos de pensamiento en tanto logran juzgar sus aciertos y desaciertos, construyen relaciones y permite además, la participación activa de sus compañeros y la interacción entre los integrantes durante la realización del juego.

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El papel del maestro frente a sus estudiantes en la clase de Matemáticas, debe ser de acompañamiento y motivación para que estos sientan placer por estudiar con base en actividades cuidadosamente preparadas. El docente debera actuar como un promotor de la construcción del conocimiento, construcción a la que convoca a sus alumnos para lograr el desarrollo de las competencias inherentes a la asignatura. El docente debera ser competente para transmitir y compartir de manera adecuada sus conocimientos; es por esto que su compromiso diario debe ser la búsqueda de estrategias y nuevas metodologías fundamentadas en la lúdica y la motivación.

En atención a lo anterior como estudiante de Licenciatura en Matemáticas y por lo tanto a las puertas de ser profesional considero que debemos proponernos quitarle a la matemática esa aureola de misterio y de impenetrabilidad. Una buena opción para lograr esto es utilizar en el aula de clase la heurística, la lúdica y la didáctica para introducir los temas, para motivar el desarrollo de la clase y para crear hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos.

En este trabajo se pretende presentar un material atractivo con ejercicios interesantes dirigido a profesores, practicantes de la licenciatura, estudiantes de bachillerato y personas de diversos intereses. Se presentan una serie de problemas, adivinanzas, trucos, y acertijos con distintas propuestas y alternativas de solución. Para hallar la respuesta a estos problemas, algunos requieren de conceptos matemáticos previos, otros sólo de una dosis de ingenio, algo de inspiración y un poco de paciencia.

El origen de los trucos, acertijos y las adivinanzas propuestas en este trabajo es muy diversa: algunos problemas son clásicos, otros son creaciones conocidas de autores como Martin Gardner, Miguel de Guzmán, George Polya y otros exponentes de la lúdica y la heurística que vieron estas técnicas como provechosas e ingeniosas para enseñar matemáticas. Además posibilita las competencias matemáticas que contempla el Ministerio de Educación Nacional en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas:*Comunicación, Razonamiento y Formulación de Problemas*.

Como docentes se debe tener claro que uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a que todos los estudiantes desarrollen y alcancen competencias y estandares básicos en matemática. Es aqui donde el maestro debe armonizar adecuadamente la clase magistral con actividades lúdicas y heurísticas, es decir la atención a los procesos de pensamiento y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Presentar la lúdica y la heurística como opciones para introducir y fortalecer conceptos matemáticos de manera sencilla a través de problemas que sean llamativos y de interes a los estudiantes, de tal manera que se puedan fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Objetivos Específicos

- Mostrar el impacto de la lúdica y la heurística como técnicas para fortalecer el proceso de enseãnza de la matemática en la educación básica y presentar algunos que proponen la lúdica como una opción que coadyuva el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Presentar algunos trucos y acertijos matemáticos como ejemplos donde pueda observarse la técnica de solución de problemas y que permitan el desarrollo de las competencias matemáticas.
- Proponer ejercicios para desarrollar en clase que utilicen la heurística y la lúdica para fortalecer, de manera explícita, los procedimientos lógicos elementales del pensamiento asociados a conceptos a través de las clases de Matemática.

JUSTIFICACIÓN

Se debe ser cuidadosos al afirmar que las matemáticas se aprendan jugando pues esencialmente su naturaleza, finalidad y sus aplicaciones van mucho más allá del carácter estrictamente lúdico de la mayoría de los juegos. Lo que si se puede afirmar con seguridad es que el carácter lúdico de algunos juegos y más aún el reto intelectual que nos plantean algunos problemas curiosos e interesantes es que tiene una gran similitud con las matemáticas; pues cuando se hacen matemáticas y en particular cuando se trata de resolver un problema, hay un objetivo comparable al de la mayoría de los juegos, hallar la solución o lograr ganar una partida , y se dispone también de reglas claramente definidas, sobre aquello que se puede y no se puede hacer para lograr el objetivo.

Basados en esta similitud entre las matemáticas, el juego y las destrezas de pensamiento se presentan algunas actividades relacionadas con áreas de la matemática como la aritmética, el cálculo, el álgebra, la teoría combinatoria y la geometría que serán un buen material para utilizar en las actividades de motivación en la acción docente, para introducir o consolidar temas y mostrar de esta manera que hacer matemática puede convertirse en una actividad lúdica y, sobre todo, intelectualmente estimulante.

El uso de herramientas lúdicas y técnicas heurísticas alrededor de las matemáticas constituyen un recurso altamente valioso para la enseñanza en los distintos niveles de educación básica. Los trucos, las adivinanzas lógicas, los problemas de pensar en la clase pueden servir como actividad de motivación, para introducir o consolidar conceptos, para practicar una tarea o para desarrollar estrategias de solución de problemas y hasta para ayudar a los estudiantes a ver la matemática como una ciencia cuya práctica puede provocar placer o diversión.

MARCO TEORICO

Dentro de las tendencias relacionadas con el desarrollo del pensamiento está la Instrucción Heurística, la cual presentaremos en este trabajo como método para la enseñanza de los procedimientos lógicos del pensamiento matemático. La Heurística (del griego eureka, significa: hallar, descubrir, inventar) es relativamente reciente como instrucción científica, y solo hasta hace unas pocas décadas aparecen sistematizados los procedimientos heurísticos para enriqucer la pedagogía en la enseñanza de la matemática.

Figura 1: George Pólya

Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas,*George Pólya*(1887-1985) generalizó su método en los siguientes cuatro pasos:

1. Entender el problema.
2. Configurar un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Mirar hacia atrás.

El aporte de Pólya incluye más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su famoso libro Cómo Plantear y Resolver Problemas que se ha traducido a 15 idiomas, introduce su método de cuatro pasos junto con la heurística y estrategias específicas útiles en la solución de problemas.

En el tratamiento de los conceptos, es importante conocer las potencialidades lógicas que tienen los ejercicios y problemas que seleccionemos para la asimilación y fijación de éstos; en este sentido, somos partidarios de emplear el modelo propuesto por Pólya pues estamos de acuerdo que éste modelo facilita el actuar sobre el pensamiento del estudiante,siempre que este observe principios, reglas, estrategias que involucren cada solución problémica . Estos posibilitan la ejecución de acciones básicas encaminadas a la formación de los procedimientos lógicos del pensamiento.

Figura 2: Miguel de Guzmán

Miguel de Guzmán nació en Cartagena (España) en Enero de 1936. Fue un gran matemático y un gran profesor, era la referencia de los medios de comunicación ante cualquier tema o noticia que tuviera que ver con las matemáticas o con su enseñanza en nuestro país.

Miguel de Guzmán partiendo de la ideas de George Polya y de los trabajos de Schoenfeld elaboró un modelo para la solución de problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras lo que Polya denominó como pensamiento productivo.

El modelo propuesto por Miguel de Guzman es el siguiente:

1. Familiarización con el problema.
2. Búsqueda de estrategias.
3. Llevar adelante la estrategia.
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él.

El desarrollo de la matemática ha estado plenamente relacionado con el juego y la lúdica; realmente quienes han realizado aportes significativos en esta ciencia han pasado mucho tiempo creando y pensando en acertijos, problemas ingeniosos, rompecabezas geométricos y los cuadrados mágicos, son solo una pequeña muestra de que las matemáticas se ha desarrollado paralela a los juegos que ella misma va generando. Esto se puede ver claramente argumentado con lo que sigue:" Las matemáticas siempre han tenido un sentido lúdico. Muchas de las profundas reflexiones alrededor de los problemas matemáticos han estado teñidas de una motivación y un reto apasionante que produce placer y sensación de búsqueda y logro. Para Arquímedes, Euclides, Leibniz o Einstein las matemáticas tuvieron los trazos de una apasionante aventura del espíritu. Las matemáticas, al igual que están en todo lo que conocemos, se encuentran claramente dibujadas en los juegos y acertijos ".

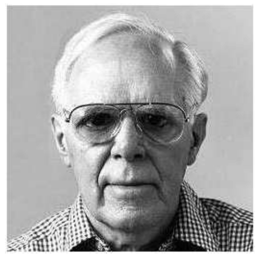


Figura 3: Martín Gardner

Martín Gardner nació e1 21 de octubre de 1914, en los EEUU. Después de graduarse en filosofía, en la Universidad de Chicago, se dedicó al periodismo. Sus trabajos abarcan la divulgación científica, la critica literaria e incluso la filosofía. En 1956 Gardner inició una legendaria sección mensual de juegos matemáticos en la revista Scientific American, que condujo por más de veinte años. Estos artículos, reunidos en más de una docena de libros, hacen hoy la más rica e inspirada enciclopedia que existe en este campo. En sus libros Martin Gardner hace propuestas inusuales y divertidas, que sólo requieren del lector el más elemental conocimiento, pero que al mismo tiempo propocionan una mirada estimulante a los niveles más fecundos del pensamiento matemático.
A lo largo de la historia son muchos los autores que mencionan el juego como una parte importante del desarrollo de los niños y son varias las teorías que se formulan acerca de éste.La humanidad ha jugado desde siempre, incluso los animales lo hacen; por eso el juego se considera previo a la cultura misma; existen innumerables manifestaciones de esta actividad en sociedades de todos los tiempos y se cuenta con muchas obras de arte donde se aprecian estas manifestaciones lúdicas.

Entre los filósofos que abordan el tema de la lúdica, se cita a Platón como uno de los primeros en mencionar y reconocer el valor práctico del juego y la lúdica, dada la prescripción que hace en Las Leyes, de que los niños utilicen manzanas para aprender mejor las matemáticas y que los niños de tres años, que más tarde serán constructores, se sirvan de útiles auténticos, sólo que a tamaño reducido; es decir, a pequeña escala. Otros pedagogos importantes como Juan Amós Comenio en el siglo XVII, Juan Jacobo Rousseau y Giovanni Pestalozzi en el XVIII y principios de XIX, señalaron que para un buen desarrollo del niño, éste debe ser tomado en cuenta en sus intereses. Friedrich Fröbel abiertamente reconoció la importancia de la lúdica en el aprendizaje, y se interesó por los niños pequeños, estudiando los tipos de juego que necesitan para desarrollar su inteligencia.

El Ministerio de Educación Nacional propone en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que el trabajo del docente en el aula debe estar encaminado a que los estudiantes alcancen las llamadas competencias en matemáticas

1. La comunicación matemática.
   La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

2. El razonamiento.
   El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones. Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas.

3. La formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.
   Para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos. Uno de estos mecanismos es la alternación de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.

Los cuatro capítulos que tiene el trabajo muestran actividades llamativas, algunas propuestas por George polya, Miguel de Guzmán y especialmente Martin Gardner, otras tomadas de autores poco conocidos pero todas estas ayudan al maestro en su trabajo de encaminar a sus estudiantes al desarrollo de competencias matemáticas.

CAPÍTULO 1

ALGEBRA

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.
Bertrand Russell (1872-1970)

Existen numerosos juegos de acertijos y adivinanzas en los que se utilizan herramientas matemáticas como base para argumentar la solución de los mismos. Muchos de éstos juegos, emplean diversas operaciones en las que se relacionan y manipulan las variables a través de procesos algebraicos para así determinar a priori el resultado del problema.
Veamos algunos acertijos clásicos y otras cuantas adivinanzas con números para ilustrar con ejemplos:

1.1. ACERTIJOS

Los acertijos son un juego de palabras que deja entrever pistas al lector para que éste encuentre los datos, haga un planteamiento y encuentre el resultado. Dicho resultado se puede encontrar al resolver una ecuación sencilla que por lo general es de primer o segundo grado y se propone en el enunciado del acertijo.

1.1.1. El Epitafio de Diofanto

Diofanto fué un matemático griego que nació hacia el 250 a.C y murió a los ochenta y cuatro años en Alejandría. Sus escritos contribuyeron de forma notable al perfeccionamiento de la notación algebraica y al desarrollo de los conocimientos del álgebra de su época. Mediante artificios de cálculo supo dar soluciones particulares a numerosos problemas, y estableció las bases para un posterior desarrollo de importantes cuestiones matemáticas.
Muchos libros afirman no conocer con seguridad sobre su vida salvo la edad a la que

falleció gracias a este epitafio redactado en forma de problema y conservado en la antología griega.

" Yace aquí Diofanto, la roca mirad;
mediante arte algebraico, te dice su edad:
un sexto de su vida fue niñez y alegría,
y un doceavo adolescente, mientras su barba crecía,
y después de un séptimo Diofanto casaría.
Pasaron cinco años y un hijo nació.
Pero fue desgraciado pues ese hijo murió,
cuando tenía la mitad de los años que su padre vivió.
Durante cuatro años más su consuelo halló,
en la ciencia del número y entonces murió."

Para determinar cuantos años vivió Diofanto, es necesario ordenar los datos que da el epitafio. Para ello llamemos $x =$ al número de años que vivió Diofanto.
Cada evento que se cuenta representa un dato, que expresaremos en términos de x, y que corresponde a una secuencia, que puede ser representada como una suma asi:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 4 + 5$$

En este momento sólo basta con realizar las operaciones correspondientes y como la idea es ejercitar el pensamiento matemático, hay que desarrollar el ejercicio paso a paso para entender como es que se llega a la solucion.

Al reducir los términos semejantes de la expresión se obtiene:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9$$

Ahora las fracciones (se hará paso a paso, aunque podrían sumarse de una sola vez). Hallamos el m.c.m(mínimo comú múltiplo) de los denominadores de las fracciones, esto es:

$$m.c.m(6,12,7,2) = 84$$

Tomamos el 84 para dividirlo entre cada denominador y el resultado lo multiplicamos por el numerador x para formar fracciones homogéneas las cuales se pueden sumar entre sí y resolver fácilmente la ecuación que nos conduce a la edad que vivió Difanto:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} + 9 \\
x &= \frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{42x}{84} + 9 \\
x &= \frac{14x + 7x + 12x + 42x}{84} + 9
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x-9 &= \frac{14x+7x+12x+42x}{84} \\
x-9 &= \frac{75x}{84} \\
84(x-9) &= 75x \\
84x-756 &= 75x \\
84x-75x &= 756 \\
9x &= 756 \\
x &= \frac{756}{9} \\
x &= 84
\end{aligned}
$$

Por lo tanto Difanto vivió 84 años.

1.2. ACTIVIDADES CON ESCRITURA DE NÚMEROS

Los siguientes juegos utilizan el asombro de los estudiantes al adivinarles el número que piensan mediante una serie de pasos que conducen al planteamiento de ecuaciones sencillas que no es necesario resolver para encontrar el número pensado por el estudiante. En todos los trucos se utiliza la misma técnica: el maestro escoge un estudiante voluntario al que le pedirá que realice de forma correcta unos cuantos cálculos, despues de estos, el voluntario le dará al maestro el resultado final y éste sin problemas, adivinará el número que había pensado originalmente el estudiante.

Ejemplo 1

1. Piense un número cualquiera.
2. Multipliquelo por 2.
3. Al resultado sumele 9.
4. Al resultado sume el número que penso.
5. Al resultado dividalo por 3.
6. Al resultado anterior súmele 4.
7. A este resultado, réstele el número que penso.

El resultado de aplicar éstas operaciones es siempre 7 independientemente del número pensado.

A manera de ilustración desarrollaremos el siguiente ejemplo :

1. Supongamos que el estudiante pensó el número 6.
2. Al multiplicarlo por 2 el resultado es 12.
3. Ahora al sumar 9, se obtiene: 12 + 9 = 21.
4. Si a 21 le sumamos el número pensado que es 6, obtenemos: 21 + 6 = 27.
5. Al dividir 27 entre 3 queda: 27 ÷ 3 = 9.
6. A lo que quedó le sumamos cuatro: 9 + 4 = 13.
7. Al resultado le resto el número que pensé: 13 - 6 = 7.

Una demostración del resultado obtenido en el juego es la siguiente:

1. Supongamos que el número pensado es x
2. Si al número pensado lo multiplicamos por dos nos queda $2x$
3. A $2x$ le sumamos nueve : $2x+9$
4. Al resultado anterior le sumamos el número pensado: $2x+9+x$
5. El resultado del paso anterior divídalo por tres: $\dfrac{2x+9+x}{3}$
6. A lo que quedó súmele cuatro : $\dfrac{2x+9+x}{3}+4$
7. Al resultado, réstele el número pensado : $\left[\dfrac{2x+9+x}{3}+4\right]-x$

Si resolvemos las operaciones matemáticas planteadas, veremos que las x se cancelan y el número resultante es 7:

$$\begin{aligned}\left[\frac{2x+9+x}{3}+4\right]-x &= \left[\frac{3x+9}{3}+4\right]-x\\ &= x+3+4-x\\ &= 7\end{aligned}$$

Luego de probar con varios números y ver que siempre se cumple dicho resultado, podemos invitar a nuestros alumnos a descubrir una expresión general que sirva para cualquier número pensado.

Ejemplo 2

1. Piense un número de una cifra (del uno al nueve, sin el cero porque cancelaría todos los demás pasos).
2. Multiplique por 9 el número pensado .
3. Al valor obtenido, súmele otra vez el número pensado y a este nuevo resultado súmele dos.
4. Al resultado obtenido en el paso anterior quítele la primera cifra y con la segunda sume 12.
5. Al resultado que le dio en el paso cuarto réstele tres .
6. El resultado siempre es 11.

Aprovechando el asombro de los estudiantes por haber adivinado su número pensado, pasamos a explicarle paso a paso la manera como se obtuvo la respuesta:

1. Llamemos a al número pensado por el estudiante.
2. Multiplique el número por 9 y se obtiene $9a$
3. Al número anterior le sumamos a, y a este resultado le sumamos dos quedando $9a + a = 10a + 2$
4. Quitamos $10a$ que es la primera cifra del resultado anterior y queda 2,al cual le sumamamos doce, es decir: $2 + 12 = 14$
5. Si a 14 le restamos tres obtenemos 11 que es el resultado final $14 - 3 = 11$

El juego anterior lo podemos modificar de diferentes maneras, la clave está en preguntar todos los datos necesarios al estudiante de tal manera que la ecuación de primer grado quede bien planteada. Notemos que siempre llegaremos a una ecuación simple de primer grado como $10a + 2$ a la cual siempre le quitamos la primera cifra $10a$ para eliminar el número desconocido y dejamos el 2 a nuestra disposición para que en el siguiente paso podamos sumarlo, multiplicarlo, elevarlo a una potencia o aplicarle cualquier operación aritmética básica y conocer el resultado correcto de esta última operación.

Ejemplo 3

1. Elija uno de los números 2 ó 3.
2. Multiplique el número que haya escogido por un número impar y el otro número por un número par.

3. Sume los dos resultados y diga el valor de dicha suma.

Inmediatamente el profesor adivinará el número que escogio inicialmente el estudiante. Una explicación de como logró hacerlo es la siguiente:

En caso de que el voluntario escoja el número 2, al multiplicarlo por un número impar el producto resultará ser par. Al multiplicar el número tres por un número par también se convertirá en par y sabemos que al sumar dos numeros pares se obtendra otro número par.

En caso de que haya escogido el 3, al multiplicarlo por un número impar obtiene un resultado impar, lo mismo sucede si escoge el 2, el multiplicarlo por otro número par el resultado es otro par; al sumar un número impar con otro par se obtiene un número impar. Por lo tanto si el voluntario da al profesor un resultado par, significa que había escogido inicialmente el número 2 y si recibe un número impar resulta que había escogido el número 3.

Observemos el siguiente ejercicio de ilustración:

1. Supongamos que se escoge el número 2

2. Multiplico el número elegido 2 por 7 que es un número impar cualquiera, de forma similar multiplico 3 por cuatro es decir: $2 \times 7 = 14$ y $3 \times 4 = 12$

3. Sumo los dos resultados es decir $14 + 12$

Veamos que con la respuesta de la suma el profesor respondera con confianza que el número escogido inicialmente por el estudiante es 2 porque 26 es un número par, si su respuesta hubiera sido un número impar el número escogido por el estudiante habría sido 3.

1.3. MAGIA CON UN CALENDARIO

Una página cualquiera de un calendario no es más que una tabla numérica con números naturales consecutivos. A continuación se mostraran actividades didácticas que se pueden adecuar para cualquier cuadricula numérica, solo basta tener en cuenta que todas las casillas internas del cuadrado o rectángulo seleccionado por el estudiante contienen números ordenados de forma natural y se realizan sobre un calendario preferiblemente de los que aparece un mes por cada página como el siguiente:

Lun.	Mar.	Mie.	Jue.	Vie.	Sab.	Dom.
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Figura 1.1:

1.3.1. Magia en el calendario 1

Para este primer ejercicio vamos a tomar el mes de mayo del año 2013 y se marcará un cuadrado de 4×4. El juego consiste en calcular lo más rápido posible la suma de los días de dicho cuadrado.

Lun.	Mar.	Mie.	Jue.	Vie.	Sab.	Dom.
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Figura 1.2:

Aunque no es indispensable conocer la fecha precisa, si es necesario que todas las casillas internas del cuadrado o rectángulo tomado por el estudiante tenga en su interior números naturales(sin incluir el cero ni casillas vacias), digamos a manera de ejemplo que tomamos un calendario del año 2012 y seleccionamos las casillas de 4×4 para los meses de Noviembre, Octubre, Mayo y debajo escribimos el valor de la suma que deben encontrar el estudiante y maestro:

11-2012

4	5	6	7
11	12	13	14
18	19	20	21
25	26	27	28

256

10-2012

7	8	9	10
14	15	16	17
21	22	23	24
28	29	30	31

304

5-2012

6	7	8	9
13	14	15	16
20	21	22	23
27	28	29	30

288

Figura 1.3:

Podemos observar algunas generalidades en lo que tiene que ver con las casillas de nuestros cuadrados de 4×4:

- La diagonal principal(de izquierda a derecha) aumenta de 8 en 8 desde el número de la primera fila y la primera columna.
- Cada número ubicado en una fila a partir de la segunda es siete unidades mayor que el número correspondiente en la fila anterior.
- Los números de la segunda diagonal (de derecha a izquierda) aumentan de 6 en 6.

Con estas generalidades bastará conocer la posición exacta de un número cualquiera de la casilla de 4×4 escogida por el voluntario.
Con las generalidades anteriores se puede construir una fórmula general que permita calcular más rápidamente la suma de los 16 días:

$$\begin{array}{rrrrcr}
x & +x+1 & +x+2 & +x+3 & = & \text{4x+6} \\
x+7 & +x+8 & +x+9 & +x+10 & = & \text{4x+34} \\
x+14 & +x+15 & +x+16 & +x+17 & = & \text{4x+62} \\
x+21 & +x+22 & +x+23 & +x+24 & = & \text{4x+90} \\
 & & Suma & Total & = & \text{16x+192}
\end{array}$$

La suma S de los 16 días será:$S = (4x+6)+(4x+34)+(4x+62)+(4x+90) = 16x+192$ donde x es el primer día del cuadrado escogido (el número ubicado en la fila 1 y columna 1) como esa diagonal aumenta de 8 en 8 podemos preguntar su fila o columna para hacer la suma o resta necesaria para encontrar el x deseado.

La suma total de las casillas de la figura 1.3 utilizando la fórmula es:

$$16(x+12) \text{ o } 16x+192$$
$$16(4+12) = 64+192 = 256$$
$$16(7+12) = 112+192+304$$
$$16(6+12) = 96+192 = 288$$

Como vemos, esta es una manera sencilla y rápida de obtener el valor total de la suma de los 16 días.
Veamos si el juego *Magia en el Calendario 1* también podemos aplicarlo en casillas de 2×2 y de 3×3.

•Elige un mes y marca un cuadrado de 2×2.

$S_1 = 24$

2	3
9	10

$S_2 = 40$

6	7
13	14

$S_3 = 100$

21	22
28	29

$S_4 = 94$

19	20
27	28

Figura 1.4:

De la misma manera como se obtuvo la fórmula para encontrar la suma de las 16 casillas anteriores, construimos la fórmula para este caso:

$$\begin{array}{rrl} x & +x+1 & = 2x+1 \\ x+7 & +x+8 & = 2x+35 \\ Suma & Total & = 4x+16 \end{array}$$

Entonces la expresión $4x+16$ nos permite encontrar rápidamente la suma de las cuatro casillas; se debe recordar que 4 es la cantidad de casillas y x es el número superior izquierdo. En el caso de los cuatro ejemplos de la figura 1.4, la suma es

$S = 4x+16$
$S_1 = 4(2)+16 = 24$
$S_2 = 4(6)+16 = 40$
$S_3 = 4(21)+16 = 100$
$S_4 = 4(19)+16 = 94$

•Elige un mes y marca un cuadrado de 3×3

5	6	7
12	13	14
19	20	21

$S_1 = 117$

2	3	4
9	10	11
16	17	18

$S_2 = 90$

4	5	6
11	12	13
18	19	20

$S_3 = 108$

Figura 1.5:

Averigüemos cuánto suman:
$S = 9x + 72$
$S_1 = 9(5) + 72 = 117$
$S_2 = 9(2) + 72 = 90$
$S_3 = 9(4) + 72 = 108$

Asi que el juego *magia en el calendario 1* se puede aplicar a cuadrados de $2 \times 2, 3 \times 3$ y máximo de 4×4, para conocer la suma de los 4, 9 o 16 días tomeremos la sucesión:

$$4(x+4)$$
$$9(x+8)$$
$$16(x+12)$$
$$n^2(x+4n)$$

donde x corresponde al día de la primera fila y la primera columna.
El procedimiento anterior será útil en cualquier cuadrado o rectángulo cuyo interior tenga números naturales establecidos en su ordenamiento normal, a manera de ilustración, tomemos el rectángulo 5×4 de la figura 1.6

Lun.	Mar.	Mie.	Jue.	Vie.	Sab.	Dom.
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Figura 1.6:

En este caso la suma de los 20 números también se puede calcular rapidamente utilizando la expresión $20x+250$, donde x es el número de la primera fila y columna del rectángulo escogido; en este caso la suma es:
$S = 20x+250$
$S = 20(6)+250$
$S = 120+250$
$S = 370$
Lo cual es más efectivo que sumar los 20 números del rectángulo: 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31= 370

1.3.2. Magia en el calendario 2

Es el juego anterior pero en la forma inversa. El estudiante da el valor de la suma al profesor o el encargado de hacer la actividad y este a su vez le dice uno a uno los números de la cuadricula de 2×2, 3×3 o 4×4 que haya elegido el estudiante.
Para encontrar la suma de números de las cuadriculas de 2×2, 3×3 o 4×4 tomamos las formulas:

$$S_4 = 4x+16$$
$$S_9 = 9x+72$$
$$S_{16} = 16x+192$$

En este juego sólo se necesita encontrar el valor de la x y como ya se ha afirmado, cada número ubicado en una fila a partir de la segunda es siete unidades mayor que el número correspondiente en la fila anterior, fácilmente podemos decirle un a uno los números que conforman la cuadricula que tomo el estudiante.
Por ejemplo tomemos el siguiente cuadrado cuya suma es 24 es decir $S_4 = 24$

2	3
9	10

$S_4 = 24$

$$S_4 = 4x+16$$
$$24 = 4x+16$$
$$4x = 24-16$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

Encontrado el valor de x utilizando el total de la suma dada por el estudiante, obtenemos los demas números recordando que van en su orden natural.

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

Un **segundo ejemplo** del mismo juego es pedirle al estudiantes que elija un mes y marque un cuadrado de 3×3, que diga la suma S y que sin mirar se nombrarán los 9 números que escogió.
Tomemos el cuadrado $S_2 = 90$

Encontremos la x desconocida

$$\begin{aligned} S_9 &= 9x+72 \\ 90 &= 9x+72 \\ 9x &= 90-72 \\ 9x &= 18 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La casilla con los nueve números que pensó el estudiante son:

x	$x+1$	$x+2$
$x+7$	$x+8$	$x+9$
$x+14$	$x+15$	$x+16$

2	3	4
9	10	11
16	17	18

Ya probamos que la sucesión permite obtener los números de un cuadrado de 2×2, 3×3 y podemos generalizar máximo para 4×4, si la actividad se quiere aplicar en cuadrados 5×5, 6×6 o más grandes, se deberá construir una tabla con mayor cantidad de números que los observados en un calendario particular.

1.3.3. Magia en el calendario 3

Se escoge un cuadrado de 4×4 sin que el profesor lo observe, el estudiante voluntario debe marcar uno de los 16 números y luego tachar todos aquellos que esten en la misma fila y la misma columna de este número, luego debe escoger otro número que no haya sido tachado y repetira el proceso con todo el cuadrado escogido tal y como muestra la siguiente figura, al final le quedaran 4 números marcados y sin tachar los cuales serán sumados por el voluntario para que el profesor “adivine” el valor obtenido.

Lun.	Mar.	Mie.	Jue.	Vie.	Sab.	Dom.
		1	2	3	4	5
6	~~7~~	~~8~~	9	~~10~~	11	12
13	~~14~~	15	~~16~~	~~17~~	18	19
20	~~21~~	~~22~~	~~23~~	24	25	26
27	28	~~29~~	~~30~~	~~31~~		

Figura 1.7:

Observemos un ejemplo del procedimiento descrito anteriormente

Suma= $2 + 11 + 17 + 26 = 56$

2	~~3~~	~~4~~	~~5~~
~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
~~16~~	17	~~18~~	~~19~~
~~23~~	~~24~~	~~25~~	26

Figura 1.8:

Para encontrar los valores debemos observar el primer número de ese cuadrado “x” (superior izquierdo).

La suma de los elegidos (4 en este caso) sera $4x + 48$. Observemos lo que pasa con el cuadrado anterior:

El x en este caso es 2 (primer número del cuadrado). Reemplazamos en $4x + 48$

$$4(2) + 48 = 56$$

Como 56 es el resultado de la suma de los cuatro números sin tachar podemos afirmar que la fórmula $4x+48$ funciona para un cuadrado de 4×4 en el calendario. Para cuadrados 2×2, la fórmula es $2x + 8$. A manera de ilustración, tomemos el siguiente ejemplo:

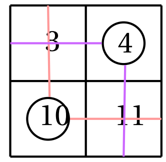


Figura 1.9:

Los números escogidos son 10, 4 es decir $10+4=14$, como vemos $x=3$ entoces reemplazamos en la formula dada y tenemos:

$$2(x)+8$$
$$2(3)+8=6+8=14$$

CAPÍTULO 2

GEOMETRÍA

Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo.
Galileo Galilei (1564-1642)

La construcción de cuadrados y estrellas mágicas es un pasatiempo antiquísimo que se remonta a la antigua China. Los chinos fueron los primeros conocedores de los cuadrados mágicos y quienes más trabajaron en las leyes que deben cumplir y en la forma de construirlos.

Las estrellas y cuadrados mágicos también son recursos muy útiles a la hora de ejercitar el cálculo numérico y mental de las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación y división con números enteros y fraccionarios, además de estimular el proceso combinatorio y algebraico.

Los siguientes ejercicios sirven de modelos que pueden ser tenidos en cuenta como una motivación a la hora de orientar una clase de matemáticas donde se esten trabajando operaciones básicas. El tema invita a ejercitar la observación y el cálculo mental, cualidades que tienen un valor formativo muy elevado en el campo del saber.

Estos ejemplos son importantes porque contribuyen a desarrollar los siguientes conceptos y habilidades:

- Practicar las operaciones aritméticas básicas.
- Establecer relaciones numéricas.
- Determinar y crear modelos.
- Generalizar y buscar estrategias.
- Desarrollar estrategias para la resolución de problemas.

- Desarrollar la capacidad de comprender, aplicar y utilizar razonamientos, sacar conclusiones y hacer generalizaciones, asi como explicar y argumentar a favor de las propias ideas tanto oralmente como por escrito.

2.1. Los Cuadrados Mágicos

¿Que es un cuadrado mágico?

Un cuadrado es mágico cuando se disponen una serie de números en un cuadrado de 3×3 , de 4×4 o en general,de $n \times n$, de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales es la misma, a este número se le denomina constante mágica.

El siguiente cuadrado mágico es de los más famosos y uno de los más antiguos que se conocen; es de 3×3 y tiene como constante mágica o número mágico $k = 15$.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Se dice que la constante mágica es 15 porque, como puede observarse, la suma de los números que componen las filas, las columnas y las diaganales es 15:

Filas: $6 + 1 + 8 = 7 + 5 + 3 = 2 + 9 + 4 = 15$
Diagonales: $6 + 5 + 4 = 8 + 5 + 2 = 15$
Columnas: $6 + 7 + 2 = 1 + 5 + 9 = 8 + 3 + 4 = 15$

La cantidad de números a colocar en el cuadrado mágico dependerá del número de filas y columnas:

- Si el cuadrado es de 3×3 entonces tendra 9 casillas y los números que se acomodan en el son todos los números del 1 al 9. Como se ve en el ejemplo anterior.

- Si el cuadrado es de de 4×4 entonces tendrá 16 casillas y los números que se acomodan en el son del 1 al 16.

- En general si el el cuadrado es de $n \times n$ entonces tendra n^2 casillas.

2.2. ¿Cuál es el origen de los cuadrados mágicos?

La construcción de cuadrados mágicos es muy antigua. Según vestigios encontrados fueron construidos por los chinos y los hindúes hacia el siglo XII a.C.

Según cuenta la leyenda, el primer cuadrado mágico fue revelado al emperador Yu a través de una tortuga divina, que lo llevaba grabado en su caparazón, y apareciÓ en el río Luo.

El apelativo de mágicos no es trivial ni reciente sino que desde su origen han tenido un significado cabalístico pues estos cuadrados fueron utlizados como amuletos para buenos o malos encantamientos y fueron asociándos con la religión, la astrología, la alquimia y pretendían encontrar en ellos la clave para entender las relaciones entre los astros y también entre los metales entonces conocidos.

La siguiente figura muestra el famoso cuadrado 4×4 del pintor alemán Alberto Durero, que esta incorporado al gravado Melancolía y que tiene algunas particularidades interesantes: Se trata de un cuadrado de 4×4 y su constante mágica es 34, los cuatro casilleros centrales, sumados dan 34, la fecha de ese grabado es 1514, coincidiendo con las dos casillas centrales de la fila inferior.

Figura 2.1:

Otro cuadrado mágico conocido figura en la fachada de la iglesia de La Sagrada Familia en Barcelona (España), que tiene la particularidad de que su número mágico es 33 y reponde a la edad de la muerte de Cristo.

La constante que se obtiene al sumar las 4 filas, las 4 columnas y las 2 diagonales de este cuadrado es 33,un número que según la tradición cristiana corresponde a la edad que tenía Cristo cuando murió crucificado. Pero también los cuatro números en los vértices del cuadrado suman 33, o igualmente los cuatro números centrales; y lo mismo ocurre en un total de 310 de las posibles combinaciones de 4 números tomados de entre esos 16.

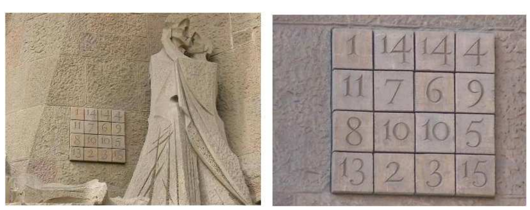


Figura 2.2:

El escultor Josep María Subirachs (1927), en 1987 recibió el encargo de proseguir el recubrimiento escultórico de la Fachada de la Pasión en el templo inacabado de La Sagrada Familia, modificó el cuadrado mágico de Durero, restando una unidad en cuatro casillas, una de cada fila y de cada columna. De ese modo consiguió su nuevo cuadrado *casi mágico* de suma 33. Decimos que es casi mágico porque incumple dos normas de los cuadrados mágicos puros: no debe haber números repetidos (en él lo están el 10 y el 14) y los números deben formar una serie de consecutivos (en él faltan el 12 y el 16). Figura esculpido en la Fachada de la Pasión del inconcluso templo barcelonés, pero también en detalles menores del interior, hasta sumar 33 apariciones.

Algunos métodos para construir cuadrados mágicos

No hay métodos generales ni sencillos para construir cuadrados mágicos, sobre todo para los de orden par. Pero hay varios procedimientos para construir cuadrados mágicos de orden impar.

Uno de los procedimientos interesantes que se le atribuye al matemático francés Claude Gaspard Bached, del siglo XVII, que también funciona para cuadrados mágicos impares, es decir, cuadrados del tipo $3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7$, etc.

Consiste en colocar los números de forma ascendente, disponiéndolos en filas oblicuas (como se ve en la figura). Luego los números que quedan fuera del cuadrado central (en las lineas punteadas), los escribimos dentro de él, de forma que pasen a los lados opuestos del cuadrado (pero permaneciendo en las mismas columnas o filas que estaban) ejemplificamos el procedimiento para un cuadrado mágico de 3×3.

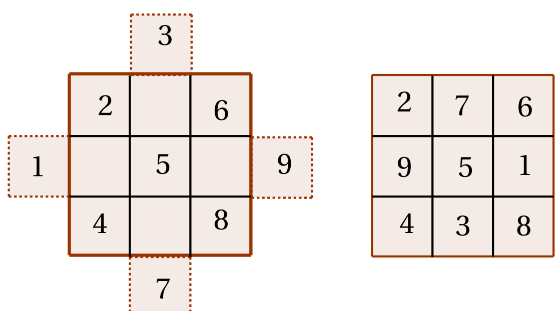
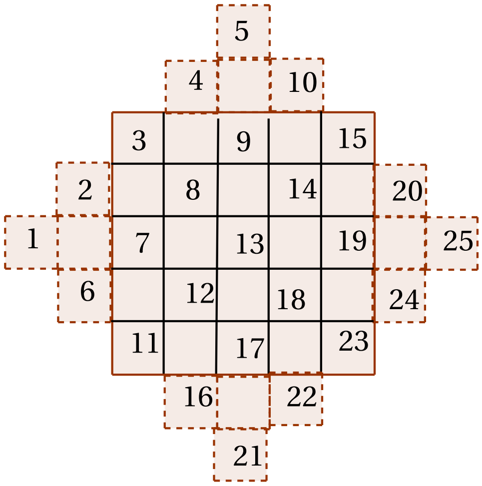


Figura 2.3:

En la siguiente figura vamos a detallar paso a paso la construcción de un cuadrado mágico de 5×5 como un segundo ejemplo del método de Bachet.



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Figura 2.4:

El procedimiento es el siguiente:

1. Primero se amplia el cuadrado 5 × 5, colocando cuatro casillas ordenadas de forma triangular por cada uno de sus lados.
2. Después se inicia numerando las diagonales paralelas, la que va del extremo izquierdo al extremo superior en la forma que indica la figura(numeradas del 1 al 5 y del 21 al 25 la diagonal paralela),
3. Luego aumentan de 5 en 5 las diagonales paralelas restantes (numeradas del 1 al 21 y del 5 al 25 la diagonal paralela).
4. Los tres números que quedan fuera del cuadrado inicial por cada lado, se introducen sin alterar su orden, por el lado opuesto.

2.2.1. Actividades con cuadrados mágicos

Es un buen ejercicio pedirle a los estudiantes que encuentren constantes mágicas que, construyan su propio cuadrado mágico, que completen casillas y que encuentren relaciones entre ellos, a continuación se muestran algunos ejemplos que pueden ser modificados aumentando el tamaño del cuadrado, utilizando números naturales, enteros de acuerdo a la necesidad y edad de los estudiantes:

1. Compruebe si los siguientes cuadrados son mágicos y en caso de que lo sean, buscar su constante o número mágico:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
7	5	3
2	9	4

Figura 2.5:

Los dos primeros cuadrados anteriores son mágicos y su constante k es igual a, $k = 15$. Esto se verifican de la misma manera como el ejemplo inicial; el tercero no lo es porque la suma de algunos de sus lados y las diagonales no es la misma, por ejemplo en la primera fila $8 + 1 + 6 = 15$, mientras que en la primera columna $8 + 7 + 2 = 17$.

2. Encuentra la constante mágica para los siguientes cuadrados y completa los casilleros en blanco teniendo en cuenta que los dos primeros cuadrados utiliza los números del 1 al 9 y los dos siguientes utiliza los números -2, -2, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, ordenalos de forma apropiada en cada cuadrado.

	5	
4		2

	5	
4		8

		2
4	1	
0		3

3		5
4	2	
		1

Figura 2.6:

Los resultados correctos son:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

-1	2	2
4	1	-2
0	0	3

3	-2	5
4	2	0
-1	6	1

Figura 2.7:

3. Completa los casilleros que faltan para que resulten mágicos los siguientes cuadrados, encuentra también el número mágico:

7			14
	13	8	
	3		5
9		15	4

1			4
	6	7	
	10		5
13		2	16

11	24	7		3
	12		8	
17		13		9
10	18	1	14	
23	6	19		15

Figura 2.8:

En los cuadrados de 4×4 la constante $k = 34$ y para el cuadrado 5×5 es 65, lo esperable es que los estudiantes logren:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

1	14	15	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figura 2.9:

2.3. Distintos polígonos y estrellas mágicas

A continuación veremos distintos polígonos y estrellas en los que se combinan números que cumplen determinados requisitos. En el caso de las estrellas en particular, éstos números estarán situados en cada vértice del polígono y los números que deben sumar lo mismo, son aquellos ubicados de forma lineal de extremo a extremo.

Las estrellas mágicas representan una forma más moderna de combinatorias y no se conoce mucho sobre ellas. Las estrellas mágicas vienen en muchos tamaños y formatos, y por lo general tienen más de una solución. Algunos matemáticos se han interesado en tratar de determinar cuántas soluciones existen para cada tipo de estrella mágica y cómo se relacionan estas soluciones. Martin Gardner se ocupa de una parte de este análisis en su libro, "Mathematical Carnival”.

Se puede introducir la geometría en la construcción de los triángulos que se utilizan al crear la estrella o al ver la estrella mágica de n puntas como un polígono irregular en el cual se disponen en cada uno de los vértices e intersecciones números naturales o enteros, de tal modo que los números situados en cada línea del polígono sumen lo mismo (constante mágica).

La estrella mágica más pequeña es la de 6 puntas llamada hexagrama mágico, y puede verse en la siguiente ilustración. Su número mágico es 26.

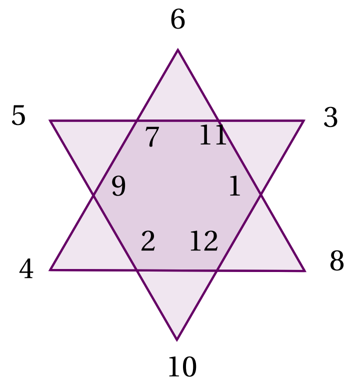


Figura 2.10:

Es de notar que para valores específicos de n, la estrella mágica de n puntas recibe diferentes nombres, si $n = 6$ se llama hexagrama, si $n = 7$ se llama heptagrama mágico y así sucesivamente.

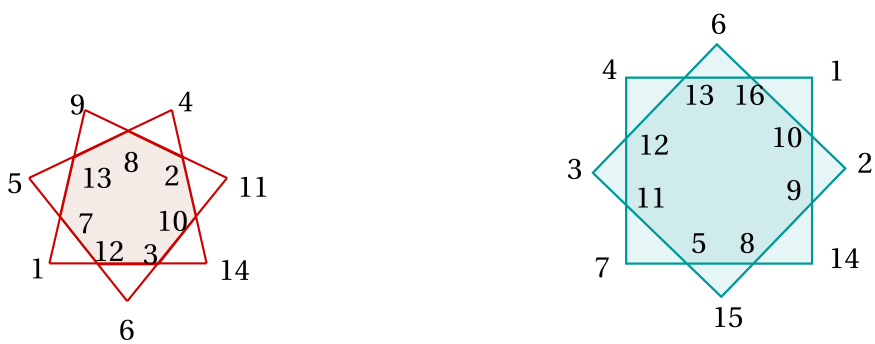


Figura 2.11:

Utilizando distintas figuras geométricas con colores y formas llamativas, se puede lograr una buena motivación en la clase de matemáticas con ejercicios sobre estrellas mágicas como los que se presentan a continuación, es importante dejar un tiempo prudente para que el estudiante descubra la respuesta y el maestro como es de esperarse debe tener en su mente una posible solución:

2.3.1. Actividades con estrellas mágicas

- Comprueba si las siguientes estrellas son mágicas; en caso de que lo sean busca su constante o número mágico:

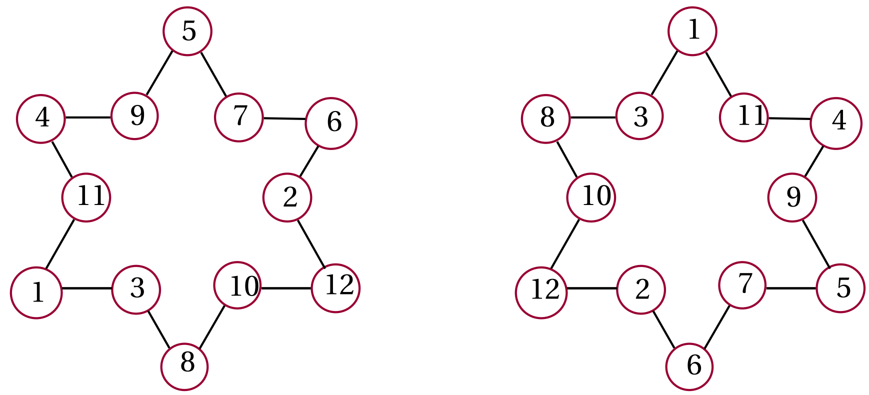


Figura 2.12:

Si observamos las dos estrellas anteriores son la misma, la única variacion es la forma como se ordenaron los números, por lo tanto tienen constante 26 y cumplen la propiedad de ser mágicas porque la suma de todos sus lados es igual.

- Completa los círculos en blanco con los números del 1 al 12 para formar estrellas mágicas. Calcula en todos los casos la constante mágica.

Figura 2.13:

Solución: Este ejercicio es similar al anterior pero se aumenta el grado de dificultad pidiendo a los estudiantes que busquen el número del círculo en blanco tal que la suma de todas las diagonales sea la misma constante 26:

Figura 2.14:

2.3.2. Actividades con triángulos mágicos

Tomando solamente una punta de las estrellas podemos construir triángulos mágicos. La composición de triángulos mágicos constituye un entretenimiento matemático que consiste en distribuir algunos números en los círculos, cuadrados o cualquier forma geométrica en blanco que están dibujados sobre los lados de un triángulo, de manera que en cada lado, la suma sea la misma.

Ejemplos

- Con los cuadrados del triángulo que sigue coloca los números del 1 al 6, de manera tal que la suma de cada lado del triángulo sea 12.

a) b)

Figura 2.15:

Una solución se muestra en la figura 2.15, b).

- En los cuadrados del triángulo que sigue coloca los números del 1 al 9 de manera tal que la suma de cada lado del triangulo sea 20.

Figura 2.16:

Una solución se muestra en la figura 2.16, b).

- En los cuadrados del triángulo que sigue coloca los números del 1 al 9 de forma que la suma de cada lado del triángulo sea 17.

Figura 2.17:

Una solución se muestra en la figura 2.17, b).

2.3.3. Actividades con polígonos mágicos

De la misma forma se puede continuar cambiando el valor de la suma de cada lado del triángulo y también se puede aplicar la creatividad utilizando distintas operaciones y figuras geométricas que sean en lo posible llamativas a la vista de los estudiantes, por ejemplo:

1. En el siguiente cuadrado colocar los números del 1 al 9, exepto uno tal que la suma mágica sea 15.

a) b)

Figura 2.18:

Una solución se muestra en la figura 2.18, b).

2. En los cuadrados de la Y que sigue coloca los números del 1 al 7 de manera tal que dos números consecutivos no estén juntos ni diagonal ni verticalmente.

a) b)

Figura 2.19:

Una solución se muestra en la figura 2.19, b).

3. En el diagrama siguiente coloca los números del 1 al 8, de forma tal que los colocados en los cuadrados sean las restas de los que figuran en los círculos en sus proximidades, tanto horizontal como verticalmente.

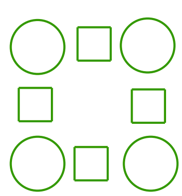


Figura 2.20:

La diferencia entre esos números a que se hace referencia es en valor absoluto, ya que no interesa el orden de los números involucrados; también se puede intentar este esquema con otras operaciones. La forma de solucionarlo es combinando al azar los números propuestos en distintas posiciones de esta manera:

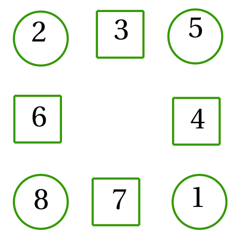


Figura 2.21:

4. Los cuadrados de la llanta están ocupados por números que van del 1 al 9, de tal manera que cada línea de tres números (horizontal, vertical u oblicua) sume 15. Encuentra esos números:

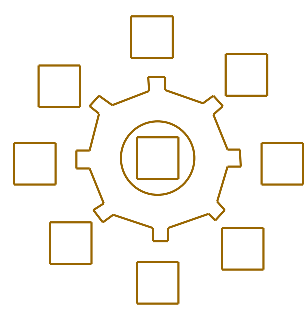


Figura 2.22:

Para resolver éste problema es válido aprovechar la propiedad de que la suma de los extremos de una sucesión ordenada de números da lo mismo, por ejemplo, en la sucesión 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, las sumas 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 10. Note que el número 5 se coloca solo en el centro de la llanta, por lo tanto la solución es:

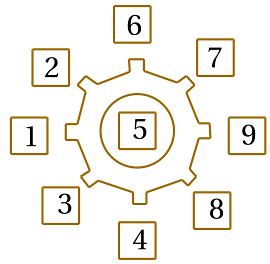


Figura 2.23:

5. Los cuadrados que forman los escalones están ocupados por números del 1 al 8, de tal manera que la diferencia en valor absoluto (independiente del signo) de dos números vecinos sea mayor o igual a 4.

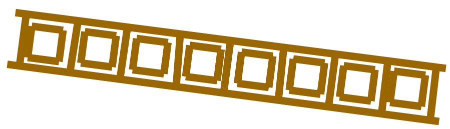


Figura 2.24:

Si tomamos los números consecutivos del 1 al 8 facilmente se pueden tomar dos parejas, por ejemplo 5,1 y 8,4 de tal manera que sus diferencias dan la condición solicitada que sea mayor o igual que cuatro: $5-1=4$ y $8-4=4$; por esa razón deben estar en los extremos, luego se colocan los otros cuatro números alternando uno grande al lado de uno chico; por lo tanto,una solución es:

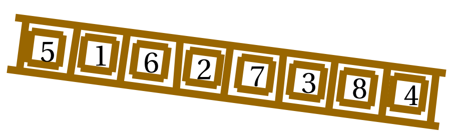


Figura 2.25:

6. En cada escalón hay tres cuadrados en los que se sitúan tres números que van del 1 al 9 y que están ubicados de tal manera que en cada línea de tres de ellos, horizontal y verticalmente sumen 13.

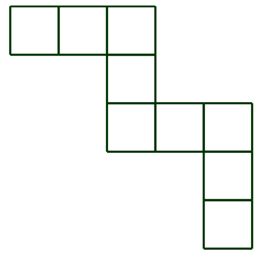


Figura 2.26:

Este juego es tal vez, más difícil que los anteriores y ejecuta la habilidad de combinar números con una suma fija en la sucesión de ellos, por lo que una solución es:

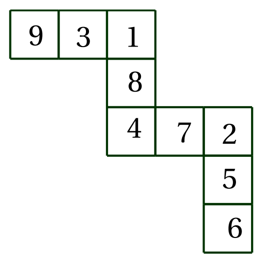


Figura 2.27:

CAPÍTULO 3

JUGANDO CON NÚMEROS

Para aquellos que no conocen las matemáticas, es difícil sentir la belleza, la profunda belleza de la naturaleza... Si quieres aprender sobre la naturaleza, apreciar la naturaleza, es necesario aprender el lenguaje en el que habla.
Richard Phillips Feynman

La teoría de números es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades y los problemas que surgen de los números enteros; más en general, estudia las propiedades de los elementos de dominios enteros. A continuación presentaremos algunos ejemplos sencillos y llamativos que podrían ser comprendidos por no matemáticos:

3.1. Hallar el número que falta

Muchas veces en las pruebas de inteligencia o que miden el cociente intelectual IQ(por sus iniciales en ingles: Intelligent Quotient) se presentan problemas del siguiente tipo y que por supuesto se pueden realizar con estudiantes de educación básica:

Dada una tabla de números en la que hace falta un número se trata de descubrir el patrón con el que se ha formado la tabla y poder escribir el número que falta. A manera de ilustración, consideremos la siguiente tabla de números:

54	117	36
72	154	28
39	513	42
18	$\boxed{?}$	71

No sólo se trata de decir que número debe ir en el lugar del recuadro, sino también de medir la capacidad de análisis de los estudiantes, debido a que hay un patrón que deben descubrir sobre cómo se generan esos números.

Si observamos los números que hay en la primera fila son: 54, 117 y 36. El 117 puede ser obtenido así: el 11, sumando 5+6 y el 7 sumando 4 + 3.
Los números de la segunda fila son: 72, 154 y 28. El 154 puede ser obtenido así: el 15, sumando 7+8 y el 4 sumando 2+2.
El patrón entonces es el siguiente: los número de la columna intermedia, se obtienen por asociación de las sumas de los dos exteriores y los dos interiores.

Por último con este patrón, dados los números 18 y 17, los dos exteriores suman 1 + 1 = 2 y los dos interiores 8 + 7 = 15 por lo tanto el número que falta es el 215.

3.2. Problema de los cuatro cuatros

El problema de los cuatro cuatros lo encontramos en el libro .El Hombre que Calculaba"(de Malba Tahan). El origen del problema se da en una conversación entre Beremis (El hombre que calculaba) y su acompañante, al ver una tienda en la que todo se vendía a cuatro dinares. De ahí que Beremis recuerde que es una interesante coincidencia que le hace recordar un hermoso problema.

El problema consiste, según el enunciado, en encontrar expresiones matemáticas para representar cualquier número natural, usando para ello tan sólo cuatro cuatros y algunas operaciones básicas como la suma, la resta, la multiplicación, raices, aunque en algunos casos utilizamos factoriales; a continuación daremos algunos ejemplos:

$0 = (4+4)-(4+4)$

$1 = \dfrac{4+4}{4+4}$

$2 = \dfrac{4}{4}+\dfrac{4}{4}$

$3 = \dfrac{4+4+4}{4}$

$4 = 4+ \dfrac{4-4}{4}$

$5 = \dfrac{4}{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$

$6 = 4+ \dfrac{4+4}{4}$

$7 = 4 + 4 - \dfrac{4}{4}$

$8 = 4 + 4 + 4 - 4$

$9 = 4 + 4 + \dfrac{4}{4}$

$10 = (4- \sqrt{4} \times 4) + \sqrt{4}$

$11 = \dfrac{44}{(\sqrt{4} \times \sqrt{4})}$

$12 = (4- \sqrt{4}) \times (4 + \sqrt{4})$

$13 = \dfrac{44}{4} + \sqrt{4}$

$14 = 4\times 4 - \dfrac{4}{\sqrt{4}}$

$15 = 4\times 4 - \dfrac{4}{4}$

$16 = 4\times 4 + 4 - 4$

$17 = 4\times 4 + \dfrac{4}{4}$

$18 = 4\times 4 + \dfrac{4}{\sqrt{4}}$

$19 = 4! - \sqrt{4} - \sqrt{4} - \sqrt{4}$

$20 = 4\times(4+4/4)$

$21 = 4! - 4 + \dfrac{4}{4}$

$22 = 4! - \dfrac{(4+4)}{4}$

$23 = 4! - \dfrac{\sqrt{4\times 4}}{4}$

$24 = 4! + \dfrac{(4-4)}{4}$

$25 = 4! + \dfrac{(4\times 4)}{4}$

$26 = 4! + \dfrac{(4+4)}{4}$

$27 = 4! + 4 - \dfrac{4}{4}$

$28 = 44 - 4\times 4$

$29 = 4! + 4 + \dfrac{4}{4}$

$30 = 4! + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$

$31 = \dfrac{4!}{\sqrt{4+4}\times 4}$

$32 = (4+4) \times (\sqrt{4} + \sqrt{4})$

$33 = 4! + \dfrac{(4-4)}{4}$

$34 = 4! + 4 + 4 + \sqrt{4}$

$35 = \dfrac{4!+4}{4\times\sqrt{4}}$

$36 = 44 - 4 - 4$

$37 = \dfrac{4!+,4}{4-4!}$

$38 = 44 - 4 - \sqrt{4}$

$39 = 44 - \dfrac{\sqrt{4}}{4}$

$40 = 44 - \sqrt{4\times 4}$

En la educación básica se usa la siguiente definición de sucesión: una sucesión es un conjunto de números reales de modo que se puedan enumerar: primero, segundo, tercero, etc. A continuación mostraremos algunas sucesiones curiosas con las cuales el estudiante podrá sacar conclusiones importantes .

3.3. La conjetura de Collatz

La Conjetura de Collatz, conocida también como conjetura $3x+1$ o conjetura de Ulam (entre otros nombres), fue enunciada por el matemático Lothar Collatz en 1937, y a la fecha no ha sido resuelta. Su enunciado es el siguiente:
Dado cualquier número natural mayor que cero se forma una sucesión de la siguiente manera: el primer término es el número escogido. A partir del segundo término, cada número de la sucesión se obtiene a partir del anterior siguiendo las siguientes reglas:

- Si el número es par, se divide entre 2.
- Si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1.

A los estudiantes les podemos plantear el ejercicio de la siguiente manera: vamos a construir una sucesión de numeros naturales(enteros positivos); la regla es la siguiente: empezamos con un número natural cualquiera, a manera de ejemplo, digamos 7, éste es el primer término de nuestra sucesión.
Para generar el segundo elemento hacemos lo siguiente: como 7 es impar, debemos multiplicarlo por 3 y sumarle 1, con lo cual se obtiene $3\times 7+1 = 22$.
Tenemos entonces los primeros dos elementos de nuestra sucesion:7 y 22. Para generar el tercer elemento de la sucesión, como 22 es un número par, lo dividimos en 2 y obtenemos 11; tenemos tres terminos 7, 22, 11. Ahora como 11 es impar, el número siguiente es $3\times 11+1 = 34$. Continuando de esta manera se obtiene la sucesión de números:

$$\{7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

La sucesión termina en el número 1 pues de lo contrario se obtienen números que ya están en la sucesión como puede verse a continuación:

$3 \times 1 + 1 = 4$
$4 \div 2 = 2$
$2 \div 2 = 1.$
Elijamos ahora número par como primer término de nuestra sucesión; digamos 24, la sucesión que se obtiene es:

$$\{24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

Si hubíesemos escogido el 100, tendriamos la sucesión:

$$\{100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1\}$$

Como puede verse, todas las sucesiones terminan en el número 1, independiente de si el número escogido es par o impar.
Los estudiantes ya debieron observar que al construir la sucesión cuando llegamos al número 1 detenemos el proceso porque si continuan, entraria en un lazo o círculo, ya que del 1 pasaría al 4, del 4 al 2 y del 2 otra vez al 1 como ya se comprobó.

Lo curioso de la conjetura de Collatz es este hecho: en todos los ejemplos conocidos hasta la fecha, la sucesión mostrada siempre termina en el número 1. Pero no se tiene ninguna demostración que pruebe que el resultado es válido para cualquier número con el que comencemos la sucesión.

3.4. La sucesión de Fibonacci

Uno de los matemáticos más grandes de la edad media fue Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido como Fibonacci, que significa hijo de Bonaccio. A pesar de haber nacido en Pisa (Italia), como sus padres eran empleado en una fabrica mercantil italiana asenatada en Bougie, en Argelia, fue allá donde el joven Leonardo recibió su primera formación matemática a cargo de maestros musulmanes.

Leonardo quien es conocido por sus grandes aportes a la matemática, este es hoy conocido gracias de un matemático francés del siglo pasado, Eduard Lucas quien interesado por la teoría de números, estudio las llamadas sucesiones generalizadas de Fibonacci, que comienzan por dos enteros positivos cualesquiera y a partir de ahí, cada numero de la sucesión es la suma de los dos precedentes. Lucas dio el nombre de sucesión de Fibonacci a la más sencilla de estas sucesiones a saber, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...(La sucesión 1, 3, 4, 7, 11, 18... es hoy conocida como sucesión de Lucas).

Hay una variedad de resultados respecto a la sucesión de Fibonacci, pero en esta ocasión destacaremos sólo dos que seguramente son las más notables y que son validas también para las series generalizadas.

1. La razón entre cada par de números consecutivos oscila por encima y por debajo de la ***razón áurea***, que conforme se va avanzando en la sucesión, la diferencia con

ella va haciéndose cada vez menor; las razones de términos consecutivos tienen por limite, en el infinito, la razón áurea.

Si dividimos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor obtendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1} &= 1\\
\frac{2}{1} &= 2\\
\frac{3}{2} &= 1,5\\
\frac{5}{3} &= 1,66\\
\frac{8}{5} &= 1,66\\
\frac{13}{8} &= 1,625\\
\frac{21}{13} &= 1,615384\\
\frac{34}{21} &= 1,619047\\
\frac{55}{34} &= 1,6176471\\
\frac{89}{55} &= 1,61818181..
\end{aligned}$$

Al tomar más términos de la sucesión y calcular su cociente nos acercaremos al número de oro. Cuanto más grandes son los términos, los cocientes se acercan más al número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618$. Lo anterior expresado en lenguaje matemático es: si f_n es el n-ésimo número de Fibonacci y f_{n-1} es el anterior entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{f_{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}\\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{t_{n-2}}}\\
&= 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}
\end{aligned}$$

$$= \quad 1+\frac{1}{L}$$

Si llamamos $L = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}, L \in R$ entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
L &= 1+\frac{1}{L} = \frac{L+1}{L} \\
L^2 &= L+1 \\
L^2-L-1 &= 0 \\
L &= \frac{1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-1)}}{2} \\
L &= \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Tomamos la solución positiva de la ecuación de segundo grado, pues $f_n \geq 1 \forall n \in N$ con lo cual demostramos que $L = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, es decir, que el límite de una sucesión tal que cada término sea la suma de los dos anteriores es el número de oro.

La razón áurea, divina proporción, el número de oro, sección áurea, son los nombres dados al famoso número irracionalφ de valor aproximado $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$; aquí la letra griega φ se usa en honor al gran escultor Fidias (498-432 a.c), cuyo nombre griego comienza naturalmente con la letra φ. Fidias utilizo sistemáticamente la divina proporción en sus bellas y armoniosas esculturas.

Figura 3.1: Templo Partenón

Según los clásicos, los rectángulos más perfectos (armoniosos ó proporcionados) son aquellos cuyos lados guardan esta proporción. El Partenón, es uno de los principales templos que se conservan construído entre los años 447 y 432 a.C, estaba diseñado guardando la proporción áurea.
Si $\frac{z}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, observemos que se cumple la proporción $\frac{z}{y} = \frac{y}{z-y}$

$$\begin{aligned}\frac{y}{z-y} &= \frac{1}{\frac{z}{y}-1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1}\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Si un rectángulo cuyos lados z, y, guardan la divina proporción, le quitamos un cuadrado de lado y $(z > y)$, el rectángulo que resulta es también de oro.

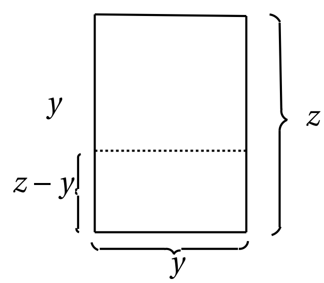


Figura 3.2:

Utilizando esta característica de la sucesión de Fibonacci desarrollaremos la siguiente actividad:

a) Escoger dos números naturales cualesquiera.

b) Suma estos dos números para obtener un tercer número

c) Suma el segundo número con el valor obtenido en 2 para conseguir el cuarto número.

d) Suma el tercer y cuarto número para tener el quinto.

e) Reitera el proceso hasta obtener 20 números

f) Dividir el último número entre el penúltimo.

g) El profesor dará el resultado de la división aproximandolo a las centésimas

El estudiante voluntario está construyendo una sucesión generalizada de Fibonacci al calcular los pasos que se le dan, luego de hacer varias veces el juego podemos pasar a explicarle como se construye la sucesión de Fibonacci y algunas características especiales de esta sucesión, en el caso del juego anterior podemos observar que si se divide cada término de esta sucesión entre su anterior, el resultado será el numero aureo $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Así el resultado obtenido por el voluntario redondeado a las centésimas será 1,62.

2. Si sumamos los cuatro primeros términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci y añadimos 1 da como resultado el sexto (1+1+2+3)+1)= 8 y si sumamos los cinco primeros términos y aumentamos 1 da como resultado el séptimo (1+1+2+3+5)+1)= 13. Lo anterior se puede resumir diciendo: si se suman n términos consecutivos, partiendo del $k - \acute{e}simo$ y luego suma 1, da como resultado el término $(k+n+1)$-ésimo.

Si tomamos, a manera de ejemplo, dos números de Fibonacci $f_4 = 3$ y $f_5 = 5$, elevando al cuadrado y sumando $3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ que es el noveno término de la sucesión; tomando $f_6 = 8$y $f_7 = 13$,elevando al cuadrado y sumando$8^2 + 13^2 = 64 + 169 = 233$ que es el décimo tercer término de la sucesión. Ahora bien si elevamos al cuadrado los cinco primeros términos y los sumamos el resultado es el producto del quinto y el sexto termino:$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 104 = 8 \times 13$

Una actividad que puede utilizar el docente para motivar a los estudiantes a trabajar con los números de la sucesión de Fibonacci es la siguiente:

El profesor escribirá en el tablero la siguiente tabla que contiene los términos de la sucesión de Fibonacci y sus respectivos cuadrados, la cantidad total de términos la dará el estudiante ganará quien primero de el resultado de la suma de los cuadrados:

f_n	f_n^2
1	1
1	1
2	4
3	9
5	25
8	64
13	169
Total	?

Siempre ganará el profesor porque él sabe que la lista conforma la sucesión de Fibonacci la cual cumple la siguiente propiedad en este juego:

$$\sum_{i=1}^{n} f_n^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Por lo tanto lo único que hace el maestro es multiplicar el último término escrito en la primera columna(f_n) por el que debería aparecer a continuación, será mucho más rápido multiplicar estos dos números que sumar todos los cuadrados y esta estrategia ganadora la descubrirá el estudiante con la ayuda de su profesor.

Por ejemplo en el cuadro anterior tenemos que la suma de los números que están en la casilla cuadrados es 273 y lo obtenemos rápidamente observando los dos últimos números de la otra casilla 8 y 13, sumamos estos dos y obtenemos 21 que es el número que continuaría si siguiéramos la sucesión; ahora lo único que hacemos es multiplicar $13 \times 21 = 273$ para conocer más rápidamente el valor de la suma de los siete números que aparecen en la casilla cuadrados.

3.5. Números Figurados

Los números figurados son aquellos números ordenados por puntos equidistantes formando una figura geométrica. Si la representación es un polígono regular se denominan números poligonales; es el caso de los números triangulares, cuadrados pentagonales o hexagonales.

Los números figurados fueron objeto de estudio por Pitágoras y los Pitagóricos, quienes consideraban sagrado el 10 escrito en forma triangular, y al que llamaban Tetraktys.

3.5.1. Números Triangulares

Un número triangular es aquel que puede recomponerse en la forma de un triángulo equilátero (por convención, el primer número triangular es el 1) y su formula general es $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

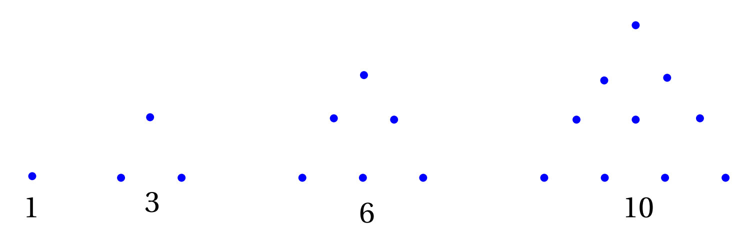


Figura 3.3:

3.5.2. Números Cuadrados

Los números cuadrados perfectos son aquéllos a los que se les puede sacar la raíz cuadrada exacta, por ejemplo 36 es un cuadrado perfecto, pues $\sqrt{36} = 6$, igualmente 121 pues $\sqrt{121} = 11, etc.$Los primeros siete cuadrados perfectos son 1, 4, 9, 16, 25, 36, y la fórmula general para obtener cuadrados perfectos es $C_n = n^2$,donde $n \in N$

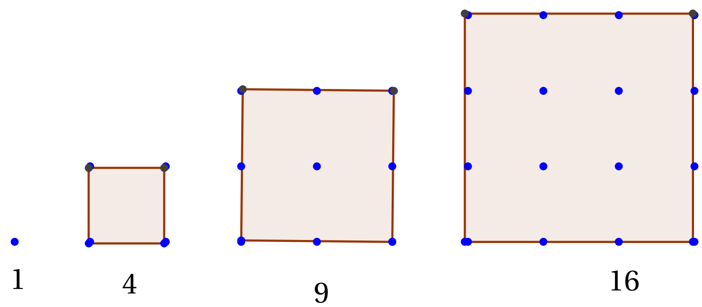


Figura 3.4:

3.5.3. Números Pentagonales

Pentagonal es un número figurado que extiende el concepto de número triangular y cuadrado al pentágono, pero a diferencia de los dos primeros, los patrones utilizados en la construcción de los números pentagonales no son simétricamente rotacionales, su fórmula general es $P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

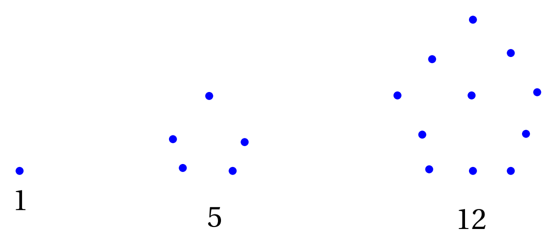


Figura 3.5:

El n-ésimo número pentagonal P_n es el número de distintos puntos en el contorno de pentágonos regulares cuyos lados contienen de 1 a n puntos, superpuestos, de forma que tienen en común el vértice.

3.5.4. Números hexagonales

Un número hexagonal es un número poligonal que se puede representar en forma de hexágono;los primeros números hexagonales son: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325,... y los podemos calcular con la formula:$H_n = \dfrac{2n(2n-1)}{2}$

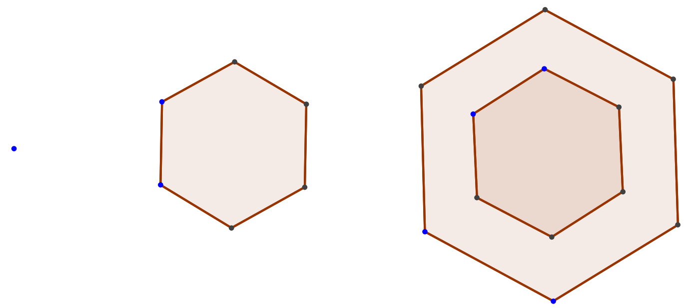


Figura 3.6:

De forma sucesiva se crearon los números heptagonales, octagonales y otros números poligonales que pueden recomponerse en un polígono regular.

Si l es el número de lados de un polígono, entonces la fórmula para el n-ésimo número poligonal de l lados es $P_n = \dfrac{n\left[(l-2)n-(l-4)\right]}{2}$

CAPÍTULO 4

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.
René Descartes (1596-1650)

- ¿En qué se basa el orden en que se han dispuesto estos diez dígitos?
  0 - 5 - 4 - 2 - 9 - 8 - 6 - 7 - 3 - 1

  Respuesta: Los dígitos están dispuestos de tal manera que sus nombres quedan en orden alfabético (orden lexicográfico) .

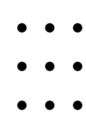
- Si hay doce estampillas de un centavo en una docena, ¿cuántas estampillas de dos centavos habrá en una docena?
  Respuesta:12 estampillas

- ¿Puedes elegir seis dígitos de los que se muestran a continuación que sumados den 21?

  9 9 9
  5 5 5
  3 3 3
  1 1 1

  Respuesta: Invierte la hoja y marca con círculos tres 6 y tres 1.

- ¿Puedes trazar cuatro líneas rectas, sin levantar la punta del lápiz, que pasen por los nueve puntos de la ilustración?



Respuesta:

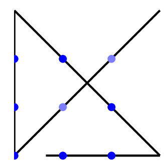


Figura 4.1:

- ¿Puede expresar el número 10 empleando cinco nueves?
  Respuesta:
  $9 + \frac{99}{99} = 10$

  $\frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10$

  $9 + 99^{9-9} = 10$

  $\left(9 + \frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10$

- Exprese el 100, utilizando las 10 primeras cifras.
  Respuesta:

  $70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6} = 100$

  $80\frac{27}{54} + 19\frac{3}{6} = 100$

  $87 + 9\frac{4}{5} + 3\frac{12}{60} = 100$

  $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100$

- Exprese el número 100 de cuatro modos distintos empleando cinco cifras iguales.
  Respuesta:
  $111 - 11 = 100$

  $33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100$

$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100$

$(5+5+5+5) \times 5 = 100$

- Un chico tenía cinco manzanas y se comió todas salvo tres. ¿Cuántas manzanas quedaron?
  Respuesta:Quedaron tres manzanas

- Si a un reloj le lleva cinco segundos dar las 6, ¿cuánto tiempo le llevará dar las 12?

  Respuesta: A1 reloj le llevará 11 segundos dar las 12. Hay un segundo entre cada campanada

- Un matemático se hallaba en una pequeña ciudad que sólo tenía dos peluqueros, cada uno de ellos con su propia peluquería. Como necesitaba un corte de pelo, miró hacia el interior de una de las peluquerías y vio de inmediato que era extremadamente sucia. El mismo peluquero necesitaba una afeitada, sus ropas estaban sucias, su pelo descuidado y mal cortado. La otra peluquería resultó ser impecable. El barbero estaba recién afeitado, impecablemente vestido y tenía el pelo muy bien cortado. El matemático pensó un momento y luego regresó a la primera peluquería para hacerse cortar el pelo. ¿Por qué?

  Respuesta: Como en la ciudad había sólo dos peluqueros, cada uno de ellos tiene que haber cortado el pelo del otro. El matemático eligió al peluquero que le hizo el mejor corte de pelo a su rival.

- Fijate en esta multiplicación de dos números: $48 \times 159 = 7632$ el caso es especial pues participan nueve de los diez digitos (exepto el cero). ¿Podrías encontrar otros ejemplos análogos?

  Respuesta: Con paciencia se pueden encontrar nueve casos distintos de esta clase de multiplicación:

$$12 \times 483 = 5796$$
$$42 \times 138 = 5796$$
$$18 \times 297 = 5346$$
$$27 \times 198 = 5346$$
$$39 \times 186 = 7254$$
$$48 \times 159 = 7632$$
$$28 \times 157 = 4396$$
$$4 \times 1738 = 6952$$
$$4 \times 1963 = 7852$$

- En las siguientes sumas completa los números de los cuadrados, sabiendo que están comprendidos entre 1 y 9 sin repetir sus cifras:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 6 & 7 & \square \\
+ & 2 & \square & 3 \\
\hline
 & 9 & 5 & \square
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 3 & \square & \square \\
+ & \square & 4 & 6 \\
\hline
 & 9 & \square & \square
\end{array}
$$

Figura 4.2:

Respuesta: Para lograr encontrar los números que se encuentran en los cuadritos es aconsejable razonar de izquierda a derecha, de esta forma las respuestas a las operaciones propuestas son:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 6 & 7 & 1 \\
+ & 2 & 8 & 3 \\
\hline
 & 9 & 5 & 4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 3 & 7 & 2 \\
+ & 5 & 4 & 6 \\
\hline
 & 9 & 1 & 8
\end{array}
$$

Figura 4.3:

- Un estudiante hizo las siguientes multiplicaciones y luego borró una parte de sus cifras, ¿podrías encontrar la cuenta original?

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 3 & 5 \\
 & \times & \square & \square \\
\hline
 & 5 & \square & 0 \\
\square & \square & \square & \\
\hline
7 & \square & 9 & \square
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & 3 & \square & 2 \\
 & & \times & \square & 1 & 5 \\
\hline
 & & \square & \square & \square & 0 \\
 & & \square & \square & \square & \\
\square & \square & \square & 8 & & \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 4.4:

Respuesta: Para que el primer producto dé 0, los números posibles como factor son: 2, 4, 6 u 8. El número 8 esta descartado, porque la multiplicación por 135 sería un número de cuatro cifras; como debe ser en el orden de los quinientos será 4, que multiplicado por 135 da 540, con lo que quedan destapados tres cuadritos. La cifra de las decenas será tal que al multiplicar por 5 termine en 5, para que al sumar al 4 dé 9; además no puede ser mayor que 700 su producto, por todo ello debe ser 5, que multiplicado por 135 da 675. Así ya quedan todos los cuadritos destapados y la cuenta completa seria:

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & 3 & 5 \\
\times & & & \boxed{5} & \boxed{4} \\
\hline
 & & & \boxed{4} & 0 \\
 & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{5} & \\
\hline
 & 7 & \boxed{2} & 9 & \boxed{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & 3 & \boxed{0} & 2 \\
 & & & \times & \boxed{4} & 1 & 5 \\
\hline
 & & & \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{1} & 0 \\
 & & & \boxed{3} & \boxed{0} & \boxed{2} & \\
 & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 & \boxed{3} & 3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Figura 4.5:

- En la siguente división se borraron algunas cifras, ¿cuáles son?

$$
\begin{array}{cc|l}
\boxed{} & \boxed{} & \;8 \\
\cline{3-3}
 & 2 & \boxed{}
\end{array}
$$

Figura 4.6:

Respuesta: En la división propuesta se conocen el divisor y el residuo; lo que se pretende es que el estudiante analice las posibles soluciones del cociente y el dividendo(de dos cifras)
Por ejemplo:

$$8 \times 1 + 2 = 10$$
$$8 \times 2 + 2 = 18$$
$$8 \times 3 + 2 = 26$$
$$8 \times 4 + 2 = 34$$
$$8 \times 5 + 2 = 42$$
$$8 \times 9 + 2 = 74$$

Todas estas son posibles soluciones y son útiles para comprender las propiedades de la división. Además de resaltar esta como inversa del producto.

- En esta operación se borraron dos números, pero se sabe que son distintos y de una cifra. ¿cuáles serán los valores tapados por el círculo y el triángulo?

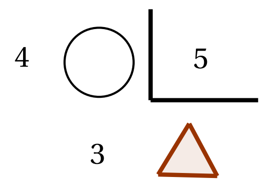


Figura 4.7:

Respuesta: Siguiendo el razonamiento preliminar notamos que $5 \times 1 + 3 = 38$, este valor no es posible porque el dividendo comienza con 4.

$$5 \times 8 + 3 = 43$$
$$5 \times 9 + 3 = 48$$

Estas últimas pueden ser las soluciones buscadas, por lo tanto son dividendo 43 y cociente 8, o dividendo 48 y cociente 9.

- En la sigiente suma ubicada en columnas hay números tapados de tal manera que los que cubren los mismos dibujos son iguales entre sí y los resultados de las sumas son iguales:

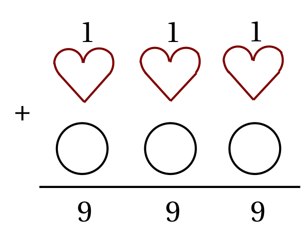


Figura 4.8:

Respuesta: Cualquier combinación de números de tres cifras iguales, cuyas sumas den 888, sería factible por ejemplo 5, 5, 5, pueden ser los números de los corazones y 3, 3, 3 las cifras de los círculos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Es posible introducir en la clase de matemáticas problemas sencillos fundamentados en técnicas heurísticas y lúdicas que permiten despertar el interés en el estudiante y esto permite reforzar los conocimientos previos que tengan sobre la temática de la clase.

Se pudo coleccionar a través de una revisión bibliográfica diversos problemas matemáticos que fueron clasificados de acuerdo a los conocimientos básicos que deben desarrollar los estudiantes según los lineamientos curriculares del M.E.N como son la Comunicación Matemática, la Argumentación y la Ejercitación de procedimientos o Solución de Problemas matemáticos.

A través de los problemas desarrollados en el trabajo los estudiantes pueden percibir el sentimiento estético y el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar a la vez que desarrollan las dimensiones matemáticas propuestas por el M.E.N como son el pensamiento numérico, pensamiento geométrico y pensamiento variacional.

BIBLIOGRAFÍA

[1] CAPÓ DOLZ, MIGUEL. *Mágia Matemática*, Ediciones B, S.A., Barcelona(España), 2011.

[2] CABANNE, NORA. *Juegos y dinámicas con números*, Editorial Bonum, Buenos Aires(Argentina), 2011.

[3] SANTOS RECAMÁN, BERNARDO. *¡Póngame un problema!* La vuelta al mundo con ochenta juegos y acertijos, Cooperativa Editorial Magisterio, Colombia (Bógota), 2006.

[4] CASAS ALFONSO, ESPERANZA. *Divertidas Matemáticas*, Cooperativa editorial Magisterio, Colombia (Bogota), 2006.

[5] PAENZA, ADRIAN. *Matemática... ¿Estás ahí?*, siglo XXI Editores, Buenos Aires(Argentina), 2005.

[6] CÃRDOBA BARBA, ANTONIO. *La saga de los números* , Editorial Crtíica S.L, Barcelona(España), 2010.

[7] GARDNER, MARTIN. *Matemática para divertirse*, Granica Ediciones, New York, 1986.