Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Funciones de Variación Acotada

Jonathan Quintero Cardoso

Neiva, Huila
2013

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Funciones de Variación Acotada

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Jonathan Quintero Cardoso
2006264214

Asesor:
Mg. Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2013

Nota de Aceptación

Mag. Ricardo Cedeño Tovar
Jefe de Programa

Mag. Osmin O. Ferrer Villar
Asesor

Mag. Ricardo Cedeño Tovar
Segundo Lector

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Noviembre de 2013

AGRADECIMIENTOS

Primero quiero agradecer a Dios por darme sus bendiciones cada día, por guiarme y darme la fortaleza para salir adelante.

A mi asesor de trabajo de grado, el profesor *Osmin Ferrer Villar* , por retomar su confianza en mi, por su esfuerzo y dedicación en todo este proceso, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación me ha ayudado a culminar mis estudios,y tambien agradezco por su amistad, por sus consejos y por todo lo que me ha enseñado a lo largo de este tiempo.

Al jefe de programa el profesor *Ricardo Cedeño Tovar*, por sus enseñanzas, consejos, de quien he aprendido muchas cosas y del que sigo aprendiendo, agradecerle la paciencia que ha tenido durante estos últimos años, y sobre todo por su amistad, por toda su ayuda no solo en lo académico si no en lo personal, por que ha sido un amigo más en el cual me he podido apoyar.

A mis padres *Luis Armando Quintero Gonzalez* y *Leyla Cardoso Nañez*, por darme la vida, por el esfuerzo y sacrificio que realizaron durante todos estos años para que yo pudiera realizar esta carrera, por esa confianza que depositaron en mi, y por la cual ahora, podré mostrarles que no fue en vano todo ese esfuerzo. A mi hermano *Cristian Felipe Quintero Cardoso* que junto a mis padres son mi motivación día tras día para seguir adelante, a *Karen Tatiana Gómez Coronado*, quien ha sido mi apoyo incondicional durante muchos años y quien siempre ha estado a mi lado brindandome la fortaleza necesaria para lograr mis metas.

Y por último le agradezco a la Universidad Surcolombiana por ofrecerme la oportunidad y la formacón académica para hacer de mi un gran profesional.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Funciones de Variación acotada es el título correspondiente al trabajo de grado desarrollado por el estudiante de Licenciatura en Matemáticas de la *Universidad Surcolombiana*, **JONATHAN QUINTERO CARDOSO** con código **2006264214**. Algunos aspectos relevantes que se trabajaron en este estudio fueron conceptos previos del análisis funcional como Integral de Riemman y Espacios métricos, también resaltamos la importancia de las Funciones de Variación acotada en la resolución de problemas.

Se consideró pertinente abrir un espacio para realizar un recorrido histórico de las funciones de variación acotada y sus aportes a la ciencia y al mismo desarrollo de las matemáticas.

Usualmente se trabaja las funciones de variación acotada definidas desde un intervalo $[a, b]$ hacia el conjunto de los números reales ($f : [a, b] \to \mathbb{R}$).

En la vida cotidiana las funciones que mayor cantidad de aplicaciones tienen, son las que el conjunto de imagen es un espacio normado. Construir modelos matemáticos e identificar funciones monótonas y funciones integrables, fue algo bastante motivante, y el conocer una técnica de como se hace, fue nuestra mayor motivación.

OBJETIVOS

Objetivo General.

- Exponer los fundamentos históricos y teóricos sobre los cuales se sustentan los desarrollos conceptuales de las funciones de variación acotada.

Objetivos Específicos.

- Presentar un breve recorrido histórico de las funciones de variación acotada.
- Enunciar definiciones y resultados básicos sobre integrables de Riemann y espacios métricos que fundamentan el estudio de las funciones de variación acotada.
- Construcción de funciones crecientes a partir de funciones de variación acotada.

JUSTIFICACIÓN

Usualmente nos encontramos con funciones que no sabemos si se pueden integrar o no, tambien tenemos funciones que modelan fenómenos, pero que para efecto de extrapolar el modelo seria muy importante que fuera monótona creciente o decreciente. El estudio de las funciones de variación acotada, es importante puesto que con ellas nos permiten identificar si una función es integrable y tambien construir funciones monótonas.

Las funciones de variación acotada en las últimas decadas han logrado avanzar en las teorías matemáticas, como también llegar de manera mucho más sencilla a teoremas de gran importancia del análisis funcional. La comodidad al manejar las funciones de variación acotada han dejado abierta la posibilidad de poder construir funciones crecientes en un intervalo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Reseña Historica.

Es una tarea difícil tratar de aislar, en la historia, el origen de las funciones de variación acotada, sin embargo muchos autores coinciden al afirmar que esta clase de funciones tiene su origen en la búsqueda de resolver la conjetura, planteada en 1807, por Fourier que establece: "Toda función arbitraria definida en un intervalo puede representarse como una serie de senos y cosenos". En 1829 P. L. Dirichlet demostró, el hoy llamado Criterio de Dirichlet sobre la convergencia de series de Fourier, que garantiza que: "Toda función real, definida por medio de un número finito de partes monótonas, tiene serie de Fourier puntualmente convergente en $\mathbb{R}$", y es en 1881, cuando C. Jordan introduce las funciones de variación acotada y demuestra que ellas se pueden representar como diferencia de funciones monótonas y en consecuencia satisfacen el teorema de Dirichlet. Esta noción de funciones de variación acotada, introducido por Jordan, desempeñan un papel central en muchas investigaciones y ha dado lugar a algunas generalizaciones del concepto, sobre todo, la intención de buscar una clase de funciones más grande cuyos elementos tengan serie de Fourier puntualmente convergente.

Norbert Wiener fue probablemente el primero en modificar la definición dada por Jordan y mejorar el teorema de la convergencia. Posteriormente, se han dado otras generalizaciones, y en este trabajo de grado se desarrolla un resultado de gran importancia dentro del análisis funcional: las funciones de variación acotada, obtenido por F. Riez, a principios del siglo pasado, al encontrar una representación de los funcionales lineales continuos sobre el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo.

Entre los pioneros más destacados, se encuentra Hadamard (865-1963), quien ataca el problema de representar los funcionales lineales y continuos sobre $C[a,b]$, obteniendo un resultado que Frechet(1878-1973) mejora en 1904, y no se conforma con ello, sino que comienza a investigar problemas similares sustituyendo $C[a,b]$ por otros espacios de funciones.

Por otra parte, en su tesis de 1935, I. M. Gelfand extiende la definición de función de variación acotada a función abstracta de variación acotada, demostrando que el espacio de los operadores lineales y continuos definidos en el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre un intervalo y con valores en un espacio normado débilmente completo es isomorfo al espacio de las funciones abstractas de variación acotada.

Luego, en el año 1937, en los trabajos de E.R. Love y L.C. Young, aparece la noción de función de p-variación acotada sobre el intervalo $[a,b]$. En esta línea se destacan también los polacos Musielak y Orlicz, quienes en el año 1959 demostraron en conjunto la separabilidad del espacio $C_p[a,b]$ de las funciones absolutamente p-continuas en $[a,b]$.

1.2. Conceptos Previos

Definición 1.2.1. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos.* ***Una función*** *f de A en B es una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$ y la notaremos:*

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Al conjunto A se le llamará el dominio de la función f y se notará $\mathrm{Dom} f = A$, y al conjunto B se llamará el codominio de f y se notará $\mathrm{Cod} f = B$.

Se notará $f(x) = y$ para significar que y es la imagen de x bajo f. Al conjunto de todos los y tales que $f(x) = y$ se llamará el conjunto de imagenes de f y se notará $\mathrm{Im} f = \{y \in B : f(x) = y\}$.

Definición 1.2.2. *Se le llama entorno o vecindad de un punto $a \in \mathbb{R}$, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R} : a-\delta < x < a+\delta\}$, en donde 2δ es la longitud del intervalo. Notaremos como $V_\delta(a)$ la vecindad de centro a y radio δ.*

Definición 1.2.3. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que f es* ***continua*** *en c, si dada cualquier vecindad $V_\epsilon(f(c))$ de $f(c)$, existe una vecindad $V_\delta(c)$ de c tal que si x es cualquier punto de $A \cap V_\delta(c)$, entonces $f(x)$ pertenece a $V_\epsilon(f(c))$.*

Definición 1.2.4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f es:*

1. ***Acotada superiormente*** *cuando existe algún número real K, que es mayor o igual que todas las imágenes de f. Es decir, f es acotada superiormente si y sólo si $\exists\ k \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \leq K \quad \forall\ x \in Dom\ f$*

2. ***Acotada inferiormente*** *cuando existe algún número real que es menor o igual que todas las imágenes de f, es decir, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in Dom\ f$*

3. ***Acotada*** *si y sólo si $\exists\ k \in \mathbb{R}^+ \left| f(x) \right| \leq k \quad \forall\ x \in Dom\ f$*

4. ***Creciente*** *en A, si siempre que $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \leq x_2$, implica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

5. ***Estrictamente creciente*** *en **A**, si siempre que $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, implica $f(x_1) < f(x_2)$*

6. ***Decreciente*** *en A, si siempre que $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \leq x_2$, implica $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

7. ***Estrictamente decreciente*** *en **A**, si siempre que $x_1, x_2 \in A$ y $x_1 < x_2$, implica $f(x_1) > f(x_2)$*

Definición 1.2.5. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función, diremos que f es uniformemente continua cuando, para cada $\epsilon > 0$, puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in A$ se verifican que $\left| y - x \right| < \delta$, entonces $\left| f(y) - f(x) \right| < \epsilon$. Se notara*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x, y \in A, \left| y - x \right| < \delta \to \left| f(y) - f(x) \right| < \epsilon$$

Observación 1.2.6. Si una función es creciente o bien decreciente en A, se dice que es **monótona en** A. Si f es **estrictamente creciente** o bien **estrictamenet decreciente** en **A**, se dice que f es **estrictamente monótona** en **A**, si f es acotada superiormente e inferiormente se puede mostrar que esto equivale a decir que f es acotada.

1.3. Sucesión

Definición 1.3.1. *Una función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ recibe el nombre de* ***sucesión*** *. La imagen de n bajo x, $x(n)$ se notará como x_n, es decir $x(n) = x_n$.*

1.3.1. Sucesiones Crecientes y Decrecientes

Una sucesión real $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice:

- ***Creciente:*** Si $x_n \leq x_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$
- ***Decreciente:*** Si $x_n \geq x_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente, entonces se le llama ***monótona*** .

Si $x_n < x_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión se dice ***estrictamente creciente.***
Si $x_n > x_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión se dice ***estrictamente decreciente.***

Definición 1.3.2. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es* ***acotada superiormente*** *si y sólo si $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x_n \leqslant c; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición 1.3.3. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es* ***acotada inferiormente*** *si y sólo si $\exists i \in \mathbb{R}$ tal que*

$$i \leqslant x_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición 1.3.4. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice* ***acotada*** *si es acotada superior e inferiormente.*

Proposición 1.3.5. *$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si y sólo si $\exists h \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant h \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.3.6. *Si I es una cota inferior de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e I tiene la propiedad de que para toda cota inferior c de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c \leq I$, entonces I es llamada* ***máxima cota inferior*** *de la sucesión.*

Definición 1.3.7. *Si S es una cota superior de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y si S tiene la propiedad de que para toda cota superior D de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $S \leq D$, entonces S es llamada* ***mínima cota superior*** *de la sucesión.*

Proposición 1.3.8. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$*

Demostración. Razonemos por via reducción al absurdo.

Supongamos que $a < b + \varepsilon \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \wedge \quad a > b$, hagamos $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}(a - b)$. Entonces $a < b + \varepsilon_0 = b + \left(\dfrac{1}{2}(a - b)\right)$, de donde $2a < 2b + a - b = b + a$, así $a < b$, lo cual es una contradicción por que se tomó $a > b$. ■

Definición 1.3.9. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$, se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge* a $x \in \mathbb{R}$, *si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} / si \;\; n > K \to |x_n - x| < \varepsilon$$

y a ***x*** *lo llamaremos* ***límite*** *de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposición 1.3.10. *Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces su límite es único.*

Observación 1.3.11. Si la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x entonces lo notaremos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición 1.3.12. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y sea $r_1 < r_2 < r_3 \ldots\ldots < r_n < \ldots$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Entonces a la sucesión $\{x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3} \ldots\ldots x_{r_n}, \ldots\}$ se le llamará* ***subsucesión*** *de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

Teorema 1.3.13. *Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L, entonces cualquier subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a L.*

1.3.2. Operaciones con límites:

Sean $x_n \to x$, $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

i. La sucesión constante $\{c\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene a c como su límite.

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha \cdot x.$

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x \pm y.$

iv. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n y_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to+\infty} y_n) = x \cdot y.$

v. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n} = \dfrac{1}{x}$; con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq 0$

vi. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n} = \dfrac{x}{y}$, con $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \neq 0$

Proposición 1.3.14. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales.*

$$Si \ \ x_n < y_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} y_n$$

Teorema 1.3.15. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \phi$ acotados superiormente, entonces*

$$\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$$

Demostración. Como $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacios y acotados superiormente, entonces existen $\sup(A)$ y $\sup(B)$. Luego $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ se tiene que $a \leq \sup(A) \ \wedge \ b \leq \sup(B)$ entonces:

$$a + b \leq \sup(A) + \sup(B) \qquad \forall a \in A \quad y \quad \forall b \in B$$

Por lo tanto $\sup(A)+\sup(B)$ es cota superior de $A+B$, entonces $A+B$ es acotada superiormente y además

$$\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B) \qquad (1)$$

Por otro lado:

Sea $\epsilon > 0$ dado, entonces $\epsilon^* = \dfrac{\epsilon}{2} > 0$, por lo tanto $\exists a \in A, b \in B$ tales que:

$$\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} \leq a \qquad \wedge \qquad \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} \leq b$$

Entonces $\sup(A)+\sup(B)-\epsilon \leq \sup(A+B)$, luego $\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A+B)+\epsilon$, por lo tanto

$$\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A+B) \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que:

$$\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B)$$

■

Teorema 1.3.16. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^+$, $A, B \neq \phi$ acotados superiormente, entonces*

$$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$$

Teorema 1.3.17. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \phi$ acotado superiormente y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces*

$$\sup(cA) = c \ \ \sup(A)$$

Teorema 1.3.18. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \phi$ acotados superiormente, y $\forall a \in A, \forall b \in B$, $a \leq b$, entonces*

$$\sup(A) \leq \sup(B)$$

1.4. Partición de un intervalo

Definición 1.4.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$ el conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ se llama partición de $[a, b]$ si y solo si $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$*

Nota 1.4.2. *El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ se denotará por $\mathscr{P}[a, b]$.*

Observaciones 1.4.3.

i. Dos particiones P y Q de un mismo intervalo $[a, b]$ son diferentes si difieren por lo menos en un punto.

ii. Toda partición de $[a, b]$ contiene por definición al menos los puntos a y b, por tanto toda partición de $[a, b]$ es un conjunto no vacío.

iii. Toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de $[a, b]$ divide a dicho intervalo en n-subintervalos cerrados:

$$I_1 = [x_0, x_1]; I_2 = [x_1, x_2]; \ldots; I_k = [x_{k-1}, x_k]; \ldots; I_n = [x_{n-1}, x_n].$$

Definición 1.4.4. *La longitud del sub-intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ se denota como Δx_k, y se define como $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.*

Definición 1.4.5. *Si $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $Q := \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ son particiones de I, se dice que Q es un **refinamiento** de P si cada punto de la partición P también pertenece a Q (es decir, si $P \subseteq Q$). Un refinamiento Q de una partición P, se puede obtener agregando a P un número finito de puntos del intervalo $[a, b]$. En este caso, cada uno de los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$ en que P divide a I se puede escribir como la unión de los intervalos cuyos puntos terminales pertenecen a Q, es decir:*

$$[x_k - x_{k-1}] = [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}] \cup \ldots \cup [y_{h-1}, y_h]$$

Los puntos de la partición P de I se puede dividir en subintervalos no traslapados:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

Observaciones 1.4.6. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada en I y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\}$ una partición de I. Para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, notaremos:

$$m_k := \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

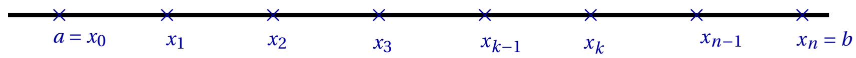

Fig. 2.1.1 Una Partición de $I = [a, b]$

Definición 1.4.7. *La **Suma inferior** de f corresponde a la partición P se define como*

$$L(P; f) := \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

Definición 1.4.8. *La **Suma superior** de f corresponde a la partición P se define como*

$$U(P; f) := \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

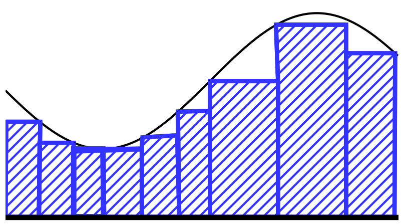

Figura 2.1.2 $L(P; f)$, una Suma Inferior.

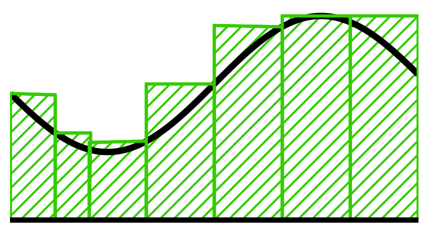

Figura 2.1.3. $U(P; f)$, una Sumas Superior.

Definición 1.4.9. *Si f es una función positiva, entonces la suma inferior $L(P; f)$ se puede interpretar como el área de la unión de los rectángulos con base $[x_{k-1}, k_k]$ y altura m_k. De manera similar, la suma superior $U(P; f)$ se puede interpretar como el área de la unión de los rectángulos con base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura M_k. La interpretación geométrica sugiere que, para una partición dada, la suma inferior es menor o igual que la suma superior.*

Lema 1.4.10. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ está acotada y P es una partición cualquiera de I, entonces*

$$L(P; f) \leq U(P; f)$$

.

Demostración. Sea $P := \{x_0, x_1, \ldots, _n\}$. Puesto que $m_k \leq M_k$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ y como $x_k - x_{k-1} > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, se sigue que $m_k(x_k - x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}),$$

por lo tanto

$$L(P; f) \leq U(P; f)$$

■

Lema 1.4.11. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ está acotada, P es una partición de I y si Q es un refinamiento de P, entonces:*

$$L(P;f) \leq L(Q;f) \quad y \quad U(Q;f) \leq U(P;f)$$

Demostración. (**Para sumas inferiores:**) Sea $I := [a,b]$, $P : \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1},_k, \ldots, x_n\}$, P una partición de $I, m_k := \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, tomamos a $z \in [x_{k-1}, x_k]$, tal que $x_{k-1} < z < x_k$, entonces la partición P' agregando el punto z a la partición P, esta definida como:

$$P' := \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_k, \ldots, x_n\}$$

Es claro que $P \subset P'$. Sea m'_k y m''_k los números:

$$m'_k := \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\} \quad y \quad m''_k := \text{ínf}\{f(x) : x \in [z, x_k]\}$$

entonces:

$$m_k \leq m'_k \quad (1) \quad \wedge \quad m_k \leq m''_k \quad (2).$$

y como

$$(z - x_{k-1}) > 0, \quad \wedge \quad (x_k - z) > 0$$

multiplicando (1) por $(z - x_{k-1})$ y (2) por $(x_k - z)$ tenemos:

$$m_k(z - x_{k-1}) \leq m'_k(z - x_{k-1}) \qquad \wedge \qquad m_k(x_k - z) \leq m''_k(x_k - z)$$

Sumando miembro a miembro tenemos:
$m_k(z - x_{k-1}) + m_k(x_k - z) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$, luego $m_k\left((z - x_{k-1}) + (x_k - z)\right) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$, así $m_k\left(z - x_{k-1} + x_k - z\right) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$, tenemos que $m_k\left(-x_{k-1} + x_k\right) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$, de donde $m_k\left(x_k - x_{k-1}\right) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\left(x_k - x_{k-1}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \left(m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - z)\right),$$

por lo tanto

$$L(P;f) \leq L(P';f)$$

Si Q se obtiene agregando un número finito de puntos se produce de manera similar como se hizo con P' y obtenemos que

$$L(P;f) \leq L(Q;f)$$

(**Para sumas superiores:**) Si $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ esta acotada, P una partición de I y P' es un refinamiento de P, entonces:

Sea $I := [a,b]$, $P : \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1},_k, \ldots, x_n\}$, P una partición de I, $M_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ tomamos a $z \in (x_{k-1}, x_k)$, entonces la partición P' agregando el punto z a la partición P, esta definida como:

$$P' := \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_k, \ldots, x_n\}$$

Es claro que $P \subset P'$. Sea M'_k y M''_k los números:

$$M'_k := \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\} \quad y \quad M''_k := \sup\{f(x) : x \in [z, x_k]\}$$

entonces:

$$M'_k \leq M_k \quad (1) \quad \wedge \quad M''_k \leq M_k \quad (2).$$

y como

$$z - x_{k-1} > 0, \quad \wedge \quad x_k - z > 0$$

multiplicando (1) por $(z - x_{k-1})$ y (2) por $(x_k - z)$ tenemos:

$$M'_k(z - x_{k-1}) \leq M_k(z - x_{k-1}) \qquad \wedge \qquad M''_k(x_k - z) \leq M_k(x_k - z)$$

Sumando miembro a miembro tenemos:
$M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z) \leq M_k(z - x_{k-1}) + M_k(x_k - z)$, así $M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z) \leq M_k\left((z - x_{k-1}) + (x_k - z)\right)$, tenemos que $M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z) \leq M_k\left(z - x_{k-1} + x_k - z\right)$, de donde $M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z) \leq M_k\left(-x_{k-1} + x_k\right)$, entonces $M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z) \leq M_k\left(x_k - x_{k-1}\right)$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} \left(M'_k(z - x_{k-1}) + M''_k(x_k - z)\right) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k\left(x_k - x_{k-1}\right),$$

por lo tanto

$$U(P'; f) \leq U(P; f)$$

Si Q se obtiene agregando un número finito de puntos se produce de manera similar como se hizo con P' y obtenemos que

$$U(Q; f) \leq U(P; f)$$

■

Lema 1.4.12. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ acotada. Si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de I, entonces*

$$L(P_1; f) \leq U(P_2; f).$$

1.5. Integrales Superiores e Inferiores.

La colección de todas las particiones del intervalo I se denotará por $\mathscr{P}(I)$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ está acotada, entonces cada P en $\mathscr{P}(I)$ determina dos números:$L(P; f)$ y $U(P; f)$. Por lo tanto, la colección $\mathscr{P}(I)$ determina dos conjuntos de números: el conjunto de las sumas inferiores $L(P; f)$ para $P \in \mathscr{P}(I)$ y el conjunto de las sumas superiores $U(P; f)$ para $P \in \mathscr{P}(I)$.

Definición 1.5.1. *Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. La* ***La integral inferior de*** *f* ***en I*** *es el número:*

$$L(f) := \sup\left\{L(P; f) : P \in \mathscr{P}(I)\right\}$$

y la ***Integral superior de*** *f* ***en*** *I es el número*

$$U(f) := \text{ínf}\left\{U(P; f) : P \in \mathscr{P}(I)\right\}$$

Puesto que f es una función acotada, la existencia de los números

$$m_I := \text{ínf}\{f(x) : x \in I\} \quad y \quad M_I := \sup\{f(x) : x \in I\}$$

está garantizada. Para cualquier $P \in \mathscr{P}$ se tiene:

$$m_I(b - a) \leq L(P; f) \leq U(P, f) \leq M_I(b - a)$$

Por lo tanto

$$m_I(b - a) \leq L(f) \quad y \quad U(f) \leq M_I(b - a)$$

Teorema 1.5.2. *Sea $I := [a, b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces existe la integral inferior $L(f)$ y la integral superior $U(f)$ de f en I. Además*

$$L(f) \leq U(f)$$

1.6. La Integral de Riemann

Si I es un intervalo acotado y cerrado y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función acotada, la integral inferior $L(f)$ y la integral superior $U(f)$ siempre existen. Además, siempre se tiene $L(f) \leq U(f)$. Sin embargo, es posible que se tenga $L(f) < U(f)$. Por otra parte, hay una numerosa clase de funciones para las que $L(f) = U(f)$. Se dice que esas funciones son integrables y al valor común de $L(f)$ y $U(f)$ se le llama la integral de f en I.

Definición 1.6.1. *Sea $I = [a,b]$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces se dice que f es **Riemann integrable en** I si $L(f) = U(f)$. En este caso la **integral de Riemann** de f en I se define como el valor $L(f) = U(f)$ y este número por lo general se denota por*

$$\int_a^b f \quad o \quad \int_a^b f(x)dx$$

Además, se definen:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad y \quad \int_a^a f = 0.$$

Por tanto, si la integral de Riemann de una función en un intervalo existe, entonces la integral es el único número real que está entre las sumas inferiores y las sumas superiores.

Notaremos $R(\alpha)$ al conjunto de funciones integrables, y diremos que $f \in R(\alpha)$ si f es Riemann Integrable.

En adelante con frecuencia se omitirá el generativo de **Riemann** y se usará el término **integral** para hacer referencia a la integral de Riemann.

Ejemplo 1.6.2. Una función constante es integrable:

Sea $f(x) := c$ para $x \in I := [a,b]$. Si P es partición cuales cualesquiera de I,entonces:

$$L(P;f) = c(c-a) = U(P;f)$$

Por lo tanto, las integrales inferior y superior están dadas por $L(f) = c(b-a) = U(f)$. Por consiguiente, f es integrable en I y:

$$\int_a^b f = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Ejemplo 1.6.3. La función $g(x) := x$ es integrable en $[0,1]$

Sea P_n la partición de $I := [0,1]$ en n subintervalos dados por:

$$P_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}$$

Puesto que g es una función creciente, su ínfimo y su supremo en el intervalo $\left[\frac{(k-1)}{n}, \frac{k}{n}\right]$ se alcanza a la izquierda y a la derecha de los puntos terminales respectivamente y, por lo tanto, están dados por $m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)$ y $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)$. Además, puesto que $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ para toda $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene

$$L(P_n; g) = \frac{0+1+\ldots+(n-1)}{n^2}, \quad U(P_n; g) = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$$

Si se usa la fórmula $1+2+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$, para $m \in \mathbb{N}$ se obtiene que:

$$L(P_n; g) = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad U(P_n; g) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Puesto que el conjunto de particiones $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto del conjunto de todas las particiones $\mathscr{P}(I)$ de I, por lo tanto:

$$\frac{1}{2} = \sup\{L(P_n; g) : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{L(P; g) : P \in \mathscr{P}(I)\} = L(g),$$

y también que

$$U(g) = \text{ínf}\{U(P; g) : P \in \mathscr{P}(I)\} \leq \text{ínf}\{U(P_n; g) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}.$$

Como $\frac{1}{2} \leq L(g) \leq U(g) \leq \frac{1}{2}$, se concluye que $L(g) = U(g) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, g es integrable en $I = [0, 1]$ y

$$\int_0^1 g = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Definición 1.6.4. *Diremos que f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a, b]$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe una partición P_ϵ tal que si P es más fina que P_ϵ implica*

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon$$

1.6.1. Criterios de Integración de Riemann.

Sean $I := [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada en I. Entonces f es integrable en I si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P_n de I tal que

$$U(P_\epsilon; f) - L(P_\epsilon; f) < \epsilon$$

Corolario 1.6.5. *Sean $I := [a, b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de particiones de I tal que*

$$\lim_n (U(P_n; f) - L(P_n; f)) = 0$$

entonces f es integrable y $\lim_n L(P_n; f) = \int_a^b f = \lim_n U(P_n; f)$.

Ejemplo 1.6.6. Sea $g(x) := x$ en $[0, 1]$. Si $P_n := \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{(n-1)}{n}, 1\right\}$, entonces :

$$\lim_n (U(P_n; g) - L(P_n; g)) = \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto que $\int_0^1 x\,dx = \lim_n U(P_n; g) = \lim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$.

Integrabilidad de funciones monótonas y continuas

Si $f := [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona y continua en $[a,b]$ y $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, se emplea la notación común

$$m_I := \text{ínf}\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}, \qquad M_I := \sup\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

Se hace notar asi mísmo que

$$U(P;f) - L(P;f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Integrabilidad de funciones monótonas.

Sean $I := [a,b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función monótona en I. Entonces f es integrable en I.

Integrabilidad de funciones continuas.

Sean $I := [a,b]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces f es integrable en I.

1.7. Espacio métrico

Definición 1.7.1. *Sea E un conjunto no vacío, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ una aplicación, se dice una **métrica** (o una **distancia**) si para todo $x, y, z \in E$ satisface:*

d_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

d_2) $d(x,y) = d(y,x)$; $\forall x, y \in E$ *(Simetría)*

d_3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$; $\forall x, y, z \in E$ *(Desigualdad Triangular)*

Al par (E,d) se le llama ***espacio métrico***.

La métrica d representa la distancia entre los puntos x y y.

Definición 1.7.2. *Sea (E,d) un espacio métrico, una **bola** con centro en $a \in E$ y radio $r > 0$, es el conjunto,*

$$B_E(a,r) := \{x \in E : \ d(a,x) < r\}$$

Definición 1.7.3. *Sea (E,d) un espacio métrico y $S \subset E$, $a \in S$, a es llamado un **punto interior** de S en (E,d), si*

$$(\exists r > 0) \quad (B_E(a,r) \subset S)$$

Definición 1.7.4. *Si (E,d) es un espacio métrico y $S \subset E$, se define el **interior** de S, como el conjunto*

$$\{a \in S : \ a \text{ es punto interior de } S\},$$

Este conjunto se denota por $int(S)$.

Notese que $int(S) \subset S$

Definición 1.7.5. *Si (E,d) es un espacio métrico y $S \subset E$, se dice que S es **abierto** en E, si todos sus puntos son interiores, esto es si*

$$(\forall s \in S)\ (s \in int(S))$$

De la definición es claro que $intS \subseteq S$ y S es abierto en E si y solo si

$$S = intS$$

Definición 1.7.6. *Dado un espacio métrico (E,d) y $S \subset E$, se dice que S es **cerrado** en (E,d) si $E \setminus S$ (el complemento de S con respecto a E) es abierto en (E,d).*

Teorema 1.7.7. *Sea (E,d) un espacio métrico*

1) $\emptyset$ es abierto en (E,d).

2) E es abierto en (E,d).

3) La intersección de un número finito de conjuntos abiertos en (E,d), es un conjunto abierto en (E,d).

4) La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos en (E,d), es un conjunto abierto en (E,d).

Demostración. Probemos algunas de las afirmaciones anteriores:

2) Si $x \in E$, tomemos $r = 1 > 0$, tal que $B_E(x,1) \subset E$, entonces $x \in int(E)$, luego $E \subset int(E)$, así $int(E) = E$, por lo tanto se concluye que E es abierto en (E,d).

3) Sean $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ una colección finita de abiertos en (E,d) y sea

$$G = G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i.$$

Demostraremos que G es abierto en (E,d).

Sea $x_0 \in G$, entonces $(\forall i \in I)\ x_0 \in G_i$, así $x_0 \in int(G_i), i = 1,\ldots,n$, pues G_i es abierto, luego $\exists r_i > 0$ tal que $B_E(x_0, r_i) \subset G_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Sea $r = \text{mín}\{r_1,\ldots,r_n\} > 0$, (pues todo subconjunto finito no vacio de números reales tiene un elemento mínimo y un elemento máximo), entonces

$$(\forall i \in I\ , i = 1,\ldots,n)\ B(x_0, r) \subset B(x_0, r_i) \subset G_i,$$

esto es $B(x_0, r)$ está contenida en cada G_i, luego

$$B(x_0, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$$

Se concluye entonces que G es abierto.

4) Sean $(G_i)_{i \in I}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos en (E,d) y

$$G = \bigcup_{i \in I} G_i$$

Demostraremos que G es abierto en (E,d).

Sea $x \in G$, entonces $\exists i \in I \,/\, x \in G_i$, luego $\exists r > 0$ tal que $B(x,r) \subset G_i \subset \bigcup_{i\in I} G_i$, así x es un punto interior de G, por consiguiente $x \in int(G)$, por lo tanto $G \subset int(G)$, se concluye entonces que G es abierto en (E,d).

■

Teorema 1.7.8. *Sea (E,d) un espacio métrico.*

1) *El conjunto E es cerrado en (E,d).*
2) *El conjunto vacio $\emptyset$ es cerrado en (E,d) .*
3) *La intersección de cualquier colección de subconjuntos cerrados de (E,d) es cerrada en (E,d) .*
4) *La unión de un número finito de subconjuntos cerrados de (E,d) es cerrada en (E,d) .*

Demostración. 1) $(E \setminus E) = \emptyset$, el cual es abierto en (E,d) , luego E es cerrado en (E,d) .

2) $(E \setminus \emptyset) = E$ es abierto en (E,d) , luego $\emptyset$ es cerrado en (E,d) .

3) Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia cualquiera de subconjuntos cerrados de (E,d) y sea

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i,$$

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i)$$

como cada $(E \setminus F_i)$ es abierto en (E,d), entonces $E \setminus F = E \setminus (\bigcap_{i\in I} F_i) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i)$ es abierto en (E,d), por lo tanto $(E \setminus F)$ es abierto en (E,d), esto es F es cerrado en (E,d) .

4) Sea $\{F_1,\ldots,F_n\}$ una colección finita de subconjuntos cerrados de (E,d) y sea

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

$$E \setminus F = E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(E \setminus F_i)$$

que es abierto por ser intersección de un número finito de conjuntos abiertos , luego F es cerrado en (E,d) ■

Definición 1.7.9. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que a es un **punto adherente** de X si y solo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*

Definición 1.7.10. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. La **clausura** de X notado por $(\overline{X})$, se define como*

$$\overline{X} := \{a \in \mathbb{R} \,/\, a \text{ es punto adherente de } X\}$$

Definición 1.7.11. *Un conjunto C se llamará **numerable** si y sólo si es equipotente con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, es decir, cuando existe una biyección de $\mathbb{N}$ a C.*

Definición 1.7.12. *Sea (E, d) un espacio métrico , $A \subset E$ se llama **denso** en E, si $\overline{A} = E$.*

Definición 1.7.13. *En un espacio métrico (E,d) , un conjunto es **separable**, si existe $D \subset E$, denso y numerable.*

1.8. Espacios Normados.

Definición 1.8.1. *Sea X un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$)*, una función* $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice que es una norma en* X*, si satisface:*

$N_1)$ $\| x \| \geq 0;\ \forall x \in X$

$N_2)$ $\| x \| = 0 \iff x = 0;\ \forall x \in X$

$N_3)$ $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|;\ \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$

$N_4)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|;\ \forall x, y \in X$

Al par $(X, \|\cdot\|)$ se le llama **espacio normado.**

Proposición 1.8.2. *En todo espacio normado X, se puede introducir una métrica* $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

La cual es llamada métrica inducida por la norma.

Demostración. Utilizando las propiedades de la norma:

$d_1)$ $d(x, y) = \| x - y \| \geq 0$

$d_2)$ $d(x, y) = 0 \longleftrightarrow \| x - y \| = 0 \longleftrightarrow x - y = 0 \longleftrightarrow x = y.$

$d_3)$ $d(x, y) = \| x - y \| = \| (-1)(y - x) \| = |-1| \| y - x \| = \| y - x \| = d(y, x)$

$d_4)$ $d(x, y) = \| x - y \| = \| x - y + z - z \| = \| (x - z) + (z - y) \| \leq \| x - z \| + \| z - y \| \leq d(x, z) + d(z, y).$ ■

1.9. Espacio con Producto Interno.

Definición 1.9.1. *Sea X un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*, una función*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

se dice que es un ***producto interno*** *en X, si* $\forall x, y, z \in X$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ *satisface:*

(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$

(ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle.$

(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *(Simetria Hermitiana).*

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(No negatividad)*

Al par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama **espacio producto interno**.

Se tiene de (i) y (ii) la linealidad con respecto a la primera componente, las tres primeras condiciones son conocidas como sesquilinealidad, y la cuarta es llamada no negatividad. De este modo, un producto interno es una forma sesquilineal positiva.

Observación 1.9.2. 1) Linealidad con respecto al segundo factor.
$\langle x, y+z\rangle = \overline{\langle y+z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

2) Conjugado lineal con respecto al segundo factor.
$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\,\langle x, y\rangle$

Proposición 1.9.3. *En un espacio producto interno* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se puede inducir una norma* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

La cual es llamada la norma inducida por un producto interno.
En efecto:

$N_1)$ $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geq 0 \quad (Por(iv))$.

$N_2)$ $\| x \| = 0 \longleftrightarrow \| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \longleftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \longleftrightarrow x = 0. \quad (Por(iv))$.

$N_3)$ $\| \alpha x \| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\langle x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|\, \| x \|$

Definición 1.9.4. *Un espacio vectorial normado X, el cual es completo con relación a la métrica inducida por la norma, se denomina un* ***Espacio de Banach****.*

Definición 1.9.5. *Sea* $(X, [\cdot,\cdot])$ *un espacio producto interno, la pareja* $(X, \|\cdot\|)$ *recibe el nombre de* ***espacio pre-hilbert****, donde* $\|\cdot\|$ *está asociada al producto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1.10. Lema

Sean $p \geq 1$ y q tales que $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, entonces $\alpha\beta \leq \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$; $\forall \alpha, \beta \geq 0$

Demostración. Puesto que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces $p + q = pq$, luego $pq - p + 1 - q = 1$, así que $p(q-1) - (q-1) = 1$, de donde $(p-1)(q-1) = 1$, por lo que $(q-1) = \dfrac{1}{p-1}$. Si $u = t^{p-1}$, entonces $t = u^{\frac{1}{p-1}} = u^{q-1}$.

Figura 2.1.4

$$I = \int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt = \frac{\alpha^p}{p} \qquad\qquad II = \int_0^{\beta} u^{q-1}\,du = \frac{\beta^q}{q}$$

$$\alpha\beta \leq I + II, \qquad \text{por tanto} \qquad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

∎

1.10.1. Desigualdad de Hölder

Si $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, para $p>1$ entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}$$

Demostración. Si $\xi_j=0;\ \forall j$ ó $\eta_j=0;\ \forall j$, se verifica el resultado.

Supóngase que existen j,k tal que $\xi_j\neq 0$ y $\eta_j\neq 0$, tomando:

$$\overline{\xi_j}=\frac{|\xi_j|}{\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}} \qquad \text{y} \qquad \overline{\eta_j}=\frac{|\eta_j|}{\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}}$$

Se tiene que, $\overline{|\xi_j\eta_j|}\leq\dfrac{|\overline{\xi_j}|^p}{p}+\dfrac{|\overline{\eta_j}|^q}{q}$, luego $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\overline{|\xi_j\eta_j|}\leq\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, por lo tanto $\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|}{\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}}\leq 1$ Así que, $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j\eta_j|\leq\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^q\right]^{1/q}$

■

1.10.2. Desigualdad de Minkowski

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right]^{1/p}\leq\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right]^{1/p}$$

para todo $p\geq 1$ fijo.

Demostración. Si $p=1$, la desigualdad coincide con la desigualdad triangular y el resultado es válido.
Si $p>1$, se toma $w_j=\xi_j+\eta_j$. Por la desigualdad triangular:

$|w_j|^p = |\xi_j+\eta_j||w_j|^{p-1} \leq (|\xi_j|+|\eta_j|)|w_j|^{p-1}$; sumando desde $j=1$ hasta $j=N$ se tiene, $\sum\limits_{j=1}^{N}|w_j|^p \leq \sum\limits_{j=1}^{N}|\xi_j|\ |w_j|^{p-1}+\sum\limits_{j=1}^{N}|\eta_j|\ |w_j|^{p-1} \leq \left[\sum\limits_{j=1}^{N}|\xi_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum\limits_{j=1}^{N}|w_j|^{(p-1)q}\right]^{1/q}+\left[\sum\limits_{j=1}^{N}|\eta_j|^p\right]^{1/p}\left[\sum\limits_{j=1}^{N}|w_j|^{(p-1)q}\right]^{1/q} = \left\{\left[\sum\limits_{j=1}^{N}|\xi_j|^p\right]^{1/p}+\left[\sum\limits_{j=1}^{N}|\eta_j|^p\right]^{1/p}\right\}\left[\sum\limits_{j=1}^{N}|w_j|^p\right]^{1/q}$.

Si $w_j=0;\ \forall j$, la desigualdad se verifica. Supóngase ahora que $w_j\neq 0$ para algún j, entonces

$$\left[\sum_{j=1}^{N}|w_j|^p\right]^{1-1/q}\leq\left[\sum_{j=1}^{N}|\xi_j|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{j=1}^{N}|\eta_j|^p\right]^{1/p}$$

Si $N\longrightarrow\infty$, obtenemos

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right]^{1/p}\leq\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right]^{1/p}$$

■

1.11. Funciones Lipschitz

Definición 1.11.1. *Sean $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es Lipschitz, si existe una constante $L > 0$ tal que:*

$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq L|b-a|. \quad \forall a,b \in I$$

1.12. Teorema del extremo interior.

Teorema 1.12.1. *Sea **c** un punto interior del intervalo $[a,b]$ en el que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo. Si la derivada de f en **c** existe, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Si $f'(c) > 0$, entonces existe una vecindad de $V_r(c) \subseteq [a,b]$ de c tal que:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \quad para\ x \in V_r(c),\ x \neq c.$$

Si $x \in V_r(c)$ y $x > c$, se tiene entonces:

$$f(x) - f(c) = (x-c)\left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c}\right) > 0$$

Pero esto contradice la hipotesis de que f tiene un máximo relativo en c. Por lo tanto, no se puede tener $f'(c) > 0$. Si $f'(c) < 0$, se procede de igual manera para demostrar que esto no puede ocurrir. ■

Corolario 1.12.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en todo el intervalo y supóngase que f tiene un extremo relativo en un punto interior c de $[a,b]$. Entonces la derivada de f en c no existe o es igual a cero.*

1.13. Teorema de Rolle

Teorema 1.13.1. *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, y la derivada f' existe en todo punto del intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto **c** en (a,b) tal que $f'(c) = 0$.*

1.14. Teorema del Valor Medio

Teorema 1.14.1. *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y si f tiene derivada en el intervalo abierto (a,b).Entonces existe al menos un punto **c** en el intervalo abierto (a,b) tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Demostración. Considérese la función φ definida en $[a,b]$ por:

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

La función φ satisface la hipótesis del teorema de Rolle, ya que φ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $\varphi(a) = \varphi(b)$. Por lo tanto, existe un punto c en (a,b) tal que:

$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$, luego $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$, entonces $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, por lo tanto, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ ■

CAPÍTULO 2

FUNCIONES DE VARIACÓN ACOTADA

Las funciones de **variación acotada** están estrechamente relacionadas con las funciones monótonas y son muy importantes en la teoría de integración de **Riemann**.

2.1. Funciones de variación acotada

Definición 2.1.1. *Sea f definida en $[a,b]$ y $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\Delta f_x = f(x_k)-f(x_{k-1})$, para $k=1,2,3,\ldots,n$. Si existe un número positivo M tal que:*

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_x| \leq M \quad \forall P \in \mathscr{P}([a,b])$$

*entonces se dice que f es de **variación acotada** en $[a,b]$.*

Teorema 2.1.2. *Si f es monótona en $[a,b]$, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Consideremos cuando f es creciente, P una partición de $[a,b]$, $x_{k-1},x_k \in P$, entonces $x_{k-1}<x_k$, luego: $f(x_{k-1})<f(x_k)$. Notemos que $a<b$, asi $f(a)<f(b)$, por lo tanto $f(b)-f(a)>0$, además $0<\big(f(b)-f(a)\big)\leq 2\big(f(b)-f(a)\big)$. Sea $2\big(f(b)-f(a)\big)=M$

Luego:

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_x| = \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = (f(x_1)-f(x_o))+(f(x_2)-f(x_1))+\ldots+(f(x_{n-1})-f(x_{n-2}))$$
$$+(f(x_n)-f(x_{n-1})) = -f(x_0)+f(x_n) = f(x_n)-f(x_0) = f(b)-f(a) \leq 2\big(f(b)-f(a)\big) = M$$

Por lo tanto: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_x|\leq M$

■

Teorema 2.1.3. *Si f es continua en $[a,b]$ y si f' existe y además $\left|f'(x)\right|\leq M \quad \forall x\in(a,b)$ y alguna constante M, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$.

Consideremos el intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k] \subset [a,b]$. Aplicando el teorema del valor medio a $I = (x_{k-1}, x_k)$, entonces $\exists\ t_k \in (x_k, x_{k-1})$ tal que $f(x_k - x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$. Sea $\left|f'(t_k)\right| \leq M$

Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_x| &= \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k - f_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|f'(t_k)(x_k - x_{k-1})\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|f'(t_k)\right|(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M(x_k - x_{k-1}) \\
&= M \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \leq M\left[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{k-1} - x_{k-2}) + (x_k - x_{k-1})\right] \\
&\leq M[-x_0 + x_n] = M[x_n - x_0]\ .\ \text{Como } x_0 = a \text{ y } x_n = b, \text{ entonces: } \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_x| \leq M(b-a).
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.1.4. *Toda función de Variación acotada es acotada. Basta considerar la partición* $[a, x, b]$ *de* $[a,b]$ *donde* $x \in (a,b)$.

Demostración. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y $x \in [a,b], x = x_k$. Tomemos $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = x, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$, entonces $\exists\ M \in \mathbb{R}^+ / \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_{k-1}) - f(x_k)\right| \leq M$ y $\left|f(x_{k-1})\right| \leq b \in \mathbb{R}^+$, luego $\left|f(x)\right| = \left|f(x_k)\right| = \left|f(x_k) - f(x_{k-1}) + f(x_{k-1})\right| \leq \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| + \left|f(x_{k-1})\right| \leq \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| + b \leq (M+b) \in \mathbb{R}^+$. Tomamos a $M + b = k \in \mathbb{R}^+$, entonces: $\left|f(x)\right| \leq k, \forall\ x \in [a,b]$. ■

Observaciones 2.1.5. Notación (parte positiva y negativa de un número real). Para cualquier número $v \in \mathbb{R}$, denotemos por v^+ y v^- su parte positiva y parte negativa:

$$v^+ := \text{máx}(v, 0) = \begin{cases} v, & \text{si} \quad v \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad v < 0 \end{cases} \qquad v^- := \text{mín}(v, 0) = \begin{cases} v, & \text{si} \quad v \leq 0 \\ 0, & \text{si} \quad v > 0 \end{cases}$$

Notemos que $v^- \geq 0$, la parte negativa siempre es un número no negativo.

Observaciones 2.1.6. (Variación positiva y variación negativa). Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Dada una $P = \{x_0, \ldots, x_n\}) \in \mathscr{P}[a,b]$, introduzcamos las siguientes notaciones:

$$S_+(f, P) := \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)^+ \quad ; \quad S_-(f, P) := \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)^-$$

La variación positiva de f en $[a,b]$ se define por:

$$PV_f(a,b) := \sup_{P \in \mathscr{P}} S_+(f; P) :$$

La variación negativa de f en $[a,b]$ se define por:

$$NV_f(a,b) := \sup_{P \in \mathscr{P}} S_-(f; P) :$$

2.1.1. Variación Total

Definición 2.1.7. *Sea f una función de variación acotada en $[a,b]$, y sea $\sum(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_x|$ correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, x_3, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$. El número $V_f(a,b) = \sup\left\{\sum(P) : P \in \mathscr{P}([a,b])\right\}$ se llama variación total de f en el intervalo $[a,b]$, además $V_f(a,b) = 0$ si y sólo si f es constante en el intervalo $[a,b]$.*

Proposición 2.1.8. *Si f es de variación acotada en $[a,b]$, el número $V_f(a,b)$ es finito y positivo.*

Demostración. Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, una función de variación acotada en $[a,b]$, $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = b\}$ del intervalo, y $V_f(a,b) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right|\right\}$.

En particular si $x_{k-1}, x_k \in P$ y $x_{k-1} < x_k$, entonces:

$$V_f(a,b) \geq \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \geq \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \geq f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0$$

Por lo tanto $V_f(a,b) \geq 0$ ■

Proposición 2.1.9. *La suma de dos funciones de variación acotada es de variación acotada, al igual que su diferencia y su producto.*

Demostración. Sean $w \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, y, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, funciones de variación acotada en $[a,b]$, entonces $\exists\, M, L \in \mathbb{R}^+$ tales que para cualquier partición $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ se cumple:

$$\sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| \leq M \quad y \quad \sum_{k=1}^{n} \left|g(x_k) - g(x_{k-1})\right| \leq L$$

Por lo tanto: ■

i)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left|(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n} \left|\left(f(x_k) + g(x_k)\right) - \left(f(x_{k-1}) + g(x_{k-1})\right)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left|\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right) + \left(g(x_k) - g(x_{k-1})\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)\right| + \left|\left(g(x_k) - g(x_{k-1})\right)\right| \\
&\leq M + L
\end{aligned}$$

Sea $M + L = H \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \left|(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})\right| \leq H$$

ii)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left|(f-g)(x_k)-(f-g)(x_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)-g(x_k)\big)-\big(f(x_{k-1})-g(x_{k-1})\big)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-g(x_k)-f(x_{k-1})+g(x_{k-1})\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)-\big(g(x_k)+g(x_{k-1})\big)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)+\big(-g(x_k)+g(x_{k-1})\big)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\right|+\left|\big(-g(x_k)+g(x_{k-1})\big)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|+\left|g(x_k)-g(x_{k-1})\right| \\
&\leq M+L
\end{aligned}$$

Tomamos $M+L=H \quad \in \mathbb{R}^{+}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(f-g)(x_k)-(f-g)(x_{k-1})\right| \leq H$$

iii) Se define: $\big(wf\big)(x)=w\big(f(x)\big)$, luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left|(wf)(x_k)-(wf)(x_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n}\left|w\big(f(x_k)\big)-w\big(f(x_{k-1})\big)\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|w\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}|w|\left|\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\right| = |w|\sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\right| \leq |w|M
\end{aligned}$$

Tomamos $|w|M=J \in \mathbb{R}^{+}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(wf)(x_k)-(wf)(x_{k-1})\right| \leq J$$

iv) Se define $\big(fg\big)(x)=f(x)g(x), \quad \forall\ x \in [a,b]$.

Sea $P=\{x_0=a,x_1,x_2,\ldots,x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Como f y g son de variación acotada en $[a,b]$, entonces por el **teorema 3.1.4** son acotadas, por lo tanto

$$\exists\ p,q \in \mathbb{R} \diagup \left|f(x)\right| \leq p \quad \wedge \quad \left|g(x)\right| \leq q, \quad \forall\ x \in [a,b]$$

En particular para $x_{k-1},\ x_k$ en P se tiene $\left|f(x_k)\right|,\left|f(x_{k-1})\right| \leq M$ y $\left|g(x_k)\right|,\left|g(x_{k-1})\right| \leq L$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left|(fg)(x_k)-(fg)(x_{k-1})\right| &= \sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)(g(x_k)\big)-\big(f(x_{k-1})(g(x_{k-1})\big)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|\big(f(x_k)(g(x_k)\big)-\big(f(x_{k-1})(g(x_{k-1})\big)-(f(x_k)(g(x_{k-1})+(f(x_k)(g(x_{k-1})\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \left|g(x_{k-1})\left(f(x_{k-1})-f(x_k)\right)+f(x_k)\left(g(x_{k-1})-g(x_k)\right|\right.\\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left|g(x_{k-1})\right|\left|\left(f(x_{k-1})-f(x_k)\right)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)\right|\left|\left(g(x_{k-1})-g(x_k)\right|\right.\\
&\leq \sum_{k=1}^{n} l\left|\left(f(x_{k-1})-f(x_k)\right)\right|+\sum_{k=1}^{n} m\left|\left(g(x_{k-1})-g(x_k)\right|\right.\\
&\leq q\sum_{k=1}^{n} \left|\left(f(x_{k-1})-f(x_k)\right)\right|+p\sum_{k=1}^{n}\left|\left(g(x_{k-1})-g(x_k)\right|\right.\\
&\leq qM+pL
\end{aligned}
$$

Tomamos $qM+pL=W \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$
\sum_{k=1}^{n}\left|(fg)(x_k)-(fg)(x_{k-1})\right|\leq W
$$

Proposición 2.1.10. *Si f es de variación acotoada en $[a,b]$ y $c\in(a,b)$ entonces f es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y además*

$$
V_f(a,b)=V_f(a,c)+V_f(c,b)
$$

Demostración. Sean $c\in(a,b)$, $P_1=\{x_0,x_1,\dots x_n\}$ es una partición para $[a,c]$ y $P_2=\{y_0,y_1,\dots,y_m\}$ es una partición de $[c,b]$, luego $P_1\cup P_2=P:=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=y_0=c,y_1,y_2,\dots,y_m\}$ es una partición de $[a,b]$.

$V_f(a,c)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\right\}$, y $V_f(c,b)=\sup\left\{\sum_{j=1}^{m}\left|f(y_j)-f(y_{j-1})\right|\right\}$, luego:

$$
\begin{aligned}
V_f(a,c)+V_f(c,b)&=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\right\}+\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|f(y_j)-f(y_{j-1})\right|\right\}\\
&=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|+\sum_{j=1}^{n}\left|f(y_j)-f(y_{j-1})\right|\right\}\\
&=\sup\left\{\sum_{t=1}^{n+m-1}\left|f(z_t)-f(z_{t-1})\right|\right\}\\
&=V_f(a,b)
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.1.11. *Sea f una función de variación acotada en $[a,b]$ y definamos $V:[a,b]\to\mathbb{R}$ así:*

$$
V(x)=\begin{cases} V_f(a,x) & si \quad a<x\leq 0\\ 0 & si \quad x=a\end{cases}
$$

Entonces:

i) V es una función creciente en $[a,b]$.

Demostración.

Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, una función de variación acotada, $P=\{x_0=a,x_1,\dots,x_{k-1},x_k,\dots,x_n=b\}$ una partición de $[a,b]$, entonces $\exists M\in\mathbb{R}^+ \diagup \sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\leq M$.
Sean $x,y\in P$ con $x<y$, luego $a<x<y\leq b$ y se tiene que

$$V_f(a,y)=V_f(a,x)+V_f(x,y)$$

Notemos $V_f(a,y)=V(y)$, y $V_f(a,x)=V(x)$, entonces:

$$V(y)-V(x)=V_f(a,y)-V_f(a,x)=V_f(a,x)+V_f(x,y)-V_f(a,x)=V_f(x,y)\geq 0$$

Por lo tanto: $V(y)\geq V(x)$, así V es una función creciente en $[a,b]$. ■

ii) *$V-f$ es una función creciente en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $D(x)=(V-f)(x)=V(x)-f(x)$ si $x\in[a,b]$.
Luego si $a<x<y\leq b$, tenemos:

$$\begin{aligned}
D(y)-D(x)&=V(y)-f(y)-(V(x)-f(x))\\
&=V(y)-V(x)-f(y)+f(x)\\
&=V(y)-V(x)-[f(y)-f(x)]\\
&=V_f(x,y)-[f(y)-f(x)]\\
&=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\right\}-\big(f(y)-f(x)\big)
\end{aligned}$$

Luego por definición de variación total tenemos que:

$$V_f(x,y)-\big[f(y)-f(x)\big]\geq 0$$

Así, $D(y)-D(x)\geq 0$, por lo tanto, $V-f$ es creciente en $[a,b]$. ■

Teorema 2.1.12. *Sea f definida sobre $[a,b]$, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$ si y sólo si f puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes.*

Teorema 2.1.13. *Si f es continua en $[a,b]$ y si α es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f\in R(\alpha)$ en $[a,b]$.*

Demostración. Sea α creciente en $[a,b]$, entonces $\alpha(a)<\alpha(b)$. Como f es continua en $[a,b]$ es uniformemente continua en $[a,b]$, luego dado $\epsilon>0$, entonces $\exists\delta>0$ tal que si $|x-y|<\delta$, entonces $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\delta}{A}$, en donde $A=2[\alpha(b)-\alpha(a)]$. Si P_ϵ es una partición de norma $\|P_\epsilon\|<\delta$, entonces para P más fina que P_ϵ tendremos $M_k(f)-m_k(f)\leq\dfrac{\epsilon}{A}$, ya que

$$M_k(f)-m_k(f)=\sup\big\{f(x)-f(y):x,y\in[x_{k-1},x_k]\big\}$$

Así: $U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\dfrac{\epsilon}{A}\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k=\dfrac{\epsilon}{A}((x_1-x_0)+(x_2-x_1)+,\dots,(x_n-x_{n-1}))=\dfrac{\epsilon}{A}(-x_0+x_n)=\dfrac{\epsilon}{A}(x_n-x_0)=\dfrac{\epsilon}{A}(\alpha(b)-\alpha(a))=\dfrac{\epsilon}{2[\alpha(b)-\alpha(a)]}(\alpha(b)-\alpha(a))=\dfrac{\epsilon}{2}<\epsilon$, por lo tanto se verifica la condición de Riemann. Luego, $f\in R(\alpha)$ en $[a,b]$. ■

Definición 2.1.14. *Para la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se define $V_\infty(f)$ como:*

$$V_\infty(f) := \sup\left\{\left|f(x) - f(y)\right|; x, y \in [a,b]\right\}.$$

Observación 2.1.15. El espacio $V_\infty[a,b] := \left\{f \in V_\infty[a,b] : f(a) = 0\right\}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_\infty := sup\left\{\left|f(x) - f(y)\right|; x, y \in [a,b]\right\}.$$

Proposición 2.1.16. *Si $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$ donde α es de* ***variación acotada*** *en $[a,b]$ y V_α designa la variación total de α en $[a,b]$, entonces:*

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq ||f||_\infty V_\alpha$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $P_\epsilon \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que para toda $P_\epsilon \subset P$, donde $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ y $\forall\, t_k \in [x_{k-1} - x_k]$ tenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \epsilon$$

Luego, $\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| = \left|\int_a^b f\,d\alpha + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k\right| \leq \left|\int_a^b f\,d\alpha - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k\right| < \epsilon + \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k\right| = \epsilon + \sum_{k=1}^{n} |(t_k)||\Delta\alpha_k| \leq \epsilon + \|f\|_\infty V_\alpha$

Así, para todo $\epsilon > 0$ tenemos que :

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \epsilon + ||\,f\,||_\infty\, V_\alpha$$

entonces,

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq ||\,f\,||_\infty\, V_\alpha$$

∎

CAPÍTULO 3

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Ejercicios:

1. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, demostrar que

$$V_f(a,b) = PV_f(a,b) = f(b) - f(a); \qquad NV_a^b(f) = 0.$$

2. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente, demostrar que

$$V_f(a,b) = NV_f(a,b) = f(a) - f(b); \qquad PV_f(a,b) = 0.$$

3. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, demostrar que

$$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

4. Sea $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ una función creciente en cada uno de los intervalos $[0,1],[2,3],[4,5]$ y decreciente en cada uno de los intervalos $[1,2]$ y $[3,4]$. Calcule:

   a) $V_f(0,5)$.

   b) $PV_f(0,5)$.

   c) $NV_f(0,5)$.

5. Para cada una de las siguientes funciones determinar si tiene variación acotada en $[0,1]$ o no. Sean:

   a)
$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   b)
$$g(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

c)
$$h(x)=\begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x>0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

d)
$$h(x)=\begin{cases} x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x>0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

6. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a,b]$ se define

$$\pi(f):=\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right| \quad si \ \ \pi=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$$

Demostrar que si $\pi_1\subset\pi_2$ son dos particiones de $[a,b]$, entonces $\pi_1\big(f\big)\le\pi_2\big(f\big)$.

7. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a;b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a,b)$.

   a) $f(x)=\cos(x)$ en $[0,3\pi]$

   b)
$$g(x)=\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

   c) $f(x)=2x^3-3x^2$ en $[-1,2]$.

   d)
$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & \text{si} \quad o<x\le 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

8. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces fg también lo es.

9. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a)=0$ y $V_f(x)=V_f(a,x)$ si $a<x\le b$).

   a)
$$g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1\le x<0 \\ x & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 1-x & \text{si} \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$$

   b) $f(x)=\sin x$ en $[0,2\pi]$

   Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f=g_1-g_2$.

10. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función de variación acotada, sean $x,y\in[a,b]$ con $x<y$. Demostrar que $V_f(a,y)\le V_f(a,x)+V_f(x,y)f$ (sugeréncia: usar el ejercicio 6).

11. Demostrar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función de variación acotada entonces es integrable Riemann.

12. a) Probar que el conjunto de funciones de variaciones acotadas forman un espacio vectorial.

b) Probar que el conjunto $NV_f(a,b)$ de funciones de variación acotada, sujetas a la condición $f(a)=0$ es un espacio vectorial normado.

13. Averiguar si las siguientes funciones son de variación acotada en $[-1,1]$:

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \quad si \;\; x\neq 0, f(0)=0 \quad ; \qquad g(x)=x\sin\frac{1}{x} \quad si \;\; x\neq 0, g(0)=0.$$

14. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una numeración de $\mathbb{Q}$, y consideremos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{2^n}$ si $x=x_n$ y $f(x)=0$ si $x\notin Q$.

   a) Mostrar que f es de variación acotada, y hallar sus variaciones positiva, negativa y total.

   b) Demostrar que su variación $V_{-\infty}^{x}[f]$ es continua por la derecha.

BIBLIOGRAFÍA

[1] G. MUSIELACK, W. ORLICZ: ON GENERALIZED VARIATIONS (1), *Studia Mathematica, 18, Warszawa, (1959).*

[2] O. BLASCO, P. GREGORI, J.M. CALABUIG: *Finite semivariation and regulated functions by means of bilinear maps,(2000).*

[3] LIMA, ELON LAGES ANÁLISIS REAL, VOLUMEN 1. *Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI, 1997. 240pp.*

[4] Y. PUIG DE DIOS: *Espacios de funciones de p-variación acotada fuerte y débil,* TESIS DE LICENCIATURA, UNIVERSIDAD DE LA HABANA, (2005).

[5] I.M. GELFAND *Collected Papers,* SPRINGER VERLAG, BERLÍN, HEIDELBERG, NEW YORK, (1987).

[6] ROBERT G. BARTLE - DONALD R. SHERBERT*Introducción al análisis matemático de una variable, Editorial Limua, 2004*

[7] AKHIEZER, N., GLAZMAN, I., S, *Theory of linear operators in Hilbert space. Transl. from the Russian.* DOVER PUBLICATIONS NEW YORK, 1993.

[8] ERWIN KREYSZIG; *Elementary Functional Analysis with Applications - analisis funcional*

[9] R. MILIAN PÉREZ, *El álgebra de las funciones de p-variación acotada,* TESIS PRESENTADA EN OPCIÓN AL GRADO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA, LA HABANA, 2008.

[10] LOVE, E.R. YOUNG, L.C. (1937) *Sur une classe de fonctionelles lineaires,* FUNDAMENTA MATHEMATICA 28: 110-118.

[11] ROLDÁN INGUANZO, R. (1989) *Raüme von Folgen und Funktionen von beschränkter p-Variation.* TESIS DE DOCTORADO, FRIEDRICH SCHILLER UNIVERSITÄT DE JENA, ALEMANIA.