Trabajo de Grado

LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA EDUCACIÓN MEDIA

Por:
CINDY JOHANNA SUAZA RINCÓN
Código 2007268786
JENNIFER PORTELA BONILLA
Código 2008275653

Asesor:
MSc. MAURICIO PENAGOS

Universidad Surcolombiana
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Neiva (Huila)

Febrero de 2014

Índice general

Nota de Aceptación

Presidente del jurado.

Jurado.

Jurado.

Neiva, Febrero de 2014

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a **Dios** por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizaje, experiencias y sobre todo de felicidad.

Le doy gracias a mis padres **Jaime Suaza Quintero** y **Lucely Rincón Benavides**, por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.

A mis hermanos y abuelos por ser parte importante de mi vida y representar el núcleo familiar, y demás seres queridos que siempre estuvieron hay para apoyarme en las buenas y en las malas, y que me acompañaron a lo largo de mi carrera.

Cindy Johanna Suaza Rincón

Le doy gracias a mis padres Oscar Portela Garzón y Sandra Patricia Bonilla, por todo el esfuerzo, apoyo y confianza que depositaron en mi, gracias por estar conmigo en cada paso de mi vida. También a mi hermano y mis familiares quienes me han guiado para poder llegar a esta instancia de mis estudios, ya que ellos siempre han estado presentes para apoyarme moral y psicológicamente.

Al más especial de todos, a ti Dios por que hiciste realidad este sueño, por todo el amor con el que me rodeas y por que me tienes en tus manos. Esta tesis es para ti.

Jennifer Portela Bonilla

Agradecemos a los docentes del programa de Licenciatura en Matemáticas, en particular al profesor Mauricio Penagos quien nos asesoró y aconsejó en la dirección de este trabajo de grado; Al profesor Osmin Ferrer Villar por la atenta lectura que hizo del mismo, y también a todos el cuerpo de docentes que estuvieron a lo largo de nuestra carrera, porque gracias a la formación que nos ofrecieron hoy estamos alcanzando esta meta propuesta.

A todos muchas gracias

Presentación

La enseñanza de las matemáticas siempre ha sido un tema de discusión por parte de los docentes y los expertos en educación. En respuesta a lo anterior se han desarrollado investigaciones que han puesto en evidencia las dificultades que tienen los estudiantes para comprender los conceptos básicos de matemáticas y ponerlos en práctica cuando resuelven problemas de situaciones del contexto real. De tales conceptos elementales hacen parte las *Funciones Reales*, en particular la función lineal y la función cuadrática.

De dichas investigaciones han salido propuestas académicas de expertos, fundamentadas en la didáctica que facilitan a los estudiantes interiorizar conceptos y enfrentarse con situaciones problemas de acuerdo como lo propone el Ministerio de Educación Nacional (M.E.N.) para las llamadas Competencias en Matemáticas: la comprensión de significados (Comunicación Matemática), manipulación de expresiones (Argumentación Matemática), elaboración e interpretación de gráficas y también con la formulación de nuevos problemas (Solución de Problemas).

El M.E.N. ha formulado propuestas para los docentes que han permitido analizar las dificultades que los estudiantes encuentran para el aprendizaje en las matemáticas y que permitan proponer nuevas situaciones en la clase que facilitan la aprehensión del conocimiento. Por otro lado, otra dificultad que se encuentra en la enseñanza de las matemáticas es la tendencia de los estudiantes a memorizar lo que les explica en clase.

Somos conscientes que en nuestro papel como educadores debemos ser facilitadores del proceso educativo y por lo tanto buscar en cada clase un espacio de reflexión y estudio sobre las matemáticas, en cuanto a objeto de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos que la didáctica de la matemática está generando actualmente como campo de investigación. Esto significa que no es suficiente con tener una visión clara de los conceptos que vamos a enseñar en clase sino también conocer nuevas metodologías y hacer uso de herramientas tecnológicas para y tener las bases suficientes para que nuestros estudiantes aprendan significativamente.

El presente trabajo tiene como objetivo primordial presentar algunas estrategias didácticas que faciliten la enseñanza de las funciones reales, particularmente la función lineal y la función cuadrática, y facilitar así que nuestros estudiantes alcancen un mejor nivel de competencia matemática en estos temas. Más específicamente queremos con este trabajo de grado aproximar al estudiante hacia el pensamiento funcional, es decir, a la manera en que deberán aprehender, manipular y analizar estas funciones matemáticas básicas y la manera que como docentes seamos capaces de elaborar y proponer metodologías acertadas para desarrollar clases efectivas.

Antes de hablar de pensamiento funcional, es importante tener en cuenta el significado de *"pensamiento matemático"*. El doctor Ricardo Cantoral (2005)lo define como: "la forma de pensar de las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas, donde los investigadores se interesan por caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos".

De igual forma en este trabajo mostraremos algunas aplicaciones de las funciones lineal y cuadrática en el entorno real de los estudiantes mediante la construcción e interpretación de modelos sencillos, teniendo en cuenta su relación e incidencia con los estándares de Matemáticas y los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional.

Justificación

Con el desarrollo de este trabajo queremos mostrar estrategias didácticas, para la enseñanza - aprendizaje de la función lineal y la función cuadrática y sus aplicaciones en contextos reales, también mostrar como ejemplos algunos modelos matemáticos sencillos propios de los contextos reales de los estudiantes.

Es importante que durante el proceso de enseñanza - aprendizaje tengamos en cuenta la capacidad de aprendizaje de cada estudiante, ya que cada uno percibe la matemática de forma diferente. Es allá donde entra en juego el papel del docente y su conocimiento de las estrategias metodológicas fundamentadas en la didáctica para proponer distintas actividades de exploración y afianzamiento para que los estudiantes asimilen los conceptos y los puedan poner en práctica.

Para llevar a cabo lo anterior nos hemos enfocado en aplicar los conocimientos básicos desarrollados en los cursos de Fundamentos de la Matemática, Geometría Euclidiana y Analítica, Cálculo Diferencial y Didáctica de la Matemáticas de tal manera que sea posible familiarizar al estudiante con la simbología matemática, desarrollar actividades de motivación, la utilización de un vocabulario matemático pertinente, la construcción de gráficas y la resolución de problemas. Para elaborar las gráficas que presentamos en este trabajo utilizaremos software matemáticos como GeoGebra, con el fin de visualizar con mayor claridad las características de cada una.

Objetivos

0.1. Objetivos Generales

- A través de una revisión bibliográfica, organizar y sistematizar un material que facilite la enseñanza de las funciones Lineal y Cuadrática a estudiantes de grado octavo y noveno de educación básica secundaria, teniendo en cuenta el lenguaje algebraico y el gráfico, que facilite en los estudiantes la adquisición del concepto de dichas funciones.

- Utilizar herramientas tecnológicas como el programa Geogebra como complemento para graficar y analizar las funciones reales del presente trabajo y que permitan a los estudiantes lograr un aprendizaje significativo.

0.2. Objetivos Específicos

- Formular los conceptos básicos requeridos para el desarrollo de las funciones: lineales y cuadráticas.

- Presentar una serie de ejercicios y ejemplos de aplicación que permitan reforzar el aprendizaje de las funciones lineales y cuadráticas.

- Motivar a los estudiantes al análisis y resolución de problemas de aplicación analíticamente y apoyándose en software como el geogebra para facilitar el aprendizaje.

Capítulo 1

Marco Teórico

Funciones reales y sus gráficas

El concepto de función es uno de los conceptos más complejos pero a la vez más útiles en matemáticas, ya que expresa el cambio que produce las cosas al pasar el tiempo. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria en diversas áreas del conocimiento, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Las funciones pueden definirse atendiendo a características propias de ellas. Desde el punto de vista informal, una **función** es una regla que permite asignar a todos y cada uno de los elementos x de un conjunto A un único elemento y de otro conjunto B. Otras definiciones de lo que es una función son las siguientes:

- Una función es una variable relacionada con otra variable tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera.
- Una función es un conjunto de pares ordenados, de la forma (a, b) en las cuales en ningún caso dos de ellas tienen la misma primera componente.
- Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada x de cierto subconjunto D de A un elemento determinado de manera única $f(x)$ de B.(Ver figura 4.1)

1.1. Definición de Función

Sean A y B dos subconjuntos de números Reales. Cuando existe una relación entre la variables, x e y, donde $x \in A$ e $y \in B$, en la que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor de la variable dependiente y, diremos que dicha relación es una función de A en B, y se nota $f : A \longrightarrow B$ o $f(x) = y$ donde $x \in A$, $y \in B$. Se dice que y es la imagen de x por la función f. Lo anterior puede expresarse gráficamente de la siguiente manera.

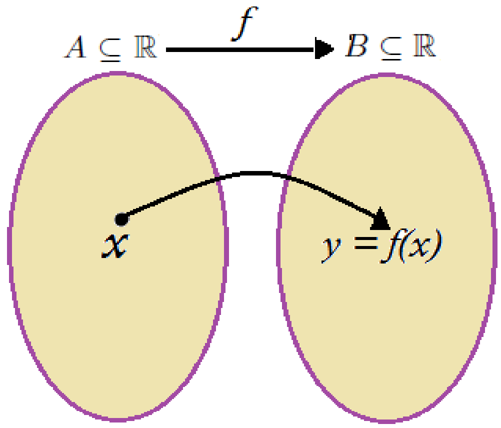


Figura 1.1: Representación de una correspondencia del conjunto A de números reales x al conjunto B de números reales y, donde el numero y es el único valor para cada valor especifico de x

Para denotar funciones comúnmente se utilizan por lo general las letras f, g y h. El subconjunto A de números reales ($A \subseteq \mathbb{R}$) indicado anteriormente se le llama el *dominio* de la función y el subconjunto B de números reales ($B \subseteq \mathbb{R}$) asignado a los valores de x en A se llama el *rango* de la función f. Más específicamente el dominio y el rango de una función se definen de la siguiente forma:

Se denomina *dominio* de la función al conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente x, y lo notamos D_f. Se denomina *rango* de la función o conjuntos de imágenes, al conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente y tales que $y = f(x)$ para algún $x \in A$, y lo denotamos R_f.

Representación gráfica de una función

Cuando a cada pareja ordenada $(x, f(x))$ de números reales se hace corresponder un punto del plano y a cada punto del plano, una pareja ordenada, se establece un sistema de coordenadas cartesianas, dibujando dos rectas metrizadas perpendiculares, una horizontal y una vertical llamados ejes coordenados, Su punto de corte llamado *origen* del sistema, se nota O y corresponde a la pareja $(0, 0)$.

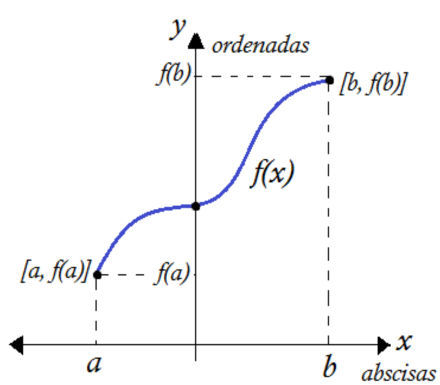


Figura 1.2: Gráfica de una función $D_f = [a, b]$ y $R_f = [c, d]$

En el eje vertical se ubica la variable dependiente y recibe el nombre de eje de ordenadas o eje y. En el eje horizontal se representa a la variable independiente x y recibe el nombre de eje de abscisas o eje x.

Al representar una función $y = f(x)$ en un sistema de coordenadas cartesianas, sobre el eje de abscisas se ubica la variable independiente x, mientras que sobre el eje de ordenadas se ubica la variable dependiente y.

Los ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas primero, segundo, tercero y cuarto cuadrante, denotados como I, II, III y IV en el sentido anti-horario. En el primer cuadrante x y y son positivos, en el segundo cuadrante x es negativo mientras que y es positivo; en el tercero x y y son negativos y en el cuatro cuadrante x es positivo y y es negativo.

Gráfica de una función

La gráfica de una función f de dominio D, es el conjunto de los puntos (x, y) del plano cartesiano tales que $x \in D$ y $y = f(x)$. Se dice que la gráfica representa a la función f o que la gráfica tiene ecuación cartesiana $y = f(x)$.

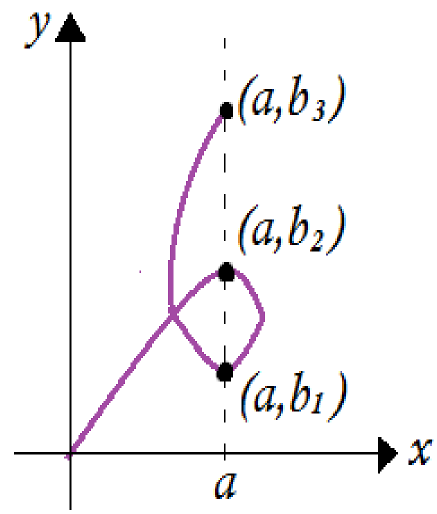


Figura 1.3: Gráfica que no representa una función; pues $a \in \mathbb{R}$ toma tres imágenes diferentes

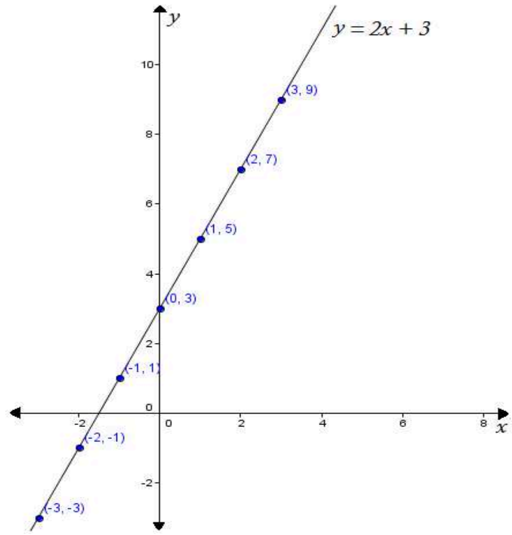
Debemos observar que no todas las gráficas de las funciones son fáciles de construir y además que no toda curva dibujada en el plano corresponde a una función. Puesto que para cada real x del dominio existe uno y sólo un real y tal que $y = f(x)$, entonces dos puntos diferentes cuyas abscisas coinciden no pueden pertenecer a la gráfica de una función, pues esta implica parejas ordenadas (a, b) y (a, c) con $b \neq c$ lo cual contradice la definición de función. La siguiente gráfica no representa una función ya que al mover una recta paralela al eje Y observamos que corta la curva en mas de un punto cuando $x = a$.

Ejemplo 1. Construir la gráfica de la función $f(x) = 2x + 3$. (Función Lineal)

Solución: Elaboramos una tabla de valores de x contra $f(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7	9

A continuación procedemos a gráficar los puntos en el plano cartesiano y unirlos.



(a) Gráfica de la función $f(x) = 2x + 3$

Ejemplo 2. Construir la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - x$. (Función Cuadrática).

Solución: Elaboramos una tabla de valores de x contra $f(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	21	10	3	0	1	6	15

Graficamos los puntos y unirlos.

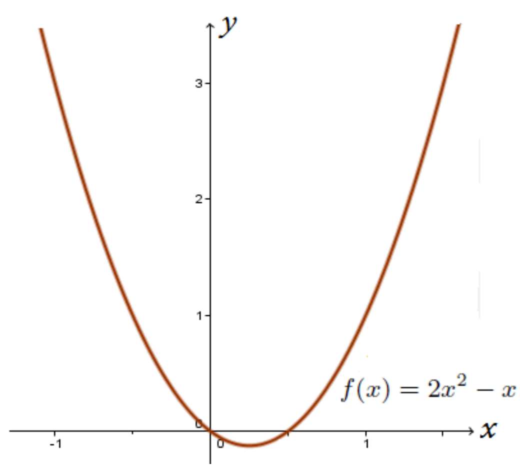


Figura 1.4: Gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - x$

Ejemplo 3. Construir la gráfica de la función $f(x) =| x - 2 | -1$, donde las barras indican la función valor absoluto de x, definida de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Reemplazamos algunos valores de x en $f(x) =| x - 2 | -1$:

Si $x = -3$: $f(-3) = |-3-2|-1 = |-5|-1 = 5-1 = 4$
Si $x = -2$: $f(-2) = |-2-2|-1 = |-4|-1 = 4-1 = 3$
Si $x = -1$: $f(-1) = |-1-2|-1 = |-3|-1 = 3-1 = 2$
Si $x = 0$: $f(0) = |0-2|-1 = |-2|-1 = 2-1 = 1$
Si $x = 1$: $f(1) = |1-2|-1 = |-1|-1 = 1-1 = 0$
Si $x = 2$: $f(2) = |2-2|-1 = |0|-1 = 0-1 = -1$
Si $x = 3$: $f(3) = |3-2|-1 = |1|-1 = 1-1 = 0$

Organizamos la tabla de valores.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	3	2	1	0	-1	0

Graficamos los puntos y hacemos la gráfica.

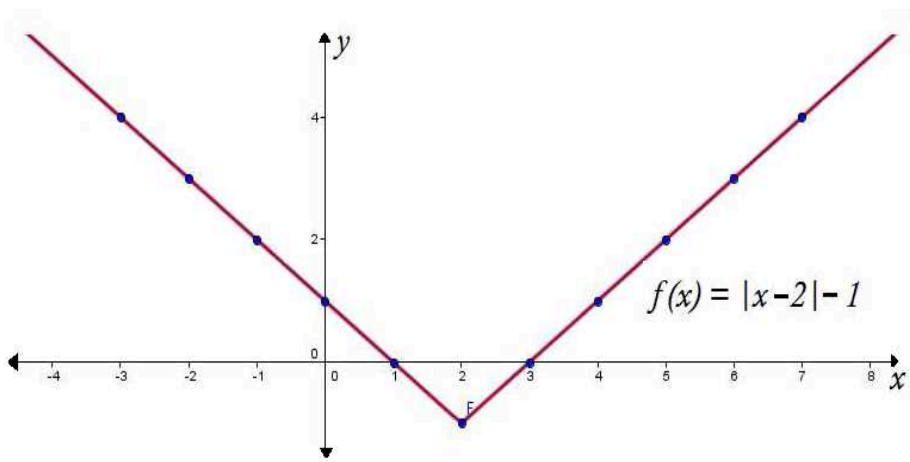


Figura 1.5: Gráfica de la función $f(x) =| x - 2 | -1$

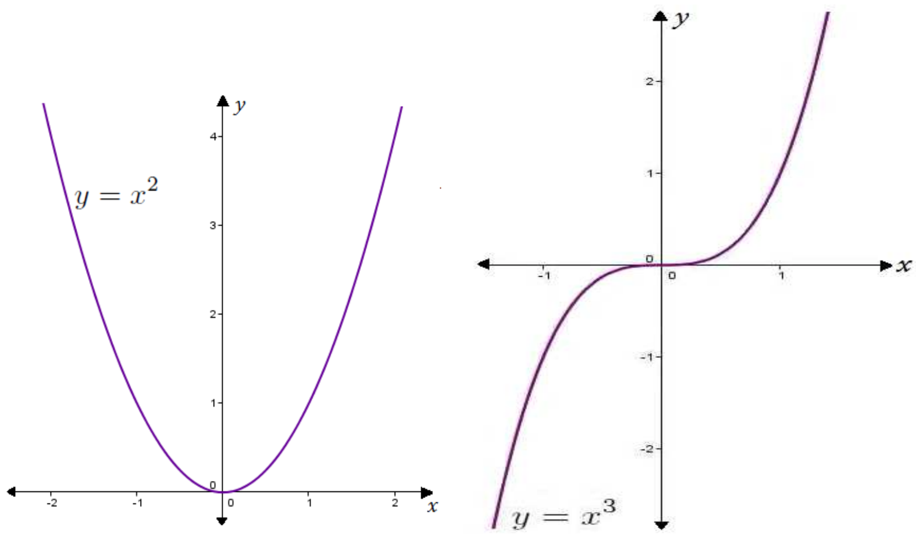
Funciones y tipo de gráfica: Este proceso le permite establecer una relación entre la función y las características de la curva asociada a la misma. Por ejemplo las intersecciones con el eje x indican el valor de las raíces de la ecuación asociada a la función dada.

1.2. Simetría de una gráfica

Al graficar una función, ésta puede representar diferentes tipos de simetría. A continuación hablaremos de dos tipos: simetría con respecto a los ejes de coordenadas y simetría con respecto al origen.

• **Una función f es simétrica con respecto al eje Y** si para cualquier punto x en su dominio se cumple que $f(-x) = f(x)$. A las funciones cuya gráfica presenta este tipo de características se les llama **funciones pares**.

• **Una función f es simétrica con respecto al origen de coordenadas** si para cualquier punto x de su dominio se cumple que $f(-x) = -f(x)$. A este tipo de funciones se les llama **funciones impares**.



(a) Función par $y = x^2$ (b) Función impar $y = x^3$

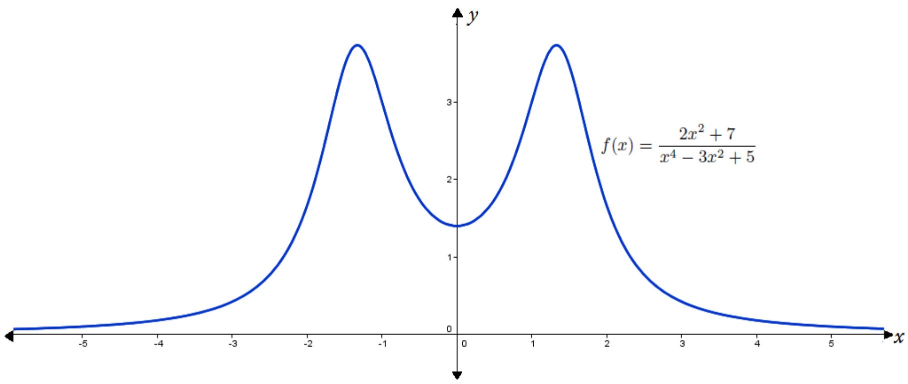
Ejemplo 4: La función $f(x) = \dfrac{2x^2+7}{x^4-3x^2+5}$ es simétrica respecto al eje y, ya que la función. [1]

es par, en efecto,

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2+7}{(-x)^4-3(-x)^2+5} = \frac{2x^2+7}{x^4-3x^2+5} = f(x)$$

La gráfica que representa esta función es:

[1] Observación: La gráfica (1.6) del ejemplo 4, 5 y 6 fue elaborada utilizando el programa Geogebra, del cual hablaremos en los anexos.



Ejemplo 5:
La gráfica de la función $f(x) = x^3 - x$ es simétrica respecto al origen de coordenadas, y por lo tanto es función impar. En efecto,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x \\ &= -x^3 + x = -(x^3 - x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

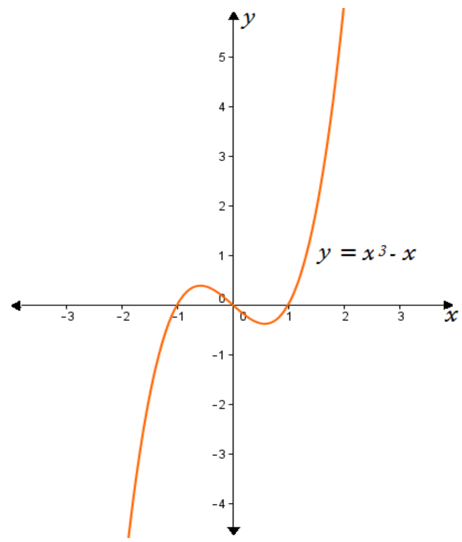


Figura 1.6: Función impar, $y = x^3 - x$

Ejemplo 6: La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{2x + 1}$ no presenta ninguna simetría, ya que no es ni par ni impar. En efecto,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3 + (-x)^2}{2(-x) + 1} \\ &= \frac{-x^3 + x^2}{-2x + 1} \end{aligned}$$

Y como puede observarse,
$f(-x) \neq f(x)$ y
$f(-x) \neq -f(x)$

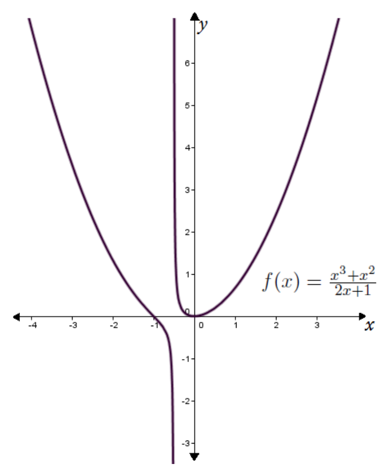


Figura 1.7: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3+x^2}{2x+1}$

1.3. Continuidad de una función

Intuitivamente se dice que una función f es continua en todo punto $x_0 \in D_f$, si la curva que representa su gráfica no se interrumpe en el punto $(x_0, f(x_0))$ que pertenece a la curva que describe la gráfica de $f(x)$. Esto significa si al trazar la gráfica de tal función ésta se hace sin levantar el lápiz de la hoja.

La funcióm $f(x) = x^3 - x$ del ejemplo 5 es continua para cada número real x, mientras que la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{2x + 1}$ del ejemplo 6 es discontinua en $x = -\dfrac{1}{2}$.

Una función f definida en algún subconjunto A de números reales se dice que es continua en $x \in A$ siempre que $f(x)$ exista. Vale la pena aclarar que las dos funciones que analizaremos en el presente trabajo la función lineal y la función cuadrática son continuas para todo numeral real x.

1.4. Puntos de corte con los ejes coordenados o Interceptos

Con el eje x: Para calcular los puntos de corte con ele eje X se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Las soluciones, si existen, corresponden a las abscisas de los puntos de corte y son de la forma $(x, 0)$. A los puntos de corte con el eje X, con $x \in D_f$ se les llama las raíces o ceros de la ecuación $f(x) = 0$

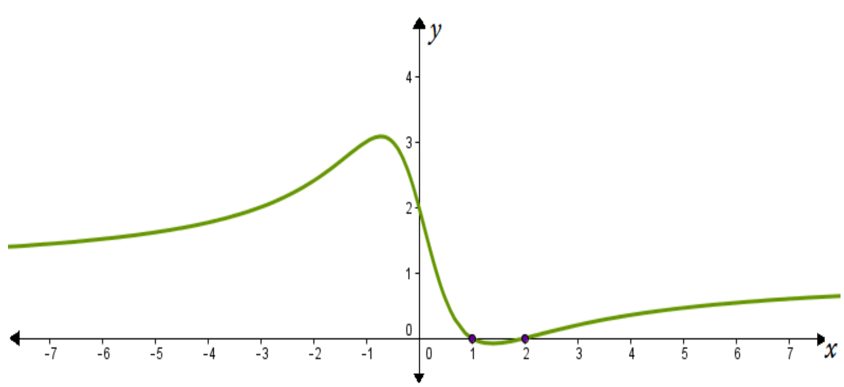
Ejemplo 7: Hallar los puntos de corte con el eje x de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$$

Solución:

$f(x) = 0 \iff \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 2)(x - 1) = 0$

Luego, los puntos de corte de la función con el eje x ocurren en $x = 1$ y $x = 2$



Ejemplo 8: En la gráfica del ejemplo 5, los puntos de corte con la función $f(x) = x^3 - x$ con el eje x son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

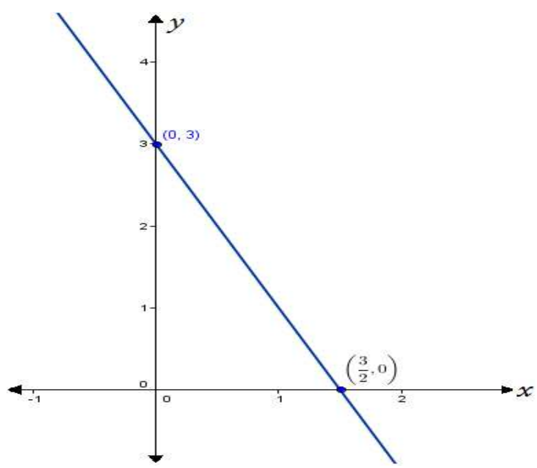
Con el eje y: Para encontrar estos puntos de corte se hace $x = 0$ en la función deseada y de esta manera se obtienen los puntos de la forma $(0, y)$.

Ejemplo 9: En el ejemplo 7 la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$ corta al eje y en $y = 2$, pues $f(0) = \dfrac{0^2 - 3(0) + 2}{0^2 + 1} = 2$

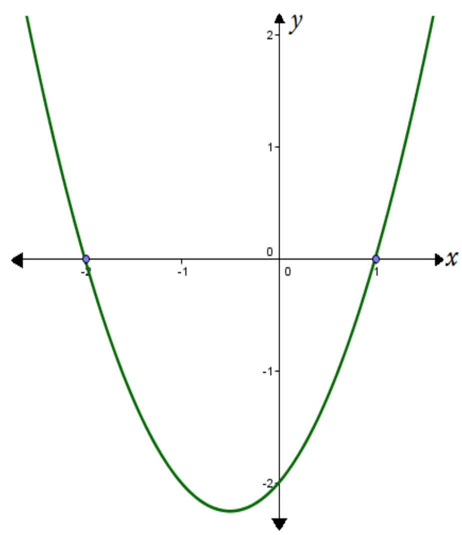
Ejemplo 10: Analicemos los puntos de corte para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = -2x + 3$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$
$f(0) = 3$

(b) $f(x) = x^2 + x - 2$
$f(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0$
$\iff (x + 2)(x - 1) = 0$
$\iff x = -2$ o $x = 1$



(a)



(b)

En el capitulo siguiente nos ocuparemos específicamente del estudio detallado de la función lineal y algunos modelos matemáticos sencillos que se pueden trabajar con esta función.

Capítulo 2

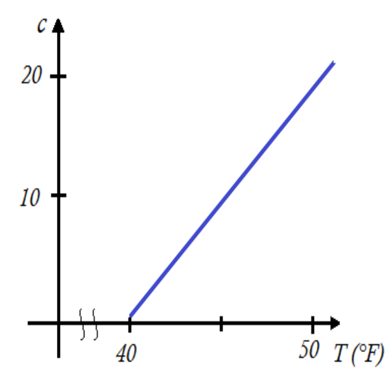
LA FUNCIÓN LINEAL

A continuación vamos a presentar dos ejemplos de ambientación que permitan mostrar la importancia de la Función Lineal.

Ejemplo 11: La frecuencia con la que cantan los grillos es una **función lineal** que depende de la temperatura del medio ambiente. la tabla siguiente muestra el numero de chirridos por minuto que emite un grillo a una temperatura determinada.

Temperatura ($°F$)	40	41	42	43	44
Chirridos por minuto	0	4	8	12	16

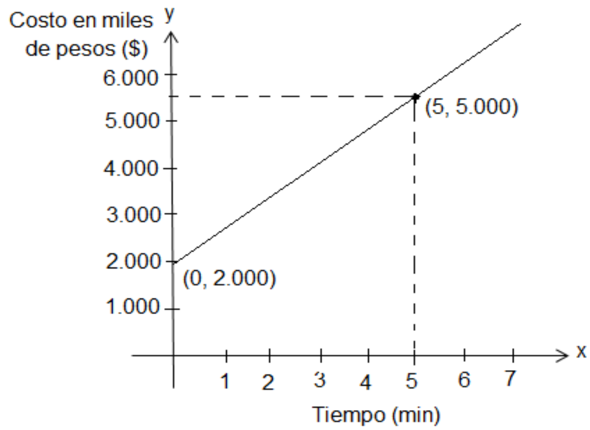
Queremos determinar la expresión algebraica que relaciona el número de chirridos por minuto (y), con la temperatura (x). Probablemente, en este momento no puedas determinar dicha relación, pero una vez se halla estudiado detalladamente la función lineal estarás en capacidad de hacerlo.



Es posible establecer la función lineal de un fenómeno dado al representarlo gráficamente para poder predecir su comportamiento aún si se modifican las condiciones de dichos fenómenos.

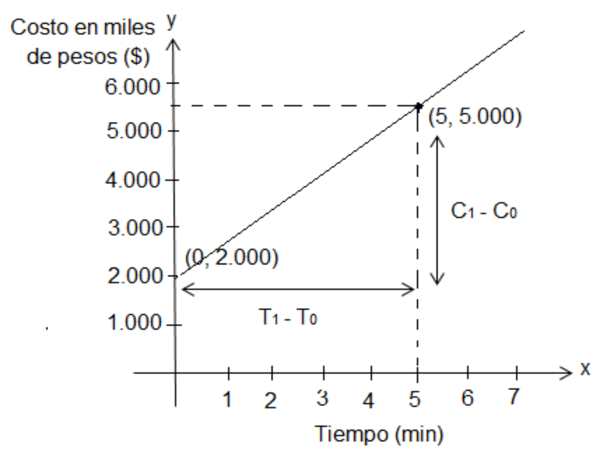
Ejemplo 12: Cobro de la tarifa de un taxi. Cuando abordamos un taxi en la ciudad de Neiva, observamos que el taxímetro marca una cantidad inicial, digamos \$2,000, y después de cierto tiempo de recorrido cambia a \$2,500, \$3,000, \$3,500, etc. Con los valores anteriores que relacionan la tarifa a pagar con el tiempo que dura la carrera podemos predecir el costo de un servicio de taxi.

La solución de este problema la analizaremos con la siguiente gráfica en el plano cartesiano, que en el eje horizontal nos muestra la variación del tiempo y en el eje vertical la del costo.



Como podemos observar, en cero minutos ya existe un costo inicial, y a partir de este la variación es constante hasta llegar a un momento final de 5 minutos; el costo para este tiempo es de \$5,500. Con los trazos auxiliares construimos un triangulo rectangulo, ¿Cual es la longitud del lado vertical?...¡Exacto!... \$3,500, es decir, la diferencia entre el costo final (C_1) y el costo final (C_0).

Ahora, ¿Cual es la longitud del lado horizontal?. Efectivamente es 5.



C_0= Costo inicial
C_1= Costo final
T_0= Tiempo inicial
T_1= Tiempo final

Ahora, ¿Cómo calculamos la razón de cambio de la tarifa del valor a pagar como función del tiempo?

Calculamos el cociente de $\dfrac{C_1 - C_0}{T_1 - T_0} =$ 700, con esto, $\dfrac{y}{x} = 700$ y despejando nos queda $y = 700x$, con lo que calculamos la variación del costo en función del tiempo. Sumamos el costo inicial 2,000, por lo tanto, ¿cuál es la expresión completa de la función?

La expresión seria $y = 700x + 2{,}000$

Con la formula establecida, calcula el costo para 7, 8 y 11 minutos.

2.1. Definición:

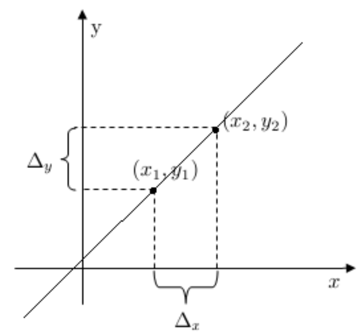
Una función f es lineal si la imagen de la variable independiente x se expresa en la forma $y = f(x) = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}$

La función $f(x) = mx + b$ está determinada por los números reales m y b. Este último se llama término independiente y corresponde al punto $(0, b)$ donde la recta corta al eje y. El coeficiente m de x es la pendiente de la recta, y se determina a través de dos puntos cualquiera de la gráfica de la función, por ejemplo, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos de la gráfica de $y = mx + b$ entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$

Pendiente de una recta (m)

La pendiente de una función lineal es la razón *elevación/desplazamiento*, donde el desplazamiento es la distancia horizontal entre dos puntos de la gráfica y la elevación es la distancia vertical entre los mismos puntos.



Si, (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de una recta con $x_1 \neq x_2$, entonces la elevación y el desplazamiento podemos escribirla como:

$$\text{Elevación } \Delta_y = y_2 - y_1; \text{ Desplazamiento } \Delta_x = x_2 - x_1$$

Definimos la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos de la siguiente manera:

$$m = \frac{\triangle_y}{\triangle_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

A partir de la definición de la pendiente es claro que, una recta horizontal tiene pendiente cero 0 y se le llama función constante. La rectas inclinadas hacia la derecha tiene pendiente positiva y las que se inclinan hacia la izquierda tiene pendiente negativa. El concepto de pendiente de una línea vertical no tiene sentido ya que implica la división entre cero pues en este caso $x_1 = x_2$, por lo tanto la pendiente de una línea vertical queda sin definir.

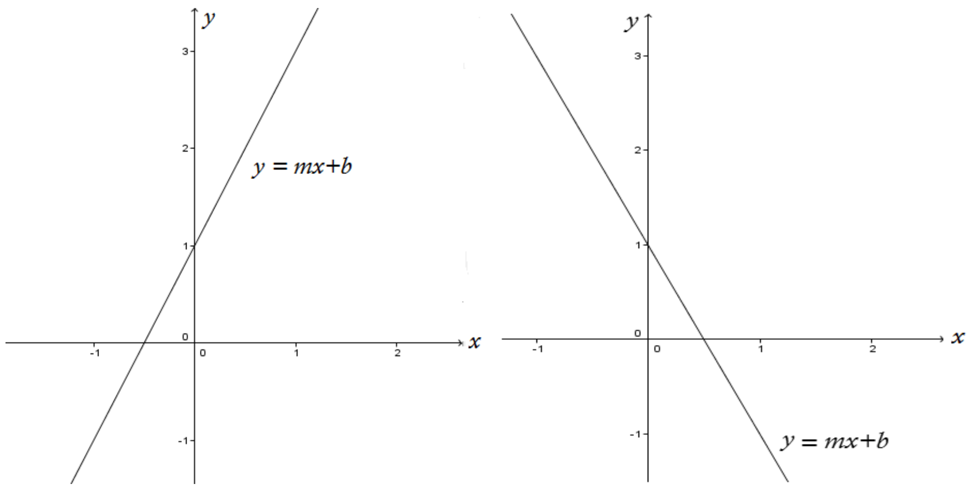
Características de la función lineal

1. El gráfico de una función lineal es siempre una línea recta.

2. El coeficiente m es la pendiente de la recta.

3. Cuando $m > 0$, la función lineal es *creciente*, y cuando $m < 0$, la función lineal es *decreciente*. Si $m = 0$ la función $f(x) = b$ se llama función constante

4. El *dominio* de una función lineal es todo $\mathbb{R}$.

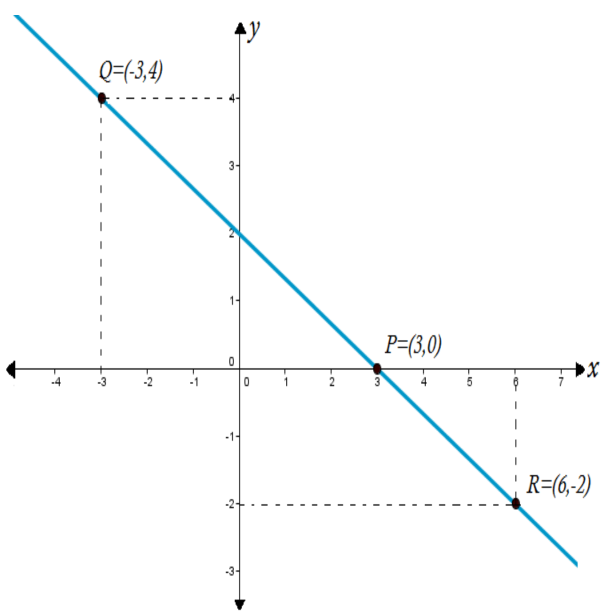


(c) Gráfica, $y = mx + b$,$m > 0$ (d) Gráfica, $y = -mx + b$,$m < 0$

Figura 2.1: Gráfica de la función lineal cuando $m > 0$ y $m < 0$

Ejemplo 13: Los puntos $P(3, 0)$, $Q(-3, 4)$ y $R(6, -2)$ están sobre la misma recta pues la pendiente entre P y Q es igual a la pendiente entre Q y R.

$$m_{PQ} = \frac{4 - 0}{-3 - 3} = -\frac{2}{3}; \quad \text{y la pendiente } Q \text{ y } R \quad m_{QR} = \frac{-2 - 4}{6 - (-3)} = -\frac{2}{3}$$



Ejemplo 14: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2)$ y tiene pendiente $m = 4$.

Solución: Como $m = 4$, entonces: $4 = \dfrac{y-2}{x-(-1)}$

De donde, $y - 2 = 4(x + 1)$ y así, $y = 4x + 6$

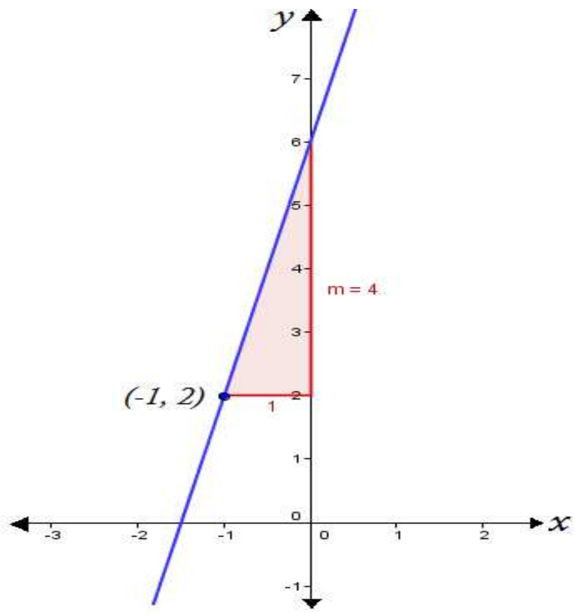


Figura 2.2: recta que pasa por $(-1, 2)$ y tiene pendiente $m = 4$

2.2. Forma punto pendiente de la ecuación de una línea recta

Dada la pendiente m y un punto (x_1, y_1) sobre la recta, encontramos una ecuación tal que cualquier punto (x, y) que está sobre la recta satisface la ecuación y recíprocamente cualquier punto que satisfaga la ecuación está sobre la recta. A partir de la definición de la pendiente de una recta podemos tomar el punto (x_1, y_1) dado y otro punto arbitrario cualquiera de la recta (x, y), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

De lo cual obtenemos la ecuación,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 15: La recta que pasa por los puntos $(4, -3)$ y $(6, 8)$ tiene pendiente

$$m = \frac{8 - (-3)}{6 - 4} = \frac{11}{2}$$

Como la recta buscada pasa por el punto $(6, 8)$, una ecuación *punto pendiente* de esa recta es,

$$y - 8 = \frac{11}{2}(x - 6)$$

Y despejando para y se obtiene:

$$y = \frac{11}{2}x - 25$$

Al mismo resultado llegamos si hubiéramos tomado el punto $(4, -3)$ en vez de $(6, 8)$

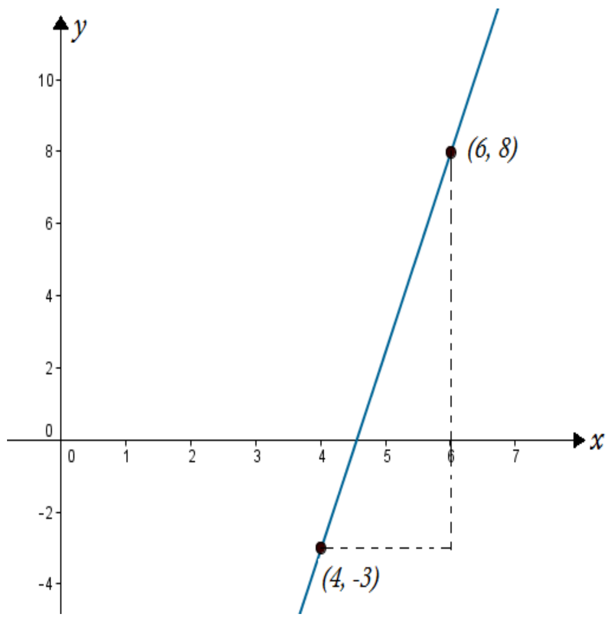


Figura 2.3:

2.3. Forma pendiente intersección

Supongamos que de una recta conocemos la pendiente m y el intercepto $(0, b)$ con el eje y. De esta manera la ecuación de la recta es

$$y - b = m(x - 0)$$

o bien

$$y = mx + b$$

Ecuación de una recta vertical

Las líneas verticales no tienen pendiente pues esta se hace infinitamente grande $(m \to \infty)$, pero tiene ecuación muy simple. La recta vertical tiene como ecuación $x = k$ donde k es la abscisa de cada uno de los puntos de la recta, además es una constante. Una recta vertical no representa una función, pues se tendría los puntos (k, y) para todo $y \in \mathbb{R}$ lo cual contradice la definición de función.

Por otro lado, y a diferencia de las rectas verticales debe notarse que la ecuación de una línea horizontal se puede escribir en la forma $y = c$ o $f(x) = c$, que se denomina **función constante** como ya hablamos antes, su gráfica es una recta paralela al eje x

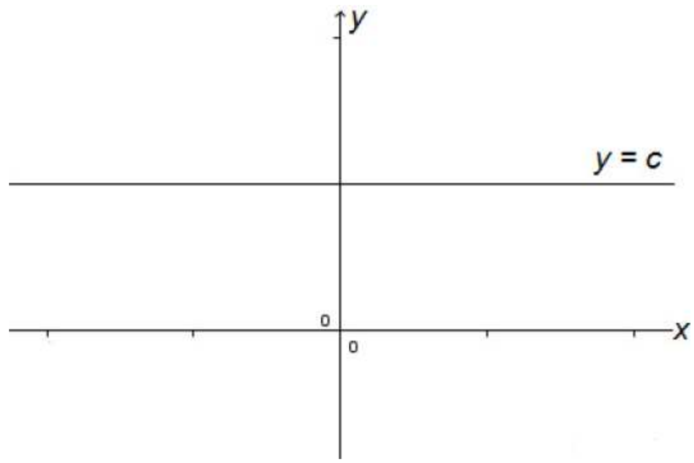


Figura 2.4: Gráfica de la función constante

2.4. Ecuación general de la recta

Una alternativa para escribir el conjunto de todas las ecuaciones de rectas posibles, incluyendo las verticales, es la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

donde A y B no pueden ser simultáneamente 0. Esta forma de la ecuación es llamada la **ecuación general de la recta**. Esto es cierto pues,

$$Ax + By + C = 0$$

Implica que

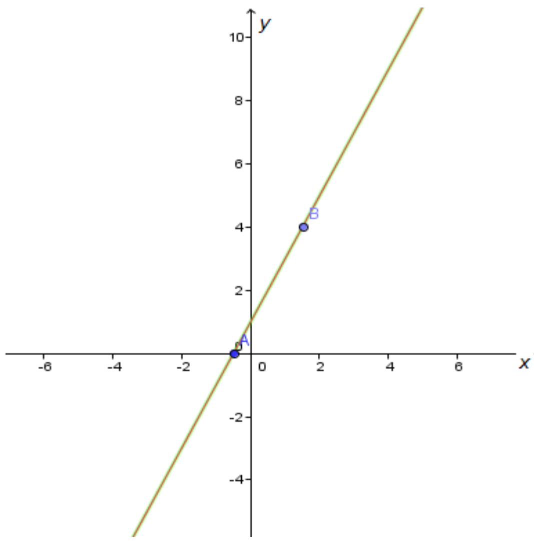
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},\ B \neq 0$$

Que es de la forma;

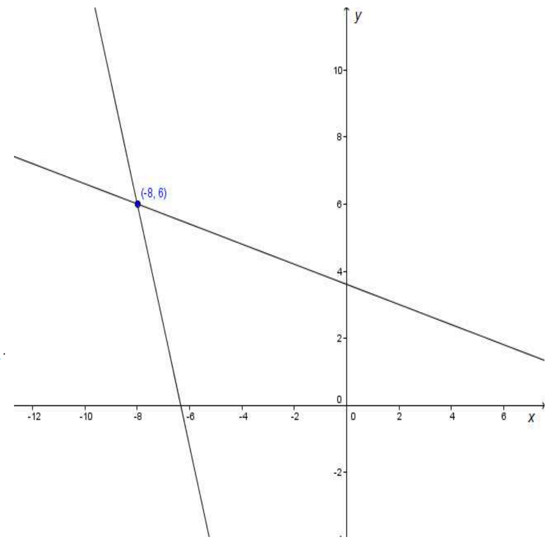
$$y = mx + b;\text{ con } m = -\frac{A}{B} \text{ y } b = -\frac{C}{B}$$

Dos rectas cuyas ecuaciones son dadas y que coinciden, lo harán en todos los puntos del plano o en un solo punto o no coinciden en ningún punto. En el primer caso se llaman rectas coincidentes , en el segundo caso se llaman intersecantes y en el tercer caso rectas paralelas.

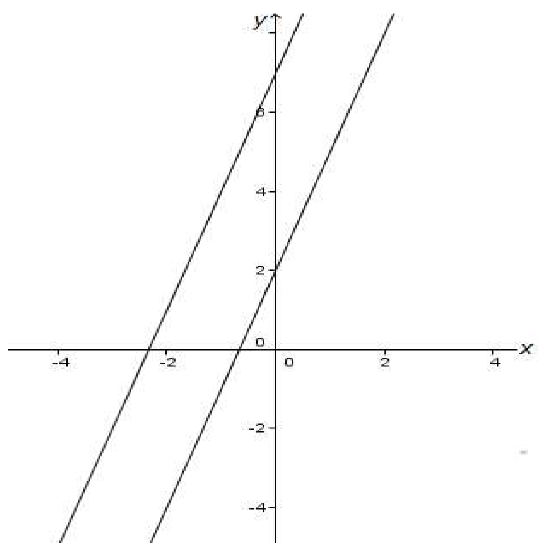
Las posiciones relativas de dos rectas en el plano son las siguientes:



(a) Rectas que coinciden en todos los puntos



(b) Rectas que coinciden en un solo punto



(c) Rectas paralelas

Figura 2.5: Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Si tenemos dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$ con A,B,D,E distintos de cero, el conjunto de puntos (x, y) que satisface las dos ecuaciones, es un conjunto infinito ó es una única pareja (x_0, y_0) ó es un conjunto vacío.

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Demostración

Sean l_1 y l_2 rectas distintas, cuyas pendientes sean m_1 y m_2, respectivamente. Si las ordenadas en el origen son b_1 y b_2. De esta manera $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$
Las rectas se intersecan en algún punto (x, y) si y sólo si los valores de y son iguales para alguna x; esto es, si

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

o sea, $(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$

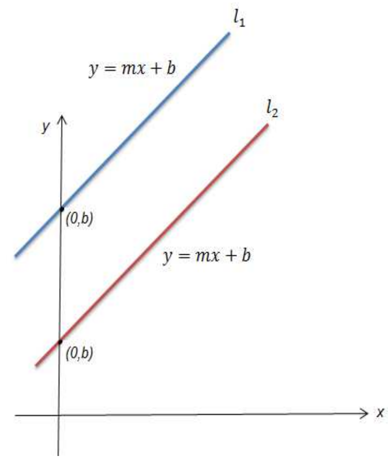


Figura 2.6:

x se puede despejar de esta última ecuación si y sólo si $m_1 - m_2 \neq 0$. Hemos demostrado que las rectas l_1 y l_2 se cortan solamente cuando $m_1 \neq m_2$. Por lo tanto, no se intersecan (son paralelas) si y sólo si $m_1 = m_2$.

Ejemplo 16: Consideremos las rectas cuya ecuación es $y = 2x + 2$ y $y = 2x + 5$, estas representan líneas paralelas y ambas tienen pendiente 2.

La recta $y = 2x + 5$ estará 3 unidades arriba que la recta $y = 2x + 2$, para todo valor de x.

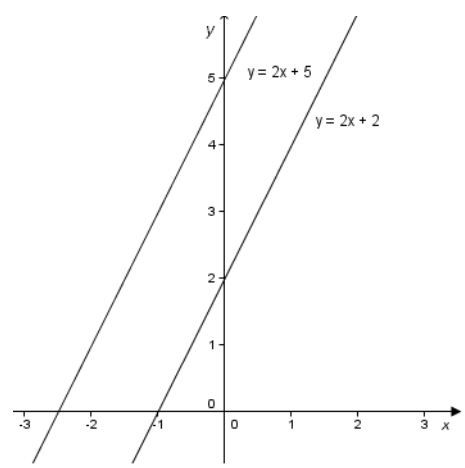


Figura 2.7: Rectas paralelas

Rectas perpendiculares

Teorema

Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$. De lo anterior se deduce que cualquier recta vertical es perpendicular a cualquier recta horizontal.

Demostración

Consideremos dos rectas que se cortan en un punto, como cada una de ellas es paralela a una recta que pasa por el origen $(0, 0)$, basta considerar que el punto de corte coincide con el origen $O(0, 0)$.

Sean $y = m_1x$ y $y = m_2x$ ecuaciones de las rectas que se cortan en el origen $O(0,0)$. Sean x_1 y x_2 reales distintos de 0. El punto $P(x_1, m_1x_1)$ pertenece a la primera recta y el punto $Q(x_2, m_2x_2)$ pertenece a la segunda recta. El ángulo POQ es recto si y solo si:

$[d(O,Q)]^2 + [d(O,P)]^2 = [d(P,Q)]^2$
$x_1^2 + (m_1x_1)^2 + x_1^2 + (m_2x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (m_2x_2 - m_1x_1)^2$
$= -2x_1x_2 + 2m_1x_1m_2x_2 = -2x_1x_2(1 - m_1m_2)$
Como $x_1x_2 \neq 0$ entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$

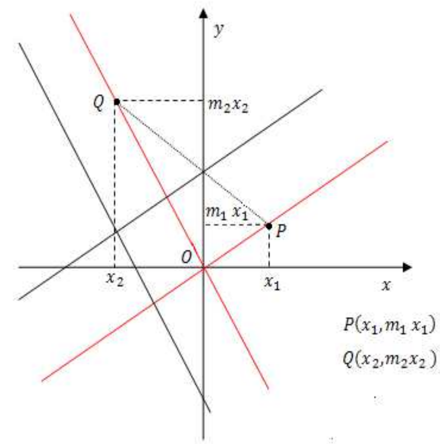


Figura 2.8:

Ejemplo 17: Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas cuya ecuaciones son $3x + 4y = 8$ y $6x - 10y = 7$, y que sea perpendicular a la recta $3x + 4y = 8$.

Solución: Primero buscamos la intersección de las dos rectas. Para ello podemos despejar por ejemplo x de una de las ecuaciones y la remplazamos en la otra.

De la primera ecuación $3x + 4y = 8$, entonces, $x = \dfrac{8-4y}{3}$ (1)

Reemplazamos en la segunda ecuación $6x + 10y = 7$ entonces,

$$6\left(\frac{8-4y}{3}\right) - 10y = 7 \Rightarrow 16 - 8y - 10y = 7 \Rightarrow -18y = -9 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Reemplazamos en (1) obtenemos:

$$x = \frac{8 - 4\left(\frac{1}{2}\right)}{3} = 2$$

Luego el punto de intersección es $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.

Ahora, como $3x + 4y = 8$

Despejando para y obtenemos: $y = -\dfrac{3}{4}x + 2$

Una recta perpendicular a ésta tiene pendiente $\dfrac{4}{3}$ y por lo tanto la ecuación de la recta buscada es $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{3}(x-2)$ o bien $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{13}{6}$

Ejemplo 18. La recta $y = -\frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$ es perpendicular a la recta de ecuación $5x - 3y + 2 = 0$ en el punto donde $x = -1$.

Esto es cierto pues,

$$5x - 3y = -2$$

Implica,

$$y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$$

Como $m = \frac{5}{3}$ por lo tanto la pendiente de la perpendicular será $-\frac{3}{5}$. Así que la ecuación de la pendiente que pasa por el punto $(-1, -1)$ es;

$$\frac{y+1}{x+1} = -\frac{3}{5}$$

Osea, $y = -\frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$

2.5. Aplicaciones

1. Un computador portátil cuesta \$ $1'200{,}000$ y cada año se devalúa 15 % de su precio original.

a. Encuentre una fórmula para el valor porcentual del computador portátil después de t años.
b. ¿ Cuál es el precio del computador portátil después de 5 años ?

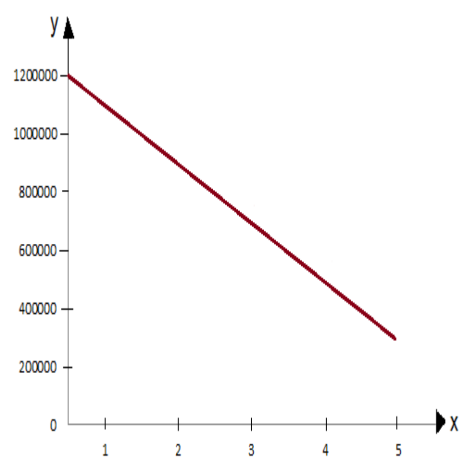
Solución:

a. Como el computador portátil se devalúa cada año 15 % entonces, la razón constante de devaluación es:

$1'200{,}000 \cdot 15\,\% = 180{,}000$

Luego la fórmula para calcular el valor V del computador portátil después de t años es:

$$V(t) = 1'200{,}000 - 180{,}000t$$



b. Luego de 5 años el computador portátil cuesta:

$$V(5) = 1'200{,}000 - 180{,}000(5) = 300{,}000 \text{ pesos.}$$

2. La empresa Gas-Neiva cobra el servicio de gas domiciliario de la siguiente manera: Un cargo fijo \$ 12,000, más cargo por el consumo en el bimestre, a razón de \$ 2,500 por

m^3.

a. ¿Cuánto deberá cancelar una familia a la que se le registro un consumo de $14m^3$ en el bimestre.
b. ¿Cuál es la fórmula que define esta función para un numero x de metros cúbicos consumidos?

Solución:

a. El valor del consumo se obtiene de la siguiente manera:

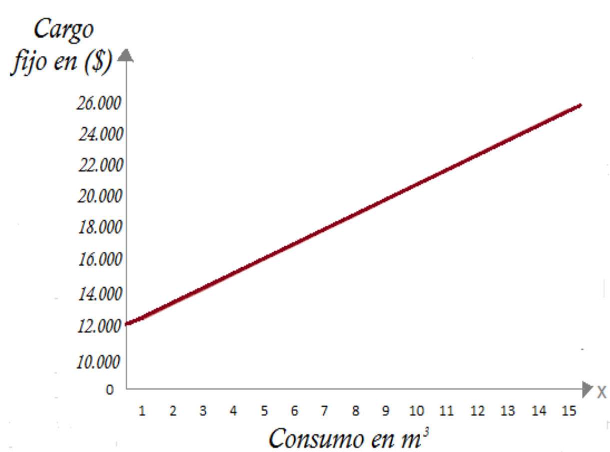
2,500 $\$/m^3 \cdot 14m^3 = \$35{,}000$

El costo a pagar por la factura es por lo tanto:

$$C_T = 12{,}000 + 35{,}500 = 47{,}000$$

b. Sea x la variable independiente que representa el volumen de gas consumido en un bimestre en m^3, sea y la variable dependiente que representa el valor facturado en pesos. Luego la fórmula que define esta función es $y = 2{,}500x + 12{,}000$.

Gráficamente tenemos:



3. Un móvil en el instante inicial está a $2m$ del origen y se aleja de este a una velocidad constante de 3 m/s.

a. ¿Cuál es la ecuación que describe su posición en función del tiempo?
b. ¿A qué distancia del origen se encuentra el móvil tres minutos después de iniciar a registrar el movimiento?
c. Represente gráficamente la función.

Solución:

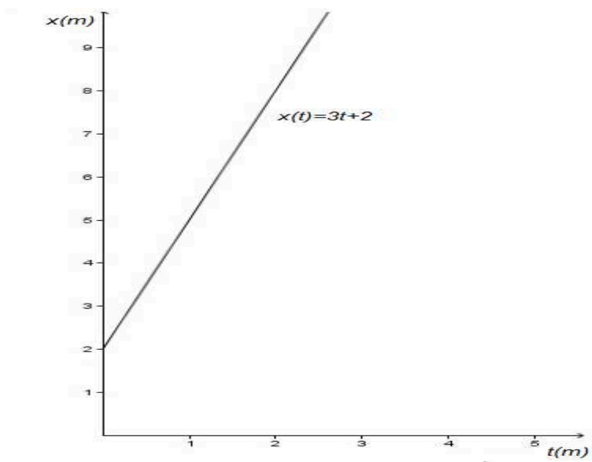
a. Ya que cuando $t = 0s$, $x = 2m$, la recta pasa por el punto $(0, 2)$; y además su pendiente que es la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo o velocidad es $m = 3$, luego; $x(t) = 3t + 2$ es la ecuación que rige el movimiento del automóvil.

b. Como 1 minuto equivale a 60 segundos, entonces 5 minutos $= 300s$.

Luego $x(5min) = x(300s) = 3(300) + 2 = 902m$.

c. La (Figura 5.15:) ilustra la posición del móvil con respecto al tiempo.

Gráficamente tenemos:



4. Las ventas de una fábrica de productos químicos local crecieron de \$ 6,500,000 en 1980 a \$ 11,000,000 en 1990. Suponiendo que las ventas se aproximan a una función lineal; Expresa las ventas $S(t) = Kt + s_0$ como una función del tiempo t.

Solución: La pendiente representa el crecimiento de las ventas en el periodo de tiempo dado por el problema, esto es:

$$m = \frac{11{,}000{,}000 - 6{,}500{,}000}{10 - 0} = \frac{4{,}500{,}00}{10} = 450{,}000$$

cuando $t = 0$, $S(0) = 6{,}500{,}000$, y por lo tanto la ecuación inicial que modela está situación es:

$S(t) = 450{,}000 + 6{,}500{,}000t$

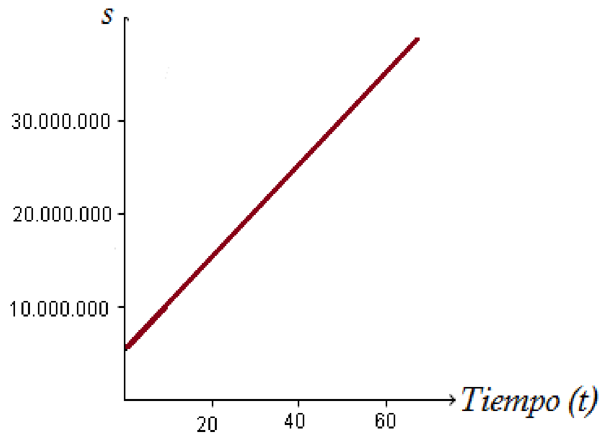


Figura 2.9:

En el capitulo siguiente nos ocuparemos específicamente del estudio detallado de la función Cuadrática, algunos modelos matemáticos sencillos que se pueden trabajar con esta función y sus aplicaciones en contextos reales.

Capítulo 3

FUNCIÓN CUADRÁTICA

A continuación presentaremos dos ejemplos de ambientación que permiten mostrar la importancia de la Función Cuadrática.

Ejemplo 19: En un club de Neiva hay 150 socios que pagan una cuota de \$60,000. El dueño del club desea incrementar sus ingresos, por lo que ordena un estudio, en el cual se recomienda reducir la cuota, ya que por cada \$1,000 pesos que esta disminuya, se inscribirán cinco nuevos socios. ¿En cuántos pesos debe reducirse la tarifa para obtener la máxima ganancia mensual?.

Para la búsqueda de la solución de este problema haremos una tabla donde se muestre la variación que sufre el ingreso al reducir la cuota. Según el estudio de mantenimiento al club, en la medida en que reduzca la cuota aumentara el número de socios, sin embargo, representara más ganancias el hecho de que se inscribirán más socios pagando una cuota menor?

En la tabla siguiente se presentan los ingresos correspondientes a varias reducciones en la cuota (x); en ella x representa el número de pesos que la cuota disminuye.

Cantidad en miles de pesos que disminuye la cuota *(x)*	No. de socios	Cuota en miles de (pesos)	Ingreso en miles de (pesos)
0	150	60	9000
1	155	59	9145
15	225	45	10125
20	250	40	10000
30	300	30	9000
40	350	20	7000

De acuerdo a lo ilustrado en la tabla se podrá afirmar: ¿Siempre que se reduce la cuota, aumenta el ingreso?. ¿Para qué valor de la reducción es el ingreso máximo?.

Para solucionar este problema podemos elaborar un modelo algebraico que describa las relaciones entre las reducciones a la cuota y el ingreso, y después aplicarle los métodos propios de las Matemáticas. Representaremos con x el número de pesos que disminuye la cuota y con y el ingreso.

El número de socios cuando la cuota se reduce x pesos es $150+5x$ y la cuota, $60000-x$ pesos. El ingreso se obtiene al multiplicar el número de socios por la cuota.

Por lo tanto:

$$y = (150 + 5x)(60000 - x)$$

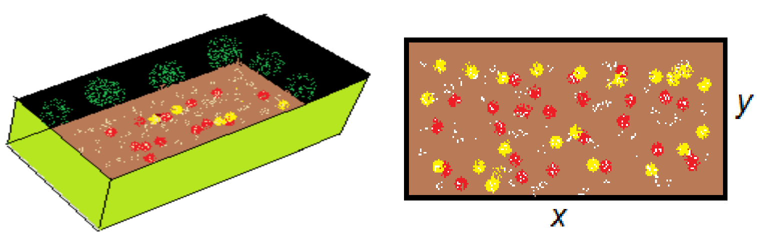
Simplificando, al efectuar el producto se obtiene:

$$y = 5x^2 - 299850x + 9000000$$

La función anterior es el modelo algebraico que representa de manera simbólica la relación entre todos los posibles descuentos a la cuota y al ingreso correspondiente. Se dice que este modelo es cuadrático porque el mayor exponente que tiene la variable independiente x es dos. Operando con el modelo que se encuentra la solución al problema matemático para, finalmente se transfirieran los resultados a la situación real.

Ejemplo 20:

En el jardín de la señora Matilde se quiere destinar una zona rectangular para hacer un huerto y se dispone de 56 metros lineales de malla de acero para cercar la zona. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se desea abarcar la mayor área posible?.



Analicemos las relaciones entre el área y las dimensiones del rectángulo.

El área de un rectángulo cualquiera se obtiene multiplicando su base por la altura correspondiente.

Representaremos con y la altura y con x la base del rectángulo.

Si el perímetro del rectángulo es igual a 56 metros, ¿cuánto suman la base y la altura?. La suma de la base y la altura del rectángulo es igual a 28 metros (la mitad del perímetro). De este modo una expresión para la altura es:

$$P = 2x + 2y$$

Así que

$$56 = 2(x + y)$$

O bien

$$y = 28 - x$$

Como el área del rectángulo es: base por la altura.

Entonce tenemos que:

$$A = x(28 - x)$$

$$y = x(28 - x)$$

Desarrollando el producto obtenemos el modelo algebraico $y = -x^2 + 28x$.

a) Modelo algebraico $f(x) = -x^2 + 28x$

Esta expresión es un modelo algebraico para el área del rectángulo que estamos considerando. Representa, en el lenguaje del álgebra, la relación entre todas las medidas de la base y el área correspondiente.

b) Modelo cuadrático

El modelo $y = -x^2 + 28x$ es un modelo cuadrático o de segundo grado ya que el grado del polinomio $-x^2 + 28x$ es 2, este es el máximo exponente con el que aparece la variable x. La función cuadrática puede ser completa $f(x) = -x^2 + 28x$ ó incompleta cuando le falta algún termino menos el cuadrático.

En este modelo intervienen dos variables x y y. El valor de y depende del valor de x, por tal razón decimos que y es la variable dependiente y x la variable independiente.

Lo anterior significa que el área del terreno de nuestro problema depende de la longitud de su base. Por ejemplo, si la base del terreno fuera de $10m$, el área seria:

$$y = -(10)^2 + 28(10)$$

$$y = -100 + 280$$

$$y = 180m^2$$

A continuación analizaremos un método de solución para funciones cuadráticas tal como el método de tabulación. Este método nos permite a través de una tabla investigar cómo las variaciones de la base afectan al área del rectángulo. Para elaborar la tabla daremos diferentes valores que podría tomar (x la base).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15
$f(x)$	0	27	52	75	96	115	132	147	160	171	180	187	195	195

La gráfica que hemos obtenido es una curva llamada parábola y el punto más alto de esta parábola se denomina vértice; la ecuación de la parábola es: $y = -x^2 + 28x$

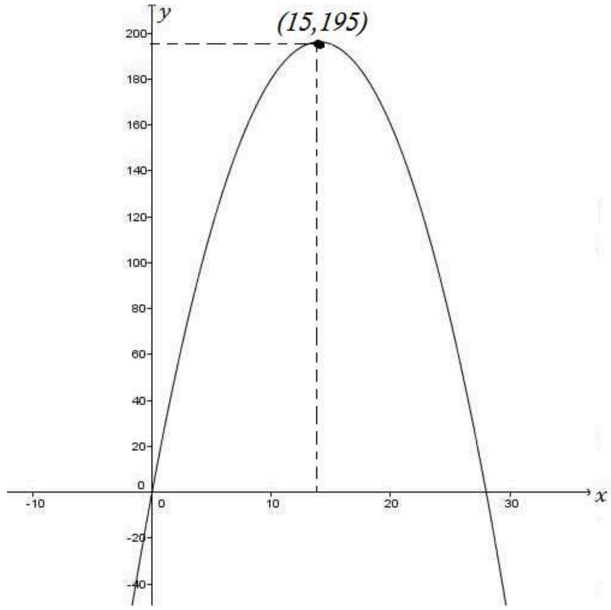


Figura 3.1: Gráfica de una curva cuadrática $y = -x^2 + 28x$

3.1. Definición

Una función f es cuadrática si la imagen de la variable independiente x se expresa en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, para algunas constantes a , b y c con $a \neq 0$. En la expresión anterior ax^2 es el termino cuadrático, bx es el termino lineal y c es el termino independiente. Como $f(x)$ está definida para todo valor de x, entonces $D_f = \mathbb{R}$.

Los puntos en los que la gráfica de la función corta al eje x se conoce como **raíz**. El vértice es el punto en el cual la gráfica alcanza su valor mínimo o máximo. El eje de simetría es una recta que permite observar que las parábolas son curvas simétricas.

Características de la función cuadrática

1. La gráfica de toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, se llama parábola y abre hacia arriba si $a > 0$ o abre hacia abajo si $a < 0$.

2. La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje y en el punto $(0, c)$.

3. La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje x cuando $b^2 - 4ac \geqslant 0$, y en tal caso, las abscisas de los puntos de intersección son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Su gráfica es una parábola cuyo vértice es el punto $\left[-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right]$

A continuación analizaremos las gráficas de algunas funciones cuadráticas cuando varia el coeficiente x^2

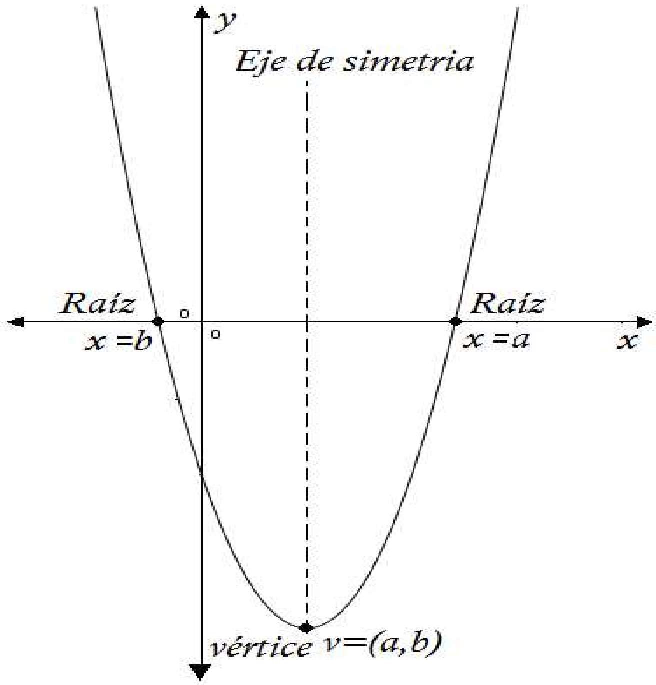


Figura 3.2: Gráfica de una curva cuadrática

La función $f(x) = ax^2+bx+c$ con $a \neq 0$ tiene como representación gráfica una parábola. Para trazar la gráfica de una parábola es importante conocer algunos puntos especiales de la función como son: las coordenadas del vértice y los interceptos con los ejes. A continuación analizaremos la función cuadrática:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Entonces:

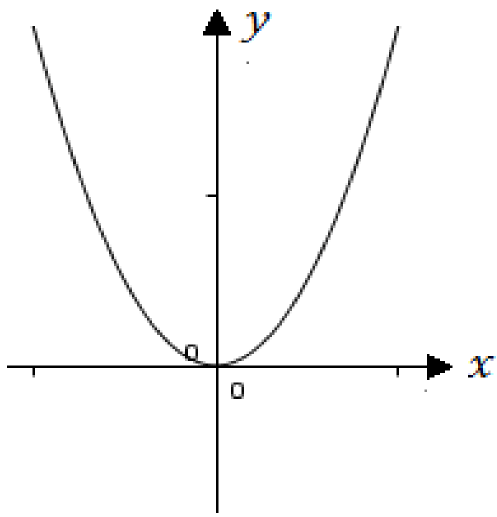
$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

Analizando la última expresión se tiene que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ es no negativo,

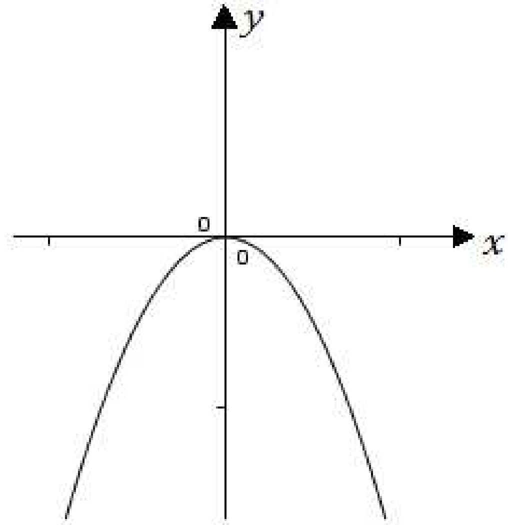
su menor valor es cero y se obtiene cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$

Ahora, $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$;

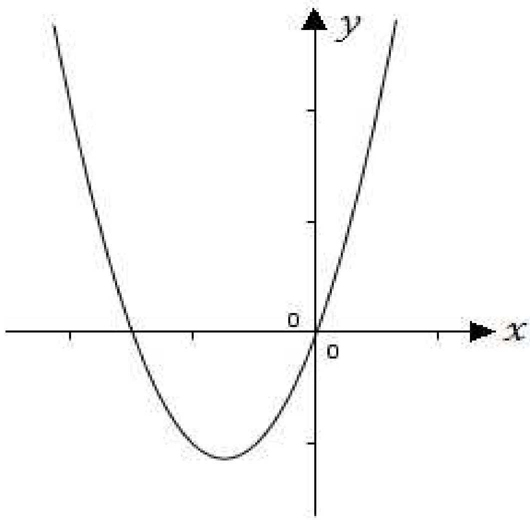
Así que el vértice de la función es $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.



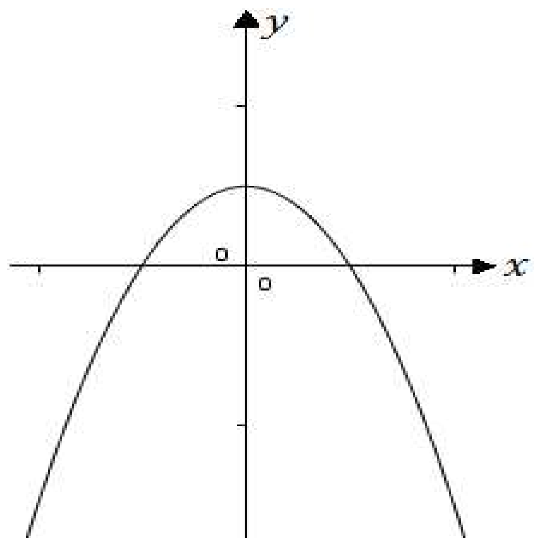
(a) $y = ax^2, a > 0$



(b) $y = -ax^2, a < 0$



(c) $y = ax^2 + bx + c$; $b^2 - 4ac > 0$; $a > 0$



(d) $y = ax^2 + bx + c$; $b^2 - 4ac > 0$; $a < 0$

Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba ya que,

$$y = f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Se observa que si $a > 0$ y si $4ac - b^2 \geq 0$ entonces $y \geq 0$.

Y si $a > 0$ y $4ac - b^2 \geq 0$, la parábola abre hacia abajo.

$y = 0$ si y solo si;

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

entonces;

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1.1}$$

De esta forma las dos expresiones anteriores permiten hallar las raíces de la ecuación cuadrática.

Ejemplo 21: Graficar la función $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ encontrar las raíces, las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

Como $f(x)$ esta definida para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $D_f = \mathbb{R}$. Por otro lado, Como $a = 2 > 0$ la parábola abre hacia arriba.

Las Coordenadas del vértice son: $x = -\dfrac{b}{2a}$; $x = -\dfrac{5}{2(2)} = -\dfrac{5}{4}$

$$y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2\left(\frac{-5}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{-5}{4}\right) - 3 = \frac{49}{8}$$

Luego $V\left(-\dfrac{5}{4}, -\dfrac{49}{8}\right)$ y corresponde al punto mínimo en la gráfica de la función.

El eje de simetría es: $x = -\dfrac{5}{4}$

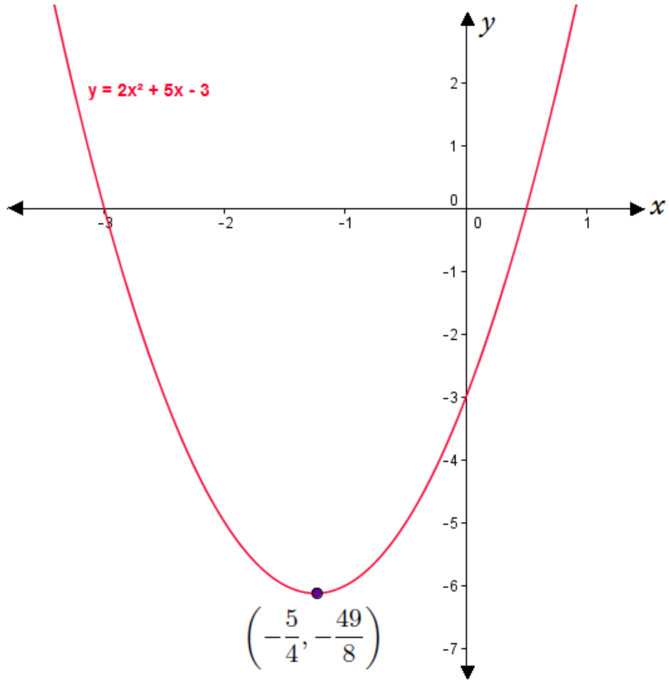
Para hallar las raíces de la ecuación cuadrática utilizamos las ecuaciones (3.0.1)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)}}{4} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$x_1 = \dfrac{-5 + 7}{4} = \dfrac{1}{2}$ ó $x_2 = \dfrac{-5 - 7}{4} = -3$

El intercepto en el eje y es $(0, -3)$



Ejemplo 22. Caída libre de un cuerpo Una piedra se arroja verticalmente desde el piso hacia arriba con una velocidad inicial de $10m/s$ la ecuación que modela el movimiento de la piedra es $S(t) = -5t^2 + 10t$, donde S metros es la distancia de la piedra desde el punto de partida a los t segundos y el sentido positivo es hacia arriba. Calcular:

a. ¿Hasta qué altura sube la piedra?

b. ¿Cuántos segundos tardará en caer al suelo?

c. ¿Cuántos segundos tardará en alcanzar el punto más alto?

d. ¿Qué altura alcanzara a los $0,5$ segundos?

e. Elabore una gráfica que represente la variación de la distancia en función del tiempo

Solución: Vemos que la función que describe el movimiento de la piedra es una función cuadrática, donde la variable independiente es el tiempo t, por lo tanto el dominio son los números reales positivos y el cero.

Los parámetros de la ecuación cuadrática son, $a = -5$ $b = 10$ $c = 0$. Como $a < 0$ la parábola abre hacia abajo, por lo tanto la función tiene un máximo en (h, k) donde k representa la altura máxima hasta la cual sube la piedra.

Y en este punto el valor $t = h$ de la abscisa indica el instante en el que alcanza dicha altura máxima.

De esta manera,

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2(-5)} = 1$$

$$k = S(1) = -5(1)^2 + 10(1) = -5 + 10 = 5$$

El vértice es por lo tanto $V(1,5)$ y significa que la piedra sube hasta $5m$ de altura y tarda 1 segundo en hacerlo.

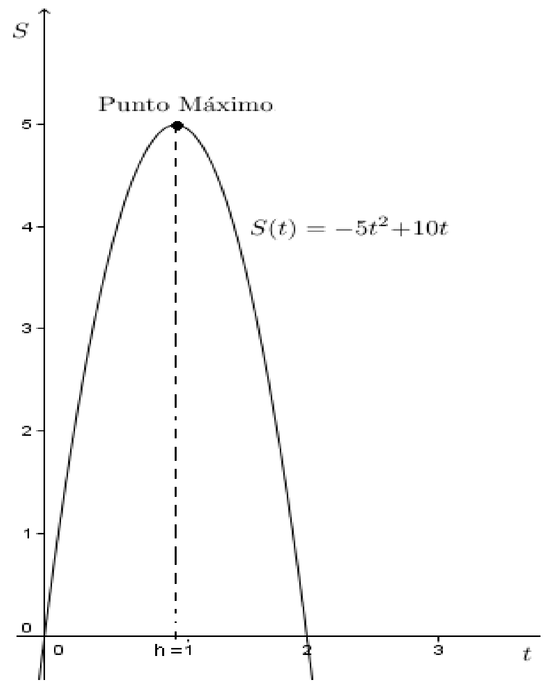


Figura 3.3:

Hallemos las raíces:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2}}{-10} = \frac{-10 \pm 10}{-10}$$

O bien, $t = 0s$ o $t = 2s$
$t_1 = (0,0)$ y $t_2 = (2,0)$

Esto significa que la piedra llega nuevamente al punto a los 2 segundos.

Cuando $t = 0{,}5s$ la posición de la piedra es:

$$S(0{,}5) = -5(0{,}5)^2 + 10(0{,}5) = 3{,}75m$$

Relación entre los coeficientes de una ecuación cuadrática y sus raíces.

Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Se verifica que la suma de las raíces es:

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + \left(\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac} - b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

Ahora, el producto de las raíces es:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2-4ac}) \cdot (-b + \sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b\sqrt{b^2-4ac} + b\sqrt{b^2-4ac} - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Llamamos **discriminante** de la ecuación a la expresión denominada por $\triangle$ y definida por:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

El signo $\triangle$ determina la naturaleza de las soluciones de la ecuación.

Se tiene que:

Si $\triangle > 0$ entonces las soluciones son números reales y distintos.
Si $\triangle = 0$ entonces las soluciones son números reales e iguales.
Si $\triangle < 0$ entonces son números complejos.

Ejemplo 23. Determine la suma de las soluciones de la ecuación $3x^2 - 9x - 16 = 0$.

Solución:
Notamos que no es necesario obtener las soluciones para determinar su suma, pues podemos aplicar directamente la propiedad.

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ para este caso $a = 3$ y $b = -9$ entonces tenemos $x_1 + x_2 = \dfrac{9}{3} = 3$

Ejemplo 24. Determine el producto de las soluciones de la ecuación
$2x^2 + x - 15 = 0$

Solución:
Aplicaremos la propiedad del producto de las raíces, entonces obtenemos que :

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ para $a = 2$ y $c = -15$ y ahora bien, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{-15}{2}$

Ejemplo 25. Determine una ecuación cuadrática sabiendo que sus raíces son: $x_1 = 5$ y $x_2 = -6$

Solución :
Aplicando las propiedades que relacionan los coeficientes de una ecuacíon cuadrática con sus soluciones obtenemos:

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \Rightarrow -1 = \dfrac{-b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow -30 = \dfrac{c}{a}$

Podemos asignar a a cualquier valor, en particular hacemos $a = 1$ y entonces obtenemos $b = 1$ y $c = -30$ y la ecuación pedida es:

$$x^2 + x - 30 = 0$$

3.2. Alteraciones de la función cuadrática

Si el coeficiente del término cuadrático $a \in \mathbb{R}$ es mayor que uno ($a > 1$), podemos observar que a medida que el coeficiente es mayor la función se comprime positivamente hacia el eje de las ordenadas "y".

Por ejemplo, si representamos en un mismo par de ejes coordenados las gráficas de las funciones: $f(x) = 10x^2$, $f(x) = 5x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = x^2$, podemos ver el efecto que tiene el valor del coeficiente del término cuadrático en la parábola:

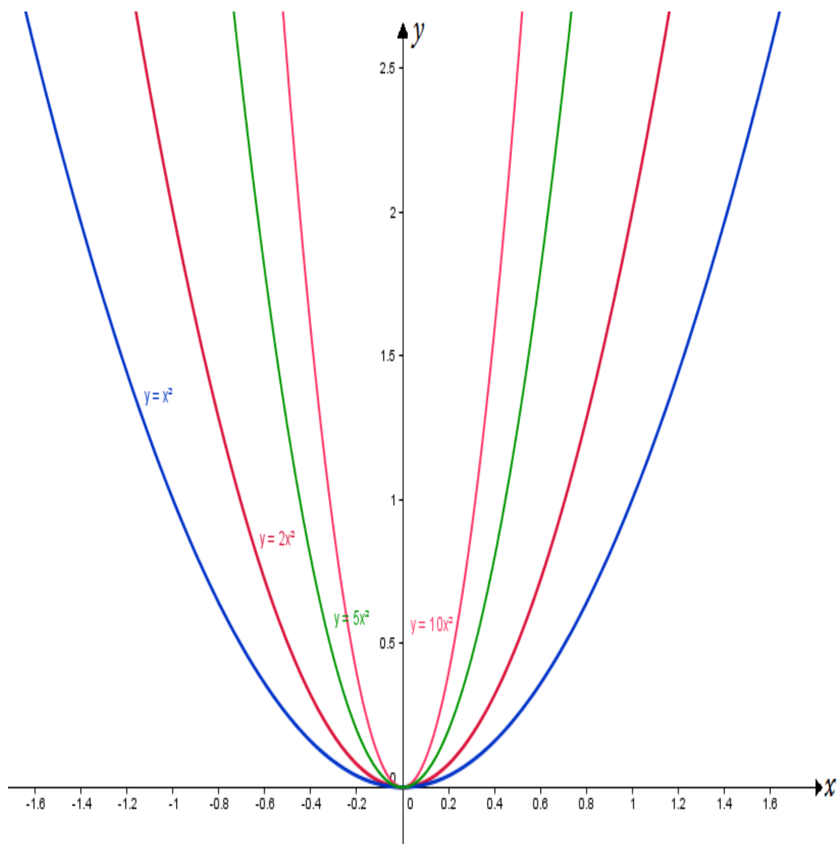


Figura 3.4: Gráfica de una curva cuadrática $f(x) = ax^2$ si $a > 1$

Por el contrario si $0 < a < 1$, $a \in \mathbb{R}$, podemos observar que a medida que este se hace más pequeño el comportamiento de la función se ensancha hacia el eje de las abscisas "x".

Por ejemplo, si representamos en un mismo par de ejes coordenados las gráficas de las funciones: $f(x) = 0{,}8x^2$, $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2$, $f(x) = \dfrac{2}{5}x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, $f(x) = \dfrac{1}{10}x^2$

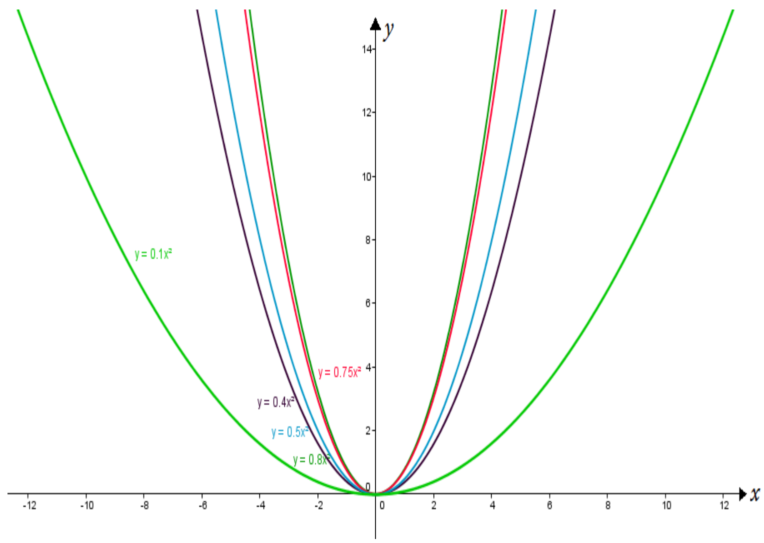


Figura 3.5: Gráfica de una curva cuadrática $f(x) = ax^2$, $0 < a < 1$

Ahora si al término cuadrático se le asocia un coeficiente $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$, podemos observar que a medida que este se hace mas pequeño el comportamiento de la función se comprime negativamente hacia el eje de las ordenadas negativo "$-y$". Por ejemplo, observemos el efecto que tiene la parábola de las siguientes funciones: $f(x) = -0{,}1x^2$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$, $f(x) = -0{,}8x^2$, $f(x) = -2x^2$, $f(x) = -5x^2$, $f(x) = -10x^2$, $f(x) = -20x^2$

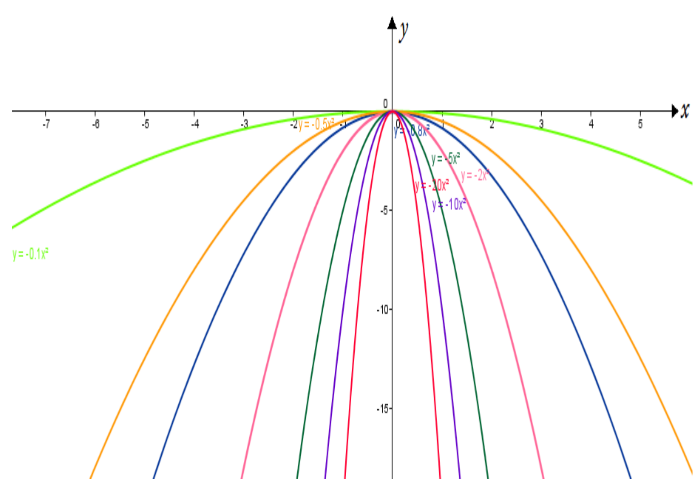
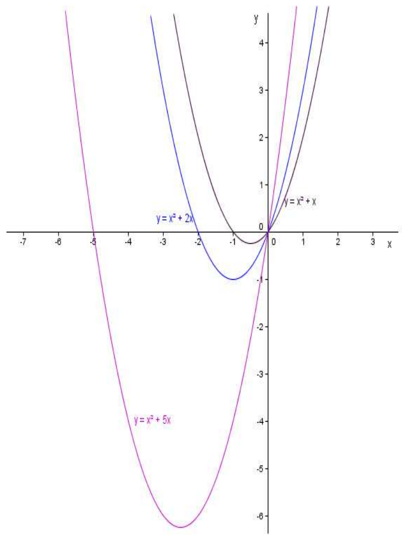


Figura 3.6: Gráfica de una curva cuadrática $f(x) = ax^2$ si $a < 0$

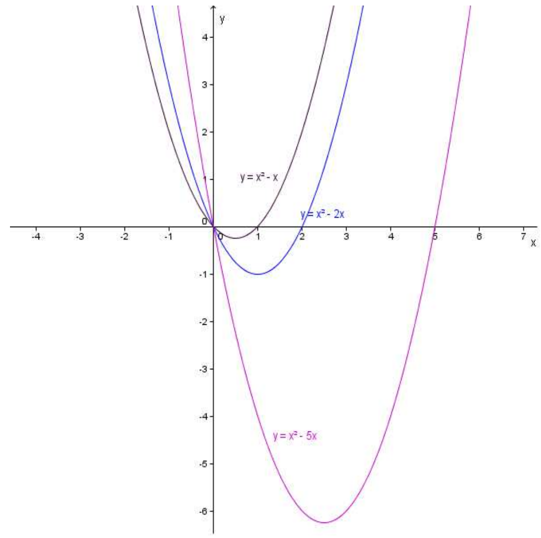
Ahora observemos que ocurre con el termino lineal, es decir si $f(x) = ax^2 + bx$, si el coeficiente del término cuadrático $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba y posee un mínimo, pero si $a < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y posee un máximo, pero observemos como se comporta la función al agregar el término lineal. Por ejemplo, analicemos el comportamiento de la parábola en las funciones:

Cuando $b > 0$; $f(x) = x^2 + x$, $f(x) = x^2 + 2x$, $f(x) = x^2 + 5x$

Cuando $b < 0$; $f(x) = x^2 - x$, $f(x) = x^2 - 2x$, $f(x) = x^2 - 5x$



(a) Cuando $b > 0$



(b) Cuando $b < 0$

Figura 3.7: Gráfica de curvas cuadráticas

De las gráficas anteriores se observa que cuando $b > 0$, el desplazamiento de las parábolas es a la izquierda, y cuando el valor de $b < 0$ el desplazamiento es a la derecha, en ambas situaciones a medida que el valor absoluto de b aumenta la ordenada del vértice de la parábola toma un valor negativo cada vez más pequeño. En los dos casos las parábolas coinciden en el origen.

Ahora se analizará el comportamiento de la función cuadrática cuando el término independiente se ve modificado, manteniendo constantes los valores de a y b, por lo que la forma de la función es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

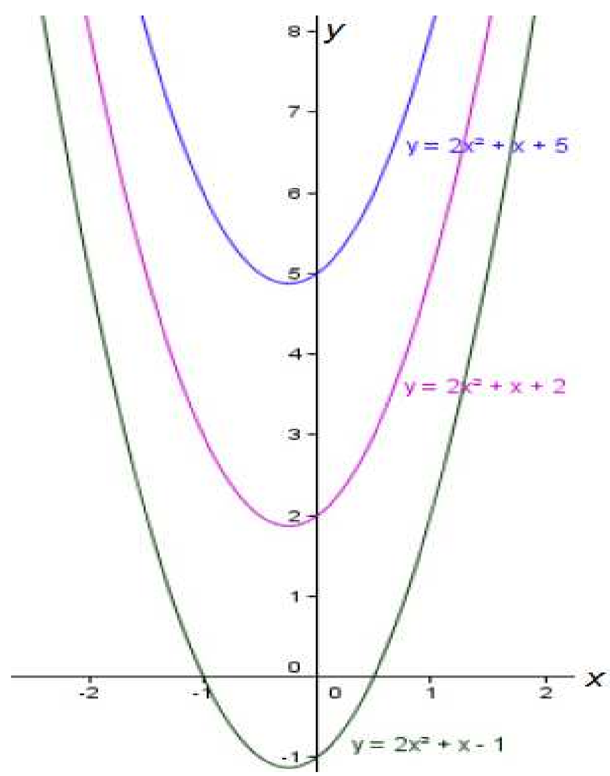


Figura 3.8: Gráfica de una curva cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ si $c < 0$

En la gráfica (Figura 5.27) se observa que el desplazamiento de las parábolas es vertical, es decir la ordenada del vértice sube hacia los $y \in \mathbb{R}^+$ si $c > 0$ y desciende hacia $y \in \mathbb{R}^-$ si $c < 0$; conservando las características del efecto que proporciona el término cuadrático y el término lineal.

3.3. Forma canónica de la ecuación de segundo grado

Una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ se puede expresar en la forma

$$y = a(x-h)^2 + k$$

Donde $(h.k)$ representa el vértice de la función.

Esta expresión se conoce como forma canónica. Para llegar a esta forma debemos completar un trinomio cuadrado perfecto en la función $f(x) = y = ax^2 + bx + c$.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ puede escribirse en la forma canónica como,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x + 5 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 + 3 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 \\ &= 2(x-1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Y la función $g(x) = 2x^2 + 4x - 4$ queda en la forma canónica como bien $g(x) = 2(x-1)^2 - 6$. De esta manera los correspondientes vértices son $V_f = (-1, 3)$ y $V_g = (-1, -6)$ y lo ejes de simetría son $x = 1$ y $x = -1$ respectivamente.

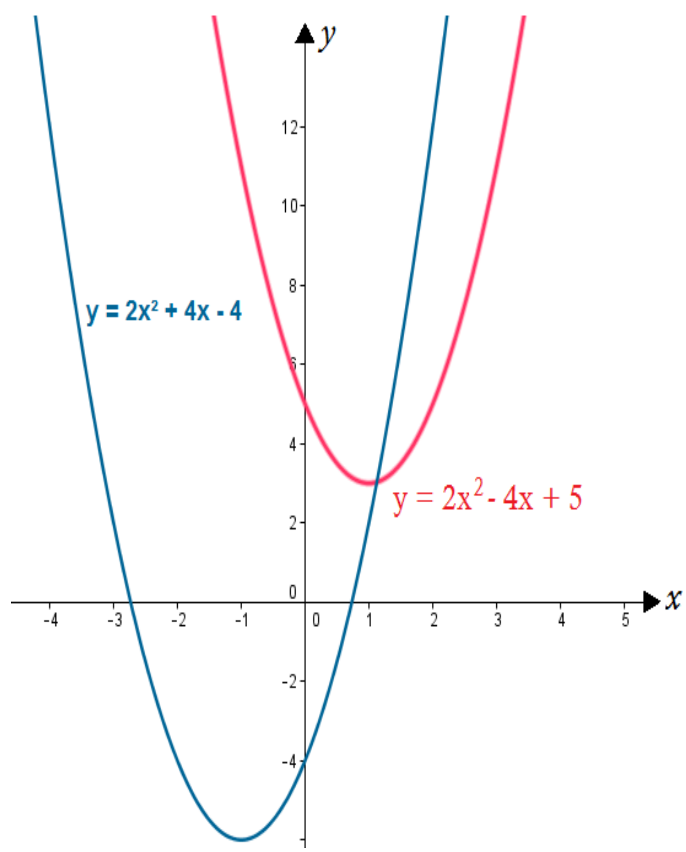


Figura 3.9:

Ejemplo 26: Expresa las siguiente función cuadrática en forma canónica

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 1$$

Solución:

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 1 = 2\left(x^2 + 3x - \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{4}\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right] = 2\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 - \frac{11}{2}$$

Ahora, $f(x) = 0$ siempre que

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} = 0$$

o bien,

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

Y como en la función original $a = 2$, entonces $f(x)$ toma la forma:

$$f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} \cdot 2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$$

Con lo que $V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ y el eje de simetría $x = -\frac{3}{2}$.

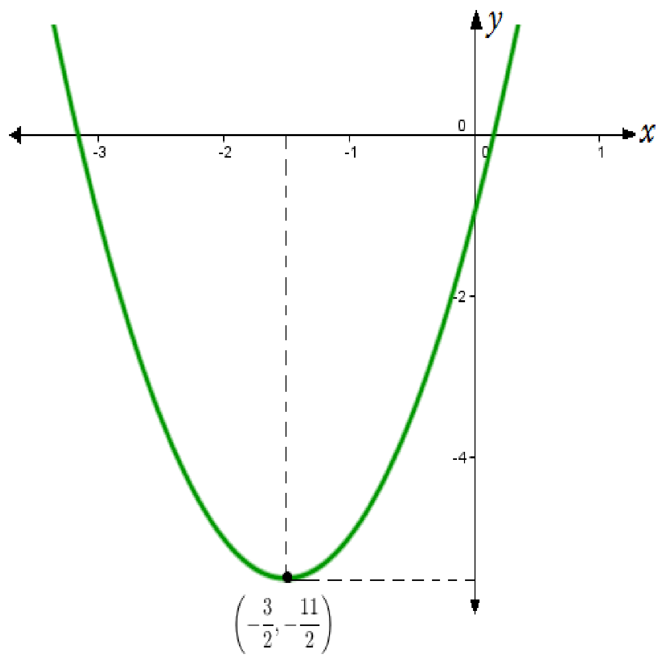


Figura 3.10: Gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$

3.4. Expresión factorizada de la función cuadrática

Si conocemos las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ podemos expresar la correspondiente función de segundo grado en su forma factorizada:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo 27:

Si $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$, las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 2x^2 - 5x - 3 = 0$ son:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

Y por lo tanto $x_1 = 3$ y $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Y la expresión factorizada queda: $f(x) = 2(x - 3)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

3.5. Sistemas donde aparecen una función lineal y una cuadrática

Un sistema mixto de ecuaciones es un sistema formado por una función cuadrática (parábola) y una función lineal (recta) y debemos buscar la intersección de las dos curvas. De manera gráfica podemos ver que es posible encontrar dos intersecciones o una intersección o ninguna intersección.

Para calcular los puntos de corte de la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con una recta $y = mx + n$ se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneamente.

$$\begin{cases} y &= ax^2 + bx + c \\ \\ y &= mx + n \end{cases}$$

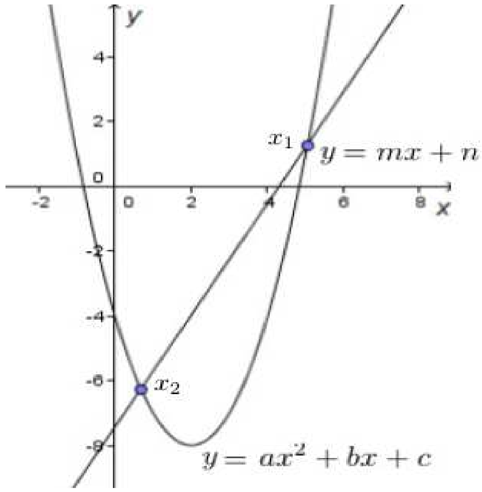
Podemos resolver este sistema de ecuación usando el método de igualación, es decir,

$$ax^2 + bx + c = mx + n$$

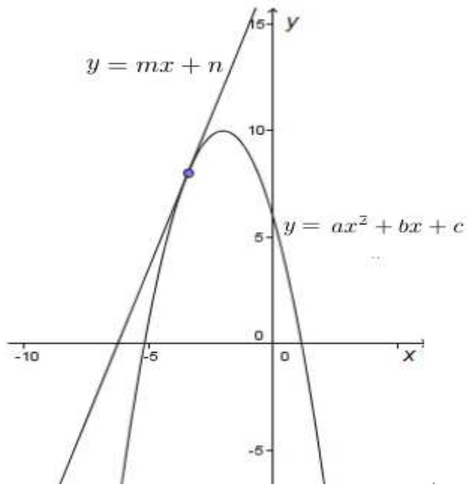
$$ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$$

esta ecuación puede tener tres tipos de resultado según indique el discriminante:

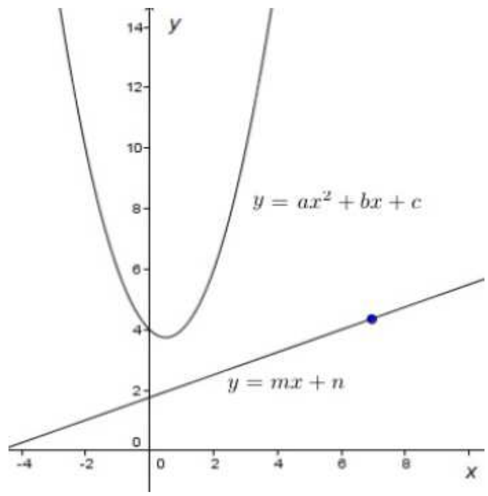
1. Si $\triangle > 0$, la recta corta la parábola en dos puntos x_1 y x_2, entonces la recta es secante.
2. Si $\triangle = 0$, la recta corta la parábola en un punto $x_1 = x_2$, entonces la recta es tangente a la parábola.
3. Si $\triangle < 0$, la recta no corta la parábola.



(a) La recta corta la parábola en dos puntos



(b) La recta corta la parábola en un punto



(c) La recta no corta la parábola

Ejemplo 28. Resolver el sistema: $\begin{cases} y &= 2x^2 - 8x + 8 \\ y &= 2x \end{cases}$

Solución: Si igualamos las ecuaciones obtenemos,

$$2x^2 - 8x + 8 = 2x$$

o bien,

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

Hallamos las raíces utilizando la formula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{con } a = 2,\ b = -10,\ c = -3$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(8)}}{2(2)} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{36}}{4} \\ &= \frac{10 \pm 6}{4} \end{aligned}$$

Luego, $x_1 = 4$ o $x_2 = 1$, con lo cual los puntos de intersección son $(x_1, y_1) = (4, 8)$ y $(x_2, y_2) = (1, 2)$

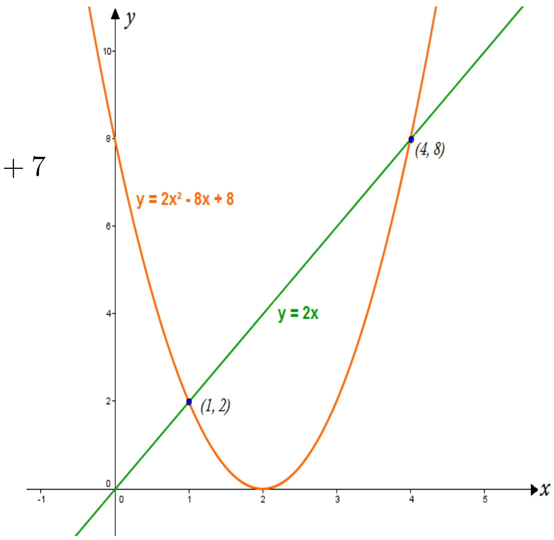


Figura 3.11:

Ejemplo 29. Resolver el sistema: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 7 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$

Solución:

Si igualamos las ecuaciones obtenemos,

$$x^2 - 4x + 7 = 2x - 2$$

O bien,

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$$

Luego hay una raíz repetida $x = 3$. Los puntos de intersección son $x_1 = 3 \;\; y_1 = 2x_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4$, o bien, $(x_1, y_1) = (3, 4)$

Ejemplo 30. Encuentre los puntos de intersección de la recta $y = -2x + 2$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x - 2$ y bosqueje ambas gráficas en el mismo plano coordenado.

Igualando las dos ecuaciones tenemos:

$$-2x + 2 = 2x^2 - 4x - 2$$

O bien,

$$0 = 2x^2 - 4x - 2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$$

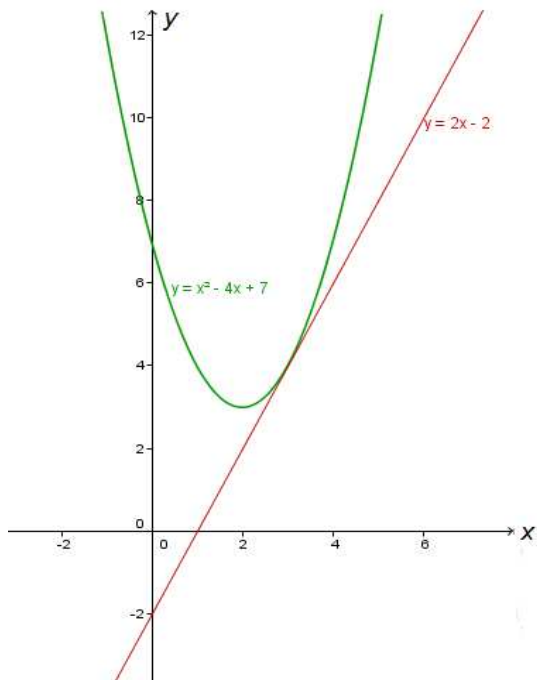
$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow 2[(x - 2)(x + 1)]$$

Luego, $x = -1$ y $x = 2$

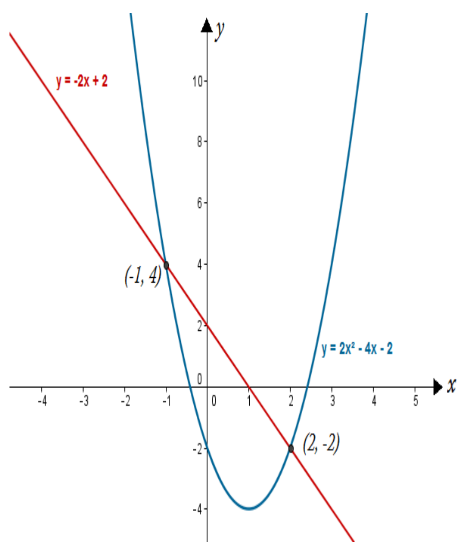
Sustituyendo los valores de x en la ecuación $y = 2x^2 - 4x - 2$, obtenemos:

Si $x = -1, \; y = 4$

Si $x = 2, \;\; y = -2$



Entonces los puntos de intersección son $(-1, 4)$ y $(2, -2)$ como podemos ver en la siguiente gráfica:



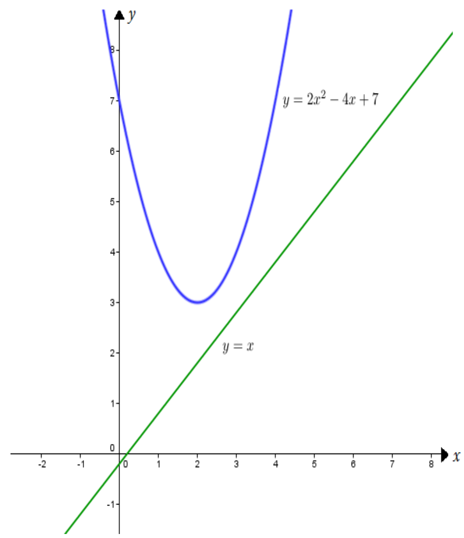
Ejemplo 31. Encuentre los puntos de intersección de la recta $y = x$ y la parábola $y = 2x^2 - 4x + 7$ y bosqueje ambas gráficas en el mismo plano coordenado.

Igualando las dos ecuaciones tenemos:

$$x^2 - 5x + 7 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{5 \pm 3i}{2}$$

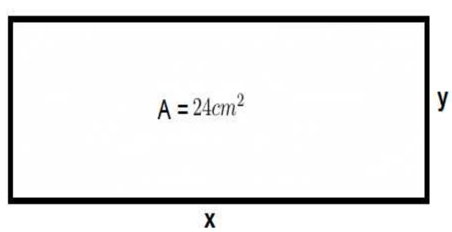
Entonces los valores complejos de x indican geométricamente que el sistema no tiene solución.



3.6. Algunos modelos matemáticos que se puede desarrollar a partir de la ecuación cuadrática

Ejemplo 32. El perímetro de un terreno rectangular es $20cm$ y su área mide $24cm^2$.Determine las dimensiones del terreno.

Solución: Llamaremos x e y respecivamente a las dimensiones de la base y la altura del terreno.



Luego, $2x + 2y = 20cm$, o bien, $x + y = 10$ (5.4.2).

Por otro lado, $xy = 24$ (5.4.3).

Despejamos de la ecuación (5.4.2) y reemplazamos en (5.4.3):

$$x(10-x) = 24 \rightarrow 10x - x^2 = 24$$

Así que, como $x^2 - 10x + 24 = (x-6)(x-4) = 0$

Por lo tanto las soluciones para x son:

$$x_1 = 6 \to y_1 = 4$$

$$x_2 = 4 \to y_2 = 6$$

Por lo tanto las dimensiones del terreno rectangular es $6cm$ de largo y $4cm$ de ancho o recíprocamente.

Ejemplo 33. La diferencia de dos números es -5 y la suma de sus cuadrados es 97. Determine dichos números.

Sean x e y los números desconocidos, tenemos entonces:

$x - y = -5 \qquad (1)$

$x^2 + y^2 = 97 \qquad (2)$

De la ecuación (1) al despejar x se obtiene:

$$x = -5 + y$$

Y al reemplazar x en la ecuación (2) nos queda:

$$(-5+y)^2 + y^2 = 97 \Leftrightarrow y^2 - 5y - 36 = 0$$

Cuya solución es $y_1 = 9$ y $y_2 = -4 \quad y = 9$ o $y = -4$

Por lo tanto si $y = 9$, $x = 4$ y si $y = -4$ $x = -9$

Ejemplo 34. La suma de dos números es $\dfrac{7}{10}$ y la suma de sus recíprocos es 7. Determine dichos números.

Sean x e y los números, entonces tenemos:

$x + y = \dfrac{7}{10} \qquad (1)$

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 7 \qquad (2)$

De la ecuación (1) despejamos a y

$$y = \frac{7}{10} - x$$

Resolviendo la ecuación (2) y reemplazando en la ecuación (1), obtenemos:

$$\frac{x+y}{xy} = 7 \Leftrightarrow x + y = 7xy \Leftrightarrow xy = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{10} = xy \qquad (3)$$

Reemplazamos y en la ecuación (3), por lo tanto:

$$\frac{1}{10} = x\left(\frac{7}{10} - x\right)$$

O bien,

$$10x^2 - 7x + 1 = 0$$

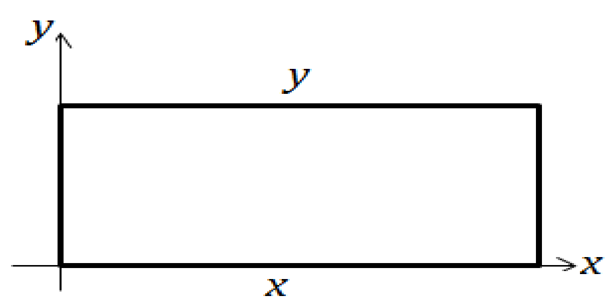
Las soluciones para x son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{5}$

Si $x_1 = \frac{1}{2}$ entonces $y = \frac{1}{5}$ y si $x_2 = \frac{1}{5}$ entonces $\frac{1}{2}$

Por lo tanto los números pedidos son $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{5}$

Ejemplo 35. Se tiene un terreno en forma rectangular de lados x e y. Determinar el área y las dimensiones del mayor campo rectangular que se puede cercar con 650 metros de malla.

Solución:



Denotemos x el largo del terreno y y el ancho como se muestra en la figura. Como el perímetro es el largo de la malla tenemos; $2x + 2y = 650$, por lo tanto,

$$2y = 650 - 2x$$
$$y = \frac{650 - 2x}{2} = 325 - x$$

Luego el área es,

$$A(x) = x(325 - x) = 325x - x^2$$

La posible área es el valor máximo de la función $A(x) = -x^2 + 325x$, el cual ocurre en el vértice de la gráfica de la función.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-325}{2(-1)} = \frac{325}{2}$$

Reemplazando en la función $A(x) = -x^2 + 325x$,

$$y = -\left(\frac{325}{2}\right)^2 + 325\left(\frac{325}{2}\right) = \frac{105625}{4}$$

El vértice de la función es $V = \left(\frac{325}{2}, \frac{105625}{4}\right)$

El máximo ocurre cuando $x = \frac{325}{2}$, en este caso el ancho es,

$y = 325 - x$, remplazando tenemos $y = 325 - \frac{325}{2} = \frac{325}{2}$

Ejemplo 36. Una bala es lanzada desde el suelo hacia arriba, la altura que alcanza la bala calculada desde el suelo en metros en función del tiempo (dado en segundos), es dada por la función:

$$h(t) = -5t^2 + 20t$$

Determinar:

(a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala y en que momento lo hace? **(b)** ¿Cuanto tiempo tarda la bala al llegar al suelo? **(c)** Si la bala se lanza a 25 metros del suelo, ¿Cuál seria la respuesta de las preguntas anteriores?

Solución:

a. Como la parábola abre hacia abajo, calculamos el vértice $v(h, k)$ de la función para hallar la altura máxima,

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-5)} = 2$ y así $k = h(2) = 20$

Esto quiere decir que la altura máxima que alcanza la bala es $20m$ y lo hace 2 segundos después de ser lanzada.

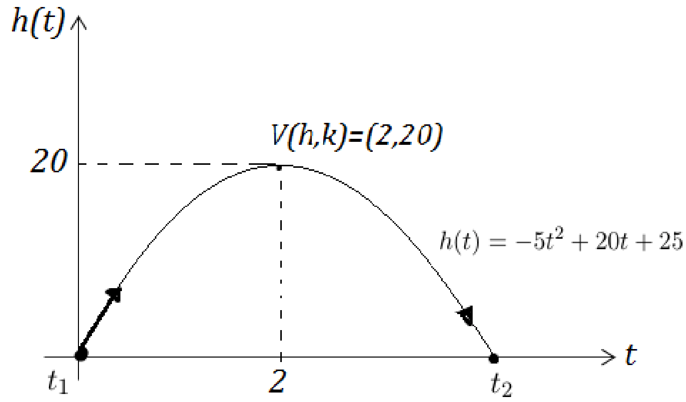
b. Resolvamos la ecuación $h(t) = 0$ para determinar los momentos en que la bala toca al suelo:

$$h(t) = 0 \Longleftrightarrow -5t^2 + 20t = 0 \Longleftrightarrow -5t(t-4) = 0 \Longleftrightarrow t = 0 \ o \ t = 4$$

Donde $t = 0s$ indica el momento en que la bala fue lanzada, y, $t = 4s$ el momento en que la bala regresa al suelo.

c. Si la bala se lanza desde una altura de 25 metros del suelo, entonces:
La nueva función que describe el movimiento es:

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 25$$



Y así el vértice $V(h,k)$ será por lo tanto:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-5)} = 2s$$

$$h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 25 = 45\,m$$

La máxima altura que alcanza ahora la bala es de 45 metros en 2 segundos.

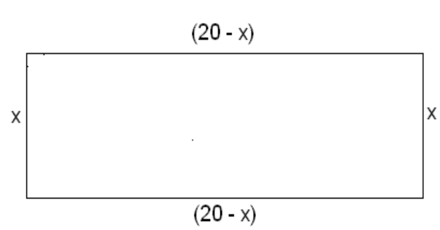
Para hallar el tiempo de vuelo de la bala aplicamos la formula cuadrática con $a = -5$, $b = 20$, $c = 25$ de esta manera,

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(-2)(25)}}{2(-5)} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{-10} = \frac{-20 \pm 30}{-10}$$

Y así, $t_1 = -1$, y $t_2 = 5$

Como $t = -1s$ no tiene sentido pues $t \geq 0$, concluimos que en $t = 5s$ después del lanzamiento la bala toca el suelo.

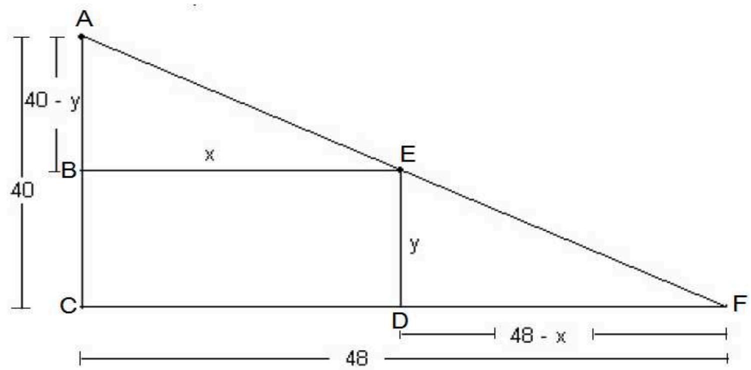
Ejemplo 37. Un rectángulo tiene un perímetro de $40cm$. Halle una función que represente el área $A(x)$ en términos de la longitud de sus lados.



Como el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura, entonces:

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

Ejemplo 38. Dado el siguiente rectángulo, inscrito en un triángulo rectángulo como se muestra en la figura, calcular el área del rectángulo



Solución:

Como el área del rectángulo es $A = xy$ (1), debemos buscar la relación entre x e y. Como los triángulos $\triangle\, ABC$ y $\triangle\, EDF$ son semejantes, entonces,

$$\frac{40 - y}{y} = \frac{x}{48 - x}$$

Y por lo tanto,

$$(40 - y)(48 - x) = xy$$

Así que,

$$1920 - 40x - 48y = 0$$

Resolviendo para y obtenemos:

$$y = \frac{1920 - 40x}{48}$$

Si reemplazando ahora y en la ecuación (1), se obtiene,

$$A(x) = x\left(\frac{1920 - 40x}{48}\right) = 40x - \frac{5}{6}x^2$$

Que corresponde al área del rectángulo inscrito en el triángulo rectángulo.

A continuación desarrollaremos algunos ejercicios de aplicación sobre la función lineal y la función cuadrática. Esto permitirá fortalecer los conceptos sobre la temática desarrollada en los capitulos precedentes.

Capítulo 4

Pruebas de selección múltiple y problemas de concurso

4.1. Ejercicios resueltos

1. Al recibir un pago, el cajero el cajero contó q monedas de 25 centavos, d monedas de 10 centavos, n de cinco centavos y c de un centavo. Mas tarde se dio cuenta de que x de las monedas de cinco las había contado como monedas de 25 y x monedas de 10 las contó como centavos. Para corregir el total obtenido el cajero debe:

(A) No hacer correcciones. **(B)** Quitar 11 centavos.
(C) Quitar $11x$ centavos. **(D)** Agregar $11x$ centavos.

Solución:
Sea, $25(q-x)+10(d+x)+5(n+x)+(c-x)$ el total de las monedas,
entonces,
$25q-25x+10d+10x+5n+5x+c-x=-11x$
O sea, se deben quitar $11x$ centavos.

2. Un carro recorre 120 kilómetros de A a B a una velocidad de 30 kilómetros por hora. Entonces la velocidad promedia del viaje redondo es aproximadamente de:

(A) 33 Km/h. **(B)** 34 Km/h. **(C)** 35 Km/h. **(D)** 36 Km/h.

Solución:
En un movimiento rectilíneo uniforme la relación entre distancia, velocidad y tiempo es $distancia = velocidad \cdot tiempo$, es decir, $d = v \cdot t$

Sea $v_1 = 30km/h$, $v_2 = 40km/h$ y $d = 120km$

Calculamos el tiempo para cada una de las velocidades.

es decir,

$$t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{120km}{30km/h} = 4h \text{ y } t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{120km}{40km/h} = 3h$$

Si el carro recorre una distancia d a una velocidad v_1 y regresa con la misma distancia a una velocidad v_2, entonces,

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{d_{Total}}{t_{Total}} = \frac{240km}{4h+3h} = \frac{240km}{7h} \approx 34km/h$$

3. Si $y = a + \frac{b}{x}$, con a y b constantes y si $y = 1$ cuando $x = -1$ y $y = 5$ cuando $x = -5$ entonces $a + b$ es igual a:

(A) -1. **(B)** 0. **(C)** 1. **(D)** 11.

Solución:
Sea $y = a + \frac{b}{x}$ dada, Como $x = -1$ y $y = 1$ por definición, reemplazamos estos valores en la ecuación dada, es decir;

$$1 = a + \frac{b}{-1}, \qquad (1)$$

Entonces,

$$1 = a - b \qquad (2)$$

Cuando $x = -5$ y $y = 5$, remplazando en la ecuación (1), $5 = a + \frac{b}{-5}$,

entonces,
$25 = 5a - b \qquad (3)$

Despejamos a en (2) y reemplazamos en (3), es decir,

$$25 = 5(1+b) - b \Leftrightarrow 25 = 5 + 4b \Leftrightarrow 20 = 4b$$

Así que,

$$b = 5$$

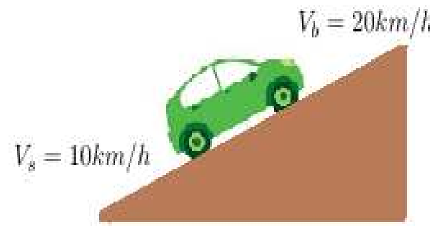
Como $a = 1 + b$ y $b = 5$, entonces, $a = 6$, por lo tanto, $a + b = 11$

4. Un automóvil subió una pendiente a una velocidad de 10 kilómetros por hora y bajo por la misma pendiente a 20 kilómetros por hora. La velocidad promedio en el viaje redondo fue:

(A) $12\frac{1}{2}\ Km/h$. **(B)** $13\frac{1}{3}\ Km/h$. **(C)** $14\frac{1}{2}\ Km/h$. **(D)** $15\ Km/h$.

Solución:

Sea, $V_s = 10km/h$ y $V_b = 20km/h$. Entonces $t_1 = \frac{d}{10}$, $t_2 = \frac{d}{20}$



Sumando t_1 y t_2,

$$t_1 + t_2 = \left(\frac{d}{10} + \frac{d}{20}\right) = d\left(\frac{3}{20}\right)$$

$$p = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{d(3/20)} = 13\frac{1}{3}km/h$$

5. El señor A deja sus propiedades a la esposa, hija, hijo y sirviente. Su hija e hijo reciben la mitad de sus bienes en la razón de 4 a 3. La esposa recibe el doble de lo de su hijo. Si el sirviente recibió un adelanto de \$500, entonces el capital del señor A era:

(A) \$3,500. **(B)** \$5,500. **(C)** \$7,000. **(D)** \$7,500.

Solución:

LLamaremos C el capital dejado por el señor A.

Sea $4x$ la parte que le corresponde a la hija y $3x$ la del hijo.De esta manera,

$$4x + 3x = \frac{1}{2}C$$

Por otro lado, a la esposa le corresponde $E = 2(3x) = 6x$
Luego, la parte que le corresponde a la esposa y al sirviente es:

$$E + S = 6x + 500$$

Y por lo tanto,

$$6x + 500 = 7x$$

De lo que se sigue que,
$6x + 500 = 7x$, y así $x = 500$
Luego, $7x + 6x + 500 = C$
Y pr tanto

$$C = 7(500) + 6(500) + 500 = 7{,}000$$

6. Si a y b son números reales, la ecuación $3x - 5 + a = bx + 1$ tiene una solución única de x (con $a \neq 0$):

(A) Para todo a y b. **(B)** Si $b \neq 3$. **(C)** Si $b \neq 0$. **(D)** Si $b \neq 2b$.

Solución:
Sea,

$$3x - 5 + a = bx + 1$$

Despejando x obtenemos,

$$x = \frac{6-a}{3-b}$$

Por lo tanto la ecuación tiene solución para todos los reales, excepto cuando $b = 3$

7. Cinco veces el dinero de A mas el dinero de B es una cantidad mayor que \$51. Tres veces el dinero de A menos el dinero de B es igual a \$21. Si a representa el dinero de A y b el dinero de B, en pesos, entonces:

(A) $a > 9$ y $b > 6$.
(B) $a > 9$ y $b < 6$.
(C) $a > 9$ y $b = 6$.
(D) $a > 9$, pero no se pueden fijar extremos para b.

Solución:
De acuerdo al enunciado del problema $5a + b > 51$ (1) y $3a - b = 21$ (2), si despejamos b de (2) y reemplazamos en (1) obtenemos:

$$5a + b = a + (3a - 2) = 8a - 21 > 51$$

Así que,

$$8a > 51 + 21 = 72$$

Luego,

$$a > 9$$

De acuerdo a (1)

$$b > 51 - 5a$$

$$b > 51 - 5(9) = 6$$

$$b > 6$$

8. Si la expresión $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$ tiene el valor $ab - cd$ para todos los valores de a,b,c y d, entonces la ecuación $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$

(A) Se satisface solamente para un valor de x.
(B) Se satisface para dos valores de x.
(C) No se satisface para ningún valor de x.
(D) Se satisface para una infinidad de valores de x.
(E) Ninguno de estos.

Solución:

Por definición tenemos que :

$$2x(x) - x = 3 \Rightarrow 2x^2 - x = 3$$

Hallamos las raíces utilizando la fórmula cuadrática, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

y así,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Luego, $x_1 = \dfrac{3}{2}$ y $x_2 = -1$

Por lo tanto, se satisface para dos valores de x, $\dfrac{3}{2}$ y -1

9. La diferencia de las raíces de la ecuación $x^2 - 7x - 9 = 0$ es:

(A) $+7$ **(B)** $+\frac{7}{2}$ **(C)** -9 **(D)** $2\sqrt{85}$ **(E)** $\sqrt{85}$

Solución:

Sea $x^2 - 7x - 9 = 0$ con $a = 1 \quad b = -7 \quad c = -9$

Reemplazando en la ecuación cuadrática tenemos que,

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(-9)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{40 + 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{85}}{2}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{85}}{2} \text{ y } x_2 = \frac{7 - \sqrt{85}}{2}$$

La diferencia de las raíces es:

$$\left(\frac{7 + \sqrt{85}}{2}\right) - \left(\frac{7 - \sqrt{85}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{85} - 7 + \sqrt{85}\right] = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{85}\right) = \sqrt{85}$$

10. Según la siguiente tabla, la fórmula que relaciona a x y y es:

x	1	2	3	4	5
y	3	7	13	21	31

(A) $y = 4x - 1$
(B) $y = x^3 - x^2 + x + 2$
(C) $y = x^2 + x + 1$
(D) $y = (x^2 + x + 1)(x - 1)$

(E) Ninguna de estas fórmulas.

Solución:
Reemplazando los valores de x en cada fórmula vemos que hay una relación de x con y en la fórmula $y = x^2 + x + 1$

Es decir, si $x = 1$, $y = (1)^2 + 1 + 1 = 3$ y así sucesivamente para los demás valores de x.

11. Para dibujar el gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, se construye una tabla de valores. Los valores de la función para un conjunto de valores de x crecientes y a igual distancia entre sí son: 3844, 3969, 4096, 4227, 4356, 4489, 4624 y 4761. El incorrecto es:

(A) 4096 **(B)** 4356 **(C)** 4489 **(D)** 4761 **(E)** Ninguno de éstos.

Solución:
Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como los valores de x son crecientes, entonces:

$$f(x), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h), f(x+4h), f(x+5h), f(x+6h), f(x+7h)$$

La diferencia entre cada valor seria,

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) \\ &= ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c \\ &= 2axh + ah^2 + bh \end{aligned}$$

Vemos que las diferencias sucesivas son funciones lineales de x, por lo tanto debe variar en la misma cantidad cuando x se aumenta en h. De acuerdo a esto en la siguiente tabla observamos que el valor incorrecto es 4227.

$f(x+h) - f(x)$	$3969 - 3844$	125
$f(x+2h) - f(x+h)$	$4096 - 3969$	127
$f(x+3h) - f(x+2h)$	$4227 - 4096$	131
$f(x+4h) - f(x+3h)$	$4356 - 4227$	129
$f(x+5h) - f(x+4h)$	$4489 - 4356$	133
$f(x+6h) - f(x+5h)$	$4624 - 4489$	135
$f(x+7h) - f(x+6h)$	$4761 - 4624$	137

12. Los valores de k para los cuales la ecuación $2x^2 - kx + x + 8 = 0$ tiene raíces reales e iguales son:

(A) 9 y -7 **(B)** Solamente -7 **(C)** 9 y 7 **(D)** -9 y -7 **(E)** Solamente 9

Solución:
Sea $2x^2 - kx + x + 8 = 0$

O bien, $2x^2 - x(k+1) + 8 = 0$ donde $a = 2$, $b = -(k+1)$, $c = 8$

Reemplazamos dichos valores en la ecuación cuadrática, es decir,

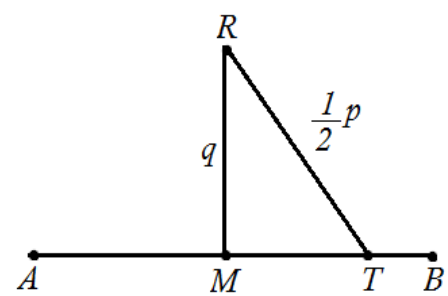
$$x = \frac{-[-(k+1)] \pm \sqrt{[-(k+1)]^2 - 4(2)(8)}}{4} = \frac{(k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2 - 64}}{4}$$

El discriminante es:

$$\triangle = \sqrt{(k+1)^2 - 64} = (k-1) - 8 \Rightarrow k - 1 = \pm 8$$

Por lo tanto, $k_1 = 8 + 1 = 9$ o $k_2 = -8 + 1 = -7$

13. En el punto medio de un segmento AB de p unidades de longitud, se levanta una perpendicular MR de longitud q unidades. Desde R se describe un arco con radio igual a $\frac{1}{2}\,\overline{AB}$, que corta a $\overline{AB}$ en T. Entonces $\overline{AT}$ y $\overline{TB}$ son las raíces de:



(A) $x^2 + px + q^2 = 0$ **(B)** $x^2 - px + q^2 = 0$
(C) $x^2 + px - q^2 = 0$
(D) $x^2 - px - q^2 = 0$ **(E)** $x^2 - px + q = 0$

Solución:
Como tenemos un triangulo rectángulo podemos resolver a $\overline{MT}$ utilizando el teorema de pitagóras, es decir,

$$\left(\frac{1}{2}p\right)^2 = q^2 + (\overline{MT})^2$$
$$(\overline{MT})^2 = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q^2} = \frac{\sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}$$

Ahora,

$$\overline{AT} = \overline{AM} + \overline{MT} = \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - 4q^2}}{2} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}$$

$$\overline{TB} = \overline{AB} + \overline{AT} = P - \left(\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}\right) = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2}$$

Por lo tanto $\overline{AT}$ y $\overline{TB}$ son raíces de la ecuación $x^2 - px + q^2 = 0$

14. La función $4x^2 - 12x - 1$:

(A) Siempre crece si x crece.
(B) Siempre decrece si x decrece hasta 1
(C) No puede ser igual a 0
(D) Tiene un valor máximo cuando x es negativo
(E) Tiene un valor mínimo de -10

Solución:
Sea, $4x^2 - 12x - 1$, con $a = 4$, $b = -12$, $c = -1$

Calculemos el vértice de la función,

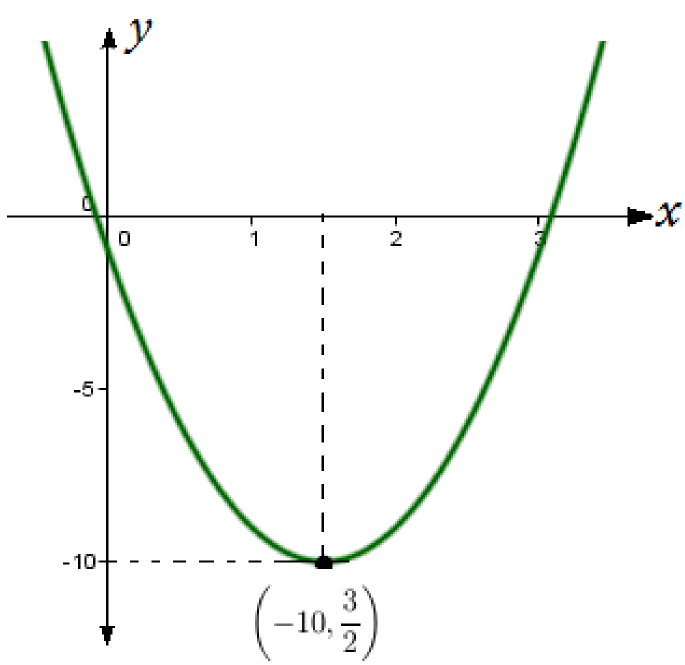
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(4)} = \frac{3}{2}$$

Luego,

$$f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = -10$$

Entonces el punto mínimo de la función es $\left(-10, \frac{3}{2}\right)$, es decir, tiene un valor mínimo en -10

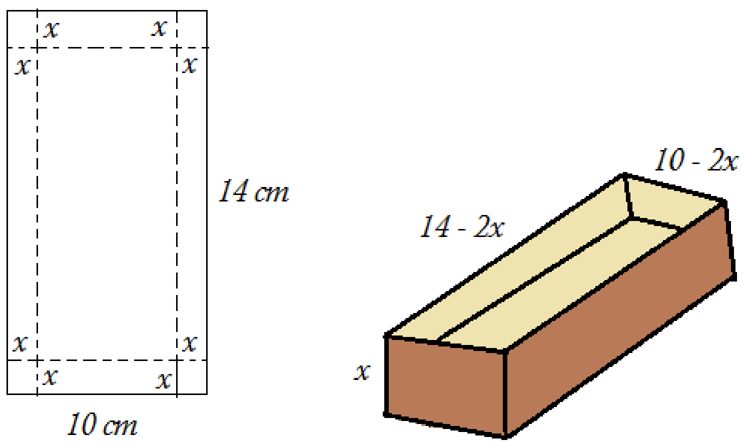
La gráfica de la función es:



15. De una lámina rectángular de 10 centímetros de ancho y 14 de largo se construye una caja abierta, cortando un cuadrado de x centímetros de lado en cada esquina; El volumen de la caja resultante es:

(A) $140x - 48x^2 + 4x^3$ **(B)** $140x + 48x^2 + 4x^3$ **(C)** $140x + 24x^2 + x^3$
(D) $140x - 24x^2 + x^3$ **(E)** Ninguna de estas respuestas.

Solución:



Calculando el volumen de la caja donde sus dimensiones son x, $14 - 2x$ y $10 - 2x$.

$$\begin{aligned} v &= (14-2x)(10-2x)(x) \\ &= 140x - 28x^2 - 20x^2 + 4x^3 \\ &= 4x^3 - 48x^2 + 140x \end{aligned}$$

16. La ecuación $3y^2 + y + 4 = 2(6x^2 + y + 2)$ con $y = 2x$ la satisface:

(A) Ningún valor de x
(B) Todos los valores de x
(C) $x = 0$ solamente
(D) Solamente los valores enteros de x
(E) Únicamente los valores racionales de x

Solución:
Sea, $3y^2 + y + 4 = 2(6x^2 + y + 2)$ con $y = 2x$,

Reemplazando $y = 2x$ en la ecuación nos queda:

$$\begin{aligned} 3(2x)^2 + 2x + 4 &= 2(6(2x)^2 + 2x + 2) \\ 12x^2 + 2x + 4 &= 12x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

Igualando a 0 y resolviendo tenemos que,

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

17. Se da la ecuación $ax^2 - 2x\sqrt{2} + c = 0$ con a y c constantes reales y su discriminante cero; Las raíces son necesariamente:

(A) Iguales y enteras.
(B) Iguales y racionales
(C) Iguales y reales
(D) Iguales e irracionales
(E) Iguales e imaginarias

Solución:
Sea $ax^2 - 2x\sqrt{2} + c$, con a y c constantes reales y $A = a$, $B = -2\sqrt{2}$ $C = c$
Hallamos las raíces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4ac}}{2a}$$

Por definición tenemos que el discriminante entonces las raíces son:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{a} \text{ y } x_2 = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

Por lo tanto las raíces son iguales y racionales ya que a es real.

18. El gráfico de la función $y = 2x^2 + 4x + 3$ tiene su:

(A) Punto más bajo en $(-1, 9)$ **(B)** Punto más bajo en $(1, 1)$
(C) Punto más bajo en $(-1, 1)$ **(D)** Punto más alto en $(-1, 9)$
(E) Punto más alto en $(-1, 1)$

Solución:
Sea $y = 2x^2 + 4x + 3$
con $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$

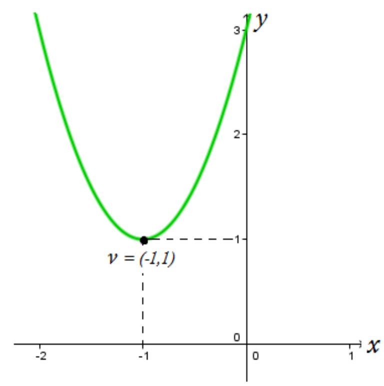
Luego,

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

La gráfica de la función es:

19. En la expresión $\dfrac{x+1}{x-1}$ cada x se reemplaza por $\dfrac{x+1}{x-1}$; La expresión que resulta al substituir x por $\frac{1}{2}$ es igual a:

(A) 3 **(B)** -3 **(C)** 1 **(D)** -1
(E) Ninguna de estas respuestas



Solución:
Reemplazamos a x por $\dfrac{x+1}{x-1}$ obtenemos que:

$$\frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \Longrightarrow \frac{x+1+(x-1)}{x+1-(x-1)}$$
$$\Longrightarrow \frac{2x}{2} = x$$
Ahora sustituimos a x por $\dfrac{1}{2}$ entonces tenemos que $x = \dfrac{1}{2}$

20. Se deja caer una piedra a un pozo y 7,7 segundos después se oye el sonido al tocar el fondo. Suponga que la piedra cae $16t^2$ pies en t segundos y que la velocidad del sonido es de $1,120$ pies por segundo. La profundidad del pozo es de:

(A) 784 pies **(B)** 342 pies **(C)** 1568 pies **(D)** 156,8 pies
(E) Ninguna de estas respuestas

Solución:
Velocidad inicial: 0
Velocidad final: $16t^2$
Velocidad del sonido: 1120 pies por segundo.
Profundidad del pozo:?

Sabemos que la velocidad promedio de la caída de la piedra es $\dfrac{1}{2}(velocidad\ inicial + velocidad\ final) \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{16t^2}{t}\right) = 8t$

Por lo tanto, como la distancia d recorrida por la piedra y el sonido es la misma, entonces $d = r_1t_1 = r_2t_2$

Ahora, los tiempos empleados en los recorridos son inversamente proporcionales a la caída de la piedra entonces: $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{t_1}{t_2}$

Finalmente tenemos que $\dfrac{8t}{1120} = \frac{7{,}7-t}{t} = 7s$ y ahora, $16t^2 = 16(7)^2 = 784ft$

4.2. Ejercicios propuestos

1. En la expresión $3x - 7 = 2$, x vale:

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

2. La solución de la ecuación $5y + 2 = 4y - 5$ es:

(A) -7 **(B)** -5 **(C)** 0 **(D)** 5 **(E)** 7

3. La expresión $3(x + 2) - 2(x + 3) = x$ es verdadera para:

(A) $x = 0$
(B) $x = 1$
(C) $x = -1$
(D) Ningún x
(E) Todo x Real

4. En la ecuación $(x - 1)^2 + 2 = x^2 - 1$, x vale:

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

5. La solución de la ecuación $(2z - 1)(z + 2) = 1 + 2z^2$

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -1 **(E)** -2

6. En la ecuación $x(1 - x^2) + 3 = 2 - (x^2 + 2)x$, x vale:

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** 2 **(D)** $-\frac{1}{3}$ **(E)** -1

7. La expresión $\dfrac{2}{3} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$ es verdadera para x igual:

(A) $-\frac{9}{11}$ **(B)** $-\frac{9}{11}$ **(C)** $\frac{11}{9}$ **(D)** $-\frac{11}{9}$ **(E)** $\frac{1}{9}$

8. El valor de x en la ecuación $\dfrac{4x - 3}{4} - \dfrac{5x + 2}{9} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{6x + 1}{3} + \dfrac{3x + 5}{12} - \dfrac{2}{9}$ es:

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

9. La solución de la ecuación $\dfrac{2x - \frac{1}{2}}{3} = \dfrac{4x + \frac{2}{3}}{4}$, es:

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

10. La expresión $\dfrac{13x}{3} - 5(x+2) = \dfrac{4x}{3} - 2(x+1)$ es verdadera para:

(A) $x = 0$ **(B)** $x = 1$ **(C)** $x = -1$ **(D)** Ningún x **(E)** Todo x Real

11. En la ecuación $\dfrac{z(z+1)^2}{2} - \dfrac{(z+1)^3}{3} = \dfrac{3-z+z^3}{6}$, z vale:

(A) $\frac{3}{2}$ **(B)** $\frac{5}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $-\frac{5}{2}$ **(E)** $-\frac{3}{2}$

12. En la ecuación $\dfrac{1}{3x-4} - \dfrac{1}{x+2} = 0$, x vale:

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

13. La solución de la ecuación $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{2x}$, es x igual a:

(A) 1 **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** 0 **(D)** -1 **(E)** $-\frac{2}{3}$

14. El valor de x que hace verdadera la expresión $x - 3 = \dfrac{3x^2+5}{3x+1}$ es:

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

15. La solución de la ecuación $\dfrac{x-3}{2x+5} - \dfrac{3x+1}{6x-4} = 0$, es x igual a:

(A) $-\frac{7}{39}$ **(B)** $\frac{7}{39}$ **(C)** $-\frac{39}{7}$ **(D)** $\frac{39}{7}$ **(E)** $5\frac{3}{7}$

16. En la ecuación $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}}$ el valor de x es:

(A) 4 y 0 **(B)** 4 y 5 **(C)** 5 y 0 **(D)** -4 y -5 **(E)** -4 y 0

17. En la ecuación $\dfrac{1 - \dfrac{1}{x+1}}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}} = \dfrac{1}{3}$, x vale:

(A) 1 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 2 **(E)** -2

18. La solución de la ecuación $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{2x-1} = \dfrac{-4}{2x^2+3x-2}$ es x igual a:

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4 **(E)** -5

19. La solución de la ecuación $\dfrac{1}{2-2x} + \dfrac{2}{3-3x} = \dfrac{1+2x}{6x-6}$ es x igual a:

(A) -1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4 **(E)** -5

20. En la expresión $ax + bx = a + b$, x vale:

(A) a **(B)** b **(C)** $-a$ **(D)** $-b$ **(E)** 1

21. En la ecuación $2ax - 3bx = \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{2}$, x vale:

(A) 6 **(B)** a **(C)** b **(D)** $\dfrac{1}{6}$ **(E)** $\frac{1}{a}$

22. La ecuación $mx + x = m^2 - 1$, tiene por solución x igual a:

(A) $m + 1$ **(B)** $m - 1$ **(C)** $1 - m$ **(D)** m **(E)** m^2

23. En la expresión $p^2x - 2pq = (p - q)^2$, x vale:

(A) $\dfrac{p+q}{p^2}$ **(B)** $1 + \frac{p}{q}$ **(C)** $1 + \dfrac{q}{p}$ **(D)** $1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2$ **(E)** $1 + \left(\dfrac{q}{p}\right)^2$

24. El valor de x en la ecuación $px + p^2 = 1 + x$ es:

(A) $1 + p$ **(B)** $1 - p$ **(C)** $p - 1$ **(D)** $-1 - p$ **(E)** 1

25. En la expresión $y = mx + k$, m vale:

(A) $\dfrac{y}{x} - k$ **(B)** $\dfrac{y-k}{x}$ **(C)** $y - \dfrac{k}{x}$ **(D)** $\dfrac{y+k}{x}$ **(E)** $y + \dfrac{k}{x}$

26. En la ecuación $b^2 - 4ac = 0$, el valor de a es:

(A) $\dfrac{-b^2}{4c}$ **(B)** $\dfrac{4b^2}{c}$ **(C)** $\dfrac{-4b^2}{c}$ **(D)** $\dfrac{b^2}{4c}$ **(E)** $4b^2c$

27. La frase "el doble de un número menos su cuarta parte"se expresa:

(A) $n - \dfrac{n}{4}$ **(B)** $2n - 4n$ **(C)** $\dfrac{(8n-n)}{2}$ **(D)** $\dfrac{2n}{4}$ **(E)** $\dfrac{7n}{4}$

28. El 20 % de un número sumando con el doble de él se expresa:

(A) n **(B)** $2n$ **(C)** $2,2n$ **(D)** $22n$ **(E)** $120n$

29. El 20 % de x menos el 50 % de y lo podemos expresar como:

(A) $2x - 5y$ **(B)** $\frac{2x-5y}{100}$ **(C)** $\frac{2x+5y}{10}$ **(D)** $0,02x - 0,05y$ **(E)** $\frac{2x-5y}{10}$

30. Un número sumando con su quinta parte es 12. La ecuación que representa esta situación es:

(A) $x + 12 = \frac{x}{5}$
(B) $x + \frac{x}{5} = 12$
(C) $12 + \frac{x}{5} = x$
(D) $x - \frac{x}{5} = 12$
(E) $x - 12 = \frac{x}{5}$

31. "La suma de dos números pares consecutivos es 106". Ésta se representa mediante la ecuación:

(A) $2n + (2n + 1) = 106$
(B) $4n + 1 = 106$
(C) $4n + 2 = 106$
(D) $n + n + 1 = 106$
(E) $2n + 1 = 106$

32. Un poste está enterrado $\dfrac{2}{5}$ de su longitud, $\dfrac{2}{7}$ del resto está bajo agua y sobresalen $3m$. ¿Cuál es la longitud del poste?

(A) $6m$ **(B)** $7m$ **(C)** $9m$ **(D)** $9,5m$ **(E)** $10m$

33. Si un niño tiene el triple de la edad que tenía hace 6 años. ¿Cuántos años tiene en la actualidad?

(A) 3 **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 12 **(E)** 18

34. Un comerciante compró 25 juguetes. Si hubiera comprado 5 juguetes más por el mismo valor, cada juguete le habría costado \$ 10 menos. ¿Cuánto le costó cada juguete?

(A) \$ 10 **(B)** \$ 30 **(C)** \$ 50 **(D)** \$ 60 **(E)** \$ 80

35. El doble de un número natural se aumenta en 3. El doble de esta expresión resulta igual a 12. ¿Cuál es el número?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** no existe

36. La suma y el producto de las raíces de la ecuación $ax^2+x+c = 0$ son repectivamente:

(A) $\frac{1}{a}$ y $\frac{c}{a}$ **(B)** $-\frac{1}{a}$ y $\frac{c}{a}$ **(C)** $\frac{1}{a}$ y $-\frac{c}{a}$ **(D)** $\frac{x}{a}$ y $\frac{c}{a}$ **(E)** $-\frac{x}{a}$ y $\frac{c}{a}$

37. Las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 20 = 0$ son:

(A) -5 y 4 **(B)** 5 y -4 **(C)** -4 y -5 **(D)** 4 y 5 **(E)** 10 y -2

38. La ecuación cuyas raíces son $x_1 = 4$ y $x_2 = -6$ es:

(A) $x^2 - 4x - 6 = 0$
(B) $x^2 + 2x + 24 = 0$
(C) $x^2 - 2x + 24 = 0$
(D) $x^2 + 2x - 24 = 0$
(E) $x^2 - 2x - 24 = 0$

39. Para que las raíces de la ecuación $4x^2 + 12x - k = 0$ sean reales e iguales el valor de k debe ser:

(A) 9 **(B)** -9 **(C)** 36 **(D)** -6 **(E)** 6

40. La ecuación cuyas raíces son 0 y -2 es:

(A) $x^2 - 2 = 0$ **(B)** $x^2 + 2 = 0$ **(C)** $x^2 - 2x = 0$ **(D)** $x^2 + 4x = 0$
(E) $x^2 + 2x = 0$

41. Una de las raíces de la ecuación $ax^2 - 2x - 3 = 0$ es: -3.¿Cuál es el valor de a?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $-\frac{1}{9}$ **(C)** $-\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{3}$ **(E)** No se puede determinar.

42. El producto de las raíces de la ecuación $2ax^2 + 3abx + 4ab^2 = 0$ es:

(A) $-\frac{3}{2}b$ **(B)** $-2b^2$ **(C)** $4ab^2$ **(D)** $2b^2$ **(E)** $4ab$

43. La intersección de la parábola cuya ecuación es $y = 2x^2 + 3x - 2$ con el eje x es en los puntos.

(A) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
(B) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(-2, 0)$
(C) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $(0, 2)$
(D) $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ y $(0, 2)$
(E) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(2, 0)$

44. El vértice de la parábola cuya ecuación es $y = x^2 - 2x - 24$ tiene por cordenadas:

(A) $(1, -25)$ **(B)** $(1, 25)$ **(C)** $(-1, 25)$ **(D)** $(-1, -25)$ **(E)** $(0, -24)$

45. La función $y = -x^2 + 2x + 15$ alcanza su máximo valor para:

(A) $x = 5$ **(B)** $x = -3$ **(C)** $x = -1$ **(D)** $x = 1$ **(E)** $x = -5$

46. Una solución del sistema $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 18 \end{cases}$ es:

(A) $x = 3$ $y = -3$ **(B)** $x = 3$ $y = 3$ **(C)** $x = -3$ $y = 3$ **(D)** $x = -3$ $y = -3$ **(E)** $x = 6$ $y = o$

47. Dado el sistema $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ el valor de $2x$ es:

(A) 10 **(B)** 5 **(C)** 8 **(D)** 4 **(E)** otro

48. Dado el sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 4 \end{cases}$ el valor de $-x$ es:

(A) 3 **(B)** -3 **(C)** 1 **(D)** -1 **(E)** 4

49. Si $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x + y = 6 \end{cases}$ entonces son soluciones del sistema:

I. $x = 5$, $y = 1$
II. $x = 1$, $y = 5$
III. $x = y = 5$

Son verdaderas:

(A) Sólo I **(B)** Sólo II **(C)** I y II **(D)** I y III **(E)** Todas

50. Si $x = 5$ es solución de la ecuación $x^2 - 7x + k = 0$ entonces la otra solución es:

(A) 2 **(B)** -2 **(C)** -5 **(D)** 7 **(E)** -7

51. Si $x = -3$ es solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$. La otra solución es:

(A) 9 **(B)** -9 **(C)** 3 **(D)** -3 **(E)** 0

52. La suma de las soluciones de la ecuación $2x^2 + 5x - 1 = 0$ es:

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{5}{2}$ **(E)** $-\frac{5}{2}$

53. El producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ es:

(A) a **(B)** b **(C)** $-a$ **(D)** $-b$ **(E)** $-\frac{b}{a}$

54. La condición para que las soluciones de la ecuación $kx^2 + 3x + 2 = 0$ sean complejas conjudas es:

(A) $k > \frac{9}{8}$ **(B)** $k > \frac{8}{9}$ **(C)** $k < -\frac{9}{8}$ **(D)** $k < \frac{9}{8}$ **(E)** $k < -\frac{8}{9}$

55. ¿Cuántas horas emplea un tren que viaja a una velocidad promedio de 40 kph entre dos paradas para recorrer a kilómetros si hace n paradas de m minutos cada una?

(A) $\dfrac{3a + 2mn}{120}$ **(B)** $3a + 2mn$ **(C)** $\dfrac{3a + 2mn}{12}$ **(D)** $\dfrac{a + mn}{40}$ **(E)** $\dfrac{a + 40mn}{40}$

56. La suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática son 3 y -10 respectivamente. La ecuacion es:

(A) $x^2 - 3x - 10 = 0$
(B) $x^2 - 3x + 10 = 0$
(C) $x^2 + 3x - 10 = 0$
(D) $-x^2 - 3x + 10 = 0$
(E) $x^2 + 3x + 10 = 0$

57. Las raíces de una ecuación de segundo grado están en la razón $3 : 1$ y son ambas positivas. Si la ecuación es: $x^2 + ax + 12 = 0$ el valor de "a" es:

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** -8 **(E)** No se puede determinar

58. ¿ Qué valor debe tener k en la función $y = 2x^2 - 3x + k - 1$ para que el punto $(0, 0)$ pertenezca a ella?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $\frac{3}{2}$ **(E)** $-\frac{1}{2}$

59. Una de las raíces de la ecuación $2x^2 + 17x - 9 = 0$ es -9 ¿ Cuál es la otra raíz?

(A) 9 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** $\frac{1}{2}$ **(E)** $-\frac{1}{2}$

60. Para que las soluciones de la ecuación $12x^2 + kx : +3 = 0$ sean iguales se debe cumplir:

(A) $k > 12$ **(B)** $k < 12$ **(C)** $k > -12$ **(D)** $k < -12$ **(E)** $k = \pm 12$

61. Si $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$ tiene raíces numéricamente iguales pero de signos opuestos, entonces el valor de m debe ser:

(A) $\dfrac{a-b}{a+b}$ **(B)** $\dfrac{a+b}{a-b}$ **(C)** c **(D)** $\dfrac{1}{c}$ **(E)** 1

62. La superficie de una jaula rectangular es de $48cm^2$. Si los lados están en la razón 3 : 4. ¿ Cuál es su perímetro?

(A) $14cm$ **(B)** $28cm$ **(C)** $42cm$ **(D)** $56cm$ **(E)** $70cm$

63. El símbolo $\mid x \mid$ significa x si x es positivo y $-x$ si x es negativo; Se puede decir, entonces, en relación con la solución de la ecuación $\mid x \mid^2 + \mid x \mid -6 = 0$

(A) Hay solamente una raíz
(B) La suma de las raíces es $+1$
(C) La suma de las raíces es 0
(D) El producto de las raíces es 4
(E) El producto de las raíces es -6

64. El perímetro de un rectángulo es $28cm$ y su área mide $33cm^2$. El lado menor mide:

(A) $11cm$ **(B)** $5cm$ **(C)** $3cm$ **(D)** $6cm$ **(E)** $7cm$

65. La suma de dos números es 28 y la diferencia de sus cuadrados es 56. La diferencia de ellos es:

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 6

66. La suma de dos números es 21 y su producto es 90. ¿ Cuál es el número mayor?

(A) 15 **(B)** 18 **(C)** 9 **(D)** 6 **(E)** 12

67. Dos números están en la razón 3 : 2 y la diferencia de sus cuadrados es 20. ¿ Cuál es el número mayor?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10 **(E)** 2

68. La gráfica de la función cuadrática $y = 3x^2 - 2x - 5$ intersecta al eje y en:

(A) -3 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** -5 **(E)** 5

69. La gráfica de la función $y = 3x^2 - 8x - 3$ intersecta al eje x en:

(A) 3 y $-\frac{1}{3}$ **(B)** -3 y $\frac{1}{3}$ **(C)** -3 y $-\frac{1}{3}$ **(D)** 3 y $\frac{1}{3}$ **(E)** 3 y -3

70. El área de un triángulo rectángulo es $24cm^2$ y la hipotenusa mide $10cm$.¿ Cuál es el perímetro?

(A) $24cm$ **(B)** $34cm$ **(C)** $40cm$ **(D)** $60cm$ **(E)** $30cm$

71. La gráfica de la función $y = x^2 - x + 1$ intersecta al eje x en:

(A) $x = 1$ **(B)** $x = 0$ **(C)** $x = -1$ **(D)** $x = -2$ **(E)** No lo intersecta.

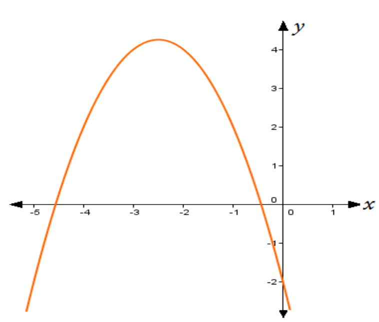
72. Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ serán recíprocas si:

(A) $a = b$ **(B)** $a = bc$ **(C)** $c = a$ **(D)** $c = b$ **(E)** $c = ab$

73. La gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x$ intersecta al eje x en:

(A) 0 y 2 **(B)** 0 y 3 **(C)** 0 y $\dfrac{2}{3}$ **(D)** 0 y $\dfrac{3}{2}$ **(E)** 0 y $-\dfrac{2}{3}$

74. La función cuya gráfica es la siguiente cumple las siguientes condiciones:



(A) $\triangle > 0$; $a > 0$
(B) $\triangle = 0$; $a < 0$
(C) $\triangle > 0$; $a < 0$
(D) $\triangle < 0$; $a < 0$
(E) $\triangle = 0$; $a > 0$

75. Las coordenadas del vértice de la parábola cuya función es $y = 9x^2 + 6x - 8$ son:

(A) $\left(\dfrac{1}{3}, 9\right)$ **(B)** $(-\frac{1}{3}, 9)$ **(C)** $\left(\dfrac{1}{3}, -9\right)$ **(D)** $\left(-\dfrac{1}{3}, -9\right)$ **(E)** $(-3, -9)$

76. Dos números tienen por suma 6 y el valor absoluto de su diferencia es 8, entonces son raíces de la ecuación:

(A) $x^2 - 6x + 7 = 0$
(B) $x^2 - 6x - 7 = 0$
(C) $x^2 + 6x - 8 = 0$
(D) $x^2 - 6x + 8 = 0$
(E) $x^2 + 6x - 7 = 0$

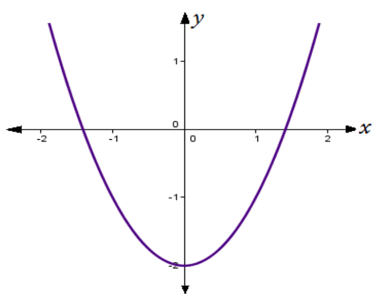
77. Si Al resolver un problema que se reduce a una ecuación cuadrática, un estudiante comete un error con el término constante de la ecuación y obtiene por raíces 8 y 2. Otro estudiante comete un error con el coeficiente del término de primer grado y obriene por raíces -9 y -1. La ecuación correcta es:

(A) $x^2 - 10x + 9 = 0$ **(B)** $x^2 + 10x + 9 = 0$ **(C)** $x^2 - 10x + 16 = 0$
(D) $x^2 - 8x - 9 = 0$ **(E)** Ninguna de éstas.

78. Las dos raíces de la ecuación $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ son 1 y:

(A) $\dfrac{b(c-a)}{a(b-c)}$ **(B)** $\dfrac{a(b-c)}{c(a-b)}$ **(C)** $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)}$ **(D)** $\dfrac{c(a-b)}{a(b-c)}$ **(E)** $\dfrac{c(a-b)}{b(c-a)}$

79. A partir del siguiente gráfico, podemos afirmar que la ecuación cuadrática asociada:

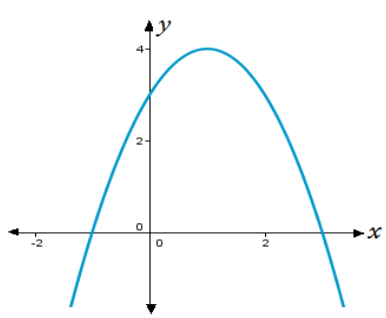


(A) Tiene solución imaginaria.
(B) Tiene una raíz negativa.
(C) Tiene raíces reales iguales.
(D) Tiene raíces reales y distintas.
(E) No tiene solución.

80. si r y s son las raíces de $x^2 - px + q = 0$, entonces $r^2 + s^2$ es igual a:

(A) $p^2 + 2q$ **(B)** $p^2 - 2q$ **(C)** $p^2 + q^2$ **(D)** $p^2 - q^2$ **(E)** p^2

81. La función cuya gráfica es la siguiente cumple las siguientes condiciones:



(A) $\triangle = 0$; $a > 0$
(B) $\triangle = 0$; $a < 0$
(C) $\triangle = 0$; $a = 0$
(D) $\triangle > 0$; $a > 0$
(E) $\triangle < 0$; $a < 0$

82. En la ecuación $2x^2 - hx + 2k = 0$, la suma de las raíces es 4 y su producto -3; Entonces h y k tienen por valores respectivamente:

(A) 8 y -6 **(B)** 4 y -3 **(C)** -3 y 4 **(D)** -3 y 8 **(E)** 8 y -3

83. La siguiente tabla muestra la distancia s, en centímetros, que recorre una esfera que desciende por un plano inclinado en t segundos.

t	0	1	2	3	4	5
s	0	10	40	90	160	250

La distancia s para $t = 2{,}5$ es:

(A) 45 **(B)** 62,5 **(C)** 70 **(D)** 75 **(E)** 82,5

84. Si la parábola $y = -x^2 + bx - 8$ tiene su vértice sobre el eje de las x, entonces b debe ser:

(A) Un entero positivo
(B) Un número racional positivo o negativo
(C) Un número racional positivo
(D) Un número irracional positivo o negativo
(E) Un número irracional negativo.

85. El valor de x que satisface la ecuación $x^2 + b^2 = (a - x)^2$ es:

(A) $\dfrac{b^2 + a^2}{2a}$ **(B)** $\dfrac{b^2 - a^2}{2a}$ **(C)** $\dfrac{a^2 - b^2}{2a}$ **(D)** $\dfrac{a - b}{2}$ **(E)** $\dfrac{a^2 - b^2}{2}$.

86. La ecuación $x^2 + kx + k^2 = 0$, para qué valores reales de k distintos de $k = 0$, tiene raíces reales?. (El simbolo $x \geqslant a$ quiere decir que x toma todos los valores mayores o iguales a a; $x \leqslant a$ tiene el mismo significado pero con ”menor que”).

(A) $k < 0$ **(B)** $k > 0$ **(C)** $k \geqslant 1$
(D) Todos los valores de k **(E)** Ningún valor de k

87. Para que una de las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ sea el doble de la otra, los coeficientes deben estar relacionados como sigue:

(A) $4b^2 = 9c$ **(B)** $2b^2 = 9ac$ **(C)** $2b^2 = 9a$ **(D)** $b^2 - 8ac = 0$ **(E)** $9b^2 = 2ac$

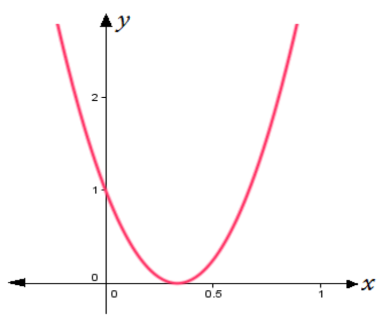
88. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa respecto a la ecuación $ix^2 - x + 2i = 0$ con $i \equiv \sqrt{-1}$?

(A) La suma de las raíces es 2
(B) El discriminate es 9
(C) Las raíces son imaginarias
(D) Las raíces se pueden calcular usando la fórmula cuadrática
(E) Las raíces se pueden hallar por factorización, usando números imaginarios.

89. El símbolo $| \, x \, |$ significa x si x es positivo y $-x$ si x es negativo; Se puede decir, entonces, en relación con la solución de la ecuación $| \, x \, |^2 + | \, x \, | -6 = 0$

(A) Hay solamente una raíz
(B) La suma de las raíces es $+1$
(C) La suma de las raíces es 0
(D) El producto de las raíces es 4
(E) El producto de las raíces es -6

90. La función asociada al gráfico es:



(A) $y = -x^2 - 2x + 3$
(B) $y = -x^2 - 2x - 3$
(C) $y = -x^2 + 2x + 3$
(D) $y = -x^2 + 2x - 3$
(E) $y = x^2 + 2x + 3$

91. Las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ son ambas reales y mayores que 1. Sea $s = b + c + 1$. Entonces s:

(A) Puede ser menor que cero
(B) Puede ser igual a cero
(C) Debe ser mayor que cero
(D) Debe ser menor que cero
(E) Debe estar entre -1 y 1.

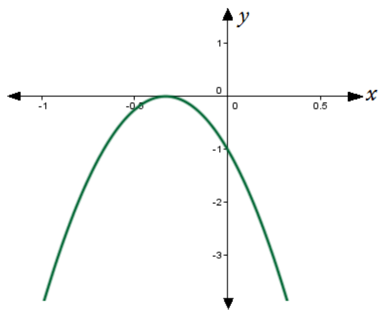
92. Dos postes de alturas 20 y 80 dm. Están separados $100dm$; La altura de la intersección de las líneas que unen la cima de cada poste con la base del poste opuesto es de:

(A) $50dm$
(B) $40dm$
(C) $16dm$
(D) $60dm$
(E) Ninguna de estas respuestas

93. Un número de tres dígitos, tiene de izquierda a derecha los dígitos h, t y u con $h > u$. Cuando el número con los dígitos invertidos se resta del número original, el dígito de las unidades en la diferencia es 4; Los dos dígitos siguientes de derecha a izquierda son:

(A) 5 y 9 **(B)** 9 y 5 **(C)** Imposible decirlos **(D)** 5 y 4 **(E)** 4 y 5

94. La función que representa la curva dada es:



(A) $y = x^2 + 2$
(B) $y = x^2 - 2$
(C) $x = y^2 + 2$
(D) $x = y^2 - 2$
(E) $y = -x^2 - 2$

95. Un bote tiene una velocidad de 15 kph en el agua tranquila. En el río que tiene una corriente de 5 kph recorre cierta distancia y retorna.
Entonces la razón que hay entre la velocidad promedio del viaje redondo a la velocidad en el agua tranquila es de:

(A) $\frac{5}{4}$ **(B)** $\frac{1}{1}$ **(C)** $\frac{8}{9}$ **(D)** $\frac{7}{8}$ **(E)** $\frac{9}{8}$

ANEXOS

4.3. INTRODUCCIÓN DE USO DEL SOFTWARE

Geogebra es un conjunto unificado que conforma un potente programa de Matemática Dinámica, es básico y útil para enseñar en cualquier nivel educativo. Un encuadre versátil en que se conjugan geometría interactiva, álgebra, el cálculo propio del análisis y de las estadísticas y sus registros gráficos, de organización en tablas y de formulación simbólica.

GeoGebra le facilita a los estudiantes la creación de construcciones matemáticas y modelos para las exploraciones interactivas y los sucesivos cambios de parámetros.

Al abrir GeoGebra, aparece la siguiente ventana:

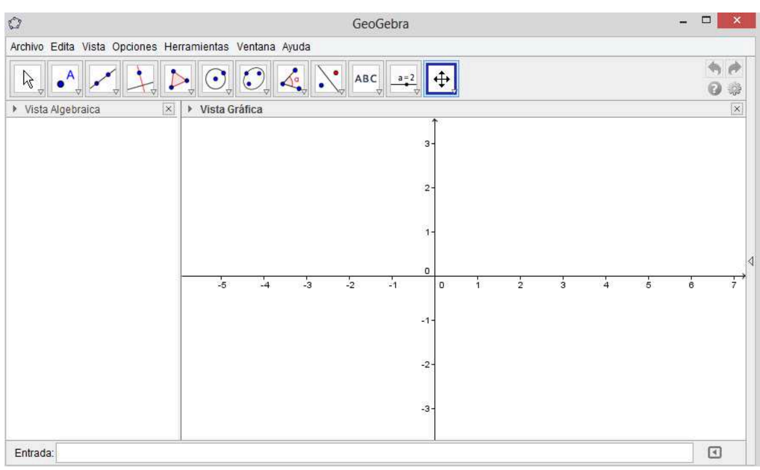


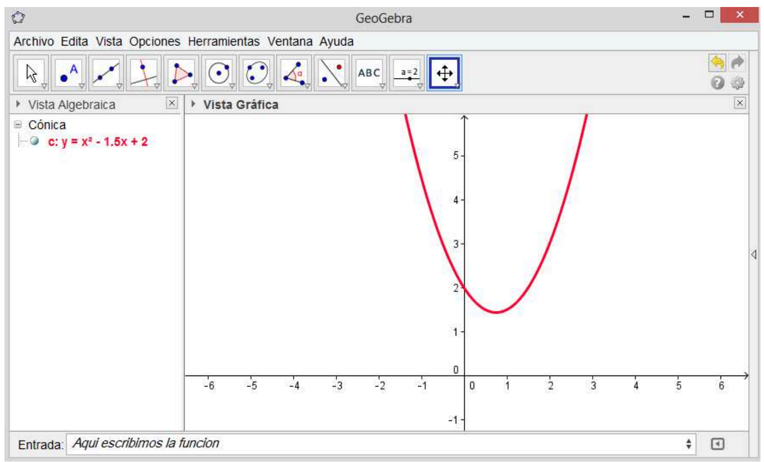
Figura 4.1:

Intersección de Funciones Polinómicas. Intersecar una parábola con una función lineal para determinar las raíces de su diferencia.

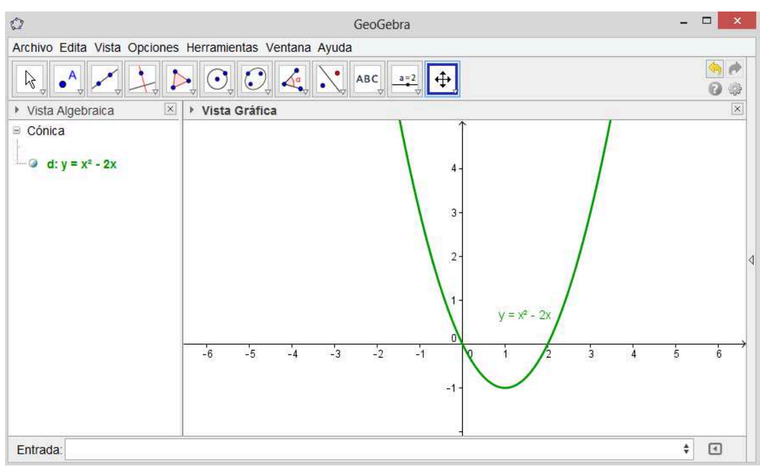
Ejemplo: Realizar las gráficas de las siguientes funciones $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{2}$, $g(x) = \dfrac{x+4}{2}$ $h(x) = x^2 - 2x$

Pasos para la realización de las gráficas: Escribimos las funciones en la casilla **Entrada** (ver figura 4.1) de la siguiente manera:

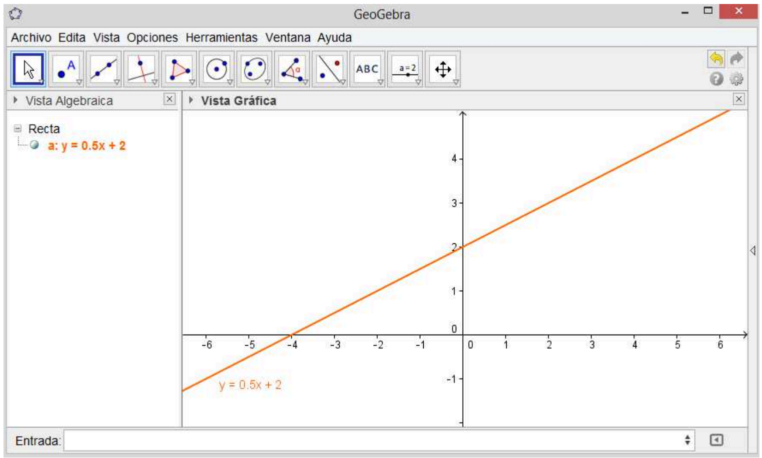
Para la primera gráfica: $y = (2x^2 - 3x + 4)/2$, damos Enter y nos queda,



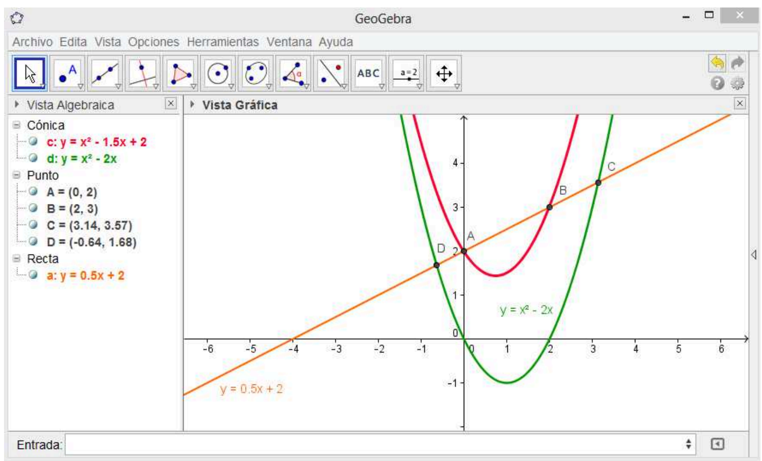
Para la segunda gráfica: $y = (x+4)/2$, damos Enter y nos queda,



Para la tercer gráfica: $y = x^2 - 2x$, damos Enter y nos queda,



Por ultimo observamos las tres gráficas y sus puntos de intersección así:



BIBLIOGRÁFICA

- Carreño Campos Ximena y Cruz Schmidt Ximena editado por Arrayán. *Álgebra Arrayán*. Editorial S.A.1993.
- Dillon Eduardo, Graciela De Vita, Fierro Marta Ester ,Barceló Edgardo.*Matemática Funciones*. Editorial Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología de la Nación. Edición 1.2007.
- Farfán Márquez, Cantoral Uriza Rosa Maria y Arnold Ricardo. *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas.Edición 1.
- Goodman Arthur, Hirsch Lewis. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Editorial Pearson Educación. Edición 1.1996.
- House Random. *Problemas de concurso*. Editorial Norma.Universidad de Yale. Edición 1.
- Larson, Ronald, Hostetler, Robert.*Álgebra*. Editorial Publicaciones cultural México.Edición 2.2000.
- Leithold Lous. *El Cálculo*, Editorial Grupo Mexicano Mapasa.S.A. Edición 7.1994.
- Sullivan, Michael. *Precálculo*. Editorial Prentice- Hall Hispanoamericana.Edición 1.1997.
- Swokowki. *Álgebra y Trigonometría*, Editorial Internacional thomson editores, Edición 9, 1997
- Swokowski Earl W. *Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Iberoamericana S.A, Edision 2.