Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

MARCOS DE SUBESPACIOS EN ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA

Andres Cruz Andrade

Neiva, Huila
2014

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

MARCOS DE SUBESPACIOS EN ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciado en matemáticas

Andres Cruz Andrade
2009179269

Asesor:
Msc.Osmin Ferrer Villar

Neiva, Huila
2014

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Febrero de 2014

AGRADECIMIENTOS

Debido a la gran importancia que tiene para mí la cualidad de ser agradecido, no quiero dejar de nombrar a nadie en esta parte. Por eso agradezco a todo aquel que no pueda nombrar aquí.

Gracias a Dios protector, a mi madre Jaqueline Andrade quien es mi guía en la vida, por ser todo de mi y también por darme la oportunidad de cruzar en mi vida a personas que con su carisma, sencillez, amabilidad y sinceridad le dieron luz al camino para llegar a cumplir éste sueño. Al Msc. Osmin Ferrer Villar, el cual más que un asesor es un gran amigo, por ser ejemplo para mí como persona e investigador, que no dudó de mis capacidades para llegar a este punto. A mi hermana B. Leandra Cruz, una mujer espléndida, amiga, una guerrera que me tendió su mano y fue factor fundamental para mi proceso de pregrado. A Lina M. Ninco cuyo apoyo fue indispensable para hacer realidad este proyecto. A mi hermano, quien es mi compañero de lucha, mi compadre del alma, que a pesar de las dificultades y los tropiezos me dió la fortaleza y la esperanza para que pudiera cumplir el sueño de ser licenciado en matemáticas. A mi abuela querida, bella y hermosa Amelia Peralta por su sacrificio y por su fé puesta en mí. A mi padre Otoniel Cruz quien fue el que coloco la primera piedra para construir este camino que se ha forjado por trabajo sudor y lágrimas. A mis grandes amigos por su apoyo incondicional, a los profesores de mi Univesidad Surcolombiana quienes con su paciencia para conmigo plantaron en mí el deseo de ser parte de una comunidad muy especial, la cual es ser investigador en matemáticas de alto nivel.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En el estudio de espacios con producto interno uno de los conceptos más importantes es el de *base ortonormal*. Este concepto permite que cada elemento en el espacio sea escrito como "combinación lineal" de los elementos de la base ortonormal, pero algunas de las condiciones para que una familia de elementos en el espacio con producto interno sea base ortonormal es muy restrictiva, por ejemplo la dependencia lineal y, a veces, la ortogonalidad respecto a un producto escalar lo cual es difícil y casi imposible de probar en muchos casos. Los marcos se vuelven una herramienta más flexible que las bases. Un marco para un espacio con producto escalar permite que cada elemento en el espacio se puede escribir como "combinación lineal" de elementos en el marco, pero la independencia lineal y ortogonalidad entre los elementos del marco son condiciones que no son necesarias. Intuitivamente se puede pensar en los marcos como una base "generalizada", pero estos tiene más elementos.

Los marcos aparecieron por primera vez en 1952 en el trabajo *Una Clase de Series de Fourier no armónicas*, de R. J. Duffin y Schaeffer A.C. [16]. En este articulo los marcos se utiliza como una herramienta en el estudio de las serie de Fourier no armónicas, y 30 años después, en 1986, I., Grossmann A., Meyer, Y. en su trabajo llamado *Painless nonorthogonal expansions* [2], los marcos se utilizan para buscar las expansiones en series de funciones en $L_2(\mathbb{R})$ similar a la expansión en serie utilizando bases ortonormal. En los últimos años la teoría de marcos en el espacio de Hilbert se ha desarrollado rápidamente debido al desarrollo de nuevas aplicaciones ([1], [10],[11],[14]).

En [4], [17], [18] considerando en un espacio de Hilbert una $\mathcal{W}$-métrica, se obtiene un espacio de Krein. Cuando las propiedades de operador de Gram W ($0 \in \sigma(\mathcal{W})$, $0 \in \rho(\mathcal{W})$) resultado en dos tipos de espacios de Krein, regulares ($0 \in \rho(W)$) y singular ($0 \in \sigma(\mathcal{W})$). Así que los marcos son considerados sobre espacios de Krein por Kevin Esmeral, Ferrer Osmin, Elmar Wagner ([7],) y J. I. Giribet, A. Maestripieri, F. Martínez Pería y P. Massey, [5], donde se muestran algunas equivalencias cuando se considera sobre espacios de Hilbert.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Estudiar algunos referentes históricos que muestran la aparición de la teoría de marcos en espacios de Hilbert.
- Analizar la definición de marcos de subespacios en espacios de Hilbert y espacios de Krein con $\mathcal{W}$-métrica.
- Estudiar el comportamiento de los marcos de subespacios cuando el operador autoadjunto $\mathcal{W}$ no está acotado.

Objetivos Específicos

- Analizar que todo espacio de Hilbert con $\mathcal{W}$-métrica tiene una descomposición en dicho espacio.
- Analizar como se puede transferir marcos de subespacios en espacios de Krein a marcos de subespacios en espacios de Hilbert y viceversa.

JUSTIFICACIÓN

Hoy en día se puede observar que aunque la transformaciones de Fourier ha sido una herramienta importante en el análisis de más de un siglo, tiene una seria carencia de análisis de señales, en el sentido de que oculta en sus fases información sobre el momento de emisión y la duración de la señal. Lo que se necesitaba era localizar una representación tiempo-frecuencia que se encontrara mediante una información codificada en ella. En 1994, D. Gabor llena este vacío y formula un enfoque fundamental para la descomposición de señales en términos de señales elementales. El enfoque de Gabor se convirtió rápidamente en un paradigma para el análisis espectral asociado con métodos tiempo-frecuencia. Hoy en día, las ideas de Gabor aún se encuentran en el centro de la gran cantidad de aplicaciones de marcos Gabor (Weyl-Heisenbers).

Los Marcos para espacios de Hilbert fueron definidos formalmente por Duffin y Schaeffer [16], en 1952 ellos estudian algunos problemas profundos en las series de Fourier no armónica. Básicamente, Duffin y Schaeffer resumieron la noción fundamental de Gabor para estudiar el procesamiento de señales. Las ideas de Duffin y Schaeffer al llegar no parecieron generar mucho interés por las series de Fourier no armónica, sin embargo Daubechies, Grossmann y Meyer [2] en 1986 jugaron un papel histórico en esta teoría. Después de este trabajo innovador, la teoría de los marcos comenzó a ser estudiada más ampliamente, aunque no en la medida del desarrollo extremadamente rápido de las ondas.

Tradicionalmente, los marcos se han utilizado en el proceso de comprimir datos, procesamiento señales, procesamiento de imágenes y la teoría del muestreo. Hoy en día, cada vez más se están encontrando usos para la teoría de marcos como la óptica, filtros, localización de señales, así como el estudio de los espacios Besov, en teoría espacio de Banach etc. En el otro sentido, potentes herramientas como la teoría de operadores y la teoría de espacios de Banach, se están introduciendo al estudio de los marcos dando resultados profundos en la teoría de marcos. En este mismo momento, la teoría está empezando a crecer rápidamente con una gran cantidad de gente nueva incursionando en el área.

Una de las cosas buenas acerca de la teoría de marcos, es el hecho de que grandes porciones de esta teoría aún no han sido desarrolladas, como marcos para espacios de Hilbert de dimensión finita, marcos wavelet etc. Además, muchas de las áreas extensamente desarrolladas, como marcos Weyl-Heisenberg y marcos exponenciales, aún tienen muchas preguntas abiertas fundamentales para retar a cualquiera, como la clasificación completa de marcos Weyl-Heisenberg o la clasificación de los marcos exponenciales.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo comienza con algunas observaciones sobre espacios vectoriales. Luego se introducen la noción de espacio métrico, espacio normados, espacio con producto interno, espacios de Hilbert y por último algo de la teoría de operadores.

1.1. Espacios Vectoriales

Definición 1.1.1. *Un* ***espacio vectorial*** $\mathbb{V} \neq \emptyset$, *sobre un campo* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) esta formado junto con dos operaciones* $+, \cdot$, *la primera binaria* $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ *y la segunda* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ *y que satisface las siguientes propiedades.*

Propiedades de la Suma

1S. Para todo x e y de $\mathbb{V}$, $x + y$ es un elemento de $\mathbb{V}$.

2S. Para todo x e y de $\mathbb{V}$, $x + y = y + x$. (La suma de vectores es **conmutativa**).

3S. Para todo x, y, z de $\mathbb{V}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$. (La suma de vectores es **asociativa**).

4S. Existe un vector s en $\mathbb{V}$ tal que para cualquier x de $\mathbb{V}$, $x + s = s + x = x$. (s es el **elemento identidad** para la operación llamada suma).

5S. Para todo vector x de $\mathbb{V}$ existe un vector y en $\mathbb{V}$ tal que $x + y = y + x = s$. (y es un **inverso aditivo** del vector x).

Propiedades de la Multiplicación Escalar

6M. Para todo $r \in \mathbb{K}$ y $\forall x \in \mathbb{V}$, $rx \in \mathbb{V}$.

7M. Para todo par de escalares, $r, w \in \mathbb{K}$ y cualquier x de $\mathbb{V}$, $(rw)x = r(wx) = w(rx)$.

8M. Para todo par $r, w \in \mathbb{K}$ y cualquier x de $\mathbb{V}$, $(r + w)x = rx + wx$.

9M. Para todo $r \in \mathbb{K}$ y dos vectores cualquiera x e y de $\mathbb{V}$, $r(x + y) = rx + ry$.

10M. Para todo x de $\mathbb{V}$, $1x = x$, donde 1 es el número real 1 o el número complejo $1 + 0i$.

Teorema 1.1.2. *(a) Sean s y s' elementos del espacio vectorial $\mathbb{V}$ y ambos satisfacen la propiedad **4S**, entonces $s = s'$. De ahora en adelante el elemento identidad de $\mathbb{V}$ lo indicaremos* 0.

*(b) Si x está en el espacio vectorial $\mathbb{V}$ y si y e y' son inversos aditivos de x como en la propiedad **5S**, entonces $y = y'$, al inverso de x lo indicaremos con $-x$.*

(c) En un espacio vectorial $\mathbb{V}$, existe un vector P tal que $xP = P$ para todo $x \in \mathbb{K}$ es el elemento identidad de $\mathbb{V}$.

(d) En un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el escalar -1 multiplicado por el vector x es el inverso aditivo de x. En símbolos, $(-1)x = -x$

(e) En un espacio vectorial $\mathbb{V}$, el escalar α multiplicado por el elemento identidad de $\mathbb{V}$, es el elemento identidad de $\mathbb{V}$. En símbolos, $\alpha 0 = 0$.

(f) En un espacio vectorial $\mathbb{V}$, si $rx = 0$ y $r \neq 0$, entonces $x = 0$.

Demostración. (a) Supongamos que s y s' son identidades de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. por la propiedad **4S** tenemos que s es el **elemento identidad** para la operación suma, es decir, $s' + s = s + s' = s'$. Pero s' también es una identidad para $\mathbb{V}$; entonces $s + s' = s' + s = s$

(b) Supongamos que y e y' son inversos aditivos de un vector x.
Tenemos $y = y + s = y + (x + y') = (y + x) + y' = s + y' = y'$, en efecto, $y = y'$

Por la demostración de (a) se tiene que la identidad aditiva de un vector x es única y la notaremos por 0 y se llamará el **vector nulo**. De igual manera por la demostración de (b) se obtiene que el inverso aditivo de un vector x es único y se denota por $-x$, y se llamara el vector inverso de x.

(c) Por la propiedad **5S** y (b) tenemos que $y + (-y) = 0$ luego $0x = (y + (-y))x$; ahora por la propiedad **8M** obtenemos $(y + (-y))x = yx + (-y)x = yx + (-yx)$ concluyendo de nuevo por la propiedad **5S** que $yx + (-yx) = 0$, en efecto $0x = 0$

(d) Por la demostración de (b) tenemos que el inverso aditivo del vector x en $\mathbb{V}$ es $-x$ y por la proposición **10M** se tiene que la igualdad $-1x = -x$ se cumple.

(e) Por la propiedad **9M** tenemos un escalar α y dos vectores x y su inverso $-x$ en $\mathbb{V}$, entonces $\alpha(x + (-x)) = \alpha x + \alpha(-x) = \alpha x + (-\alpha x)$. Por la propiedad **5S** obtenemos $\alpha x + (-\alpha x) = 0$, luego aplicando de nuevo las propiedades **9M** y **5S** podemos concluir

$$\alpha x + (-\alpha x) = \alpha(x + (-x)) = \alpha 0 = 0$$

(f) Dado $rx = 0$ y $r \neq 0$, entonces $x = 1 \cdot x$, luego $x = r^{-1}rx$, lo cual es igual a $x = r^{-1}(rx)$, de este modo $x = r^{-1}0$ y por (e) podemos concluir que $x = 0$.

■

1.2. Subespacios

Definición 1.2.1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea W un subconjunto de $\mathbb{V}$ no vacío. Se dice que W es un **subespacio** si y solo si W con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en $\mathbb{V}$ es en si mismo un espacio vectorial.*

En forma superficial parece que para determinar si W es un subespacio fuera necesario comprobar si las 10 propiedades 1S-5S y 6M-10M se cumplen. Sin embargo, como lo establece el siguiente teorema solo es necesario verificar las propiedades 1S y 6M, siempre y cuando W no sea vacío.

Teorema 1.2.2. *Si $(\mathbb{V},+,\cdot)$ es un espacio vectorial y W es un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$, entonces W es un subespacio de $\mathbb{V}$ si:*

(i) Para todo x e y de W, $x+y$ esta en W.

(ii) Para todo $r \in \mathbb{K}$ y para todo x en W, rx ésta en W.

Recíprocamente, si W es un subespacio de $\mathbb{V}$, (i) y (ii) se cumplen.

Demostración. Usando como hipótesis a (i), para dos vector x e y cualquiera de W, $x+y$ esta en W. Aún más, $x+y$ está determinado en forma única en W debido a que la suma está determinada de forma única en $\mathbb{V}$. Entonces, la propiedad 1S se cumple.

Dado dos vectores x e y de W, los vectores w e y están en $\mathbb{V}$ y por lo tanto $x+y=y+x$. Entonces, la propiedad 2S se cumple para W. Se dice que W hereda la propiedad 2S de W. En forma semejante, W hereda la propiedad 3S de $\mathbb{V}$.

Como W no es vacío, se puede escoger un vector x_1 de W. De acuerdo a la hipótesis (ii), $(-1)x_1$ debe estar en W. por el teorema 1.1.2 (d), se tiene $(-1)x_1=-x_1$, que es el inverso aditivo de x_1.

Usando la hipótesis (i) vemos que la suma de dos vectores cualquiera de W está en W y, en particular, $x_1+(-1)x_1=0$ está en W. Como $x+0=0+x=x$ para cualquier vector x de $\mathbb{V}$, entonces $x+0=x=0+x$ también es cierto para todos los vectores de W, y queda verificada la propiedad 4S para $\mathbb{W}$.

Para cualquier vector x de W se tiene por la hipótesis (ii), que $(-1)x=-x$ está en W. De donde, la propiedad 5S se cumple.

Por la hipótesis (ii), para cualquier vector x de W y cualquier escalar r de $\mathbb{K}$ tenemos que rx está en W. Dado que el vector rx está determinado en forma única en $\mathbb{V}$, también lo está en W por tanto, la propiedad 6M se cumple. Las propiedades 7M-10M son propiedades que W hereda de $\mathbb{V}$. De donde, W es un subespacio de $\mathbb{V}$.

■

1.3. Independencia Lineal

Definición 1.3.1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un conjunto no vació de vectores de $\mathbb{V}$, es* ***linealmente independiente*** *si y solo si, para todos los escalares $r_1,r_2,\ldots,r_n$ si $r_1x_1+r_2x_2+\ldots+r_nx_n=0$ entonces $r_1=r_2=\ldots=r_n=0$.*

1.4. Conjunto Generador

Definición 1.4.1. *Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $M=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un subconjunto de $\mathbb{V}$, el subespacio de todas las combinaciones lineales de M se llama el* ***subespacio generado*** *por M y se denota $gen(M)$.*

1.5. Base y Dimensión

Definición 1.5.1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbb{B}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{B}$ es una **base** para $\mathbb{V}$ si y solo si*

(i) El espacio $\mathbb{V}$ es generado por $\mathbb{B}$

(ii) $\mathbb{B}$ es un conjunto linealmente independiente.

Definición 1.5.2. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, la **dimensión** de $\mathbb{V}$ es el número de elementos que tiene una base de $\mathbb{V}$.*

Definición 1.5.3 (Sobreyectiva)**.** *La aplicación λ de S en T se dice que es **sobreyectiva** sobre T si dado $t \in T$ cualquiera, siempre existe un elemento $s \in S$ tal que $t = \lambda(s)$.*

Si llamamos al conjunto $\lambda S = \left\{x \in T : x = \lambda(s) \text{ para algún } s \in S\right\}$ la imagen de S bajo λ, entonces λ es sobreyectiva si la imagen se S bajo λ es todo T.

Definición 1.5.4 (Inyectiva)**.** *Una aplicación φ de S en T se dice que es una aplicación **inyectiva** si elementos distintos de S tienen imágenes distintas en T. En otras palabras si $\varphi(s) = \varphi(s^\star)$, entonces $s = s^\star$ o equivalentemente si $s \neq s^\star$ entonces $\varphi(s) \neq \varphi(s^\star)$*

Lema 1.5.5 (Biyectiva)**.** *La aplicación $\sigma : S \to T$ es una correspondencia **biyectiva** entre S y T si y sólo si existe una aplicación $\mu : T \to S$ tal que $\sigma \circ \mu$ y $\mu \circ \sigma$ son las aplicaciones identidad sobre S y T, respectivamente.*

1.6. Espacio Métrico

Definición 1.6.1. *Sea X un conjunto no vacío, una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$, se dice una **métrica** (o una **distancia**) si para todo $x, y, z \in X$ se satisface:*

d_1) $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

d_2) $d(x, y) = d(y, x); \;\forall x, y \in X$ *(Simetría)*

d_3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z); \;\forall x, y, z \in X$ *(Desigualdad Triangular)*

Al par (X, d) se le llama ***espacio métrico***. La métrica d representa la distancia entre los puntos x e y.

Observación 1.6.2. A partir de la definición 1.6.1 de la métrica tomando en d_3), $z = x$ se tiene:

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

por lo tanto $d(x, y) \geq 0 \quad \forall\, x, y \in X$.

Definición 1.6.3. *Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$, el conjunto*

$$B_X(a, r) := \{x \in X : \; d(a, x) < r\}$$

*recibe el nombre de **bola abierta**, con centro en a y radio r.*

Definición 1.6.4. *Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subset X$ no vacío, se dice que A es un conjunto **abierto** si:*

$$\forall x \in A \quad \exists r_x \quad \text{tal que } B(x,r_x) \subset A.$$

Definición 1.6.5. *Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces a es un **punto adherente** de X si y solo si, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*

Definición 1.6.6. *Sea $X \subset \mathbb{R}$. La **clausura** de X $(\overline{X})$, se define como*

$$\overline{X} := \{a \in \mathbb{R} \ / \ a \text{ es punto adherente de } X\}$$

Definición 1.6.7. *Sea (X,d) un espacio métrico y $W \subset X$. Se dice que W es **cerrado** si su complemento, $W^c = X \setminus W$, es un conjunto abierto en X.*

Proposición 1.6.8. *Sea (X,d) un espacio métrico. $W \subset X$ es cerrado si y sólo si $\overline{W} = W$.*

Definición 1.6.9. *Sea (X, d) un espacio métrico , $A \subset X$ se llama **denso** en X, si $\overline{A} = X$.*

Definición 1.6.10. *Un conjunto $\mathcal{E}$ se llamará **numerable** si y sólo si es equipotente con el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, es decir, cuando existe una biyección de $\mathbb{N}$ a $\mathcal{E}$.*

Definición 1.6.11. *Un espacio métrico (X, d) , es **separable**, si existe $D \subset X$, denso y numerable.*

1.7. Espacios Normados.

Definición 1.7.1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($donde$ $\mathbb{K}$ denota $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una **norma** en $\mathbb{V}$, si satisface:*

N_1) $\| v \| \geq 0;\ \forall v \in \mathbb{V}$

N_2) $\| v \| = 0 \iff v = 0$

N_3) $\| r v \| = | r | \| v \|;\ r \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathbb{V}$

N_4) $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|;\ \forall v, w \in \mathbb{V}$

La asignación de $\|\cdot\|$ se conoce como norma. Al par $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ se le llama **espacio normado.**

Proposición 1.7.2. *En todo espacio normado $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, se puede introducir una métrica $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

la cual es llamada métrica inducida por la norma.

Demostración. d_1) $d(x,y) = 0$, luego $\| x - y \| = 0$, entonces se tiene que $x - y = 0$ (Por N_2). Por lo tanto $x = y$. Recíprocamente si $x = y$, $x - y = 0$ y $d(x,y) = 0$.

d_2)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \| x - y \| = \| (-1)(y - x) \| = |-1| \ \| y - x \| \quad (\text{Por } N_3) \\ &= \| y - x \| = d(y,x) \end{aligned}$$

d_3)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \| x-y \| = \| x-y+z-z \| = \| (x-z)+(z-y) \| \\ &\leq \| x-z \| + \| z-y \| \quad (Por\, N_4) \\ &\leq d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

■

Definición 1.7.3. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial. Dos normas $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ sobre $\mathbb{V}$ se dicen equivalentes, si existen dos constantes $a,\ b>0$ tales que*

$$a \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq b \| x \|_1, \quad \forall\, x \in \mathbb{V}$$

ó en forma equivalente

$$a \leq \frac{\| x \|_2}{\| x \|_1} \leq b; \quad \forall x \in \mathbb{V} \setminus \{0\}.$$

Definición 1.7.4. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) la aplicación*

$$\vartheta : X \times X \to \mathbb{K}$$

*se llama **forma sesquilineal**, si satisface:*

(i) $\vartheta(x,y) = \overline{\vartheta(y,x)} \quad \forall\ x,y \in X$

(ii) $\vartheta(x,y+z) = \vartheta(x,y)+\vartheta(x,z) \quad \forall\ x,y,z \in X$

(iii) $\vartheta(x,\lambda y) = \lambda\vartheta(x,y) \quad \forall\ x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$

1.8. Espacio con Producto Interno.

Definición 1.8.1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) la aplicación*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

*es llamada **producto interno** o producto escalar, en X , si para todo x,y,z X y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se satisface:*

P_1*)* $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ *(Linealidad con respecto a la primera componente)*

P_2*)* $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ *(Conjugado lineal con respecto a la primera componente)*

P_3*)* $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ *(Simetría Hermitiana).*

P_4*)* $\langle x,x\rangle \geq 0$; $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$ *(No negatividad)*

Al par $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se le llama espacio **producto interno** y lo notaremos como $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Las tres primeras condiciones son conocidas como sesquilinealidad, y la cuarta es llamada no negativa. De este modo, un producto interno es una forma sesquilineal no negativa.

Proposición 1.8.2. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{K}$ una función producto interno, entonces* *i)* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es lineal con respecto a la segunda componente.*

Sean $x,y,z\in\mathbb{V}$*, entonces*

$$\langle x,y+z\rangle=\overline{\langle y+z,x\rangle}=\overline{\langle y,x\rangle+\langle z,x\rangle}=\overline{\langle y,x\rangle}+\overline{\langle z,x\rangle}=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$$

ii) Conjugado lineal con respecto al segundo factor.

Sean $x,y,z\in\mathbb{V}$ *y* $\alpha\in\mathbb{K}$*, entonces*

$$\langle x,\alpha y\rangle=\overline{\langle \alpha y,x\rangle}=\overline{\alpha\langle y,x\rangle}=\overline{\alpha}\,\overline{\langle y,x\rangle}=\overline{\alpha}\,\langle x,y\rangle$$

iii) $\langle x,0\rangle=\langle x,0+0\rangle=\langle x,0\rangle+\langle x,0\rangle$*, por lo tanto* $\langle x,0\rangle=0,\ \forall x\in\mathbb{V}$

Lema 1.8.3 (Desigualdad de Cauchy Schwarz)**.** *Sean* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio producto interno y* $x,y\in\mathbb{V}$*, entonces se tiene*

$$|\langle x,y\rangle|\le\langle x,x\rangle^{1/2}\,\langle y,y\rangle^{1/2}$$

Demostración. Si $y=0$, entonces se tiene $\langle x,0\rangle=0$, y la igualdad se verifica.
Sea $y\neq 0$, para cada escalar α se tiene

$$\begin{aligned}0&\le\langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle=\langle x,x-\alpha y\rangle-\langle \alpha y,x-\alpha y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,\alpha y\rangle-\langle\alpha y,x\rangle+\langle\alpha y,\alpha y\rangle\\&=\langle x,x\rangle-\overline{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha\langle y,x\rangle+\alpha\overline{\alpha}\langle y,y\rangle=\langle x,x\rangle-\overline{\alpha}\langle x,y\rangle-\alpha\left[\langle y,x\rangle-\overline{\alpha}\langle y,y\rangle\right]\end{aligned}$$

Como $y\neq 0$ podremos tomar $\overline{\alpha}=\dfrac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$, con lo cual $\langle y,x\rangle-\overline{\alpha}\langle y,y\rangle=0$, y entonces,

$$0\le\langle x,x\rangle-\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle=\langle x,x\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle},\ \text{luego}\ \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}\le\langle x,x\rangle$$
$$|\langle x,y\rangle|^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,\ \text{por lo tanto}\ |\langle x,y\rangle|\le\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$$

■

Definición 1.8.4. *[Suma Directa] Sean* $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial,* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{P}$ *subespacios de* $\mathbb{V}$*. Se dice que* $\mathbb{V}$ *es la* ***suma directa*** *de* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{P}$ *denotada por* $\mathbb{V}=\mathcal{S}\oplus\mathcal{P}$*, si cada* v *en* $\mathbb{V}$ *puede ser expresado de forma única como suma de un elemento* $s\in\mathcal{S}$ *y otro* $p\in\mathcal{P}$*.*

Definición 1.8.5. *Sea* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio producto interno, los vectores* $x,y\in X$ *son* ***ortogonales*** *si* $\langle x,y\rangle=0,$ *lo cual se nota* $x\perp y$*.*

Proposición 1.8.6. *Sea* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio producto interno sobre un campo* $\mathbb{K}$ *la relación de ortogonalidad cumple lo siguiente:*

i). $x\perp y,$ *si y solo si,* $y\perp x$ *(simetría).*

ii). $0\perp x$ *para todo* x *en* X*.*

iii). $x\perp z,\ y\perp z,$ *entonces* $(\alpha x+\beta y)\perp z,$ *para todo* $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$*.*

iv). $x\perp x$ *si y solo si* $x=0$

Definición 1.8.7. *Sea $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio producto interno. Dado $M\subset X$, el conjunto*

$$M^{\perp}=\Big\{v\in X : v\perp M\Big\}=\Big\{v\in X : \langle v,m\rangle=0\,(m\in M)\Big\}$$

*se llama **Complemento Ortogonal** de M, al conjunto notado por $M^{\perp}$.*

Notación 1.8.8. Cuando $\langle r,s\rangle=0$ para todo $s\in S$ escribiremos $\langle r,S\rangle=0$.

Proposición 1.8.9. *En un espacio producto interno $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se puede inducir una norma $\|\cdot\|: X\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por*

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$$

La cual es llamada norma asociada al producto interno.

Demostración. Sean $x,y\in X$, $\alpha\in\mathbb{K}$

N$_1$) $\quad \| x \|=\sqrt{\langle x,x\rangle}\geq 0 \qquad (Por\ P_4)$.

N$_2$) $\quad \| x \|=0\longleftrightarrow \| x \|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=0\longleftrightarrow \langle x,x\rangle=0\longleftrightarrow x=0. \qquad (Por\ P_4)$.

N$_3$) $\quad \|\alpha x\|=\sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle}=\sqrt{\alpha\langle x,\alpha x\rangle}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle}=|\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle}=|\alpha|\ \|x\|$

N$_4$)
$$\begin{aligned}\| x+y \|^2&=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x+y\rangle+\langle y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\
&=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\langle y,y\rangle=\| x \|^2+2Re\langle x,y\rangle+\| y \|^2\\
&=\| x \|^2+2|\langle x,y\rangle|+\| y \|^2\\
&\leq\| x \|^2+2\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}+\| y \|^2 \ \text{(Por Lema 1.8.3)}\\
&=\| x \|^2+2\| x \|\| y \|+\| y \|^2\\
&=(\| x \|+\| y \|)^2\end{aligned}$$

Así que, $\| x+y \|\leq\| x \|+\| y \|$

■

De acuerdo con las Proposiciones 1.7.2 y 1.8.9, también se puede inducir una métrica dada por

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$$

Definición 1.8.10. *Sea $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio producto interno, la pareja $(X,\|\cdot\|)$ recibe el nombre de **espacio pre-Hilbert**, donde $\|\cdot\|$ es la norma asociada al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Proposición 1.8.11. *Si $a_1,a_2,\ldots,a_n$ y $b_1,b_2,\ldots,b_n$ son números reales cualquiera, entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)^2 \tag{1.1}$$

1.9. Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy

Definición 1.9.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, se dice **convergente** a x si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists K\in\mathbb{N}\ /\ si\ n\geq K\rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

Definición 1.9.2. *Sea (X,d) un espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de **Cauchy**, si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists K\in\mathbb{N}\ /\ m,n\geq K\rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

Definición 1.9.3. *Un espacio métrico (X,d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.*

Proposición 1.9.4. *Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo.*

Demostración. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $M \subset X$ cerrado. Tenemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en M. Luego, tambien es sucesión de Cauchy en X. Por tanto, converge a un punto $x \in X$. Como M es cerrado, entonces $x \in M$, y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en M. ■

Observación 1.9.5. Tenga en cuenta, que *la desigualdad triangular opuesta* se cumple en un espacio normado X:

$$\|x-y\| \geq \Big| \|x\| - \|y\| \Big|, \quad \forall x, y \in \mathbb{V} \tag{1.2}$$

Demostración. Sean $x, y \in X$, entonces $\|x\| = \|\left(x-y\right)+y\| \leq \|x-y\| + \|x\|$, así

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \tag{1.3}$$

Además, $\|y\| = \|(-x+x)+y\| = \|\left(y-x\right)+x\| \leq \|y-x\|+\|x\| = \|x-y\|+\|x\|$, luego $\|y\| \leq \|x-y\|+\|x\|$, de este modo tenemos $-\|x\|+\|y\| \leq \|x-y\|$ por lo tanto

$$\|x\| - \|y\| \geq -\|x-y\| \tag{1.4}$$

De (1.3) y (1.4) se tiene $-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$, de lo cual se concluye $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x-y\|$ ■

Definición 1.9.6. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$, se define $\ell^p(\mathbb{C})$ como*

$$\ell^p(\mathbb{C}) = \left\{ x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} /\ \xi_j \in \mathbb{C},\ y,\ \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}$$

una métrica para $\ell^p(\mathbb{C})$ es

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p}$$

donde $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y = (\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$, se tiene que (ℓ^p, d) es un espacio métrico.

Definición 1.9.7. *Notaremos por ℓ^{∞} el conjunto de todas las sucesiones de números complejos,*

$$\ell^{\infty}(\mathbb{C}) = \{x / x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}; \xi_j \in \mathbb{C}\}$$

tal que para todo $j = 1, 2, \cdots$ se tiene $|\xi_j| \leq c$, con $c \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j - \eta_j|; \quad x = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}},\ y = \{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}}.$$

1.10. Espacios de Hilbert

Definición 1.10.1. *Se dirá que un espacio con producto interno* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio de* ***Hilbert****, si el espacio métrico* (X, d) *es completo con respecto a la métrica inducida por el producto interno.*

Notación 1.10.2. De ahora en adelante, $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert.

Proposición 1.10.3 (Conjunto Total)**.** *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $M \subset \mathcal{H}$ *con* $M \neq \emptyset$. *Se verifica que* M *es* ***total*** *en* $\mathcal{H}$, *si y solo si,* $M^{\perp} = \{0\}$.

Demostración. Sea S el subespacio cerrado generado por M. Entonces $M^{\perp} = S^{\perp}$ y $\mathcal{H} = S \oplus S^{\perp}$. Por lo tanto, $\mathcal{H} = S$, si y solo si, $M^{\perp} = S^{\perp} = \{0\}$. ■

Definición 1.10.4. *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado con* $F \subset V$. *Es total en* V, *si el subespacio generado por* F *es denso en* V.

1.11. Teoría de operadores lineales

Definición 1.11.1. *Una aplicación* $\mathcal{T}$ *entre dos espacios vectoriales* X, Y *definidos sobre un mismo campo* $\mathbb{K}$, *se denomina operador. Este operador* $\mathcal{T}$ *se dice que es lineal si:*

(i) *El dominio* $D \subset X$ *es un espacio vectorial.*

(ii)
$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x+y) &= \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y) && \forall x, y \in D \\ \mathcal{T}(\alpha x) &= \alpha \mathcal{T}(x) && \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Notación 1.11.2. Indicaremos como $\mathscr{L}(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales de X en Y. Es decir, $\mathscr{L}(X,Y) = \{\mathcal{T} : X \to Y \,/\, \mathcal{T}$ es un operador lineal$\}$. Si $X = Y$ escribiremos simplemente $\mathscr{L}(X)$.

Definición 1.11.3. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *se reconocerán los siguientes subconjuntos asociados a* $\mathcal{T}$

* $\ker(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{H} : \mathcal{T}x = 0\}$, *es el* ***espacio nulo ó núcleo*** *de* $\mathcal{T}$.
* $\mathrm{Rang}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}x : x \in \mathcal{H}\}$, *es el* ***rango ó imagen*** *de* $\mathcal{T}$

Observación 1.11.4. $\ker(\mathcal{T}) \neq \emptyset$. En efecto: $\mathcal{T}(\mathbf{0}) = \mathcal{T}(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \mathcal{T}(\mathbf{0}) = 0$, entonces $0 \in \ker(\mathcal{T})$.

Proposición 1.11.5. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert,* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, *entonces* $\ker(\mathcal{T})$ *es un subespacio de* $\mathcal{H}$.

Demostración. Sean $u, v \in \ker(\mathcal{T})$, α un escalar. Luego:

$$\mathcal{T}(u+v) \;=\; \mathcal{T}(u) + \mathcal{T}(v) = 0 + 0 = 0$$

por lo tanto $(u+v) \in \ker(\mathcal{T})$.

$$\mathcal{T}(\alpha u) \;=\; \alpha \mathcal{T}(u) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto $(\alpha u) \in \ker(\mathcal{T})$. Así, $\ker(\mathcal{T})$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. ■

Definición 1.11.6. *Sean* $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ *espacios normados y* $\mathcal{T} : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal, si* $\exists\, c \in \mathbb{R}^{+}$ *tal que* $\| \mathcal{T}(x) \|_Y \leq c \| x \|_X$, $\forall x \in X$*, se dice que* $\mathcal{T}$ *es un* ***operador acotado****.*

Notación 1.11.7. Con $\mathscr{B}(X,Y)$ se denota al conjunto de los **operadores lineales acotados** de X en Y. En caso de que $X = Y$, entonces se escribe $\mathscr{B}(X)$.

Luego si $\mathcal{T} \in \mathscr{B}(X,Y)$ entonces existe $c \in \mathbb{R}^{+}$, tal que

$$\| \mathcal{T}(x) \|_Y \leq c \| x \|_X \quad \text{entonces} \quad \frac{\| \mathcal{T}(x) \|_Y}{\| x \|_X} \leq c \qquad \text{con} \quad x \neq 0$$

Por lo tanto el subconjunto de $\mathbb{R}$

$$W = \left\{ \frac{\| \mathcal{T}(x) \|_Y}{\| x \|_X}, x \neq 0 \right\}$$

es distinto de vacío y acotado superiormente por c, así que, existe el $sup(W)$, el cual se notará $\| \mathcal{T} \|$.

Definición 1.11.8. *Sea* $\mathcal{T} \in \mathscr{B}(X,Y)$*, el conjunto*

$$\| \mathcal{T} \| = sup \left\{ \frac{\| \mathcal{T}(x) \|_Y}{\| x \|_X}, \qquad x \neq 0 \right\}$$

recibe el nombre de ***norma del operador*** $\mathcal{T}$*.*

Definición 1.11.9. *Dado* $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{K}$*,* $f : V \to \mathbb{K}$*, se dice que es un* ***funcional lineal continuo*** *si:*

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in V$

(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Definición 1.11.10. *El espacio* $\mathcal{E}'$ *de todos los funcionales lineales continuos sobre un espacio normado* $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ *se denomina espacio dual de* $\mathcal{E}$*.*

Observación 1.11.11. La norma de la Proposición 1.8.9 (con $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y $\|\cdot\|_{\mathbb{K}} = |\cdot|$) provee efectivamente a $\mathcal{E}'$ de la estructura de un espacio normado.

Teorema 1.11.12 (Teorema de Representación Fréchet-Riesz)**.** *Si* f *es un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$*, entonces existe un único vector* $y \in \mathcal{H}$ *que representa a* f*, en el sentido de que* $f(x) = \langle x, y \rangle$ *con* $x, y \in \mathcal{H}$*.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}'$ y sea $\ker(f)$ un subespacio de $\mathcal{H}$. si $\ker(f) = \mathcal{H}$, entonces $f = 0$ y se toma $y = 0$. Si $\ker(f) \neq \mathcal{H}$, existe un $z \in \ker(f)^{\perp}$ tal que $f(z) = 1$. Ahora, para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene $x - f(x)z \in \ker(f)$; y como $z \in \ker(f)^{\perp}$, necesariamente
$0 = \langle x - f(x)z, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle f(x)z, z \rangle = \langle x, z \rangle - f(x)\langle z, z \rangle = \langle x, z \rangle - f(x)\|z\|^2$, así que
$f(x) = \|z\|^{-2}\langle x, z \rangle = \langle x, \|z\|^{-2} z \rangle = \langle x, y \rangle$, donde $y = \|z\|^{-2} z$ es independientemente de x. Esto prueba la afirmación de existencia.

Para establecer la unicidad, basta observar que si $\langle x, y \rangle = \langle x, w \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$ en particular será $y - w \perp y - w$ con lo que tenemos $y = w$. ■

Teorema 1.11.13 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert y $\mathcal{T}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ es un operador lineal acotado, la formula*

$$\varphi_{\mathcal{T}}\left(x,y\right)=\left\langle \mathcal{T}x,y\right\rangle \tag{1.5}$$

define una forma sesquilineal acotada, tal que $\mathcal{T}$ está determinado unicamente por $\varphi_{\mathcal{T}}$ y tiene norma

$$\|\varphi_{\mathcal{T}}\|=\|\mathcal{T}\| \tag{1.6}$$

Recíprocamente, dada una forma sesquilineal acotada φ en $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$, existe un único operador lineal $\mathcal{T}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ tal que $\varphi=\varphi_{\mathcal{T}}$; además

$$\|\varphi\|=\|\varphi_{\mathcal{T}}\|=\|\mathcal{T}\| \tag{1.7}$$

Demostración. Para probar la primera parte, se comienza observando que $\varphi_{\mathcal{T}}$ es trivialmente sesquilineal.
Sea $x,y\in\mathcal{H}_1$ con $\|x\|\le 1,\ \ \|y\|\le 1$. Entonces $\left|\left\langle \mathcal{T}x,y\right\rangle\right|\le\left\|\mathcal{T}x\right\|\cdot\left\|\ y\ \right\|\le\left\|\mathcal{T}\right\|\cdot\left\|\ x\ \right\|\cdot\left\|\ y\ \right\|\le\left\|\mathcal{T}\right\|$.
Por lo tanto,

$$s=\sup\left\{\left|\left\langle \mathcal{T}x,y\right\rangle\right|:\|x\|\le 1,\ \ \|y\|\le 1\right\}\le\|\mathcal{T}\|$$

Inversamente, Sea $x,y\in\mathcal{H}_1$ con $\|x\|\le 1,\ \ \|y\|\le 1$. Entonces $\left|\left\langle x,\mathcal{T}y\right\rangle\right|=\left|\left\langle \mathcal{T}x,y\right\rangle\right|\le s$. Fijamos $x,z\mapsto\left|\left\langle z,\mathcal{T}x\right\rangle\right|$ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{H}_1$, de norma $\|\mathcal{T}x\|$. Por lo tanto, tomando el supremo en y encontrando que $\|\mathcal{T}x\|\le s$. Tomando ahora el supremo en x se puede concluir que $\|\mathcal{T}\|\le s$, y con ello que $\|\mathcal{T}\|=s$.

Recíprocamente, dado $x\in\mathcal{H}_1$ el problema consiste en definir $\mathcal{T}x\in\mathcal{H}_2$ tal que $\varphi_{\mathcal{T}}=\varphi$. Al tal fin, consideremos el funcional lineal f_x definido sobre $\mathcal{H}_2$ mediante $f_x(y)=\overline{\varphi\left(x,y\right)}\ \ \forall y\in\mathcal{H}_2$. Este f_x es continuo, con $\|f_x\|\le\|\varphi\|\cdot\|\ x\ \|$. El Teorema 1.11.12 proporciona un único $z\in\mathcal{H}_2$ tal que $f_x(y)=\langle y,z\rangle\ \ \forall y\in\mathcal{H}_2$ y $\|f_x\|=\|\ z\ \|$. Definiendo $z=\mathcal{T}x$ se cumple que $\langle y,\mathcal{T}x\rangle=f_x(y)=\overline{\varphi\left(x,y\right)}\ \ \forall y\in\mathcal{H}_2$ o, equivalentemente, $\langle\mathcal{T}x,y\rangle=\varphi\left(x,y\right)\ \ \forall y\in\mathcal{H}_2$.

La aplicación $\mathcal{T}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ así definida es lineal, ya que para $u,v\in\mathcal{H}_1$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ se verifica

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{T}\left(\lambda u+\mu v\right),y\right\rangle&=\varphi\left(\lambda u+\mu v y\right)=\lambda\varphi\left(u,y\right)+\mu\varphi\left(v,y\right)=\lambda\langle\mathcal{T}u,y\rangle+\mu\langle\mathcal{T}v,y\rangle\\&=\langle\lambda\mathcal{T}u,y\rangle+\langle\mu\mathcal{T}v,y\rangle=\langle\lambda\mathcal{T}u+\mu\mathcal{T}v,y\rangle\ \ \forall y\in\mathcal{H}_2.\end{aligned}$$

Además, $\|\mathcal{T}x\|=\|\ z\ \|=\|f_x\|\le\|\varphi\|\cdot\|x\|$, de modo que $\mathcal{T}$ es continuo y su norma no excede a $\|\varphi\|$. puesto que $\varphi=\varphi_{\mathcal{T}}$ se infiere de la primera parte (1.7).

La establecer la unicidad de $\mathcal{T}$, supongamos que $S:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ es otra aplicación satisfaciendo $\langle Sx,y\rangle=\varphi\left(x,y\right)$ y por (1.5) se obtiene $\langle Sx,y\rangle=\varphi\left(x,y\right)=\langle\mathcal{T}x,y\rangle$, con $x\in\mathcal{H}_1$ y $y\in\mathcal{H}_2$. Entonces $\langle Sx-\mathcal{T}x,y\rangle=0$ con $x\in\mathcal{H}_1$ y $y\in\mathcal{H}_2$, y particularizando $y=Sx-\mathcal{T}x\in\mathcal{H}_2$ con $x\in\mathcal{H}_1$ se concluye que $S=\mathcal{T}$. ■

Definición 1.11.14. *Sea $\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, se dice que $\mathcal{T}$ es* ***inyectivo*** *si $T(v_1)=T(v_2)$ implica $v_1=v_2;\quad\forall\, v_1,v_2\in\mathcal{H}$*

Definición 1.11.15. *Sea $\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, si* Rang$(\mathcal{T})=\mathcal{H}$ *se dice que $\mathcal{T}$ es* ***sobreyectivo****.*

Definición 1.11.16. *Sea $\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice que $\mathcal{T}$ es* ***invertible*** *si cumple:*

i) $\mathcal{T}$ *es inyectivo*

ii) $\mathcal{T}$ *es sobreyectivo*

En tal caso, se tiene que existe $\mathbb{Q} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *de manera que* $\mathcal{T}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\,\mathcal{T} = I_{\mathcal{H}}$*, dicho operador es único y se nota por* $\mathcal{T}^{-1}$.

Definición 1.11.17. *Sea* $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. *Existe un único operador lineal* $\mathcal{T}_1 \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *tal que* $\langle \mathcal{T}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{T}_1 y\rangle$ *para todo* x, y *en* $\mathcal{H}$. *Dicho operador se le llama el* ***adjunto*** *de* $\mathcal{T}$ *y se nota como* $\mathcal{T}^*$. *Por lo tanto* $\langle \mathcal{T}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{T}^* y\rangle$. *Además,* $\|\mathcal{T}^*\| = \|\mathcal{T}\|$

Proposición 1.11.18. *Sean* $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ *espacios de Hilbert sobre el campo* $\mathbb{K}$. $S, \mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, *son operadores lineales y* $\lambda \in \mathbb{K}$ *se cumple que:*

i). $\langle \mathcal{T}^* y, x\rangle = \langle y, \mathcal{T}x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}_1, \;\; y \in \mathcal{H}_2$

ii). $(\lambda\mathcal{T})^* = \overline{\lambda}\mathcal{T}^*$

iii). $(S+\mathcal{T})^* = S^* + \mathcal{T}^*$

iv). $\mathcal{T}^{**} = \mathcal{T}$

v). $\|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\| = \|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\| = \|\mathcal{T}\|^2$

vi). $\mathcal{T}^*\mathcal{T} = 0$ *si, y solo si,* $T = 0$

Demostración. La propiedad (i) es consecuencia inmediata de la Definición 1.11.17. En efecto:

$$\left\langle \mathcal{T}^* y, x\right\rangle = \overline{\left\langle x, \mathcal{T}^* y\right\rangle} = \overline{\left\langle \mathcal{T}x, y\right\rangle} = \left\langle y, \mathcal{T}x\right\rangle.$$

La Proposición (ii) se da por la Definición 1.11.17 y la Proposición 1.8.2 $ii)$ (conjugado lineal con respecto al segundo factor), por lo tanto

$$\left\langle x, (\lambda\mathcal{T})^* y\right\rangle = \overline{\left\langle (\lambda\mathcal{T})^* y, x\right\rangle} = \overline{\left\langle y, \lambda\mathcal{T}x\right\rangle} = \overline{\lambda\left\langle y, \mathcal{T}x\right\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\left\langle y, \mathcal{T}x\right\rangle} = \overline{\lambda}\left\langle \mathcal{T}x, y\right\rangle = \overline{\lambda}\left\langle x, \mathcal{T}^* y\right\rangle$$

La Proposición (iii) se garantiza por la Definición 1.11.17 y la Proposición 1.8.2 $i)$

$$\begin{aligned}\left\langle (S+\mathcal{T})^* x, y\right\rangle &= \overline{\left\langle y, (S+\mathcal{T})^* x\right\rangle} = \overline{\left\langle (S+\mathcal{T})\, y, x\right\rangle} = \overline{\left\langle Sy + \mathcal{T}y, x\right\rangle} = \overline{\left\langle Sy, x\right\rangle + \left\langle \mathcal{T}y, x\right\rangle}\\ &= \overline{\left\langle Sy, x\right\rangle} + \overline{\left\langle \mathcal{T}y, x\right\rangle} = \overline{\left\langle y, S^* x\right\rangle} + \overline{\left\langle y, \mathcal{T}^* x\right\rangle} = \left\langle S^* x, y\right\rangle + \left\langle \mathcal{T}^* x, y\right\rangle\\ &= \left\langle S^* x + \mathcal{T}^* x, y\right\rangle = \left\langle \left(S^* + \mathcal{T}^*\right) x, y\right\rangle\end{aligned}$$

Para comprobar la valides de la Propiedad (iv) se puede ver $\langle \mathcal{T}^{*} x, y\rangle = \overline{\langle y, \mathcal{T}^* x\rangle} = \overline{\langle \mathcal{T}y, x\rangle} = \langle \mathcal{T}x, y\rangle$.

Para probar (v), obsérvese que están definidas las composiciones $\mathcal{T}^*\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ y $\mathcal{T}\mathcal{T}^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$. Si $x \in \mathcal{H}_1$, $\|x\| \le 1$, se tiene $\|\mathcal{T}x\|^2 = \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle = \langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle \le \|\mathcal{T}^*\mathcal{T}x\| \cdot \|x\| \le \|\mathcal{T}^*\mathcal{T}x\| \le \|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\|$; tomando el supremo en x encontramos que $\|\mathcal{T}x\|^2 \le \|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\|$. Inversamente, es claro que $\|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\| \le \|\mathcal{T}^*\| \cdot \|\mathcal{T}\| \le \|\mathcal{T}\|^2$. Por ultimo, la validez de la igualdad $\|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\| = \|\mathcal{T}\|^2$ se sigue sin más que intercambiar los papeles de $\mathcal{T}^*$ y $\mathcal{T}$.

(v) implica (vi) y la Definición 1.7.1 N_2, se concluye:

$\Leftarrow$). $\|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\| = \|\mathcal{T}\|^2 = 0$, luego $\mathcal{T} = 0$

$\Rightarrow$). $\mathcal{T} = 0$, entonces $\|\mathcal{T}\|^2 = \|\mathcal{T}^*\mathcal{T}\| = 0$

■

Definición 1.11.19. *$\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, es llamado* **autoadjunto** *(o* **hermítico***) si coincide con su adjunto.*

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$$

Definición 1.11.20. *Sean $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ operadores lineales en $\mathcal{H}$ con $Dom(T_1) = Dom(T_2) = S$, se dice que $\mathcal{T}_1$ y T_2* ***conmutan*** *cuando*

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1.$$

Definición 1.11.21. *Sean X un espacio producto interno de dimensión finita y $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Se dice que $\mathcal{T}$ es* **normal** *si conmuta con su adjunto; es decir,*

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$$

Definición 1.11.22. *Sean X e Y espacios producto interno sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ y $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(X,Y)$. Se dice que $\mathcal{T}$ es una* **isometría** *si $\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}y\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo x, y de X.*

Proposición 1.11.23. *Dado $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i). $\mathcal{T}$ *es isométrico*

ii). $\mathcal{T}^*\mathcal{T} = \mathrm{I}$

iii). $\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall\, x, y \in \mathcal{H}$.

Demostración. Como $\|\mathcal{T}x\| = \|x\| \quad x \in \mathcal{H}$, se halla que

$$\langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x, x\rangle = \langle \mathcal{T}x, \left(\mathcal{T}^*\right)^* x\rangle = \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle = \|\mathcal{T}x\|^2 = \|\ x\ \|^2 = \langle x, x\rangle = \langle \mathrm{I}\ x, x\rangle \qquad \forall\ x\ \in \mathcal{H}.$$

Veamos ahora que (i) implica (ii).
Considérese las formas sesquilineales, φ y ψ definidas por (1.5) de tal forma que $\varphi\left(x, y\right) = \langle Sx, y\rangle$, $\psi\left(x, y\right) = \langle \mathcal{T}x, y\rangle$ con x, y en $\mathcal{H}$. Siendo $S, \mathcal{T}$ operadores lineales se verifica que $\langle Sx, x\rangle = \langle \mathcal{T}x, x\rangle$ con $x \in \mathcal{H}$, de donde $\varphi = \psi$. Consecuentemente, $\langle Sx, y\rangle = \langle \mathcal{T}x, y\rangle$ con $x, y \in \mathcal{H}$, obligando a que $Sx = \mathcal{T}x \ \ x \in \mathcal{H}$.

La implicación de (ii) a (iii) se hace inmediata ya que podemos ver

$$\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}y\rangle = \langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x, \mathcal{T}^*\mathcal{T}y\rangle = \langle \mathrm{I}\ x, \mathrm{I}\ y\rangle = \langle x, y\rangle \quad x, y \in \mathcal{H}$$

finalmente,(iii) implica (i), ya que $\|\mathcal{T}x\|^2 = \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 \quad x \in \mathcal{H}$ ■

Observación 1.11.24. Sean $S, \mathcal{T} \in \mathscr{L}(X, Y)$ se evidencia $\langle Sx, x\rangle = \langle \mathcal{T}x, x\rangle$ con $x \in \mathcal{H}$, entonces $S = \mathcal{T}$.

Proposición 1.11.25. *El* Rang$(\mathcal{T})$ *de un operador isométrico $\mathcal{T}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.*

Demostración. Como $\mathcal{T}$ es lineal, Rang($\mathcal{T}$) es un subespacio. Supongamos que $y \in \overline{\text{Rang}(\mathcal{T})}$, y se probara que $y \in \text{Rang}(\mathcal{T})$. A tal fin, sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a y en $\mathcal{H}$, donde $y_n = \mathcal{T}x_n$ y $x_n \in \mathcal{H}$ con $n \in \mathbb{N}$. Como $\|x_n - x_m\| = \|\mathcal{T}x_n - \mathcal{T}x_m\| = \|y_n - y_m\| \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$. Al ser $\mathcal{H}$ completo, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún $x \in \mathcal{H}$. La continuidad de $\mathcal{T}$ y la unicidad del límite permite concluir que $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}x_n = \mathcal{T}x$. ■

Definición 1.11.26. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ se dice **simétrico** si su dominio, $Dom(\mathcal{T})$, es denso en $\mathcal{H}$ y para todo x, y en $Dom(\mathcal{T})$ se tiene*

$$\langle \mathcal{T}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{T}y\rangle.$$

Definición 1.11.27. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{U} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, se dice que $\mathcal{U}$ es* **unitario** *si:*

(i) $\langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$; $\forall x, y \in \mathcal{H}$. *($\mathcal{U}$ es una isometría).*

(ii) Rang$(\mathcal{U}) = \mathcal{H}$*; ($\mathcal{U}$ es sobreyectivo).*

Proposición 1.11.28. *Las siguientes condiciones relativas a un operador lineal $\mathcal{U}$ son equivalente:*

(i) *$\mathcal{U}$ es unitario.*

(ii) *$\mathcal{U}^*$ es unitario.*

(iii) *$\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}^*$ son isométricos.*

(iv) *$\mathcal{U}$ es isométrico y $\mathcal{U}^*$ es inyectivo.*

(v) *$\mathcal{U}$ es isométrico y sobreyectivo.*

(vi) *$\mathcal{U}$ es biyectivo, $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*$.*

Demostración. La equivalencia entre (i), (ii), y (iii) se hace evidente en virtud de las definiciones anteriores, la proposición 1.11.23 y la relación $\mathcal{T}^{**} = \mathcal{T}$.

Los operadores isométricos son inyectivos; por tanto, (iii) implica (iv).

Ademas, (iv) implica (v). En efecto, al ser $\mathcal{T}$ isométrico, Rang($\mathcal{T}$) es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ (Proposición 1.11.25), y como $\mathcal{T}^*$ es inyectivo encontramos que $\mathcal{H} = \{0\}^{\perp} = \ker(\mathcal{T}^*)^{\perp} = \overline{\text{Rang}(\mathcal{T})} = \text{Rang}(\mathcal{T})$.

Para ver que (v) implica (vi), obsérvese en primer lugar que, por hipótesis, $\mathcal{T}$ es biyectivo. Sea $S = \mathcal{T}^{-1}$, entonces $S\mathcal{T} = \mathcal{T}S = \mathrm{I}$. Ahora, por la proposición 1.11.23, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^*\mathrm{I} = \mathcal{T}^*(\mathcal{T}S) = (\mathcal{T}^*\mathcal{T})S = \mathrm{I}\,S = S$.

Finalmente es claro que (vi) implica (i). En efecto por (iv) se tiene que $\mathcal{U}$ es sobreyectivo por lo tanto

$$\text{Rang}(\mathcal{U}) = \mathcal{H} \tag{1.8}$$

por (iii) se tiene $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathrm{I}$ y por ser $\mathcal{U}$ biyectivo tenemos también $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U} = \mathrm{I}$. Luego

$$\langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y\rangle = \langle \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}x, \mathcal{U}^{-1}\mathcal{U}y\rangle = \langle \mathrm{I}\,x, \mathrm{I}\,y\rangle = \langle x, y\rangle. \tag{1.9}$$

De 1.8 y 1.9 se tiene que $\mathcal{U}$ es unitario. ■

Definición 1.11.29. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S, \mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$. Se dice que S es* ***unitariamente equivalente*** *a $\mathcal{T}$ si existe un operador unitario $\mathcal{U}$ en $\mathcal{H}$ tal que*

$$S = \mathcal{U}\,\mathcal{T}\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}\,\mathcal{T}\mathcal{U}^{*}.$$

Definición 1.11.30. *Un operador $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ se dice* **positivo** *si $\langle \mathcal{T}x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Se notará en este caso $\mathcal{T} \geq 0$.*

Observación 1.11.31. Si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ son tales que $\left\langle (\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2)x, x\right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$, entonces diremos que $\mathcal{T}_1 \geq \mathcal{T}_2$.

Definición 1.11.32 (Raíz cuadrada de un operador)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ y positivo, se dice que un operador adjunto $\mathcal{P}$ es la raíz cuadrada de $\mathcal{T}$, si $\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}$. En caso de que $\mathcal{P} \geq 0$, se dice que $\mathcal{P}$ es una raíz cuadrada positiva de $\mathcal{T}$, y se nota $\mathcal{P} = \mathcal{T}^{1/2}$*

Definición 1.11.33 (Proyector ortogonal)**.** *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Se dice que $\mathcal{P} \in \mathscr{L}(V)$ es un* ***proyector ortogonal*** *si cumple:*

(i) $Dom(\mathcal{P}) = V$

(ii) $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$

(iii) $\mathcal{P}$ es una isometría.

Observación 1.11.34. $\mathcal{P}$ es simétrico. En efecto:

$$\langle \mathcal{P}x, y\rangle = \langle \mathcal{P}\mathcal{P}x, \mathcal{P}y\rangle = \langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}y\rangle = \langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}^2 y\rangle = \langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}\mathcal{P}y\rangle = \langle x, \mathcal{P}y\rangle$$

Además, $\mathcal{P}$ es autoadjunto. En efecto:

$$\langle \mathcal{P}^* x, y\rangle = \langle x, \mathcal{P}y\rangle = \langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}\mathcal{P}y\rangle = \langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}y\rangle = \langle \mathcal{P}\mathcal{P}x, \mathcal{P}y\rangle = \langle \mathcal{P}x, y\rangle$$

1.12. Pseudoinversas

Definición 1.12.1. *Dado $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador de rango cerrado (*Rang$(\mathcal{T})$ *cerrado en $\mathcal{H}_2$), $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ es una* ***Pseudoinversas*** *de $\mathcal{T}$ si*

$$\mathcal{T}B\mathcal{T} = \mathcal{T} \qquad y \qquad B\mathcal{T}B = B. \tag{1.10}$$

En particular, se tiene que $\mathcal{T}B$ y $B\mathcal{T}$ son idempotentes; se pueden tener estas composiciones varias veces y aun así se consigue el mismo resultado que se obtiene al realizarse una sola vez. Con $\text{Rang}(\mathcal{T}B) = \text{Rang}(\mathcal{T})$, $\ker(B\mathcal{T}) = \ker(\mathcal{T})$.

Notación 1.12.2. Con $\mathcal{SI}(\mathcal{T})$ se denotara al conjunto de **Pseudoinversas** de $\mathcal{T}$.

Observación 1.12.3. La condición de que el Rang$(\mathcal{T})$ sea cerrado en $\mathcal{H}_2$ es necesaria y suficiente para que exista $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ que cumpla (1.10). Por otro lado, si $\mathcal{T}B$ es idempotente, entonces Rang$(\mathcal{T}B)$ es cerrado, por lo tanto, tambien $\mathcal{T}$ es de rango cerrado, dado que $\text{Rang}(\mathcal{T}) = \text{Rang}(\mathcal{T}B)$. Recíprocamente, si Rang$(\mathcal{T})$ es cerrado, se puede construir fácilmente $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ definiéndolo adecuadamente en la suma directa de $\mathcal{H}_2 = \text{Rang}(\mathcal{T}) \oplus \text{Rang}(\mathcal{T})^{\perp}$.

Puede mostrarse que, para cada par de operadores idempotentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ en $\mathscr{L}(\mathcal{H}_2)$ y $\mathscr{L}(\mathcal{H}_1)$ respectivamente, con $\text{Rang}(\mathcal{P}) = \text{Rang}(\mathcal{T})$ y $\ker(\mathcal{Q}) = \ker(\mathcal{T})$ existe un único elemento $B \in \mathcal{SI}(\mathcal{T})$ con $\mathcal{T}B = \mathcal{P}$, $B\mathcal{T} = \mathcal{Q}$. En particular, se destaca el caso en que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son proyectores ortogonales i.e., idempotentes y autoadjuntos, al rango y núcleo de $\mathcal{T}$, respectivamente.

Lema 1.12.4. *Supongamos que $\mathcal{T}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ es un operador sobreyectivo acotado. Entonce existe un operador acotado $\mathcal{T}^\dagger:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$ para el cual*

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger f=f,\quad \forall f\in\mathcal{H}_1. \tag{1.11}$$

Demostración. Consideremos la restricción de que $\mathcal{T}\in\ker(\mathcal{T})^\perp$, i.e., permitir que

$$\tilde{\mathcal{T}}:=\mathcal{T}_{\ker(\mathcal{T})^\perp}\quad:\quad \ker(T)^\perp\to\mathcal{H}_1.$$

Se puede ver $\tilde{\mathcal{T}}\in\mathscr{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. $\tilde{\mathcal{T}}$ también es inyectivo: si $\tilde{\mathcal{T}}x=0$, se deduce que $x\in\ker(\mathcal{T})^\perp=0$. Ahora probaremos que $\tilde{\mathcal{T}}$ es sobreyectivo. Dado $y\in\mathcal{H}_1$, existe $x\in\mathcal{H}_2$ tal que $\mathcal{T}x=y$. Al hacer $x=x_1+x_2$, donde $x_1\in\ker(\mathcal{T})^\perp$ y $x_2\in\ker(\mathcal{T})$ se obtiene que

$$\tilde{\mathcal{T}}x=\mathcal{T}x=\mathcal{T}(x_1+x_2)=\mathcal{T}x=y.$$

Se deduce que $\tilde{\mathcal{T}}$ tiene inverso acotado

$$\mathcal{T}^\dagger:=\tilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\ker(\mathcal{T})^\perp}\quad:\quad \mathcal{H}_1\to\ker(\mathcal{T})^\perp.$$

dado lo anterior se observa que $\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger f=f,\quad\forall f\in\mathcal{H}_1$. ■

Definición 1.12.5. *Dado $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$, con* Rang$(\mathcal{T})$ *cerrado en $\mathcal{H}_2$. Se notara por $\mathcal{T}^\dagger$ al único operador en* SI $(\mathcal{T})$ *talque $\mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger$ y $\mathcal{T}^\dagger T$ son proyectores ortogonales. Esta es la **Pseudoinversa de Moore-Penrose** de $\mathcal{T}$.*

Notación 1.12.6. El operador $\mathcal{T}^\dagger$ construido en el Lema 1.12.4 se llama el ***pseudoinverso*** de $\mathcal{T}$.

Este operador da la solución a un problema de optimización importante en el *Capítulo 2.*

Teorema 1.12.7. *Sea $\mathcal{T}:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ un operador sobreyectivo acotado. Dado $y\in\mathcal{H}$, la ecuación $\mathcal{T}x=y$ tiene una única solución, es decir $x=\mathcal{T}^\dagger y$.*

Demostración. Por el lema 1.12.4 $\mathcal{T}^\dagger y$ es solución de la ecuación. Toda solución tiene la forma $x=\mathcal{T}^\dagger y+z$, con $z\in\ker(T)$. Puesto que $\mathcal{T}^\dagger y\in\ker(\mathcal{T})^\perp$, la solución general en términos de la norma viene dada por

$$\|x\|^2=\|\mathcal{T}^\dagger y+z\|^2\le\|\mathcal{T}^\dagger y\|^2+\|z\|^2,$$

lo cual es mínimo cuando $z=0$. ■

1.13. Sucesión de Bessel

Lema 1.13.1. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y $\left\{f_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{H}$. Supongamos que $\sum_{i=1}^\infty c_i f_i$ es convergente para todo $\left\{c_i\right\}_{i=1}^\infty\in\ell^2(\mathbb{N})$. Entonces*

$$T:\ell^2(\mathbb{N})\to\mathcal{H},\quad T\left\{c_i\right\}_{i=1}^\infty:=\sum_{i=1}^\infty c_i f_i \tag{1.12}$$

define un operador lineal acotado. El operador adjunto está dado por

$$T^*:\mathcal{H}\longrightarrow\ell^2(\mathbb{N}),\quad T^*f=\left\{\left\langle f,f_i\right\rangle\right\}_{i=1}^\infty \tag{1.13}$$

Definición 1.13.2. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de HIlbert, y $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ es llamado una* ***sucesión Bessel*** *si existe una constante $B > 0$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\left\langle f, f_i \right\rangle\right|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{1.14}$$

El número B es llamado una cota de Bessel.

Teorema 1.13.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de HIlbert, y $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$. Entonces $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel con cota de Bessel B si y solo si*

$$T : \left\{c_i\right\}_{i=1}^{\infty} \to \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

es un operador bien definido de $\ell^2(\mathbb{N})$ a $\mathcal{H}$ y $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

1.14. Bases Ortonormales

Definición 1.14.1. *Una base ortonormal en un espacio de Hilber $\mathcal{H}$ es un conjunto ortonormal maximal.*

Proposición 1.14.2 (**Bases ortonormales**). *Sea $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilber $\mathcal{H}$.*
Lo anterior es equivalente a:

i). *S es base ortonormal.*

ii). *(**Serie de Fourier**) Todo $x \in \mathcal{H}$ se puede expresar como una suma de Fourier recpecto a S:*

$$x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

.

iii). *(**Identidad de Parseval (1)**) Para todo $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2$.*

iv). *(**Identidad de Parseval (2)**) Para cualquier $x, y \in \mathcal{H}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle \overline{\langle y, e_\alpha \rangle}$.*

v). $S^{\perp} = \{0\}$.

vi). *S es total en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Para ver que (i) implica (ii), Supóngase $y = x - \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$; se trata de probar que $y = 0$.

Ahora bien, fijando $\beta \in I$,

$$\langle y, e_\beta \rangle = \left\langle x - \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha, e_\beta \right\rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle \langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \langle x, e_\beta \rangle = 0.$$

Si $y \neq 0$, el vector $u = \|y\|^{-1}$ y es unitario y ortogonal a S; por lo tanto, $S \cup \{u\}$ es un conjunto ortonormal que contiene propiedades de S, contradiciendo la maximalidad de S. Concluyendo que $Y = 0$.

Por la continuidad de un espacio producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle$; dada dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergentes a $x, y \in X$, respectivamente, entonces el límite de $\langle x_n, y_n\rangle$ cuando $n \to \infty$ es $\langle x, y\rangle$ y el límite de $\|x_n\|$ cuando $n \to \infty$ es $\|x\|$, más la linealidad (conjugada) del producto interno escalar en la primera componente(segunda componente), se ve que (ii) implica (iv). Ahora si se toma $x = y$ se da la implicación de (iv) a (iii). Nótese que (ii) implica (iii) como consecuencia de hacer $S = \{e_i\}_{n=1}^{\infty}$ siendo una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\{\lambda_i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ (con $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}))$.

Por otra parte, (iii) implica (v), ya que si $x \in S^{\perp}$ entonces $\langle x, e_\alpha\rangle = 0$ con $\alpha \in I$, y si se verifica (iii), necesariamente $x = 0$.

La equivalencia de (v) y (vi) es consecuencia de la Proposición 1.10.3.

Se finaliza la demostración estableciendo que (v) implica (i): si S no es maximal entonces existe un vector unitario ortogonal a S, así que $S^{\perp} \neq \{0\}$. ■

Recordemos que un conjunto arbitrario se dice *parcialmente ordenado* si está dado de una relación binaria reflexiva, antisimétrica y transitiva, y *totalmente ordenado* si esta relación es, además, conexa. El principio de maximalidad de Hausdorff establece que todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene un maximal totalmente ordenado.

Recuerde que dos vectores son ortogonales si

$$\left\langle x, y\right\rangle = 0.$$

Decimos que $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ es un **sistema ortonormal** (ONS) si

$$\left\langle e_i, e_j\right\rangle = \delta_{i,j},$$

donde $\delta_{i,j}$ es una función llamada $\delta-$Kroneckers, i.e., la función se hace uno si $i = j$, de otra manera es 0.

Notación 1.14.3. Se notara con $span(S)$ al conjunto generado por los vectores de S, usando únicamente combinaciones lineales finitas de elementos de S.

Definición 1.14.4. *Un ONS $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una **base ortonormal** (ONB) si*

$$\mathcal{H} = \overline{span}\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty}. \tag{1.15}$$

Es bien conocido, que para un ONS $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$, (1.15) es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|\left\langle f, e_i\right\rangle\right| = \|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{1.16}$$

(1.16) *se llama formula de Parsevals´s. Cuándo $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ es un ONB, cada $f \in \mathcal{H}$ se puede escribir como*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f, e_i\right\rangle e_i. \tag{1.17}$$

Definición 1.14.5. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $f \in L^2(\Omega)$, *con* $\{g_k\}_{k\in I} \in L^2(\Omega)$. *Si* $g_k \to f$ *en* $L^2(\Omega)$, *entonces* $\{g_k\}_{k\in I}$ *es una sucesión* $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x)$$

para algún $x \in \Omega$.

No todos los espacios de Hilbert tienen una ONB $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, i.e., una base ortonormal *contable*. Espacios de Hilbert que tienen una ONB contable se dice que son *separables*. En este trabajo siempre se va asumir que los espacios de Hilbert son separables. Se puede demostrar que $L^2(\Omega)$ es separable para cada conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Además, $\ell^2(I)$ es separable siempre que I sea un conjunto de índices contables.

Ejemplo 1.14.6 (Operadores Isométricos)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert clásico (esto es, que la dimensión ortogonal de $\mathcal{H}$ es numerable), y sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Existe un único operador lineal continuo $\mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T}x_k = x_{k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$. En efecto, todo $x \in \mathcal{H}$ admite una única representación en la forma $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ y basta definir $\mathcal{T}x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_{k+1}$. Evidentemente $\mathcal{T}$ es lineal, y la igualdad $\|\mathcal{T}x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = \|x\|^2$ muestra que $\mathcal{T}$ es isométrico.

El operador adjunto $\mathcal{T}^*$ actúa de la forma siguiente: $\mathcal{T}^* x_1 = 0$, y $\mathcal{T}^* x_k = x_{k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$). En efecto, $\langle \mathcal{T}^* x_1, x_j\rangle = \langle x_1, \mathcal{T}x_j\rangle = \langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x_1, x_{j+1}\rangle = \langle \mathrm{I}\ x_1, x_{j+1}\rangle = \langle x_1, x_{j+1}\rangle = 0 = \langle 0, x_j\rangle$ con $j \in \mathbb{N}$. Similarmente, si $k \geq 2$, $\langle \mathcal{T}^* x_k, x_j\rangle = \langle x_k, \mathcal{T}x_j\rangle = \langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x_k, x_{j+1}\rangle = \langle \mathrm{I}\ x_k, x_{j+1}\rangle = \langle x_k, x_{j+1}\rangle = 0$ en otro caso; por lo tanto, $\langle \mathcal{T}^* x_k, x_j\rangle = \langle x_{k-1}, x_j\rangle$ con $j \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.14.7 (Operadores Unitarios)**.** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert Clásico, y sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Sean $y_k = x_{2k+1}$, $y_{-k} = x_{2k}$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es también una base ortonormal. Todo vector $x \in \mathcal{H}$ admite una única representación de la forma $x = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k y_k$, y existe un único operador lineal continuo $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}\,y_k = y_{k+1}$ para $k \in \mathbb{Z}$, al tener en cuenta que, $\mathcal{U}\,x = \mathcal{U}\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k y_k\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k y_{k+1}$. Se sigue que $\mathcal{U}^* y_k = y_{k-1}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{U}^*\mathcal{U}\,y_k = \mathcal{U}\,\mathcal{U}^* y_k = y_k = \mathrm{I}\ y_k$, U es unitario.

1.15. Bases de Riesz

Definición 1.15.1 (Sucesión Minimal)**.** *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilber y* $\{f_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$, *se dice que* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una* ***sucesión minimal*** *si* $f_i \notin [\ldots, \widehat{f_i}, \ldots]_{i\in I}$ $\forall i \in I$ *constituye la generación natural de la independencia lineal de n-vectores* $f_1, \ldots, f_n$, *al pasar una sucesión* $f_1, \ldots, f_i, \ldots$

Definición 1.15.2 (Bases de Riesz)**.** *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilber y* $\{f_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{H}$ *es una* ***Base de Riesz*** *para* $\mathcal{H}$, *si existe una base ortonormal* $\{e_i\}_{i\in I}$ *para* $\mathcal{H}$ *y un* $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *invertible de manera que* $\mathcal{T}e_i = f_i$ *para todo* $i \in I$.

Definición 1.15.3. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert,* $\{x_i\}_{i\in I}$ *y* $\{y_i\}_{i\in I}$ *dos sucesiones en* $\mathcal{H}$ *se dice que son* ***biortogonales****, si*

$$\left\langle x_i, x + y_i \right\rangle = \delta_{i,j} \qquad \forall\ x \in \mathcal{H}$$

Teorema 1.15.4. *(i) Para cualquier sucesión dada* $\{x_i\}_{i\in I}$ *existe una sucesión biortogonal* $\{y_i\}_{i\in I}$ *si y sólo si* $\{x_i\}_{i\in I}$ *es minimal, en el sentido de que cada elemento de* $\{x_i\}_{i\in I}$ *Se encuentra fuera del span lineal cerrado, i.e.,*

$$\forall p \in I \quad x_p \neq \overline{span}\{x_i\}_{i\neq p}$$

(ii) Una sucesión biortogonal $\{x_i\}_{i\in I}$ *tiene una única forma si y sólo si* $\{x_i\}_{i\in I}$ *es completo en* $\mathcal{H}$.

(iii) Una sucesión $\{y_i\}_{i\in I}$ *biortogonal a una base* $\{x_i\}_{i\in I}$ *para* $\mathcal{H}$ *es así misma una base para* $\mathcal{H}$*, y cada* x *se representa de la siguiente forma,*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, y_i\rangle x_i \qquad y \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i\rangle y_i$$

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE MARCOS

2.1. Propiedades Básicas

Definición 2.1.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert se dice que la familia de elementos $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es un marco para $\mathcal{H}$, si existen constantes $A, B > 0$ tales que*

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H} \tag{2.1}$$

Los números del marco A, B se denominan *límites* del marco. No son los únicos que tiene. Los *límites óptimos* para el marco son el mayor valor posible para A y el menor posible para B. Si en (2.1) podemos eligir $A = B$, el marco se llama *ajustado*. Si un marco se le remueve un elemento y deja de ser un marco, se dice que el marco es *exacto*. Dado que un marco $\{f\}_{i\in I}$ también es una sucesión de Bessel, entonces por el Lema 1.13.1 el operador

$$T : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad T\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i \tag{2.2}$$

es lineal y acotado; T a veces se llama el *operador premarco*. Por el Lema 1.13.1, el operador adjunto está dado por

$$T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \quad T^* f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i=1}^{\infty} \tag{2.3}$$

mediante la composición de los operadores T y T^*, obtenemos el operador

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = TT^* f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i\rangle f_i \tag{2.4}$$

S se llama el *operador marco*.

S es acotado, y

$$\|S\| = \|TT^*\| \leqslant \|T\| \cdot \|T^*\| = \|T\|^2 = B.$$

Ya que $S^* = (TT^*)^* = TT^* = S$, el operador S es autoadjunto.

A continuación, se presenta algunas propiedades importantes de S.

Lema 2.1.2. *(i) El operador S es invertible, satisfaciendo $B^{-1}I \leqslant S^{-1} \leqslant A^{-1}I$*

(ii) $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ *es un marco para* $\mathcal{H}$ *con límites* B^{-1}, A^{-1}*, llamado marco dual de* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Demostración. (i) : Puesto que $AI \leqslant S \leqslant BI$ tenemos

$$\|I - B^{-1}S\| \leqslant \left\|\frac{B-A}{B}\right\| < 1,$$

$S^{-1} = (T^*)^{-1}T^{-1}$ conmuta con S e I, y multiplicando $AI \leqslant S \leqslant BI$ por S^{-1} se obtiene la desigualdad deseada.

(ii) Se elige $f \in \mathcal{H}$, y se analiza

$$\sum_n \langle f, S^{-1}f_i\rangle S^{-1}f_i = S^{-1}\left(\sum_n \langle S^{-1}f, f_i\rangle f_i\right) = S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f$$

La desigualdad $B^{-1}I \leqslant S^{-1} \leqslant A^{-1}\|f\|^2$, junto con la ecuación anterior, produce

$$B^{-1}\|f\|^2 \leqslant \sum_i |\langle f, S^{-1}f_i\rangle|^2 \leqslant A^{-1}\|f\|^2,$$

que es la desigualdad deseada .

■

Los límites óptimos del marco se pueden expresar en términos de los operadores T, S.

Proposición 2.1.3. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I}$ *un marco, entonces las cotas optimas del marco están dadas por*

$$A = \|S^{-1}\|^{-1} = \|T^\dagger\|^{-2}, \quad B = \|S\| = \|T\|^2.$$

La *descomposición del marco*, que a continuación se expone, es algo muy importante del marco.

Demuestra que si $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco, cada uno de los elementos en el espacio de Hilbert tiene una representación como una combinación lineal infinita de los elementos del marco.
Por lo tanto es natural ver un marco como una especie de *" base generalizada "*.

Teorema 2.1.4.

$$f = SS^{-1}f = \sum_{i\in I} \langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i, \forall f \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

A menudo, la descomposición del marco también se utiliza de la forma

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle S^{-1}f_i$$

Como se vera más adelante, las propiedades del marco de subconjuntos de un marco $\{f_i\}_{i\in I}$ juega un papel crucial en muchos contextos. Es importante también tener un concepto de *marcos de subespacios* en espacios de Hilbert $\mathcal{H}$. Esta es la motivación tras la siguiente definición.

Definición 2.1.5. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$.

(i) *Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es un marco para el espacio de Hilbert* $\overline{span}\{f_i\}_{i\in I}$*, entonces decimos que* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una sucesión de imágenes.*

(ii) *Un marco* $\{f_i\}_{i\in I}$ *se dice que tiene la propiedad submarco si cada subfamilia* $\{f_i\}_{i\in J}$, $J \subseteq I$ *es una sucesión de imágenes.*

(iii) *Si un marco $\{f_i\}_{i\in I}$ tiene la propiedad de submarco y existe un marco en común con limites A, B para todas las sucesiones de imágenes $\{f_i\}_{i\in J}$, $J\subseteq I$, entonces decimos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco de Riesz.*

Ejemplo 2.1.6. Sea $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ una ONB para $\mathcal{H}$.

(i) $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ es un marco de Riesz ajustado con límites $A=B=1$.

(ii) Sea

$$\{f_i\}_{i\in I} := \left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \cdots\right\}$$

Entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco para $\mathcal{H}$ con limites $A=B=1$. $\{f_i\}_{i\in I}$ no tiene la propiedad de submarco. La subfamilia

$$\left\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 \cdots\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{i}}e_i\right\}_{i=1}^{\infty}$$

no es una sucesión de imágenes.

Con el Ejemplo 2.1.6 (ii) en mente, es natural preguntarse por las condiciones suficientes para un marco ajustado con límites del marco $A=B=1$ a una base ortonormal.

Teorema 2.1.7. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco ajustado para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con límites del marco $A=B=1$, y admitiendo que $\|f_i\|=1$ para todo $i\in I$. Entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal.*

Demostración. Un marco es completo, por lo que $\overline{span}\{f_i\}_{i\in I}=\mathcal{H}$. Sólo tenemos que demostrar $\langle f_j, f_i\rangle=\delta_{i,j}$. Elegimos un f_k arbitrario. Usando la condición del marco, se tiene

$$\|f_k\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\langle f_k, f_i\rangle|^2 = \|f_k\|^4 + \sum_{i\neq k} |\langle f_k, f_i\rangle|^2$$

y ya que $\|f_k\|=1$ se puede concluir

$$\sum_{i\neq k} |\langle f_k, f_i\rangle|^2 = 0$$

por lo que $|\langle f_k, f_i\rangle|^2=0$ para $i\neq k$.

■

El siguiente lema demuestra, que es suficiente comprobar la condición de marco en un subconjunto denso de $\mathcal{H}$.

Lema 2.1.8. *Suponiendo que $\{f_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de elementos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y que existen constantes $A,B>0$ tal que*

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leqslant B\|f\|^2$$

para todo f en un subconjunto denso V de $\mathcal{H}$. Entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco para $\mathcal{H}$ con límites A,B

Demostración. Se debe probar que la condición del marco se cumple para todos los elementos en $\mathcal{H}$. Sea $g\in\mathcal{H}$, y al admitir por contradicción que

$$\sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2 > B\|g\|^2.$$

se elige una sucesión $\left\{g_i\right\}_{j=1}^{\infty} \subseteq V$ tal que $g_j \to g$ para $j \to \infty$. entonces también existe un conjunto finito $F \subseteq I$ tal que

$$\sum_{i\in F} |\langle g, f_i\rangle|^2 > B\|g\|^2.$$

Puesto que $g_j \to g$ para $j \to \infty$, se deduce que para j lo suficientemente grande,

$$\sum_{i\in F} |\langle g_j, f_i\rangle|^2 > B\|g_j\|^2.$$

esto es una contradicción, por lo que se concluye que

$$\sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2 \leqslant B\|g\|^2 \ , \ \forall g \in \mathcal{H},$$

No se puede demostrar que la condición de marco inferior esta satisfecha. Sea otra vez $g \in \mathcal{H}$, y elegimos una sucesión $\{g_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq V$ tal que $g_j \to g$ para $j \to \infty$. A través de la desigualdad triangular frente (1.2) utilizada en la norma $\ell^2(I)$ se obtiene

$$\left|\left[\left[\sum_{i\in I} |\langle g_j, f_i\rangle|^2\right]^{1/2} - \left[\sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2\right]\right]\right|^{1/2} \leqslant \left[\sum_{i\in I} |\langle g_j - g, f_i\rangle|^2\right]^{1/2} \leqslant B^{1/2}\|g_j - g\| \to 0$$

para $j \to \infty$. Por lo tanto $\sum_{i\in I} |\langle g_j, f_i\rangle|^2 \to \sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2$ para $j \to \infty$. Ya que

$$A\|g_j\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle g_j, f_i\rangle|^2, \ \forall j \in \mathbb{N}$$

por lo que se puede concluir que

$$A\|g\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle g, f_i\rangle|^2.$$

■

El siguiente resultado da una caracterización equivalente del marco.

Teorema 2.1.9. *Una sucesión $\left\{f_i\right\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es un marco para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si y sólo si, la relación*

$$T : \left\{c_i\right\}_{i\in I} \to \sum_{i\in I} c_i f_i$$

esta bien definida de $\ell^2(I)$ en $\mathcal{H}$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\left\{f_i\right\}_{i\in I}$ es un marco. Por el teorema 1.13.3, T es un operador acotado de $\ell^2(I)$ a $\mathcal{H}$. Por el lema 2.1.2 (i), el operador marco $S = TT^*$ es sobreyectivo. Por lo tanto T es sobreyectivo.

Ahora supongamos que T es un operador definido de $\ell^2(I)$ a $\mathcal{H}$. Por lema 1.13.1 combinado con el teorema 1.13.3 se deduce $\{f_i\}_{i\in I}$ cumple la condición de marco superior. Sea $T^{\dagger} : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$ la notación del pseudoinverso de T, tal como se construyo en el lema 1.12.4. Para $f \in \mathcal{H}$ se tiene

$$f = TT^{\dagger} f = \sum_{i\in I} \left(T^{\dagger} f\right)_i f_i,$$

donde $\left(T^{\dagger} f\right)_i$ denota la coordenada i-ésima de $T^{\dagger} f$. por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|f\|^4 &= \langle f, f\rangle^2 \\
&= \left|\left\langle \sum_{i\in I} (T^\dagger f)_i f_i, f\right\rangle\right|^2 \\
&\leq \sum_{i\in I} \left|(T^\dagger f)_i\right|^2 \cdot \sum_{i\in I} \left|\langle f, f\rangle\right|^2 \\
&\leq \|T^\dagger\|^2 \cdot \|f\|^2 \sum_{i\in I} \left|\langle f, f\rangle\right|^2;
\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\sum_{i\in I} \left|\langle f, f\rangle\right|^2 \geq \frac{1}{\|T^\dagger\|^2}\|f\|^2.$$

■

Ejemplo 2.1.10. Sea $\{e_i\}_{j=1}^{\infty}$ una ONB y definir

$$f_i = e_i + e_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots$$

Entonces $\{f_i\}_{j=1}^{\infty}$ no es un marco: dejanto $f := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} e_j$, tenemos $\|f\|^2 = n$. Ademas , para $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
\langle f, f_i\rangle &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \langle e_j, e_i + e_{i+1}\rangle \\
&= (-1)^{j-1} + (-1)^j = 0,
\end{aligned}$$

mientras que $|\langle f, e_n\rangle| = 1$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, f_i\rangle|^2 = 1 = \frac{1}{n}\|f\|^2,$$

lo que implica que $\{f_i\}_{j=1}^{\infty}$ no es un marco. Se puede demostrar que $\overline{span}\{f_i\}_{j=1}^{\infty} = \mathcal{H}$.

Como consecuencia del teorema 2.1.15 a continuación, $\{f_i\}_{j=1}^{\infty}$ no puede llegar hacer un marco para $\mathcal{H}$ mediante la adición de un número finito de elementos, y no existe una base de Riesz para $\mathcal{H}$ que contengan $\{f_i\}_{j=1}^{\infty}$ como un subconjunto.

Lema 2.1.11. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco y exista un $f \in \mathcal{H}$. Si $f = \sum_{i\in I} c_i f_i$ para algún coeficiente $\{c_i\}_{i\in I}$, entonces*

$$\sum_{i\in I} \left|c_i\right|^2 = \sum_{i\in I} \left|\left\langle f, S^{-1} f_i\right\rangle\right|^2 + \sum_{i\in I} \left|c_i - \left\langle f, S^{-1} f_i\right\rangle\right|^2.$$

Demostración. Sea $a_i = \langle f, S^{-1} f_i\rangle$. Por cálculo directo,

$$\begin{aligned}
\left\langle f, S^{-1} f\right\rangle &= \left\langle \sum_i c_i f_i, S^{-1} f\right\rangle = \sum_i c_i \overline{a_i} \\
\left\langle f, S^{-1} f\right\rangle &= \left\langle \sum_i a_i f_i, S^{-1} f\right\rangle = \sum_i a_i \overline{a_i} = \sum_i \left|a_i\right|^2
\end{aligned}$$

Desde $\left\langle f_i, S^{-1}f\right\rangle = \left\langle S^{-1}f_i, f\right\rangle = \overline{a_i}$. Por lo tanto

$$\sum_i \left|a_i\right|^2 = \sum_i c_i\overline{a_i} = \sum_i a_i\overline{c_i}$$

y por lo tanto

$$\sum_i \left|a_i\right|^2 + \sum_i \left|a_i - c_i\right|^2 = \sum_i \left|a_i\right|^2 + \sum_i \left(\left|a_i\right|^2 - c_i\overline{a_i} - \overline{c_i}a_i + \left|c_i\right|^2\right) = \sum_i \left|c_i\right|^2$$

■

Ejemplo 2.1.12. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, considérese una sucesión $\{f_1, f_2, \dots\} = \{e_1, e_1, e_2, e_2 \dots\}$. Entonces, para todo $f \in \mathcal{H}$, se tiene

$$\sum_i \left|\left\langle f, f_i\right\rangle\right|^2 = 2\sum_i \left|\left\langle f, e_i\right\rangle\right|^2 = 2\|f\|$$

mostrando que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco ajustado con límites $A = B = 2$. Ahora si se elimina un elemento f_p de la sucesión . El límite B claramente no se afecta. Puesto que

$$A\left\|f\right\|^2 \leq \sum_{i\neq p} \left|\left\langle f, f_i\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle f, f_p\right\rangle\right|^2 \leq \sum_{i\neq p} \left|\left\langle f, f_i\right\rangle\right|^2 + \left\|f\right\|^2$$

vemos que $A^{-1} = 1$ es un límite inferior para el marco $\{f_i\}_{i\neq p}$.
Entonces se considera la sucesión $\{f_1, f_2, \dots\} = \{2e_1, e_2, e_3, \dots\}$, y para todo $f \in \mathcal{H}$ se obtiene

$$\sum_i \left|\left\langle f, f_i\right\rangle\right|^2 = 3\left|\left\langle f, e_i\right\rangle\right|^2 + \left\|f\right\|^2$$

mostrando que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco con límites $A = 1$ y $B = 4$. Sin embargo, si se excluye un vector f_p, deja un conjunto incompleto, ya que $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal para $\mathcal{H}$. demostrando que $\{f_i\}_{i\neq p}$ no puede ser un marco.

Observación 2.1.13. Se puede concluir que:

- En el primer caso, aunque un vector se excluye de la sucesión, la sucesión restante establece un marco para $\mathcal{H}$.
- •• En el segundo caso, la exclusión de un vector del marco deja la sucesión incompleta.

Como muestra el siguiente Teorema, no hay otras posibilidades.

Teorema 2.1.14. *La eliminación de un vector de un marco deja un marco o un conjunto incompleto. En particular*

$$\begin{aligned} \left\langle f_j, S^{-1}f_j\right\rangle &\neq 1 \Rightarrow \{f_i\}_{i\neq j} \ \textit{es un marco} \\ \left\langle f_j, S^{-1}f_j\right\rangle &= 1 \Rightarrow \{f_i\}_{i\neq j} \ \textit{es incompleto} \end{aligned}$$

Demostración. Elegimos un $j \in I$ arbitrario, y removemos f_j de $\{f\}_{i\in I}$. Definimos por conveniencia la notación, $a_i = \left\langle f_j, S^{-1}f_j \right\rangle$, por lo tanto $f_j = \sum_i a_i f_i$. j Evidentemente, otra representación del marco f_j es $f_j = \sum_i \alpha_{j,i} f_i = f_j = \sum_i c_i f_i$ con $c_i = \alpha_{j,i}$, por lo tanto con el Lema 2.1.11 tenemos la siguiente relación entre c_i y a_i :

$$\sum_i \left|c_i\right|^2 = 1 = \sum_i \left|a_i\right|^2 + \sum_i \left|a_i - c_i\right|^2 = \left|a_j\right|^2 + \sum_{i\neq j} \left|a_i\right|^2 + \left|a_j - 1\right|^2 + \sum_{i\neq j} \left|a_i\right|^2$$

Consideramos los casos $a_j = 1$ y $a_j \neq 1$ por separado. En primer lugar, supongamos que $a_j = 1$. De la fórmula anterior, $\sum_{i\neq j} \left|a_i\right|^2 = 0$, de modo que

$$a_i = \left\langle S^{-1} f_i, f_i \right\rangle = 0 \quad \text{Para todo } \; i \neq j$$

Puesto que $a_j = \left\langle S^{-1} f_j, f_j \right\rangle = 1$ Sabemos que $S^{-1} f_j \neq 0$. Por lo tanto, hemos encontrado un elemento $S^{-1} f_j$ distinto de cero que es ortogonal a $\{f_i\}_{i\neq j}$, mostrando que $\{f_i\}_{i\neq j}$ esta incompleto. Supongamos ahora que $a_j \neq 1$, y sea f cualquier vector de $\mathcal{H}$. Entonces $f_j = \dfrac{1}{1-a_j} \sum_{i\neq j} a_i f_i$, que la desigualdad de Cauchy-Schwartz da

$$\begin{aligned} |\langle f, f_j\rangle|^2 &= \left| \frac{1}{1-a_j} \sum_{i\neq j} a_i \langle f, f_i\rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{|1-a_j|^2} \sum_{i\neq j} |a_i|^2 \sum_{i\neq j} |\langle f, f_i\rangle|^2 \\ &= C \sum_{i\neq j} |\langle f, f_i\rangle|^2 \end{aligned}$$

$C = \dfrac{1}{|1-a_j|^2} \sum_{i\neq j} |a_i|^2$. Denotamos A, B los límites del marco para $\{f_i\}_{i\neq j}$.
Entonces

$$A\|f\|^2 \leq \sum_i |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\neq j} |\langle f, f_i\rangle|^2 + |\langle f, f_j\rangle|^2 \leq (1+C) \sum_{i\neq j} |\langle f, f_i\rangle|^2$$

La ecuación anterior muestra que $\{f_i\}_{i\neq j}$ satisface la condición del marco, con cota inferior $\dfrac{A}{1+C}$, y claramente $\{f_i\}_{i\neq j}$ tiene cota superior satisfaciendo también el marco .

■

Es interesante observar, que incluso si se retira f_j del marco $\{f_i\}_{i\in I}$ deja un conjunto incompleto, la familia $\{f_i\}_{i\neq j}$ sera una sucesión de imágenes.

Teorema 2.1.15. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco para $\mathcal{H}$, y sea $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$. Si*

$$K : \ell^2(I) \to \mathcal{H},\ K\{c_i\}_{i\in I} := \sum_{i\in I} c_i (f_i - g_i)$$

es un operador compacto definido, entonces $\{g_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de imágenes.

Para ver la forma de utilizar el Teorema 2.1.15, consideremos un marco $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ y una familia $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}$ que, para cierto $n \in \mathbb{N}$,

$$g_i = f_i,\ i \geq n.$$

Es decir, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ sólo se diferencia de $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ por un número finito de elementos; en particular, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ podría ser $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ con un elemento eliminado. Entonces el operador

$$K\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f_i - g_i)$$

es de dimensión finita, por lo tanto compacto. Concluimos por el Teorema 2.1.15 que $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de imágenes.

La prueba del Teorema 2.1.14 muestra una interesante propiedad de $\{f_i\}_{i\in I}$ y el marco dual $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$, que será de interés más adelante.

Corolario 2.1.16. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco exacto, entonces $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ son biortonormales, en el sentido de que $\langle f_j, S^{-1}f_i\rangle = \alpha_{j,i}$. Además, $\{f_i\}_{i\in I}$ es una base para $\mathcal{H}$.*

Demostración. La prueba del Teorema 2.1.14 demuestra $\langle f_j, S^{-1}f_i\rangle = \delta_{j,i}$. Por la descomposición del marco tenemos que para cada $f \in \mathcal{H}$ puede ser expresado como $f = \sum_i \left\langle f, S^{-1}f_i \right\rangle f_i$. Con el fin de demostrar que esta representación es única, supongamos que $f = \sum_i b_i f_i$. Entonces tenemos que

$$\left\langle f, S^{-1}f_i \right\rangle = \left\langle \sum_j b_j f_j, S^{-1}f_i \right\rangle = \sum_j b_j \left\langle f, S^{-1}f_i \right\rangle = b_i$$

lo cual concluye la demostración. ■

Teorema 2.1.17. *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ un marco para $\mathcal{H}$ con límites A y B. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *$\{f_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.*

(ii) *$\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco exacto.*

(iii) *$\{f_i\}_{i\in I}$ es mínimo.*

(iv) *$\{f_i\}_{i\in I}$ tiene una única sucesión biortogonal, es decir $\{S^{-1}f_i\}$.*

(v) *$\{f_i\}_{i\in I}$ es w-independiente, en el sentido de que si $\sum_i c_i f_i = 0$ en $\mathcal{H}$ para una sucesión de escalares $\{c_i\}_{i\in I}$, entonces $c_i = 0$ para cada i.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (iv)$. $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco y una base, por lo tanto, un marco exacto. El corolario 2.1.16 da que $\{f_i\}_{i\in I}$ y $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ son biortogonal. Puesto que $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco, que es completo, y por el Teorema 1.15.4 (ii), la sucesión biortogonal se determina en forma única.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Puesto que $\{f_i\}_{i\in I}$ tiene una (única) sucesión biortogonal, es mínimo, por el Teorema 1.15.4 (i).
$(iii) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que $\{f_i\}_{i\in I}$ es mínimo y un marco exacto. Entonces, hay un elemento f_p tal que $\{f_i\}_{i\neq p}$ es todavía un marco, por lo tanto, completo. Entonces $f_p \in \overline{span}\{f_i\}_{i\neq p}$, lo que contradice la minimalidad.
$(ii) \Rightarrow (i)$. $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco exacto, por lo tanto una base, por el corolario 2.1.16. Podemos afirmar que $\sum_{i=1}^{p} c_i f_i$ es convergente a un elemento $f \in \mathcal{H}$, entonces $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Para ver esto, tenga en cuenta que si $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$, de $c_i = \left\langle S^{-1} f, f_i \right\rangle$ para cada $i \in \mathbb{N}$, donde S is el operador marco. por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \left\langle S^{-1} f, f_i \right\rangle \right|^2 \leq B \left\| S^{-1} f \right\|^2 < \infty$$

Sea $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ la base canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$. Entonces el operador lineal

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{H}, \quad Te_i = f_i$$

está bien definido. Si podemos demostrar que T es limitado e invertible, en donde estamos.
T es uno a uno, ya que si $\{c_i\}_{i \in I} \in \ell^2(\mathbb{N})$ y $T\{c_i\} = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i = 0$; ya que $\{f_i\}_{i \in I}$ es una base, esto implica que $c_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. T esta también sobreyectiva; para ver esto, elegimos cualquier $f \in \mathcal{H}$ y escribimos

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle f_i = T\left\{ \left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle \right\}.$$

Con el fin de mostrar que T es acotado, consideremos la sucesión de operadores

$$T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{H}, \quad T_n\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

Cada T_n esta acotado, y como $n \to \infty$, $T_n \to T$ punto a punto sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Por lo tanto T es continuo, por el principio de acotación uniforme. Luego T es acotado, lineal y biyectivo, Por lo tanto, un homeomorfismo, por el teorema de la aplicación abierta.
$(i) \Rightarrow (vi)$. Supongamos que $\{f_i\}_{i \in I}$ es una base de Riesz y que $\sum_i c_i f_i = 0$ para una determinada c_i sucesión de escalares. Entonces

$$A \sum_i |c_i|^2 \leq \left\| \sum_i c_i f_i \right\|^2 = 0$$

y puesto que $A > 0$, concluimos $c_i = 0$ para todo i.
$(vi) \Rightarrow (i)$. Una vez más que $\{e_i\}_{i \in I}$ es la base ortonormal canónica para $\ell^2(\mathbb{N})$.
Consideremos el operador lineal $Q : \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{H}$, definido por $Qe_i = f_i$. Este operador está bien definido, ya que $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base para $\ell^2(\mathbb{N})$. Sea $\{c_i\} \in \ell^2(\mathbb{N})$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| Q\{c_i\} \right\|^2 &= \sup_{g \in \mathcal{H}, \|g\|=1} \left| \left\langle Q\{c_i\}, g \right\rangle \right|^2 \\ &= \sup_{g \in \mathcal{H}, \|g\|=1} \left| \left\langle \sum_i c_i f_i, g \right\rangle \right|^2 \\ &\leq B \sum_i |c_i|^2 \end{aligned}$$

mostrando que Q es acotado. El w-independencia asegura que Q es uno a uno. Con el propósito de demostrar que Q es sobreyectiva, tenemos que encontrar, dado cualquier $f \in \mathcal{H}$, una sucesión $\{c_i\}_{i \in I} \in \ell^2(\mathbb{N})$ con $Q\{c_i\}_{i \in I} = f$. Una posibilidad del presente documento es $c_i = \left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle$, con S siendo el operador marco. Ahora hemos demostrado que Q definida por $Qe_i = f_i$ es acotado, uno a uno y sobreyectiva. Entonces $\{f_i\}_{i \in I}$ es una base de Riesz. ■

La condición $w-$independiente es más fuerte que la de independencia lineal. Para ilustrar este punto, se prueba una caracterización más a la base de Riesz. El resultado debe ser comparado con la equivalencia de (i) y (v) en el Teorema 2.1.17.

Proposición 2.1.18. *Sea $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ un marco para $\mathcal{H}$. Donde A_n con $n \in I$, sera la notación para un marco con cota inferior óptima con respecto a $\{f_i\}_{i=1}^{n}$. Entonces las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una base de Riesz para* $\mathcal{H}$.

(ii) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es linealmente independiente y* $\operatorname{ínf}_{n\in I} A_n > 0$.

(iii) $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es linealmente independiente y* $\operatorname{lím}_{n\to\infty} A_n$ *existe y es positivo.*

Demostración. Es claro que $(i) \Rightarrow (ii)$. Si (ii) se satisface, entonces, para casa $n \in I$, $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ es una base de Riesz por su span con cota inferior $A := \operatorname{ínf}_{n\in I} A_n$, lo que significa que

$$A\sum |c_i|^2 \leq \| \sum c_i f_i \|^2 \tag{2.6}$$

para toda sucesión $\{c_i\}_{i=1}^{n}$. En consecuencia $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ se deduce del hecho de que la sucesión de limite A_n, $n \in I$ es decreciente por definición. ■

El Teorema 2.1.17 demuestra que $\{f_i\}_{i\in I}$ si es un marco, pero no una base de Riesz, entonces un determinado elemento $f \in \mathcal{H}$ se puede escribir como $f = \sum_{i\in I} c_i f_i$ para algunos coeficientes $\{c_i\}_{i\in I} \neq \left\{\left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle\right\}_{i\in I}$. Recuerde que por el Lema 2.1.11, en ese caso

$$\sum_{i\in I} |c_i|^2 = \sum_{i\in I} \left|\left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle\right|^2 + \sum_{i\in I} \left|c_i - \left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle\right|^2.$$

En particular, dado $f \in \mathcal{H}$, los coeficientes del marco tienen un mínimo ℓ^2-norma entre todos los coeficientes, satisfacen la ecuación

$$T\{c_i\}_{i\in I} = f.$$

Combinando esto con Teorema 1.12.7 sea demostrado.

Corolario 2.1.19. $T^{\dagger} f = \left\{\left\langle f, S^{-1} f_i \right\rangle\right\}_{i\in I}$

Dado un marco $\{f_i\}_{i\in I}$, minimalidad de la ℓ^2-norma de los coeficientes $\{c_i\}_{i\in I}$ en la expansión $f = \sum_{i\in I} c_i f_i$ no es siempre una cuestión importante; podría haber otras condiciones que son más relevantes. Se caracteriza a todas las familias $\{g_i\}_{i\in I}$ que son duales de $\{f_i\}_{i\in I}$ en el sentido que

$$f = \sum_{i\in I} \left\langle f, g_i \right\rangle f_i, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{2.7}$$

CAPÍTULO 3

ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA.

3.1. Espacios con Métrica Indefinida.

Definición 3.1.1. *Sea V un espacio vectorial. Una variedad lineal en V es un subconjunto no vacío de V que es estable con respecto a las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector.*

Definición 3.1.2. *Sean $A_1, A_2, \dots A_n$ subconjuntos de V, la variedad lineal generada por $A_1, A_2, \dots A_n$ es la menor variedad lineal que contiene a $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ y se denotará por*

$$gen\Big\{A_1,\ A_2, \dots A_n\Big\}.$$

Observación 3.1.3. Si $\pounds_1, \pounds_2, \dots \pounds_n$ son variedades lineales en V, el espacio $gen\Big\{\pounds_1,\ \pounds_2, \dots \pounds_n\Big\}$ sera denotado por

$$\pounds_1 + \pounds_2 + \pounds_3 + \dots + \pounds_n.$$

La suma vectorial (generada) por variedades lineales linealmente independientes $\pounds_1, \pounds_2, \dots \pounds_n$ es llamada *suma directa* y se denota por

$$\pounds_1 \dotplus \pounds_2 \dotplus \pounds_3 \dotplus \dots \dotplus \pounds_n.$$

Si $\pounds$ es una variedad lineal en V por el lema de Zorn, existe una variedad lineal $\mathcal{M}$ en V tal que

$$\pounds \cap \mathcal{M} = \{0\} \qquad y \qquad V = \pounds \dotplus \mathcal{M}. \tag{3.1}$$

Más aún, dada una variedad lineal $\mathcal{M}_1$ en V tal que

$$\pounds \cap \mathcal{M}_1 = \{0\}$$

se puede hallar una variedad lineal $\mathcal{M}$ que contiene a $\mathcal{M}_1$ con las propiedades (3.1). En este caso se dice que $\mathcal{M}$ es una *variedad lineal complementaria* para $\pounds$ con respecto a V.

En este trabajo los productos internos son más generales que los usados para definir espacios de Hilbert.

Definición 3.1.4. *Si V un espacio vectorial, $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal en V, esto es*

1. $[x+y,z] = [x,z] + [y,z]$ *para todo* $x,y,z \in V$.
2. $[\alpha x, y] = \alpha [x,y]$ *para todo* $x,y \in V$.
3. $[x,y] = \overline{[y,x]}$ *para todo* $x,y \in V$.

Entonces $(V,[\cdot,\cdot])$ *se le llama* ***espacio con producto interno indefinido*** .

Proposición 3.1.5. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno. Para todo* $x \in V$, *entonces* $[x,x] \in \mathbb{R}$

Demostración. Si $x \in V$, entonces $[x,x] = \overline{[x,x]}$ por la Definición (3.1.4), por lo tanto $[x,x] \in \mathbb{R}$ ■

Definición 3.1.6. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio producto interno indefinido, se dice que* $(V,-[\cdot,\cdot])$ *es el* ***anti-espacio*** *de* $(V,[\cdot,\cdot])$ *si:*

1. *Para todo* $x \in V$ *se tiene que* $[0,x] = 0$.

   Pues

$$0 = [0,x] - [0,x] = [2\cdot 0, x] - [0,x] = 2\cdot[0,x] - [0,x] = [0,x].$$

2. *Para todo* $x,y,z \in V$ *se tiene que* $[x,y+z] = [x,y] + [x,z]$.

   En efecto,

$$[x,y+z] = \overline{[y+z,x]} = \overline{[y,x]+[z,x]} = \overline{[y,x]} + \overline{[z,x]} = [x,y] + [x,z].$$

Proposición 3.1.7. *Si* $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno entonces se cumple la propiedad de polarización, es decir, para todo* $x,y \in V$ *se tiene que*

$$[x,y] = \frac{1}{4}[x+y,x+y] - \frac{1}{4}[x-y,x-y] + \frac{i}{4}[x+iy,x+iy] - \frac{i}{4}[x-iy,x-iy].$$

3.2. Vectores positivos, negativos y neutros con respecto a un producto interno.

Como $\forall x \in V$, $[x,x] = \overline{[x,x]}$, entonces por lo tanto la propiedad de tricotomía de los números reales garantiza que una y sólo una de las siguientes tres condiciones se cumple

$$[x,x] = \begin{cases} >0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es positivo)} \\ <0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es negativo)} \\ =0 & \text{(en este caso se dice que } x \text{ es neutro)} \end{cases}$$

Puede ocurrir que x sea neutro aún cuando $x \neq 0$.

Las consideraciones anteriores nos llevan a distinguir los siguientes conjuntos
Note que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, pues $0 \in \mathcal{N}$.

(a) $\mathfrak{B}^{++} \subseteq \mathfrak{B}^{+}$. La prueba se obtiene usando que $x = 0$ implica $[x,x] = 0$.

(b) $\mathfrak{B}^{--} \subseteq \mathfrak{B}^{-}$. La prueba es análoga a la anterior.

$$\mathfrak{B}^{+} = \{x \in V : [x,x] \geq 0\} \qquad \mathfrak{B}^{-} = \{x \in V : [x,x] \leq 0\}$$

$$\mathfrak{B}^{++} = \{x \in V : [x,x] > 0 \text{ ó } x = 0\} \qquad \mathfrak{B}^{--} = \{x \in V : [x,x] < 0 \text{ ó } x = 0\}$$

$$\mathcal{N} = \{x \in V : [x,x] = 0\}$$

(c) Puede ocurrir que exista $x \in \mathfrak{B}^{+}$ y sin embargo este $x \notin \mathfrak{B}^{++}$. Esto ocurre cuando existe $x \in V$, $x \neq 0$ tal que $[x,x] = 0$.

(d) $\mathcal{N} = \mathfrak{B}^{+} \cap \mathfrak{B}^{-}$. Esto es consecuencia de que $[x,x] = 0$ si y sólo si $[x,x] \geq 0$ y $[x,x] \leq 0$.

Definición 3.2.1. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno. Se dice que*

(a) $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno indefinido cuando posee tanto elementos positivos como elementos negativos. Es decir, existen* $a,b \in V$ *tales que* $[a,a] > 0$ *y* $[b,b] < 0$.

(b) $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno semidefinido cuando no es indefinido.*

(c) $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno semidefinido positivo cuando* $[x,x] \geq 0$ *para todo* $x \in V$.

(d) $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno semidefinido negativo cuando* $[x,x] \leq 0$ *para todo* $x \in V$.

(e) $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno definido cuando* $x \in V$ *y* $[x,x] = 0$ *implica* $x = 0$.

(f) $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con espacio con producto interno neutro cuando* $[x,x] = 0$ *para todo* $x \in V$.

Observaciones 3.2.2. (i) El producto interno es *indefinido* si y sólo si $\mathfrak{B}^{++} \neq \{0\}$ y $\mathfrak{B}^{--} \neq \{0\}$.

(ii) El producto interno es *definido* si y sólo si $\mathfrak{B}^{++} = \{0\}$ ó $\mathfrak{B}^{--} = \{0\}$.

(iii) El producto interno es *semi-definido* positivo si y sólo si $\mathfrak{B}^{--} = \{0\}$.

(iv) El producto interno es *semi-definido* negativo si y sólo si $\mathfrak{B}^{++} = \{0\}$.

(v) El producto interno es *definido* no posee elementos neutros no nulos.

(vi) Se puede ver que un producto interno *semi-definido* puede ser:

  a) *Neutro* si, $[x,x] = 0 \quad \forall x \in V$ (cuando se cumple este caso es *semi-definido* positivo y negativo).

(vii) El espacio producto interno *definido* puede ser:

  a) *Definido* positivo si, $[x,x] > 0$ para $x \neq 0$

  b) *Definido* negativo si, $[x,x] < 0$ para $x \neq 0$

Proposición 3.2.3. *Si* $(V,[\cdot,\cdot])$ *es un espacio con producto interno semidefinido, entonces se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Esto es,*

$$\left|[x,y]\right|^2 \leq [x,x]\,[y,y]$$

para todo $x,y \in V$.

Demostración. Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es semidefinido positivo, la prueba es la usual dada para espacios de Hilbert.

Si $(V, [\cdot,\cdot])$ es semidefinido negativo, consideremos la función $[\cdot,\cdot]_o : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$[x, y]_o = -[x, y].$$

Así

$$[x, y]_o = -[x, y].$$

Luego

$$\left|[x, y]\right|^2 = \left|-[x, y]\right|^2 = \left|[x, y]_o\right|^2 \leq (-[x,x])\left(-[y, y]\right) = [x,x][y, y]$$

para todo $x, y \in V$. ■

Teorema 3.2.4. *Todo espacio con producto interno indefinido posee elementos neutros no nulos.*

Demostración. Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido. Entonces existen $a, b \in V$ tales que $[a, a] > 0$ y $[b, b] < 0$. Por lo tanto $[a, a][b, b] < 0$, luego

$$-4[a, a][b, b] \geq 0.$$

Consideremos la ecuación cuadrática para la variable x

$$[b, b]x^2 + 2\operatorname{Re}[a, b]x + [a, a] = 0. \tag{3.2}$$

Como $(2\operatorname{Re}[a, b])^2 \geq 0$ y $-4[a, a][b, b] \geq 0$, entonces

$$(2\operatorname{Re}[a, b])^2 - 4[a, a][b, b] \geq 0$$

y también se tiene que $[b, b] \neq 0$. Por lo tanto la ecuación (3.2) tiene solución en $\mathbb{R}$.

Sea $x_o \in \mathbb{R}$ solución de (3.2). Definamos $c = a + x_o b$, se probará que $[c, c] = 0$ y $c \neq 0$. En efecto

$$\begin{aligned}[c, c] &= [a + x_o b, a + x_o b] = [a, a + x_o b] + [x_o b, a + x_o b] = [a, a] + [a, x_o b] + [x_o b, a] + [x_o b, x_o b] \\ &= [a, a] + \overline{x_o}[a, b] + x_o[b, a] + x_o\overline{x_o}[b, b].\end{aligned}$$

Usando que $x_o \in \mathbb{R}$ y que x_o es solución de (3.2) se obtiene

$$\begin{aligned}[c, c] &= [a, a] + x_o[a, b] + x_o[b, a] + x_o x_o[b, b] = [a, a] + x_o[a, b] + x_o\overline{[a, b]} + x_o^2[b, b] \\ &= [a, a] + 2x_0\operatorname{Re}[a, b] + x_o^2[b, b] = [b, b]x_o^2 + 2\operatorname{Re}[a, b]x_o + [a, a] = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado si $c = 0$, se tendría $a = -x_o b$. Luego

$$0 < [a, a] = [-x_o b, -x_o b] = (-x_o)\overline{(-x_o)}[b, b] = x_o^2[b, b] \leq 0.$$

Esto es una contradicción.
Así que V posee elementos neutros no nulos. ■

Note que si el producto interno es definido, $[x, x] = 0$ implica $x = 0$, entonces el producto interno no posee elementos neutros no nulos, por lo tanto no es indefinido. Esto prueba el siguiente resultado.

Definición 3.2.5. *Una variedad lineal V es definida positiva (definida negativa) si para todo $x \in V \setminus \{0\}$ se cumple que:* $[x, x] > 0$ *(*$[x, x] < 0$*).*

Teorema 3.2.6 (Krein-Smulian). *Si el espacio con producto interno $(V,[\cdot,\cdot])$ posee al menos un vector positivo (negativo), entonces todo elemento de V es la suma de dos vectores positivos (negativos).*

Demostración. Si $x, x_0 \in V$, $[x_0, x_0] > 0$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned}[x+\lambda x_0, x+\lambda x_0] &= [x, x+\lambda x_0] + [\lambda x_0, x+\lambda x_0] = [x,x] + [x,\lambda x_0] + [\lambda x_0, x] + [\lambda x_0, \lambda x_0] \\ &= [x,x] + \overline{\lambda}\,[x,x_0] + \lambda\overline{[x,x_0]} + \lambda\overline{\lambda}\,[x_0,x_0] \\ &= [x,x] + \lambda\,[x,x_0] + \lambda\,[x,x_0] + \lambda^2\,[x_0,x_0] \\ &= [x,x] + 2\lambda Re\,[x,x_0] + \lambda^2\,[x_0,x_0]\end{aligned}$$

Luego entonces, será positiva. Por lo tanto los vectores $x_1 = x+\lambda x_0$, $x_2 = -\lambda x_0$ son positivos y tenemos que $x = x_1 + x_2$. Para demostrar con los vectores negativos se debe tomar el anti-espacio de V. ■

Corolario 3.2.7. *Si $(V,[\cdot,\cdot])$ es un espacio producto interno, entonces ninguno de los conjuntos $\mathfrak{B}^+, \mathfrak{B}^-, \mathfrak{B}^{++}, \mathfrak{B}^{--}$ es un subespacio en V.*

3.3. Ortogonalidad.

Definición 3.3.1. *Sean $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y sean $x, y \in V$. Se dice que x, y son vectores ortogonales cuando $\left[x,y\right] = 0$. Esto se denota mediante $x \perp y$.*

Definición 3.3.2. *Sean $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y sean A y B subconjuntos de V. Se dice que A y B son conjuntos ortogonales cuando $a \perp b$ para todo $a \in A$, para todo $b \in B$. Esto se denota mediante $A \perp B$.*

Proposición 3.3.3. *Si $(V,[\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno neutro, entonces $[v,w] = 0$ para todo $v, w \in V$.*

Demostración. Sean $v, w \in V$, entonces $[v,v] = 0$, $[w,w] = 0$ pues V es neutro.
Por la desigualdad de polarización se tiene que

$$[v,w] = \frac{1}{4}[v+w, v+w] - \frac{1}{4}[v-w, v-w] + \frac{i}{4}[v+iw, v+iw] - \frac{i}{4}[v-iw, v-iw] = 0.$$

■

Definición 3.3.4. *Sean $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $\mathcal{W}$ subconjunto de V, el **Complemento Ortogonal** de $\mathcal{W}$, denotado por $(\mathcal{W}^{\perp})$, es*

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{x \in V : \left[x, \mathcal{W}\right] = 0\}.$$

Proposición 3.3.5. *Si $(V,[\cdot,\cdot])$ es un espacio con producto interno y $\mathcal{W} \subset V$, entonces*

(a) $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}^{\perp\perp}$.

(b) $\mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{W}^{\perp\perp\perp}$.

Demostración.
(a) Sean $x \in \mathcal{W}$. Entonces $\left[x,y\right] = 0$ para todo $y \in \mathcal{W}^{\perp}$. Luego $x \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$. Por lo tanto $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}^{\perp\perp}$.
(b) Para probar $\mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{W}^{\perp\perp\perp}$ basta aplicar la parte (a) al conjunto $\mathcal{W}^{\perp}$. Es decir; sea $\mathcal{W}^{\perp} = S$, entonces $S \subset S^{\perp\perp}$ por parte (a). Luego $\mathcal{W}^{\perp} \subset \left(\mathcal{W}^{\perp}\right)^{\perp\perp}$, en efecto $\mathcal{W}^{\perp} \subseteq \mathcal{W}^{\perp\perp\perp}$. ■

Definición 3.3.6. *Sean* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno indefinido y* $\pounds$ *una variedad lineal contenida en* V*. Si* $\pounds$ *es la suma de variedades lineales* $\pounds_1,\pounds_2,\pounds_3,\ldots,\pounds_n$ *ortogonales dos a dos, se dice que* $\pounds$ *es la suma ortogonal de las variedades* $\pounds_1,\pounds_2,\pounds_3,\ldots,\pounds_n$ *y escribiremos*

$$\pounds=\pounds_1\,[+]\,\pounds_2\,[+]\,\pounds_3\,[+]\ldots[+]\,\pounds_n.$$

Si además la suma es directa, entonces se dice que $\pounds$ *es la suma directa ortogonal de las variedades* $\pounds_1,\pounds_2,\pounds_3,\ldots,\pounds_n$ *y escribiremos*

$$\pounds=\pounds_1\,[\dot{+}]\,\pounds_2\,[\dot{+}]\,\pounds_3\,[\dot{+}]\ldots[\dot{+}]\,\pounds_n.$$

Definición 3.3.7. *Sean* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno y* $\mathcal{W}$ *una variedad lineal en* V*, la variedad lineal*

$$\mathcal{W}^o=\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp$$

se llama la parte isotrópica de $\mathcal{W}$ *y sus elementos se llaman vectores isotrópicos.*

Note que en cualquier caso este conjunto es no vacío:

$$\mathcal{W}^o\neq\emptyset.$$

Esto se debe a que $0\in\mathcal{W}$ y $0\in\mathcal{W}^\perp$ luego $0\in\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp=\mathcal{W}^o$.

Definición 3.3.8. *Si* $\mathcal{W}^o\neq\{0\}$ *se dice que* $\mathcal{W}$ *es una variedad lineal degenerada. En caso contrario, se dice que* W *es una variedad lineal no degenerada.*

Proposición 3.3.9. *Sean* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno y* $\mathcal{N}$ *el conjunto de vectores neutros de* V*. Si* $\mathcal{W}$ *es una variedad lineal en* V *y* W^o *es la parte isotrópica de* $\mathcal{W}$ *entonces*

$$\mathcal{W}^o\subseteq\mathcal{N}.$$

Demostración. Si $x\in\mathcal{W}^o$ entonces $x\in\mathcal{W}\cap\mathcal{W}^\perp$, luego $[x,x]=0$ y por lo tanto $x\in\mathcal{N}$. ■

Proposición 3.3.10. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *espacio con producto interno semi-definido, entonces la parte isotrópica de* V *es el conjunto de vectores neutros. Es decir,*

$$\mathcal{V}^o=\mathcal{N}.$$

Demostración. Sea $x\in\mathcal{N}$. Entonces $x\in V$ y se tiene que $[x,x]=0$.

Para probar que $x\in V^\perp$ se toma $y\in V$. Como el producto es semidefinido vale la desigualdad de Cauchy -Schwartz. Por lo tanto se tiene que

$$0\leq|\left[x,y\right]|^2\leq[x,x]\left[y,y\right]=0.$$

De donde $\left[x,y\right]=0$. Luego $x\in V^\perp$. Por lo tanto $x\in V\cap V^\perp=\mathcal{V}^o$. Esto prueba que $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{V}^o$.

Como ya se vio en la Proposición 3.3.9, se tiene que $\mathcal{V}^o\subseteq\mathcal{N}$, por lo tanto $\mathcal{N}=\mathcal{V}^0$. ■

Definición 3.3.11. *Sean* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno y* $\mathcal{W}$ *una variedad lineal de* V*. Sea* $x\in V$*, si* x *admite una representación como* $x=y+z$*, con* $y\in\mathcal{W}$ *y* $z\in\mathcal{W}^\perp$*, se dice que* y *es una proyección ortogonal de* x *sobre* $\mathcal{W}$*.*

Proposición 3.3.12. *Sean $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathcal{W}$ una variedad lineal en V. Si $x \in V$ y existen dos proyecciones ortogonales y_1 y y_2 de x sobre $\mathcal{W}$, entonces estas difieren en un vector isotrópico.*

Demostración. Sean y_1 y y_2 proyecciones ortogonales de x sobre $\mathcal{W}$, entonces existen $z_1 \in \mathcal{W}^{\perp}$ y $z_2 \in \mathcal{W}^{\perp}$ tales que

$$x = y_1 + z_1, \qquad x = y_2 + z_2.$$

Por lo tanto

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1.$$

Sea

$$w = z_2 - z_1.$$

Se probará que $w \in \mathcal{W}^0$.

En efecto y_1 y y_2 están en $\mathcal{W}$, el cual es una variedad lineal en V. Entonces $y_1 - y_2 \in \mathcal{W}$. Luego $z_2 - z_1 \in \mathcal{W}$. Además $z_1, z_2 \in \mathcal{W}^{\perp}$ entonces

$$[z_1, w] = 0 \qquad \text{y} \qquad [z_2, w] = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathcal{W},$$

por lo tanto

$$[z_2 - z_1, w] = [z_1, w] - [z_2, w] = 0 + 0 = 0$$

entonces $z_2 - z_1 \in \mathcal{W}^{\perp}$. De donde

$$z_2 - z_1 \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{W}^0.$$

■

Teorema 3.3.13. *Sean $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $\mathscr{L}$ una variedad lineal de V.*

(a) Si $\mathscr{L}$ es no degenerado entonces los elementos de V tienen a lo sumo una proyección sobre $\mathscr{L}$.

(b) Si existe un elemento en V que tiene exactamente una proyección sobre la variedad lineal $\mathscr{L}$ entonces $\mathscr{L}$ es no degenerado.

Demostración. (a) Sean $x \in V$ e y_1, y_2 proyecciones de x sobre $\mathscr{L}$, entonces existen $z_1, z_2 \in \mathscr{L}^{\perp}$ tales que

$$x = y_1 + z_1 \quad x = y_2 + z_2$$

Luego $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Pero es claro que $y_1 + (-y_2) \in \mathscr{L}$ y $z_1 + (-z_2) \in \mathscr{L}^{\perp}$ por tanto $y_1 - y_2 \in \mathscr{L}^0 = \{0\}$, esto indica que $y_1 = y_2$.

(b) Sea $x \in V$ tal que tiene exactamente una proyección sobre $\mathscr{L}$ y esta es y, entonces existe $z \in \mathscr{L}^{\perp}$ tal que $x = y + z$.

Supongamos que $\mathscr{L}$ es degenerado, entonces existe $z_0 \neq 0$ tal que $z_0 \in \mathscr{L}^0 = \mathscr{L} \cap \mathscr{L}^{\perp}$. Como

$$x = y + z = y + z + 0 = (y + z_0) + (z - z_0)$$

se sigue que $y + z_0 \neq y$. Esta es la proyección de x sobre $\mathscr{L}$, lo cual es absurdo.

■

Definición 3.3.14. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno y* $\mathcal{W}$ *una variedad lineal de* V. *Se dice que* $\mathcal{W}$ *es* ***ortocomplementada*** *cuando todo* $x \in V$ *se puede escribir como* $x = y + z$, *con* $y \in \mathcal{W}$ *y* $z \in \mathcal{W}^{\perp}$. *En este caso se escribe*

$$V = cl\{\mathcal{W}, \mathcal{W}^{\perp}\} \qquad ó \qquad V = gen\{\mathcal{W}, \mathcal{W}^{\perp}\}.$$

Teorema 3.3.15. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno y* $\mathcal{W}$ *una variedad lineal en* V. *Todo vector de* V *tiene una proyección sobre* $\mathcal{W}$ *si y sólo si* $\mathcal{W}$ *es ortocomplementado. En particular, cuando* $\mathcal{W}$ *es no degenerado se tiene que todo vector de* V *tiene una única proyección sobre* $\mathcal{W}$ *si y sólo si* $\mathcal{W} = \mathcal{W}\,[\dot{+}]\,\mathcal{W}^{\perp}$.

Nota 3.3.16. El Teorema 3.3.15 garantiza la existencia de proyectores ortogonales en **subespacios ortocomplementados**.

3.4. Operadores lineales en espacios con métrica indefinida

Definición 3.4.1. *Un operador lineal* $\mathcal{T}$ *de un espacio vectorial* V_1 *en un espacio vectorial* V_2 *es una aplicación definida en una variedad lineal* $Dom(\mathcal{T}) \subseteq V_1$ *y a valores en* V_2 *tal que:*

$$\mathcal{T}(\alpha x + y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$$

para cualquier $x, y \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{C}$. *La variedad lineal* $Dom(\mathcal{T}) \subseteq V_1$ *es el dominio de* $\mathcal{T}$ *y la variedad lineal* $\mathcal{T}(Dom(\mathcal{T})) = \mathrm{Rang}(\mathcal{T})$, *es el rango de* $\mathcal{T}$.

Si $V_1 = V_2 = V$, *se dice que* $\mathcal{T}$ *es un operador lineal en* V.

Definición 3.4.2. *Un operador lineal* $\mathcal{T}$ *en* $(V,[\cdot,\cdot])$ *es simétrico si*

$$\left[\mathcal{T}(x), y\right] = \left[x, \mathcal{T}(y)\right]$$

para todo $x, y \in Dom(\mathcal{T})$.

Definición 3.4.3. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno. Un operador* $\mathcal{T}$ *en* V *es isométrico si*

$$\left[\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)\right] = \left[x, y\right]$$

para todo $x, y \in Dom(\mathcal{T})$.

Proposición 3.4.4. *Todo operador isométrico cuyo dominio es no degenerado es invertible.*

Demostración. Si $\mathcal{T}x = 0$, entonces para cualquier $y \in Dom(\mathcal{T})$ tenemos

$$\left[x, y\right] = \left[\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)\right] = \left[0, \mathcal{T}(y)\right] = 0$$

debe ser $x = 0$. Así x es ortogonal a $Dom(\mathcal{T})$. Como $Dom(\mathcal{T})$ es no degenerado, entonces $\mathcal{T}$ es invertible. ■

Definición 3.4.5. *Sea* $(V,[\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno, si* $\mathcal{T}$ *es un operador isométrico en* V *tal que* $Dom(\mathcal{T}) = Ran(\mathcal{T}) = V$, *se dice que* $\mathcal{T}$ *es unitario.*

Definición 3.4.6. *Sea* $\mathcal{T}$ *operador lineal en* V *y* $\mathcal{W}$ *una variedad lineal en* V, *se dice que* $\mathcal{W}$ *es* $\mathcal{T}$-*invariante (o invariante por* $\mathcal{T}$*) si* $\mathcal{T}(\mathcal{W} \cap Dom(\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{W}$.

Proposición 3.4.7. *Si $\mathcal{T}$ es un operador isométrico en $(V,[\cdot,\cdot])$ y $\mathcal{W}\subseteq V$ es una variedad lineal tal que $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{W}\cap Dom(\mathcal{T}))$, entonces $\mathcal{W}^{\perp}$ es invariante por $\mathcal{T}$.*

Demostración. Sea $x\in\mathcal{W}^{\perp}$ entonces

$$\left\{\left[\mathcal{T}(x),\mathcal{W}\right]\right\}\subseteq\left\{\left[\mathcal{T}(x),\mathcal{T}(\mathcal{W}\cap Dom(\mathcal{T}))\right]\right\}=\left\{\left[x,\mathcal{W}\cap Dom(\mathcal{T})\right]\right\}=\left\{\left[x,\mathcal{W}\right]\right\}=\{0\}.$$

■

Proposición 3.4.8. *Si $\mathcal{T}$ es un operador simétrico en $(V,[\cdot,\cdot])$ y $\mathcal{W}\subseteq Dom(\mathcal{T})$ es invariante por $\mathcal{T}$, entonces lo es $\mathcal{W}^{\perp}$.*

Demostración. Sea $x\in\mathcal{W}^{\perp}$ entonces

$$\left[\mathcal{T}(x),\mathcal{W}\right]=\left[x,\mathcal{T}(W)\right]$$

como $\mathcal{T}\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$, entonces

$$\left\{\left[x,\mathcal{T}(W)\right]\right\}\subseteq\left\{\left[x,\mathcal{W}\right]\right\}=\{0\}.$$

■

Definición 3.4.9. *Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ operadores lineales en V con $Dom(\mathcal{T}_1)=Dom(\mathcal{T}_2)=V$, se dice que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ conmutan cuando*

$$\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2=\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1.$$

Definición 3.4.10. *Sea $\mathcal{U}\in\mathscr{L}(V)$ y $\mathcal{E}$ una variedad lineal en V, se dice que $\mathcal{E}$ es $\mathcal{U}$-invariante cuando $\mathcal{U}\mathcal{E}\subseteq\mathcal{E}$. Se dice que $\mathcal{E}$ reduce a $\mathcal{U}$ si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^{\perp}$ son $\mathcal{U}-$invariantes.*

Definición 3.4.11. *Se dice que una descomposición en suma directa*

$$V=\pounds_1\,[\dot{+}]\,\pounds_2\,[\dot{+}]\,\pounds_3\,[\dot{+}]\ldots[\dot{+}]\,\pounds_n$$

reduce a $\mathcal{T}$ si:

1. *$\pounds_1,\pounds_2,\pounds_3,\ldots,\pounds_n$ son $\mathcal{T}-$invariantes.*
2. *$Dom(\mathcal{T})=(Dom(\mathcal{T})\cap\pounds_1)\,[\dot{+}]\,(Dom(\mathcal{T})\cap\pounds_2)\,[\dot{+}]\ldots[\dot{+}]\,(Dom(\mathcal{T})\cap\pounds_n)$.*

En este caso $\mathcal{T}$ es suma directa de $\mathcal{T}\mid\pounds_1,\mathcal{T}\mid\pounds_2,\mathcal{T}\mid\pounds_3,\ldots,\mid\pounds_n$.

Teorema 3.4.12. *Si $\mathcal{P}$ es un proyector ortogonal en un espacio producto interno indefinido $(V,[\cdot,\cdot])$, entonces el rango de $\mathcal{P}$ es ortocomplementado y para cada $x\in V$, $\mathcal{P}_x$ es la proyección del rango de $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{W}$. Si además W es no degenerado y ortocomplementado, entonces $\mathcal{P}_W$ es un proyector ortogonal y* $\mathrm{Rang}(\mathcal{P})=\mathcal{W}$.

Demostración. Sea $x\in V$, entonces se puede escribir

$$x=\mathcal{P}_x+(x-\mathcal{P}_x).$$

Además como $\mathcal{P}_x=\mathcal{P}(x)$ se tiene que

$$\left[x-\mathcal{P}_x,\mathcal{P}_y\right]=\left[\mathcal{P}(x-\mathcal{P}_x),\mathcal{P}_y\right]=\left[\mathcal{P}x-\mathcal{P}_x^2,y\right]=\left[\mathcal{P}x-\mathcal{P}_x,y\right]=\left[0,y\right]=0$$

para todo $y\in V$.

De donde

$$V = cl\{\text{Rang}(\mathcal{P}), (\text{Rang}(\mathcal{P}))^{\perp}\},$$

esto es Rang($\mathcal{P}$) es ortocomplementado y $\mathcal{P}_x$ es la proyección de x sobre Rang($\mathcal{P}$).

Por otro lado si $x, y \in V$, existen $u, z \in \mathcal{W}^{\perp}$ tales que

$$x = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x) + u \quad \text{y} \quad x = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x) + z.$$

Se tiene que

$$\left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), y\right] = \left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(y) + z\right] = \left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(y)\right] + \left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), z\right] = \left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(y)\right] + 0.$$

Luego

$$\left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), y\right] = \left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x), \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(y)\right] = \left[x, \mathcal{P}^2_{\mathcal{W}}(y)\right] = \left[x, \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(y)\right].$$

Sea $w \in \mathcal{W}$

$$\left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x) - \mathcal{P}^2_{\mathcal{W}}(y), w\right] = \left[\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x - \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x)), w\right] = \left[x - \mathcal{P}_{\mathcal{W}}x), \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(w)\right] = \left[w, \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(w)\right] = 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(x) - \mathcal{P}^2_{\mathcal{W}}(y) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp}$$

$\mathcal{N}^0 = \{0\}$ y $\mathcal{W}$ es no degenerado, luego

$$\mathcal{P}_{\mathcal{W}} = \mathcal{P}^2_{\mathcal{W}}.$$

Si $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 [+] \mathcal{V}_1$, entonces $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 [\dot{+}] \mathcal{V}_1$, de modo que $\mathcal{V}_1$ es no degenerado y ortocomplementado, así $\mathcal{P}_{\mathcal{V}} = \mathcal{P}_{\mathcal{V}_1}$, entonces $\mathcal{P}$ es proyector ortogonal con Rang($\mathcal{P}$) $= \mathcal{V}_1$ y además

$$\left[\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y)\right] = \left[x, y\right]$$

para todo x, y en $\mathcal{V}$ por lo tanto $\mathcal{P}$ es isométrico. ■

Definición 3.4.13. *Decimos que* $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot])$ *es* ***descomponible*** *si admite una representación de la forma*

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 [\dot{+}] \mathcal{V}^+ [\dot{+}] \mathcal{V}^-, \qquad \mathcal{V}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \qquad \mathcal{V}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--},$$

donde $\mathcal{V}^0$ *es la parte isotrópica de* $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+$ *son variedades lineales. Toda descomposición como la anterior recibe el nombre de descomposición fundamental.*

Sea $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno,

$$\mathcal{V} = \mathcal{W}^0 [\dot{+}] \mathcal{W}^+ [\dot{+}] \mathcal{W}^- \qquad \text{con} \quad \mathcal{W}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \quad \mathcal{W}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}^0 \subseteq \mathcal{W}$$

entonces $\mathcal{W}^0 = \mathcal{V}^0$.
Donde $\mathcal{W}$ es un subconjunto de $\mathcal{V}$.

Proposición 3.4.14. *Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado* $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot])$ *es de la forma*

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ [\dot{+}] \mathcal{V}^- \qquad \textit{con} \quad \mathcal{V}^+ \subseteq \mathfrak{B}^{++}, \qquad \mathcal{V}^- \subseteq \mathfrak{B}^{--},$$

$(\mathcal{N}^0)^0 = \mathcal{N}^0 \cap (\mathcal{N}^0)^{\perp} = \mathcal{N}^0$ *y* $(\mathcal{N}^0)^{\perp} = \mathcal{N}^0$.

Observación 3.4.15. Sea $(\mathcal{V},[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado tal que

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}^{+}\,[\dotplus]\,\mathcal{V}^{-}\qquad \text{con}\qquad \mathcal{V}^{+}\subseteq\mathfrak{B}^{++},\quad \mathcal{V}^{-}\subseteq\mathfrak{B}^{--}$$

entonces los proyectores $\mathcal{P}^{\pm}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^{\pm}$ dados por

$$\mathcal{P}^{\pm}(x)=x^{\pm}$$

están bien definidos y son proyectores ortogonales.

Definición 3.4.16. *Los operadores $\mathcal{P}^{\pm}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}^{\pm}$ de la observación 3.4.15 se llaman **proyectores fundamentales** y*

$$J=\mathcal{P}^{+}-\mathcal{P}^{-}$$

*se llama **simetría fundamental**.*

$\mathcal{P}^{+},\mathcal{P}^{-}$ y por lo tanto J están asociados a la descomposición fundamental.
Si $x\in\mathcal{V}=\mathcal{V}^{+}\,[\dotplus]\,\mathcal{V}^{-}$, entonces $x=x^{+}+x^{-}=\mathcal{P}^{+}(x)+\mathcal{P}^{-}(x)$ y
$J(x)=(\mathcal{P}^{+}-\mathcal{P}^{-})(x)=\mathcal{P}^{+}(x)-\mathcal{P}^{-}(x)=x^{+}-x^{-}$. Luego $x=\mathcal{P}^{+}(x)+\mathcal{P}^{-}(x)$ y $J(x)=\mathcal{P}^{+}(x)-\mathcal{P}^{-}(x)$, entonces $J(x)+x=2\mathcal{P}^{+}(x)$ Por lo tanto $\mathcal{P}^{+}=\dfrac{J+I}{2}$, en forma similar se obtiene que $\mathcal{P}^{-}=\dfrac{I-J}{2}$.
Por lo tanto de que $\left[\mathcal{P}^{+}(x),\mathcal{P}^{-}(x)\right]=0$ se sigue que $J^{2}=\mathrm{I}$.

Demostración. Se probara que la composición de J con sigo misma es la identidad.

$$J^{2}x=JJx=J(x^{+}-x^{-})=Jx^{+}-Jx^{-}=x^{+}-(-x^{-})=x^{+}+x^{-}=x=\mathrm{I}\,x$$

Además J es isométrico, en efecto,

$$\begin{aligned}\left[J(x),y\right]&=\left[x^{+}-x^{-},y^{+}+y^{-}\right]=\left[x^{+},y^{+}\right]+\left[x^{+},y^{-}\right]+\left[-x^{+},y^{+}\right]+\left[-x^{-},y^{-}\right]\\&=\left[x^{+},y^{+}\right]-\left[x^{-},y^{-}\right]=\left[x^{+},y^{+}\right]+0+0-\left[x^{-},y^{-}\right]\\&=\left[x^{+},y^{+}\right]+\left[x^{+},-y^{-}\right]+\left[x^{-},y^{+}\right]-\left[x^{-},y^{-}\right]\\&=\left[x^{+},y^{+}\right]+\left[x^{+},-y^{-}\right]+\left[x^{-},y^{+}\right]+\left[x^{-},-y^{-}\right]\\&=\left[x^{+},y^{+}-y^{-}\right]+\left[x^{-},y^{+}-y^{-}\right]=\left[x^{+}+x^{-},y^{+}-y^{-}\right]=\left[x,J(y)\right]\end{aligned}$$

■

Si $(V,[\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y $[\cdot,\cdot]_J=:V\times V\to\mathbb{C}$ dada por

$$\left[x,y\right]_J=\left[J(x),y\right]$$

Observación 3.4.17. J es J-isométrico, en efecto,

$$\left[J(x),J(y)\right]_J=\left[JJ(x),J(y)\right]=\left[x,J(y)\right]=\left[J(x),y\right]=\left[x,y\right]_J$$

Entonces para todo $x,y\in\mathcal{V}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left[x,y\right]_J&=\left[Jx,y\right]=\left[x^{+}-x^{-},y^{+}+y^{-}\right]=\left[x^{+},y^{+}+y^{-}\right]-\left[x^{-},y^{+}+y^{-}\right]\\&=\left[x^{+},y^{+}\right]+\left[x^{+},y^{-}\right]-\left[x^{-},y^{+}\right]-\left[x^{-},y^{-}\right]=\left[x^{+},y^{+}\right]-\left[x^{-},y^{-}\right]\geq 0.\end{aligned}$$

A la función $[\cdot,\cdot]_J:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to C$, se le llama *$J$-producto interno* y $\|\cdot\|_J$ se le llama *J-norma*.

Proposición 3.4.18. *Si J es la simetría fundamental asociada a la descomposición $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ [\dot{+}] \mathcal{V}^-$, entonces $\left[v^+, v^-\right]_J = 0$.*

Demostración. Como $\left[v^+, 0\right] = 0$ y $[0, v^-] = 0$ se tiene que

$$\left[v^+, v^-\right]_J = \left[v^+ + 0, v^- + 0\right]_J = \left[v^+, 0\right] - [0, v^-] = 0.$$

■

Teorema 3.4.19. *Sea $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno y J es la simetría fundamental. Si $[\cdot,\cdot]_J : V \times V \to \mathbb{C}$ está dada por $\left[x, y\right]_J = \left[J(x), y\right]$, entonces $\left|\left[x, y\right]\right| \leq \|x\|_J \|y\|_J$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left|\left[x, y\right]\right| &= \left|\left[x^+, y\right] + \left[x^-, y\right]\right| \leq \left|\left[x^+, y^+\right]\right| + \left|\left[x^-, y^-\right]\right| \\
&\leq \left[x^+, x^+\right]^{\frac{1}{2}} \left[y^+, y^+\right]^{\frac{1}{2}} + (-\left[x^-, x^-\right])^{\frac{1}{2}} (-\left[y^-, y^-\right])^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left[x^+, x^+\right]^{\frac{1}{2}} - [x^-, x^-]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left[y^+, y^+\right]^{\frac{1}{2}} - \left[y^-, y^-\right]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_J \|y\|_J.
\end{aligned}$$

■

Definición 3.4.20. *Sean $(V, [\cdot,\cdot])$ un espacio con producto interno, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ variedades lineales de V. Decimos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son compañeros duales si*

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{0\} = \mathcal{U}^{\perp} \cap \mathcal{W}.$$

Y notamos que $\mathcal{U} \neq W$

Obsérvese que si $\mathcal{W}$ es no degenerado entonces

$$\mathcal{W}^{\perp} \cap \mathcal{W} = \mathcal{W}^0 = \{0\}.$$

Por lo tanto $\mathcal{W}^{\perp} \neq \mathcal{W}$.

Definición 3.4.21 (*Espacios de Krein*)**.** *Sea $\mathcal{K}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Considere $[\cdot,\cdot] : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{C}$, una forma sesquilineal. El espacio vectorial $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein si $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ y $\left(\mathcal{K}^+, [\cdot,\cdot]\right)$, $(\mathcal{K}^-, [\cdot,\cdot])$ son espacios de Hilbert, donde $\mathcal{K}^+$, $\mathcal{K}^-$ son ortogonales con respecto* $[\cdot,\cdot]$.

Notación 3.4.22. De ahora en adelante, $\mathcal{K}$ representará un espacio de Krein.

Ejemplo 3.4.23. Consideremos $(\mathbb{R}^2, +)$ con la suma usual, y $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\left[(x_1, y_1), (x_2, y_2)\right] = x_1 x_2 - y_1 y_2.$$

Ya se probó que esta función así definida es un producto interno.
Sean

$$\mathcal{K}^+ = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{K}^- = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Sean $u \in \mathcal{K}^+$ y $v \in \mathcal{K}^-$ entonces existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $u = (x, 0) \in \mathcal{K}^+$ y $v = (0, y) \in \mathcal{K}^-$ luego

$$[u, v] = \left[(x, 0), (0, y)\right] = x0 - 0y = 0$$

de donde $\mathcal{K}^+ \perp \mathcal{K}^-$.

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces
$$(x,y) = (x,0) + (0,y).$$
De lo anterior $\mathbb{R}^2 = \mathcal{K}^+ [\dot{+}] \mathcal{K}^-$ y es fácil ver que $(\mathcal{K}^+, [\cdot,\cdot])$ y $(\mathcal{K}^-, -[\cdot,\cdot])$ son espacios de Hilbert, por lo tanto $(\mathbb{R}^2, [\cdot,\cdot])$ es un espacio de Krein.

Note que $u = (x,0) \in \mathcal{K}^+$ implica
$$[u,u] = [(x,0),(x,0)] = xx - 00 = x^2 \geq 0$$
y $v = (0,y) \in \mathcal{K}^-$ luego
$$-[v,v] = -\big[(0,y),(0,y)\big] = -(00 - yy) = y^2 \geq 0.$$

Si $\{(x_n,0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de puntos en $\mathcal{K}^+$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} (x_n,0) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
entonces $y = 0$. Luego $(x,y) \in \mathcal{K}^+$. Por lo tanto $\mathcal{K}^+$ es cerrado.

Análogamente se ve que $\mathcal{K}^-$ es cerrado.

Observación 3.4.24. Los espacios de Krein son no degenerados. Sea $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein. Tal como se dijo antes este espacio es no degenerado y descomponible. Por lo tanto existen los proyectores ortogonales $P^\pm : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \to \mathcal{K}^\pm$ dados por
$$P^\pm(x) = x^\pm$$
y la simetría fundamental $J = P^+ - P^-$ asociada en forma natural.
Sea $[\cdot,\cdot]_J : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \to \mathbb{C}$ dada por
$$\big[x,y\big]_J = \big[J(x), y\big]$$
Consideremos el espacio de Hilbert asociado con $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$.
Luego
$$\begin{aligned} [x,y]_J &= [Jx,y] = (x,y), \quad \forall\ x,\ y \in \mathcal{K} \\ |x|_J &= \sqrt{[x,x]_J}\,\forall\ x, \in X \end{aligned} \tag{3.3}$$

Corolario 3.4.25. *Al espacio de Krein $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$, se le puede asociar un espacio de Hilbert $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$. Por otro lado, si $(\mathcal{H},[\cdot,\cdot])$ es un espacio de Hilbert, entonces podemos verlo como un espacio de Krein de la forma*
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}\,[\dot{+}]\,\{0\}.$$

Teorema 3.4.26. *Sea $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein y sean*
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ [\dot{+}] \mathcal{K}_1^-, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+ [\dot{+}] \mathcal{K}_2^-, \quad \textit{con } \mathcal{K}_1^+, \mathcal{K}_2^+ \subseteq \beta^{++} \textit{ y } \mathcal{K}_1^-, \mathcal{K}_2^- \subseteq \beta^{--}$$
dos descomposiciones fundamentales entonces:
$$\dim(\mathcal{K}_1^+) = \dim(\mathcal{K}_2^+) \qquad y \qquad \dim(\mathcal{K}_1^-) = \dim(\mathcal{K}_2^-).$$
Además si J_1 y J_2 son las respectivas simetrías fundamentales entonces $\|\cdot\|_{J_1}$ y $\|\cdot\|_{J_2}$, son normas equivalentes.

Este es un resultado clásico de espacios de Krein. La prueba puede verse en [3].

Tomando en cuenta el Teorema 3.4.26 tiene sentido hablar de

$$k^+ = \dim(\mathcal{K}^+) \qquad \text{y} \qquad k^- = \dim(\mathcal{K}^-)$$

cualquiera sea la descomposición fundamental del espacio de Krein.

Por el Teorema 3.4.26 dos descomposiciones fundamentales dan origen a normas equivalentes y por lo tanto dan origen a la misma topología. Esta topología es la que se conoce como *topología fuerte* del espacio de Krein.

En general, los conceptos de convergencia, continuidad, etc en un espacio de Krein se refieren a esta topología.

Definición 3.4.27. *Sea* $k = \text{mín}\{\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-\}$. *Cuando* k *es finito se dice que* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio de Pontryagin.*

Sea $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ un operador lineal. La definición del adjunto de T se hace de manera análoga a como se hace en espacios de Hilbert, usando la versión para espacios de Krein del teorema de representación de Riesz. Es decir, el adjunto de T es $T^{[*]} : Dom(T^{[*]}) \to \mathcal{K}$ tal que

$$[T(x), y] = [x, T^{[*]}(y)]$$

para todo $x \in Dom(T)$, $y \in Dom(T^{[*]})$.

Teorema 3.4.28. *Sean* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein,* T *un operador lineal en dicho espacio, dominio de* T *denso en* $\mathcal{K}$. *Sea* J *una simetría fundamental en* $\mathcal{K}$ *y* T^{*J} *el adjunto de* T *respecto al espacio de Hilbert* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$*, entonces*

$$T^{[*]} = JT^{*J}J.$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{K}$ tales que $x \in Dom(T^*)$ y $y \in Dom(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left[JT^{[*]}(x), y\right]_J &= \left[T^{[*]}(x), J(y)\right] = \left[x, TJ(y)\right] = \left[J(x), TJ(y)\right]_J = \left[T^{*J}J(x), J(y)\right]_J = \left[T^{*J}J(x), y\right]_J \\ &= \left[JT^{*J}J(x), Jy\right] = \left[T^{*J}J(x), JJy\right] = \left[T^{*J}J(x), Iy\right] = \left[T^{*J}J(x), y\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto $JT^{[*]} = T^{*J}J$ de donde $T^{[*]} = JT^{*J}J$ ■

Proposición 3.4.29. *Sea* $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\dot{+}]\mathcal{K}^-$ *un espacio de Krein y* $\mathcal{P}$ *un proyector ortogonal en* $\mathcal{K}$*, entonces* $\mathcal{K}^+$ *y* $\mathcal{K}^-$ *son* $\mathcal{P}$*-invariantes.*

Demostración. Sea $r^+ \in \mathcal{K}^+$. Luego para $r^- \in \mathcal{K}^-$, entonces

$$[\mathcal{P}_{r^+}, r^-] = [\mathcal{P}_{r^+}, \mathcal{P}\mathcal{P} r^-] = [\mathcal{P}_{r^+}, \mathcal{P} r^-] = [r^+, r^-] = 0$$

en efecto $\mathcal{P}_{r^+} \in \mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^+$; $\mathcal{P}_{r^+} \in \mathcal{K}^+$, $\mathcal{P}\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{K}^+$ ■

Proposición 3.4.30. *Sea* $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+[\dot{+}]\mathcal{K}^-$ *un espacio de Krein con simetría fundamental* J*,* $\mathcal{W} \subset \mathcal{K}$ *y* $\mathcal{P}$ *un proyector ortogonal* $\mathcal{P} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{W}$*, entonces* $\mathcal{P}$ *conmuta con* J*.*

Demostración. Sea $r \in \mathcal{K}$.
$\mathcal{P} J_r = \mathcal{P} J_{(r^+ +^-)} = \mathcal{P}_{(r^+ - r^-)} = \mathcal{P}_{r^+} - \mathcal{P}_{r^-}$ hacemos $\mathcal{P}_{r^+} = w^+ \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{P}_{r^-} = w^- \in \mathcal{K}$
$w^+ - w^- = J(w^+ + w^-) = J(\mathcal{P}_{r^+} + \mathcal{P}_{r^-}) = J\mathcal{P}_{(r^+ + r^-)} = J\mathcal{P}_r$, por lo tanto $\mathcal{P} J = J\mathcal{P}$ ■

Proposición 3.4.31. *Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein con simetría fundamental J y $\mathcal{P}$ un proyector ortogonal, entonces $\mathcal{P}$ un proyector ortogonal, luego $\mathcal{P}$ es J-isométrico.*

Demostración.

$$[\mathcal{P}x, \mathcal{P}y]_J = [J\mathcal{P}x, \mathcal{P}y] = [\mathcal{P}Jx, \mathcal{P}y] = [Jx, y] = [x, y]_J$$

■

CAPÍTULO 4

MARCOS DE SUBESPACIOS EN ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA

En este capitulo se muestra que si $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert y en él se considera la forma sesquilineal $\langle \mathcal{W}\cdot,\cdot\rangle$ llamada $\mathcal{W}$-métrica, con $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \in \mathscr{B}(\mathcal{H})$, y $\ker \mathcal{W} = \{0\}$, entonces el espacio $(\mathcal{H}, \langle \mathcal{W}\cdot,\cdot\rangle)$ se denomina espacio de Hilbert con $\mathcal{W}$-métrica o simplemente $\mathcal{W}$-espacio, mostrándose la dinámica de los marcos de subespacios sobre estos espacios. Con dinámica se hace referencia al comportamiento de Marcos de subespacios en $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ (el comportamiento de $(\mathcal{H}, \langle \mathcal{W}\cdot,\cdot\rangle)$ comparando con $\mathcal{H}$ y viceversa. Basado en el estudio realizado por Primitivo Acosta, Esmeral Kevin, y Ferrer Osmin en *Frames of subspaces in Hilbert spaces with $\mathcal{W}$-metrics* [12].

4.1. Proyecciones Completas

Definición 4.1.1. *Sea $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Krein, considere $x, y \in \mathcal{K}$, se dice que x es ortogonal a y si $[x,y] = 0$, y se denota por $x \perp y$, se indica que x es J-ortogonal a y si $[x,y]_J = 0$, y se denota por $x[\perp]y$.*

Definición 4.1.2. *Un subespacio V de $\mathcal{K}$ tal que $V \cap V^{[\perp]} = \{0\}$ y $V + V^{[\perp]} = \mathcal{K}$, donde $V^{[\perp]}$ es el complemento ortogonal de V con respecto $[\cdot,\cdot]$ se llama proyección completa.*

Observación 4.1.3. A partir de ahora, los subespacios cerrados en este trabajo son proyecciones completas. Se denotaran por P_V y Q_V los proyectores ortogonales y J-ortogonales respectivamente sobre V. i.e., $P_V^{[*]} = P_V = P_V^2$ y $Q_V^{*J} = Q_V = Q_V^2$ respectivamente.

Por otra parte, en [17] se mostró que para cualquier subespacio cerrado V su complemento J-ortogonal $V^{[\perp]}$ y su complemento ortogonal $V^{\perp}$ son subespacios cerrados y están conectados mediante la formula:

i). $V^{[\perp]} = JV^{\perp}$

ii). $V^{\perp} = JV^{[\perp]}$

iii). $(JV)^{[\perp]} = JV^{[\perp]}$

Demostración. *i*). Sea $w \in V^{[\perp]}$, entonces $\forall\ v \in V\ :\ [w,v] = 0 \ \wedge\ w = JJw$, así tenemos que $[JJw, v] = 0\ \ \forall v \in V$, entonces $[Jw,v]_J = 0$, luego $w \in JV^{\perp}$, por lo tanto $V^{[\perp]} \subset JV^{\perp}$.

Sea $z \in JV^{\perp}$. entonces $\exists\, h \in V^{\perp} /\ z = Jh$ por consiguiente

$$[z,x] = [Jh,x] = [JJh,Jx] = [h,Jx] = [h,x]_J = 0$$

por lo tanto $JV^{\perp} \subset V^{[\perp]}$, de lo anterior se concluye que $V^{[\perp]} = JV^{\perp}$

ii) Sea $w \in V^{\perp}$, entonces $\forall v \in V : [w,v]_J = 0$, tenemos que $[Jw,v] = 0$. De este modo vemos que $w \in JV^{[\perp]}$.

En efecto $V^{\perp} \subset JV^{[\perp]}$. Sea $s \in JV^{[\perp]}$, luego si $\exists\, x \in V^{[\perp]} /\ s = Jx$, entonces

$$[s,y]_J = [Jx,y]_J = [JJx,y] = [x,y] = 0$$

por lo tanto $JV^{[\perp]} \subset V^{\perp}$.

Por todo lo anterior concluimos que $V^{\perp} = JV^{[\perp]}$ ■

por la observación 4.1.3 vemos que JV es una proyección completa si y solo si V es proyección completa. Además, la condición $V \bigcap V^{[\perp]} = \{0\}$ nos dice que cada $k \in \mathbb{R}$ tiene una única proyección $J-$ortogonal sobre V, ver [17].

Definición 4.1.4. *[17] Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein. Consideremos un conjunto de vectores $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{K}$, (donde I es un conjunto arbitrario de índices) es llamado sistema J-ortonormalizado si $[e_i, e_j] = \pm\delta_{i,j}$ para todos los $i, j \in I$, donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker.*

Ejemplo 4.1.5. El ejemplo más sencillo de un sistema J-ortonormalizado de $\mathcal{K}$ es la unión de dos sistemas arbitrarios ortonormalizados (en el sentido usual) de los subespacios $\mathcal{K}^{+}$ y $\mathcal{K}^{-}$ respectivamente.

Definición 4.1.6. *[17] Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein. Una base J-ortonormalizada en $\mathcal{K}$ es un sistema J-ortonormalizado los cuales son bases de (Schauder) en $\mathcal{K}$.*

Si $\mathcal{K}$ es considerado con el producto escalar y la norma generada (3.3), tenemos que $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ es un espacio de Hilbert. Sin embargo, el objetivo principal es el estudio de los operadores lineales sobre espacios de Krein, siendo la topología de este espacio importante para las cuestiones relacionadas con operadores continuos y acotados, la teoría espectral etc. Esta topología es generada por la J-norma dada en (3.3).

Por lo tanto, se plantean que algunas definiciones de la teoría de Operador en el espacio Hilbert se satisfacen. Además, si hablamos de la continuidad de los operadores, nos referimos a la topología generada con respecto a la J-norma. Por ejemplo

$$\mathscr{B}(\mathcal{K}) = \left\{ T : \mathcal{K} \to \mathcal{K} : \text{lineal y} \quad \|T\| = \sup_{x \in \mathcal{K}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_J}{\|x\|_J} < \infty \right\}.$$

El adjunto de un operador T en un espacio de Krein $\left(T^{[*]}\right)$ satisface $[T(x),y] = [x, T^{[*]}(y)]$, pero, debemos tener en cuenta que T tiene un operador adjunto en el espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ denotado $\left(T^{*J}\right)$, donde J es la simetría fundamental en $\mathcal{K}$, y hay una relación entre T^{*J} y $T^{[*]}$, que es $T^{[*]} = JT^{*J}J$. Por otra parte, sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ espacios de Krein con simetrías fundamental es $J_{\mathcal{K}}$ y $J_{\mathcal{K}'}$ respectivamente, si $T \in \mathscr{B}(\mathcal{K}, \mathcal{K}')$ entonces $T^{[*]\mathcal{K}} = J_{\mathcal{K}} T^{*J\mathcal{K}} J_{\mathcal{K}'}$. [Un operador

$T \in \mathscr{B}(\mathcal{K})$ se dice que es auto-adjunto si $T = T^{[*]}$, y $J-$auto$-$adjunto si $T = T^{*J}$, por otra parte, un operador lineal T se dice que es positivo si $[Tk,k] \geq 0$ para cada $k \in \mathcal{K}$. Un operador T se dice que es uniformemente positivo si existe $\alpha > 0$ tal que $[Tk,k] \geq \alpha |k|_J$ para cada $k \in \mathcal{K}$.

El siguiente resultado es muy importante para este trabajo, su prueba se sigue del mismo razonamiento que se aplica en casos de espacios de Hilbert.

Proposición 4.1.7. *Sean $\mathcal{K}$ y $\widetilde{\mathcal{K}}$ espacios de Krein con simetría fundamental $J, \widetilde{J}$ respectivamente. Considérese $V \subset \mathcal{K}$ es un subespacio cerrado con proyector $J-$ortogonal $Q_V : \mathcal{K} \to V$, y proyector ortogonal $P_V : \mathcal{K} \to V$. Sean $\mathcal{U} : \left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J\right) \to \left(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$ y $T : \mathcal{K} \to \widetilde{\mathcal{K}}$ operadores unitarios. Entonces se satisface que:*

i) $\mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} = P_{\mathcal{U} V}$

ii) $T Q_V T^{-1} = Q_{TV}$

donde $P_{\mathcal{U} V} : \widetilde{\mathcal{K}} \to \mathcal{U} V$ es el proyector ortogonal sobre $\mathcal{U} V$, y $Q_{TV} : \widetilde{\mathcal{K}} \to TV$ es el proyector $J-$ortogonal sobre TV. En particular, si $\mathcal{K} = \widetilde{\mathcal{K}}$ y $J = \widetilde{J}$, entonces

$$P_{JV} = J P_V J = P_V^{[*]}, \quad Q_{JV} = J Q_V J = Q_V^{*J}. \tag{4.1}$$

Demostración. i) Sean $x, y \in \widetilde{\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} x, y\right] &= \left[I \mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} x, y\right] = \left[\widetilde{J}\widetilde{J} \mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} x, y\right] = \left[\widetilde{J} \mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} x, y\right]_{\widetilde{J}} \\
&= \left[\mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} x, \widetilde{J} y\right]_{\widetilde{J}} = \left[P_V \mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}^{*\widetilde{J}} \widetilde{J} y\right]_{\widetilde{J}} = \left[\widetilde{J} P_V \mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}^{*\widetilde{J}} \widetilde{J} y\right] \\
&= \left[P_V \mathcal{U}^{-1} x, \widetilde{J} \mathcal{U}^{*\widetilde{J}} \widetilde{J} y\right] = \left[P_V \mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}^{[*]} y\right] = \left[P_V \mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}^{-1} y\right] \\
&= \left[P_V P_V \mathcal{U}^{-1} x, P_V \mathcal{U}^{-1} y\right] = \left[P_V^2 \mathcal{U}^{-1} x, P_V \mathcal{U}^{-1} y\right] = \left[P_V \mathcal{U}^{-1} x, P_V \mathcal{U}^{-1} y\right] \\
&= \left[\mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}^{-1} y\right] = \left[\mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}^{[*]} y\right] = \left[\mathcal{U}\, \mathcal{U}^{-1} x, \mathcal{U}\, \mathcal{U}^{[*]} y\right] = \left[\mathcal{U}\, \mathcal{U}^{-1} x, y\right] = [x, y] \\
&= \left[P_{\mathcal{U} V} x, P_{\mathcal{U} V} y\right] = \left[P_{\mathcal{U} V}^2 x, P_{\mathcal{U} V} y\right] = \left[P_{\mathcal{U} V} P_{\mathcal{U} V} x, P_{\mathcal{U} V} y\right] = \left[P_{\mathcal{U} V} x, y\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{U} P_V \mathcal{U}^{-1} = P_{\mathcal{U} V}$

ii) Sean $x, y \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
\left[T Q_V T^{-1} x, y\right]_J &= \left[Q_V T^{-1} x, T^{*J} y\right]_J = \left[Q_V Q_V T^{-1} x, Q_V T^{*J} y\right]_J = \left[Q_V T^{-1} x, Q_V T^{*J} y\right]_J \\
&= \left[T^{-1} x, T^{*J} y\right]_J = \left[T T^{-1} x, y\right]_J = [x, y]_J
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T Q_V T^{-1} = Q_{TV}$ ∎

Proposición 4.1.8. *Sean $\mathcal{K}$ un espacio de Krein, V un subespacio cerrado de $\mathcal{K}$, si $P_V : \mathcal{K} \to V$ es proyector ortogonal, entonces $P_{JV} P_V$ es un proyector J-ortogonal sobre V.*

Demostración. $P_{JV} P_V$ se encuentra bien definido en la observación 4.1.3 y desde $JV \subset V$, se satisface

$$\left[P_{JV} P_V x, y\right] = \left[P_V^{[*]} P_V x, y\right] = \left[P_V x, P_V y\right] = [x, y]$$

para todos $x, y \in V$. i.e., $P_{JV} P_V x = x, \ \forall x \in V$. Por otra parte, con observación 4.1.3 obtenemos

$$\left(P_{JV} P_V\right)^{[*]} = J P_{JV} P_V J = J P_{JV} \mathrm{I}\, P_V J = J P_{JV} J J P_V J = P_{JV}^{[*]} P_V^{[*]} = P_{JV} P_V$$

a partir de $JV \subset V$, tenemos que

$$\begin{aligned}(P_{JV}P_V)^2 &= P_{JV}P_VP_{JV}P_V = JP_VJP_VJP_VJP_V = JP_VP_V^{[*]}P_VJP_V = JP_VP_VP_VJP_V = JP_V^2P_VJP_V \\ &= JP_VP_VJP_V = JP_VJP_V = P_{JV}P_V\end{aligned}$$

A demás

$$[P_{JV}P_Vx, P_{JV}P_Vy] = [JP_VJP_Vx, JP_VJP_Vy] = \left[P_V^{[*]}P_Vx, P_V^{[*]}P_Vy\right] = [P_Vx, P_Vy] = [x, y]$$

■

4.2. Espacios de Hilbert con $\mathcal{W}$-métrica

Definición 4.2.1 ($\mathcal{W}$-métrica)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y la norma inducida $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, consideremos el operador $\mathcal{W} = \mathcal{W}^* \in \mathscr{B}(\mathfrak{H})$ con* ker $\mathcal{W} = \{0\}$. *La forma sesquilineal*

$$[\cdot,\cdot] = \langle W(\cdot),\cdot\rangle \tag{4.2}$$

define en $\mathcal{H}$ un producto interno indefinido llamado $\mathcal{W}-$métrica, o, $\mathcal{W}-$producto interno, este operador $(\mathcal{W})$ se llama operador Gram.

Proposición 4.2.2. *Un espacio de Hilbert con una $\mathcal{W}$-métrica es denso y puede ser integrado en un espacio de Krein $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ con simetría fundamental J.*

Observación 4.2.3 (*Consecuencias dadas por el operador Gram*)**.** Sea $\mathcal{W}$ el operador de Gram en $\mathcal{H}$.

i). Si $0 \in \rho(\mathcal{W})$, entonces

$$\|\mathcal{W}^{-1}\|^{-1}\|x\|^2 \leq \|x\|_J^2 \leq \|\mathcal{W}\|\,\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{4.3}$$

por consiguiente

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}} = \overline{(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J)}^{\|\cdot\|_J} = (\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J). \tag{4.4}$$

ii). Si $0 \in \sigma(\mathcal{W})$, entonces

$$\|x\|_J \leq \sqrt{\|\mathcal{W}\|}\,\|x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{4.5}$$

por lo tanto

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}} := \overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|_J}. \tag{4.6}$$

Definición 4.2.4. *Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. El espacio de Krein $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ se dice que es regular si el operador Gram $\mathcal{W}$ es tal que $0 \in \rho(\mathcal{W})$. De lo contrario de dice que es singular.*

Observación 4.2.5. Considere la descomposición polar de $\mathcal{W}$ dada por la fórmula

$$\mathcal{W} = J|\mathcal{W}|, \tag{4.7}$$

cuando el operador lineal $J : (\ker |\mathcal{W}|)^{\perp} = \overline{\text{Rang } |\mathcal{W}|} = \mathcal{H} \to \overline{\text{Rang } \mathcal{W}} = \mathcal{H}$ es una isometría parcial. Sin embargo, ker $J = \{0\}$, Por lo tanto J es un operador unitario.

Proposición 4.2.6. *Los operadores* $|\mathcal{W}|$, $\mathcal{W}$ *conmuta con* J, *donde* J *es tal que* (4.7) *es verdadera. También* $J = J^*$.

Demostración. Por las propiedades de la medida espectral tenemos que $\mathcal{W}|\mathcal{W}| = |\mathcal{W}|\,\mathcal{W}$. por lo tanto, $\big(J|\mathcal{W}| - |\mathcal{W}|J\big)|\mathcal{W}| = 0$. i.e $J|\mathcal{W}| = |\mathcal{W}|J$. Por otra parte, tenga en cuenta que $J|\mathcal{W}| = \mathcal{W} = \mathcal{W}^* = |\mathcal{W}|J^*$. Por lo tanto $|\mathcal{W}|(J - J^*) = 0$. i.e., $J = J^* = J^{-1}$, porque $\ker|\mathcal{W}| = \{0\}$. Dado que $J|\mathcal{W}| = |\mathcal{W}|J$, se tiene $J\mathcal{W} = J(J|\mathcal{W}|) = J\big(|\mathcal{W}|J\big) = J|\mathcal{W}|J = \mathcal{W}J$ ■

Definición 4.2.7. *El espacio* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *es un espacio de Krein con* J*-norma generada por el* J*-producto interno*

$$\left[x, y\right]_J = \left[Jx, y\right] = \langle \mathcal{W}Jx, y\rangle = \langle |\mathcal{W}|x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \tag{4.8}$$

donde J *es la simetría del espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *tal que* $\mathcal{W} = J|\mathcal{W}|$.

4.3. Marcos de Subespacios

En esta sección se presenta un método de estudio de subespacios en el contexto de espacios de Krein y espacios de Hilbert.

4.3.1. Marcos de Subespacios en Espacios de Hilbert

A continuación se consideran los marcos de subespacios en espacios de Hilbert. A partir de ahora consideramos I como un conjunto de índices, y definimos.

$$\ell_+^\infty(I) = \{(x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I) : x_i \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i \in I\}. \tag{4.9}$$

Definición 4.3.1 (*Marco de Subespacio*)**.** *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert con la norma* $\|\cdot\|$. *Si existe una familia* $\{V_i\}_{i\in I}$ *de subespacios cerrados de* $\mathcal{H}$ *se dice que es un marco de subespacios en espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *con respeto* $(x_i)_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$ (*denotado por* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$) *si existen constantes* $A, B > 0$ *tales que*

$$A\|y\|^2 \leq \sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{V_i} y\|^2 \leq B\|y\|^2, \ \forall y \in \mathcal{H} \tag{4.10}$$

siendo $P_{V_i} : \mathcal{H} \to V_i$ *proyectores ortogonales. Los números A y B se denominan límites del marco.*

4.3.2. Marcos de Subespacios en Espacios de Krein

En esta sección se considera marcos de subespacios en espacios Krein. Este trabajo se basa en las propiedades dadas a los espacios de Hilbert.

Definición 4.3.2 (*Marcos de Subespacios*)**.** *Sea* $\mathcal{K}$ *un espacio de Krein con simetría fundamental* J *y la* J*-norma* $\|\cdot\|_J$. *Si existe una familia* $\{V_i\}_{i\in I}$ *de subespacios cerrados de* $\mathcal{K}$ *con* $Q_{V_i} : \mathcal{K} \to V_i$ *sus respectivos proyectores ortogonales. Fijamos* $(x_i)_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$, *y decimos que* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacios en espacio Krein si existen constantes* $A, B > 0$ *tales que*

$$A\|k\|_J^2 \leq \sum_{i\in I} x_i^2 \|Q_{V_i} k\|_J^2 \leq B\|k\|_J^2, \ \forall k \in \mathcal{K}. \tag{4.11}$$

Observación 4.3.3. De acuerdo con la definición anterior y en la misma manera que en espacios de Hilbert, las constantes A y B son llamadas límites del marco. sea $A = B$, la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ se llama un marco de subespacio B-ajustado. En particular si $A = B = 1$, entonces la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$

es llamada marco Parseval de subespacio. La familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ se dice que es base ortonormal de subespacios cuando

$$\mathcal{K} = \bigoplus_{i\in I} V_i. \tag{4.12}$$

Por otra parte, llamaremos $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ un marco de subespacios x-*uniforme*, siempre que $x := x_i = x_j$ para todos $i, j \in I$. En caso de sólo tener límite superior, la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ sera también una *Sucesión de Bessel* de subespacios con límite B para la *sucesión de Bessel*.

Teorema 4.3.4 (*Equivalencias de los marcos de subespacios*)**.** *Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Krein con simetría fundamental J. Consideremos una familia de subespacios cerrados $\{V_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{K}$ tal que $P_{V_i} : \mathcal{K} \to V_i$ su proyección ortogonal respectivamente (con respecto a $[\cdot,\cdot]_J$). Fijando $(x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty_+(I)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i). $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio de $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\right)$ con límites del marco A, B;

ii). $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio de $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\right)$ con límites del marco A, B;

iii). $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio de $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J\right)$ con límites del marco A, B;

iv). $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio en espacios de Hilbert $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J\right)$ con límites del marco A, B.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Como $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio de $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\right)$ con límites del marco A, B entonces se tiene que

$A\|k\|_J^2 \le \sum_{i\in I} x_i^2 \|Q_{V_i} k\|_J^2 \le B\|k\|_J^2, \quad \forall\, k \in \mathcal{K}$. Luego

$$\|Q_{V_i} k\|_J^2 = \|JJQ_{V_i} JJk\|_J^2 = \|JQ_{JV_i} Jk\|_J^2 = \|Q_{JV_i} Jk\|_J^2$$

Por lo tanto

$$A\|k\|_J^2 = A\|Jk\|_J^2 \le \sum_{i\in I} x_i^2 \|Q_{V_i} k\|_J^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 \|Q_{JV_i} Jk\|_J^2 \le B\|Jk\|_J^2 = B\|k\|_J^2$$

Así $A\|Jk\|_J^2 \le \sum_{i\in I} x_i^2 \|Q_{JV_i} Jk\|_J^2 \le B\|Jk\|_J^2, \quad \forall\, k \in \mathcal{K}$, por lo tanto $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio de $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\right)$ con límites del marco A, B

$iii) \Rightarrow iv)$ El mismo razonamiento se aplica a $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$, junto con la Proposición 4.1.7, luego

$$\|P_{V_i} k\|_J^2 = \|JJP_{V_i} JJk\|_J^2 = \|JP_{JV_i} Jk\|_J^2 = \|P_{JV_i} Jk\|_J^2$$

entonces

$$A\|k\|_J^2 = A\|Jk\|_J^2 \le \sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{V_i} k\|_J^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{JV_i} Jk\|_J^2 \le B\|Jk\|_J^2 = B\|k\|_J^2$$

por consiguiente se tiene que $A\|k\|_J^2 \le \sum_{i\in I} x_i^2 \|Q_{JV_i} k\|_J^2 \le B\|k\|_J^2, \quad \forall\, k \in \mathcal{K}$, en efecto $\{x_i, JV_i\}_{i\in I}$ es un marco para $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J\right)$.

$i) \Rightarrow iv)$ se demuestra con la Proposición 4.1.8 de la siguiente manera: Dado P_{JV_i} y P_{V_i} proyectores ortogonales sobre JV_i y V_i, respectivamente, definimos $P_{V_i}P_{JV_i} = Q_{V_i}$, que es un proyector J-ortogonal en V_i. Así,

$$\begin{aligned}\left\|P_{V_i}k\right\|_J^2 &= \left\|P_{V_i}P_{V_i}k\right\|_J^2 = \left\|JJP_{V_i}JJP_{V_i}JJk\right\|_J^2 = \left\|JP_{JV_i}P_{V_i}^{[*]}Jk\right\|_J^2 = \left\|JP_{JV_i}P_{V_i}Jk\right\|_J^2 \\ &= \left\|P_{JV_i}P_{V_i}Jk\right\|_J^2 = \left\|Q_{V_i}Jk\right\|_J^2\end{aligned}$$

$iv) \to i)$ se deriva de

$$\begin{aligned}\left\|P_{V_i}Jk\right\|_J^2 = \left\|JP_{V_i}Jk\right\|_J^2 = \left\|JP_{V_i}^2Jk\right\|_J^2 &= \left\|JP_{V_i}P_{V_i}Jk\right\|_J^2 \\ &= \left\|JP_{V_i}JJP_{V_i}Jk\right\|_J^2 \\ &= \left\|P_{JV_i}P_{V_i}^*Jk\right\|_J^2 \\ &= \left\|P_{JV_i}P_{V_i}Jk\right\|_J^2 = \left\|Q_{V_i}k\right\|_J^2\end{aligned}$$

■

Proposición 4.3.5. *Fijamos* $\{x_i\}_{i\in I} \in \ell_+^\infty(I)$. *Consideramos una partición* $\{J_i\}_{i\in I}$ *de* I *tal que* $I = \bigsqcup_{i\in I} J_i$ *y* $\{k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ *un marco para espacio de Krein* $\mathcal{K}$ *con límites* $A_i, B_i > 0$. *Definimos* $V_i = span_{j\in J_i}\{k_{i,j}\}$ *para todo* $i \in I$. *Supongamos que* $0 < A = \inf_{i\in I} A_i \leq B = \sup_{i\in I} B_i$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

$i)$. $\{x_i k_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ *es marco para espacio de Krein en* $\mathcal{K}$.

$ii)$. $\{x_i e_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ *es marco para espacio de Krein en* $\mathcal{K}$.

$iii)$. $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es marco de subespacio para espacio de Krein en* $\mathcal{K}$.

Demostración. Dado que para cada $i \in I$, $\{k_{i,j}\}_{j\in J_i}$ es un marco para V_i con cotas del marco A_i y B_i se obtiene

$$\begin{aligned}A\sum_{i\in I} x_i^2 \left\|\pi V_i k\right\|^2 \leq \sum_{i\in I} A_i x_i^2 \left\|\pi V_i k\right\|^2 &\leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \left|[\pi V_i k, x_i k_{ij}]\right|^2 \\ &\leq \sum_{i\in I} B_i x_i^2 \left\|\pi V_i k\right\|^2 \leq B\sum_{i\in I} x_i^2 \left\|\pi V_i k\right\|^2.\end{aligned}$$

Ahora observamos que

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \left|[\pi V_i k, x_i k_{ij}]\right|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \left|[k, x_i k_{ij}]\right|^2.$$

Esto demuestra que $\{x_i k_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es marco para $\mathcal{K}$ con límites C y D, el conjunto $\{V_i\}_{i\in I}$ es el vértice de un marco de subespacios respecto a $\{x_i\}_{i\in I}$ para $\mathcal{K}$ con límites del marco $\frac{C}{B}$ y $\frac{D}{A}$. Por otra parte, si $\{V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios con respecto a $\{x_i\}_{i\in I}$ con límites del marco C y D, el cálculo anterior implica que $\{x_i k_{i,j}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para $\mathcal{K}$ con límites del marco AC y BD. por lo tanto $i)$ implica a $ii)$.

Para demostrar la equivalencia de $ii)$ y $iii)$, observamos que en realidad podemos calcular las proyecciones ortogonales de la siguiente manera

$$x_i^2 \left\| \pi V_i k \right\|^2 = \left\| \sum_{j \in j_i} \left[k, e_{ij} \right] e_{ij} \right\|^2 = \sum_{j \in j_i} \left| \left[k, x_i e_{ij} \right] \right|^2$$

■

Proposición 4.3.6. *Sean $\mathcal{K}$ y $\widetilde{\mathcal{K}}$ espacios Krein con simetrías fundamentales J y $\widetilde{J}$ respectivamente. Consideremos $U : \left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J\right) \to \left(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$ es un operador invertible. La familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para el espacio de Hilbert $\left(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J\right)$ si y solamente si $\{x_i, UV_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para el espacio de Hilbert $\left(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{J}}\right)$.*

Demostración. Por la proposición 4.1.7 obtenemos

$$\sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{V_i} k\|_J^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 \|U^{-1} P_{UV_i} U k\|_J^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{UV_i} U k\|_{\widetilde{J}}^2.$$

Por lo tanto, la equivalencia es inmediata. ■

4.4. Marcos de Subespacios en espacios de Hilbert con $\mathcal{W}$-métrica

En [15] se demuestra que el comportamiento de la estructura en el espacio de Hilbert con $\mathcal{W}$-métrica es en función de las propiedades $0 \in \rho(\mathcal{W})$ o $0 \in \sigma(\mathcal{W})$. Luego estudiamos los marcos de subespacios en estos espacios.

4.4.1. Marcos de Subespacios en Espacios de Krein Regulares

Teorema 4.4.1. *Sea $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ y $V_i \subset \mathcal{H}$ para todo $i \in I$ un espacio de Krein regular y un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ respectivamente. la familia $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacios para los espacios de Hilbert $\left(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ si y solo si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para un espacios de Krein regular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ es un espacio de Krein regular, entonces la desigualdad (4.3) Está satisfecha. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}^{-1}\|^{-1} \sum_{i\in I} x_i^2 \left\| P_{V_i} k \right\|^2 \leq \sum_{i\in I} x_i^2 \left\| P_{V_i} k \right\|_J^2 = \sum_{i\in I} x_i^2 \left| [P_{V_i} k, P_{V_i} k]_J \right| \\ \leq \|\mathcal{W}\| \sum_{i\in I} x_i^2 \left\| P_{V_i} k \right\|^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\Rightarrow$] Supongamos que $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para espacio de Hilbert $\left(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ con límites del marco A, B, entonces, por la desigualdad (4.13) obtenemos que $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para espacio de Hilbert $\left(\mathcal{H}_J, [\cdot,\cdot]_J\right)$ con límites del marco $A' = \|\mathcal{W}^{-1}\|^{-1} A$ y $B' = \|\mathcal{W}\| B$. por el teorema 4.3.4 decimos $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para espacio de Krein regular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$.

[$\Leftarrow$ es análoga a la prueba anterior. ■

4.4.2. Marcos de Subespacios en Espacio de Krein singular

Teorema 4.4.2. *Sea $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ y $V_i \subset \mathcal{H}$ para todo $i \in I$ un espacio de Krein regular y un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ respectivamente. Si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ no es marco de subespacio para espacio Krein singular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$.*

Demostración. puesto que $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ es un espacio de Krein singular, entonces $0 \in \sigma_c(\mathcal{W})$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, la medida espectral $\mathcal{E}_\lambda$ tal que $\mathcal{W} = \int_{\sigma(\mathcal{W})} \lambda\, d\mathcal{E}_\lambda$ satisface $\mathcal{E}_\lambda((0,\varepsilon]) \neq 0$. pero $(0,\varepsilon] = \bigcup_{i\in I}\left[\frac{\varepsilon}{n}, \varepsilon\right]$, por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_\lambda\left(\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]\right) \neq 0$. Ahora, se asume $f \in \mathcal{E}_\lambda\left(\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]\right)\mathcal{H} \cap V_j$ para algún $j \in I$ tal que $|f| = 1$ y $|f|_J \le 1$ (ya que $|f|_J \le \|\sqrt{|\mathcal{W}|}\|\|f\|$). De esta manera, si $M = \sup_{j\in I} x_j$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{V_i} f\|_J^2 = x_j^2 \|\sqrt{|\mathcal{W}|}f\|^2 &\le A^{-1} x_j^2 \sum_{i\in I} x_i^2 \|P_{V_i}\sqrt{|\mathcal{W}|}f\|^2 \\
&\le A^{-1}BM^2 \left\langle \left(\int_{\sigma(\mathcal{W})} |\lambda|\, d\mathcal{E}_\lambda\right) \mathcal{E}_\lambda\left(\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]\right) f, f \right\rangle \\
&= A^{-1}BM^2 \int_{\sigma(\mathcal{W})} |\lambda| \chi_{\left[\frac{\varepsilon}{n_0}, \varepsilon\right]}(\lambda)\, d(\mathcal{E}_\lambda)_{f,f} \\
&\le \varepsilon B A^{-1} M^2 \langle \mathcal{E}_\lambda(\sigma(\mathcal{W})) f, f\rangle \\
&= A^{-1}BM^2 \varepsilon \|f\|^2 = A^{-1}BM^2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para $\varepsilon \to 0$,

$$
\inf_{|f|_J \le 1} \left(\sum_{i\in I} x_i^2 \left\| P_{V_i} f \right\|_J^2\right) = 0. \tag{4.14}
$$

Ahora, si $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ es un marco de subespacio para espacio Krein singular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ con límites el marco $C, D > 0$, entonces dado f por lo anterior, por el teorema 4.3.4 y de la igualdad (4.14) se concluye que $C = 0$, lo cual es una contradicción. Es decir, $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ no es marco de subespacio para espacio Krein singular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$. ■

Observación 4.4.3. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con una $\mathcal{W}$-métrica arbitrario, puede incorporarse en en un espacio de Krein denso $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$, obsérvese que si el espacio de Krein $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ es regular, entonces los marcos de subespacios son transferibles de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$. Esto sucede porque $\left(\mathcal{H}_{\mathcal{W}}, [\cdot,\cdot]_J\right) = \left(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J\right)$. Es decir, en $\mathcal{H}$ cambiamos la norma ($\|\cdot\| \rightsquigarrow \|\cdot\|_J$), los marcos de subespacio no son transferibles, porque la propiedad de $0 \in \sigma(\mathcal{W})$ tiene una fuerte influencia. De ahí, tenemos que encontrar una manera de ampliar los marcos de subespacio para espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ al espacio Krein singular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$.

Una forma de ampliar el marco de subespacio de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ a un espacio de Krein regular $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ se hace de la siguiente manera.

Teorema 4.4.4. *[7] Sea $\mathcal{W} : dom(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $0 \notin spec(\mathcal{W})$. Entonces*

i) $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *puede ser identificado con* $dom(\sqrt{|\mathcal{W}|}) \subset \mathcal{H}$.

ii) $\sqrt{|\mathcal{W}|} :\ dom(\sqrt{|\mathcal{W}|}) = \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathcal{H}$ *es un operador unitario.*

iii) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *es un marco para el espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *con cotas de marco* $A \leq B$ *si y solo si* $\left\{\sqrt{|\mathcal{W}|^{-1}k_n}_{n\in\mathbb{N}}\right\} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *es un marco para el espacio de Krein* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *con cotas de marco* $A \leq B$.

Demostración. Para la prueba de i), vamos a utilizar el hecho de que un operador lineal densamente definido T está cerrado si y sólo si su dominio está cerrado con respecto a la norma gráfico $(\|\cdot\|^2 + \left\|T(\cdot)\right\|^2)^{1/2}$ [6, Teorema 5.1]. Como por supuesto $0 \notin spec(\mathcal{W})$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $|\mathcal{W}| \geq \epsilon$. Por lo tanto, para todo $h \in dom(\mathcal{W})$, tenemos $\langle h, |\mathcal{W}|h\rangle \geq \epsilon\langle h, h\rangle$. Hay que recordar que $\| h \|_J^2 = \langle h, |\mathcal{W}|h\rangle = \| \sqrt{|\mathcal{W}|}h \|^2$ para todo $h \in dom(\mathcal{W})$. Así

$$\| h \|_J^2 = \| \sqrt{|\mathcal{W}|}h \|^2 \leq \| h \|^2 + \| \sqrt{|\mathcal{W}|}h \|^2 \leq (\epsilon^{-1} + 1) \| \sqrt{|\mathcal{W}|}h \|^2 = (\epsilon^{-1} + 1) \| h \|_{J^2},$$

por lo tanto, la J-norma $\|\cdot\|_J$ y la norma gráfica de $\sqrt{|\mathcal{W}|}$ son equivalentes en su dominio común de definición. Como se ha comentado anteriormente, $dom(\sqrt{|\mathcal{W}|})$ está cerrado con respecto a la norma gráfica puesto un operador autoadjunto siempre es cerrado. A partir de la equivalencia de las normas sobre el subespacio denso $dom(\mathcal{W}) \subset dom(\sqrt{|\mathcal{W}|})$, se deduce que $dom(\sqrt{|\mathcal{W}|})$ está cerrado con respecto a (la extensión de) la norma $\|\cdot\|_J$. Tomando el cierra de $dom(\mathcal{W})$ nos permite por lo tanto, identificar a $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ con $dom(\sqrt{|\mathcal{W}|})$. Para mostrar ii), note que $\sqrt{|\mathcal{W}|}$ tiene un inverso acotado $\sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow dom(\sqrt{|\mathcal{W}|})$ ya que $0 \notin spec(\mathcal{W})$. A partir de

$$\left[\sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1}h, \sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1}h\right]_J = \left\langle \sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1}h, |\mathcal{W}|\sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1}h\right\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$$

para todo $h \in dom(\sqrt{|\mathcal{W}|})$, concluimos que $\sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1}$ y por lo tanto $\sqrt{|\mathcal{W}|}$ son unitarios. Ahora iii) se desprende de la unicidad de $\sqrt{|\mathcal{W}|}^{-1}$ (ver Teorema 4.2 de [7]). ■

Teorema 4.4.5. *Sea* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *un marco en espacio de Krein singular. Hay un operador invertible* $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *tal que:*

- $i)$. *Si* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es un marco de subespacio para espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$*, entonces* $\{x_i, \mathcal{U}\, V_i\}_{i\in I}$ *es marco de subespacio para espacio de Krein singular* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$.

- $ii)$. *Si* $\{x_i, V_i\}_{i\in I}$ *es marco de subespacio para espacio de Krein singular* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$*. Espacio de Krein* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$*, entonces* $\{x_i, \mathcal{U}^{-1}V_i\}_{i\in I}$ *es marco para espacio de Hilbert* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Demostración. Por el Teorema 4.4.4 se demuestra que el operador $\sqrt{|\mathcal{W}|} : \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{W}} \to \mathcal{H}$, satisface

$$\left\|\sqrt{|\mathcal{W}|}k\right\|^2 = \langle\sqrt{|\mathcal{W}|}k, \sqrt{|\mathcal{W}|}k\rangle = \langle|\mathcal{W}|k, k\rangle = \|k\|_J^2.$$

Es decir, $\sqrt{|\mathcal{W}|} \in \mathscr{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{\mathcal{W}})$ es una isometría. Por lo tanto, la isometría tiene una extensión unitaria de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$, se denota $\widehat{\sqrt{|\mathcal{W}|}}$. Luego, considerando $\mathcal{U} = \widehat{\sqrt{|\mathcal{W}|}}$, Las implicaciones $i)$ y $ii)$ se cumple inmediatamente con la ayuda de los teoremas 4.3.4 y 4.3.6. ■

Proposición 4.4.6. *(Forma del Teorema Espectral y Operador Multiplicador) Sea A un operador autoadjunto acotado en* $\mathcal{H}$*, un espacio de Hilbert separable. Entonces,*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \mathcal{H}_{\psi_n}, \tag{4.15}$$

y existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}(N = 1,2,...or\,\infty)$ *en* $\sigma(A)$ *y un operador unitario*

$$T : \mathcal{H}_{\psi_n} \to L_2(\sigma(A), d\mu_n) \tag{4.16}$$

de modo que $\left(TAT^{-1}\psi\right)_n(\lambda) = \lambda\psi_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *en el que escribimos un elemento* $\psi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L_2(\sigma(A), d\mu_n)$ *como un* N*-tuple* $\big(\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \ldots, \psi_N(\lambda)\big)$.

En la proposición anterior, A es denominada una *representación espectral*, lo que conlleva al siguiente resultado.

Teorema 4.4.7. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert separable, Donde* $\mathcal{W}$ *se define como el operador Gram en* $\mathcal{H}$ *tal que* $0 \in \sigma(\mathcal{W})$. *Entonces el espacio de Krein* $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ *tiene una base ortonormal de subespacios.*

Demostración. Observe que el operador de Gram $\mathcal{W}$ es auto-adjunto, entonces por la proposición 4.4.6 tenemos (4.15) y existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}(N = 1,2,...\text{or}\ \infty)$ en $\sigma(A)$ tal que $\mathcal{H}_{\psi_n} \simeq L_2(\sigma(\mathcal{W}), d\mu_n)$. Por lo tanto $\{\{1\}, \mathcal{H}_{\psi_n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es un marco de subespacio para espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ con limites del marco 1. En efecto, $\{\mathcal{H}_{\psi_n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ por (4.15) es una base ortonormal de subespacios de $\mathcal{H}$. Por el Teorema 4.4.5 decimos que $\{\{1\}, \mathcal{U}\,\mathcal{H}_{\psi_n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es un marco de subespacio Parceval del espacio singular Krein $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$. En efecto $\{\{1\}, \mathcal{U}\,\mathcal{H}_{\psi_n}\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ es una base ortonormal del subespacio de $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \mathcal{U}\,\mathcal{H}_{\psi_n}. \tag{4.17}$$

■

Observación 4.4.8. Si $0 \notin \sigma(\mathcal{W})$ se obtiene por (4.4) entonces

$$\mathcal{H}_{\mathcal{W}} = \big(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_J\big) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \big(\mathcal{H}_{\psi_n}, [\cdot,\cdot]_J\big). \tag{4.18}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] H. DEGUANG, K. KORNELSON, D. LARSON , E. WEBER, *Frames for undergraduates*, Student Mathematical Library, A.M.S Providence, 2007.

[2] I. DAUBECHIES, A. GROSSMANN, Y. MEYER, *Painless nonorthogonal expansions*, *J. Math. Phys.* **27** (1986), 1271–1283.

[3] IS. IOKHVIDOV, M.G. KREIN, H. LAGER, *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an inderinite metric*. Mathemtics Research, Wol.9. Belin:Akademie-Verlag.41. 1982.

[4] J. BOGNAR, *Indefinite inner product spaces*. Springer, Berlin, 1974.

[5] J. I. GIRIBET, A. MAESTRIPIERI, F. MARTÍNEZ PERÍA AND P. MASSEY, ON A FAMILY OF FRAMES FOR KREIN SPACES, arXiv:1112.1632v1.

[6] J. WEIDMANN, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, New York, 1980.

[7] K. ESMERAL, O. FERRER, E. WAGNER, *Frames in Krein spaces arising from a non-regular W-metric*, *Banach J. Math.*, Vol.9, number 1, 2015

[8] M. REED, S. BARRY, *Methods of modern mathematical physics, vol. I: Functional Analysis*. Academic Press. 1972.

[9] N. AKHIEZER, I.S. GLAZMAN, *Theory of linear operators in Hilbert space*. Transl. from the Russian. Dover Publications New York, 1993.

[10] O. CHRISTENSEN, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[11] O. CHRISTENSEN, T. K. JENSEN, *An introduction to the theory of bases, frames, and wavelets*. Technical University of Denmark, Department of Mathemtics, 1999.

[12] P. ACOSTA, K. ESMERAL, O. FERRER, *Frames of subspaces in Hilbert spaces with W-metrics*, `arxiv, 1309.1219`.

[13] P. G. CASAZZA, K. GITTA.,Frames of subspaces, *Contemporary Mathematics*, preprint.

[14] P. G. CASAZZA, O. CHRISTENSEN, *Weyl Heisenberg Frames for subspaces of $L_2(\mathbb{R})$*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 145-154.

[15] P. G. Casazza and M. Leon, *Existence and Construction of Finite Frames with a Given Frame Operator*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 63, No. 2 (2010), p. 149 - 158.

[16] R. J. DUFFIN, A. C. SCHAEFFER, *A class of nonharmonic Fourier series*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 341–366.

[17] T. YA. AZIZOV, I. S. IOKHVIDOV, *Linear operators in Hilbert spaces with G-metric. Russ. Math. Surv.* **26** (1971), 45–97.

[18] T. YA. AZIZOV AND I. S. IOKHVIDOV , *Linear operator in spaces with an indefinite metric.* Pure & Applied Mathematics, A Wiley-Intersciences, Chichester, 1989.

[19] W. RUDIN, *Functional analysis* . McGraw-Hill, New York, 1973.