Universidad Surcolombiana

Licenciatura en Matemáticas

Facultad de Educación

Funciones

Trabajo de grado

para optar por título de

Licenciado en Matemáticas

Presentan

Juan Carlos Sánchez Ruíz

&

María Alejandrina Arcila Aldana

Asesor

Magister Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, junio de 2014

Nota de aceptación

Jefe de Programa: Ricardo Cedeño Tovar

Director: Ricardo Cedeño Tovar

Segundo Lector: Hernando Gutiérrez Hoyos

Agradecimientos

Es en momentos como éste cuando tras terminar una etapa y un proceso tan importante de nuestras vidas miramos en retrospectiva y nos damos cuenta de que este logro no ha sido únicamente nuestro. Podemos decir con gran alegría y satisfacción que no hemos estado solos y son estas líneas un pequeño espacio para hacer mención a aquellos que creyeron y nos apoyaron en este trabajo y que seguramente hoy están celebrando con nosotros la consecución de esta meta.

Queremos agradecer a nuestros padres, hermanos y en general a nuestras familias por su constante acompañamiento, sus palabras de aliento y sus esfuerzos para que no decayéramos en este empeño. A nuestros compañeros que también se convirtieron en nuestros amigos y que nos demostraron la validez de la premisa de que un viaje es mejor si se hace en compañía. A nuestros profesores por su maravillosa dedicación a la noble tarea de formar no sólo profesionales sino ciudadanos comprometidos con la sociedad y el futuro de nuestra región y país en general.

Finalmente queremos agradecerle con antelación a las instituciones educativas y futuros alumnos que nos darán la oportunidad de entregarles el fruto de este esfuerzo representado en forma de conocimientos y valores que hemos adquirido con el propósito de poder poner un granito de arena en la formación de las nuevas generaciones y por tanto, en la construcción de futuro.

Prefacio

El presente trabajo de grado titulado **Funciones** pretende ser una herramienta de apoyo en la preparación de estudiantes para algunas pruebas de tipo académico que involucren conocimientos y aptitudes matemáticas, más concretamente en lo que ha sido denominado según los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional como el *pensamiento variacional*.

En tal sentido, se hace una revisión de algunos exámenes de admisión para pregrado de la Universidad Nacional de Colombia y examina, dentro de las preguntas matemáticas, cuáles involucran de manera directa la evaluación de cómo los estudiantes manejan este tipo de pensamiento y los respectivos conocimientos que relaciona. A estas preguntas se les hará un seguimiento con el propósito de abarcar la teoría que en éstas subyace así como refinar el análisis que sobre el estudio del cambio puede hacerse en situaciones muy concretas como las que se preguntan en dichos exámenes.

Este trabajo es pues una mirada a las funciones desde el punto de vista de la evaluación de cómo los estudiantes que terminan su secundaria han de manejar, de manera apropiada, conceptos y aptitudes sobre el mundo de los cambios y variaciones.

Hay que resaltar adicionalmente que los dos primeros cursos de la línea principal del programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana (*Fundamentos de Matemáticas* y *Cálculo Diferencial*) involucran de manera directa el manejo de funciones.

Juan Carlos Sánchez Ruíz
María Alejandrina Arcila Aldana
Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Índice general

Parte I

Preliminares

En este apartado se presenta una introducción al trabajo de grado así como un referente teórico necesario para desarrollar las diferentes pruebas de ingreso a la UNAL en lo referente a funciones matemáticas.

Capítulo 1

Introducción

La Universidad Nacional de Colombia es la institución de Educación Superior más importante del País. Es un ente público de orden nacional fundado en 1867 y además de Bogotá posee sedes en otras ciudades del país para una población estudiantil total de alrededor de cincuenta mil estudiantes de pregrado y posgrado. La Universidad Nacional (UNAL) es la Institución de Educación Superior que ocupa el mayor número de veces el primer puesto en el país en la mayoría de las listas nacionales e internacionales de clasificación académica[1], lo que estadísticamente la convierte en la mejor y más prestigiosa universidad en Colombia.

En el pregrado el criterio de ingreso está dado exclusivamente por el desempeño en el *examen de admisión* (no se tiene en cuenta el puntaje del ICFES) en el cual se evalúan cinco áreas: matemáticas, ciencias naturales, ciencias sociales, análisis textual, y análisis de imágenes. En el caso concreto de las matemáticas se evalúan todos los pensamientos planteados en los estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional y entre esos el *pensamiento variacional* el cual no es otra cosa que el análisis del cambio y las relaciones entre cantidades que varían. Esto involucra el tema de funciones matemáticas que es hacia donde va dirigido este trabajo.

Las funciones matemáticas son expresiones analíticas del cambio que bien puede ser apreciado en situaciones cotidianas o extraído de complejos procesos de las más diversas áreas del conocimiento (matemáticas, física, química, economía, etc.) y de ahí la importancia de su estudio.

La UNAL a través de su prueba de admisión de pregrado busca determinar, entre otras cosas, cómo los estudiantes aspirantes han asimilado durante su educación básica y media los conceptos que sobre funciones han recibido y cómo han desarrollado las competencias necesarias para distinguir y resolver situaciones problémicas en torno al cambio.

[1]Consejo Nacional de Acreditación, Reputación académica QS World University Rankings, Sapiens Research, SCImago Journal & Country Rank, Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

En este trabajo se examina entonces cómo y qué tanto se evalúan los conocimientos que sobre funciones son necesarios para iniciar la educación superior en Colombia, más concretamente en la Universidad Nacional.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Generalidades

EL CONCEPTO DE función[1] es esencialmente el siguiente: Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y. El conjunto X se denomina el *dominio* de la función. Los objetos de Y, asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el *recorrido* de la función (Este puede ser todo el conjunto Y, pero no es necesario). Al conjunto Y se le conoce como *codominio* o *contradominio* de la función[2].

En matemática elemental tiene interés considerar en primer lugar, aquellas funciones en las que el dominio y el recorrido son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman *funciones de variable real* o más brevemente *funciones reales* y se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano xy. Se representa el dominio X en el eje x, y a partir de cada punto x de X se representa el punto (x, y) donde $y = f(x)$. La totalidad de puntos (x, y) se denomina la *gráfica* de la función.

De acuerdo a lo dicho anteriormente podemos formalizar lo siguiente:

Definición 2.1.1 (Función)**.** Una **función** f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.

Las siguientes definiciones ayudan a complementar el estudio de las funciones y por tanto resultarán útiles durante el desarrollo de este trabajo:

Definición 2.1.2 (Función inyectiva)**.** Una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** cuando se cumple alguna de las dos afirmaciones equivalentes:

[1] **Gottfried Leibnitz** (1646 – 1716) fue el primero en introducir el término *función* como dependencia de dos cantidades variables.

[2] Suele también llamárselo también “conjunto final” o “conjunto de llegada de la función”.

- Si a, b son elementos de X tales que $f(a) = f(b)$, necesariamente se cumple que $a = b$.
- Si a, b son elementos diferentes de X, necesariamente se cumple que $f(a) \neq f(b)$.

Definición 2.1.3 (Función sobreyectiva)**.** Una función $f : X \to Y$, es **sobreyectiva** si está aplicada sobre todo el codominio, es decir, cuando cada elemento de Y es la imagen de como mínimo un elemento de X.

Definición 2.1.4 (Función biyectiva)**.** Una función es **biyectiva** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida (esto es, X) tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada (el conjunto Y), y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.

Teorema 2.1.5. *Si f es una función real biyectiva, entonces su función inversa*[3] *f^{-1} existe y también es biyectiva.*

Definición 2.1.6 (Función par y función impar)**.**

(i) Una función f es una función **par** si para cada x del dominio de X se cumple que $f(-x) = f(x)$. Es de anotar que si $x \in X$ entonces $-x \in X$, es decir, el conjunto X es simétrico respecto al origen.

(ii) Una función f es una función **impar** si para cada x del dominio de X se cumple que $f(-x) = -f(x)$. El conjunto X es simétrico respecto al cero.

Definición 2.1.7. Dadas las funciones $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$, entonces:

(i) su **suma**, denotada por $f + g$, es la función definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para $x \in X$.

(ii) su **diferencia**, denotada por $f - g$, es la función definida por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, para $x \in X$.

(iii) su **producto**, denotado por $f \cdot g$, es la función definida por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para $x \in X$.

(iv) su **cociente**, denotado por f/g, es la función definida por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, para $x \in X$ con $g(x) \neq 0$.

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, con el requerimiento adicional en el caso (iv) de que se excluyan los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

Definición 2.1.8 (Composición de funciones)**.** Dadas dos funciones $f : Y \to Z$ y $g : X \to Y$, la **función compuesta**, denotada por $f \circ g$, está definida por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, y su dominio es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

[3] Si $f : X \to Y$ entonces su inversa, de existir, sería una función $f^{-1} : Y \to X$ tal que $f^{-1}(y) = x$.

2.2. Tipos de funciones reales

Como bien se mencionó con anterioridad, en matemáticas y en particular para los propósitos de este trabajo, sólo abarcaremos funciones reales, esto es $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Para propósitos generales las funciones reales se clasifican el *algebraicas* y *trascendentes*.

2.2.1. Funciones algebraicas

En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Algunos ejemplos de este tipo de funciones son:

Polinómicas. Son aquellas de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

La expresión anterior se conoce como *polinomio de grado n* y cada término a_i corresponde a un número real. Si $n = 0$ entonces f se llamará *función constante*; si $n = 1$ entonces f se llamará *función lineal*[4]; si $n = 2$ entonces f será *cuadrática*; si $n = 3$ entonces f será *cúbica*; y, de aquí en adelante simplemente *función polinómica de grado n*.

A título de ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7$ es una función polinómica de grado 2 o simplemente una función cuadrática.

Racionales. Son cocientes entre dos funciones polinómicas. Estas funciones se obtienen al dividir una función polinomial por otra, no idénticamente nula; esto es, si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios (con $Q(x) \neq 0$) entonces la función $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional.

Radicales. Una función de la forma $f(x) = \sqrt[n]{x}$ donde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ se conoce como función radical.

[4] Las funciones lineales usualmente se escriben de la forma $y = mx + b$ siendo m la *pendiente* (medida de la inclinación de la recta) y b el *intercepto* (o punto de corte con el eje y.)

2.2.2. Funciones trascendentes

Una función que no es algebraica es trascendente, en otras palabras, es una función que trasciende al álgebra en el sentido que no puede ser expresada en términos de una secuencia finita de operaciones algebraicas de suma, resta y extracción de raíces.

Son ejemplos de este tipo de funciones:

Exponenciales. Una función de la forma $f(x) = k^x$ con $k \in \mathbb{R}^+$, $k \neq 1$ se conoce como función exponencial. Un caso muy especial corresponde cuando $k = e \approx 2.718281828459045$ (*número de Euler*) debido a su enorme potencial en matemáticas aplicadas.

Logarítmicas. Una función de este tipo corresponde a aquella de la forma $f(x) = \log_b x$ donde $b \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$. El caso particular cuando $b = e$, esto es, $f(x) = \log_e x$ se conoce como la función *logaritmo natural* (usualmente abreviada como $f(x) = \ln x$)[5], y cuando $b = 10$, esto es, $f(x) = \log_{10} x$, se conoce como la función *logaritmo vulgar* y se nota $f(x) = \log x$.

Trigonométricas. Son aquellas definidas a partir de las razones trigonométricas[6] (seno, coseno, tangente, etc).

2.2.3. Otras consideraciones importantes sobre las funciones reales

Resulta útil aclarar que las funciones antes mencionadas no son las únicas existentes, sin embargo, sí son las más comunes y por tanto las más estudiadas a nivel de educación básica, media y universitaria.

Conviene también mencionar que existen algunas funciones que se definen de manera especial y que su estudio también se incluye dentro de las temáticas relacionadas con funciones en los niveles académicos antes mencionados. Tenemos entre estas a las funciones:

Parte entera. Si x es un número real arbitrario, entonces existe un entero n único que verifica las desigualdades $n \leq x < n + 1$. Este n se denomina la *parte entera de x* y se designa por $[x]$. Por ejemplo, $[5] = 5$, $[5/2] = 2$, $[-8/3] = -3$. A la función $f(x) = [x]$ se le conoce como *función parte entera* y formalmente se expresa como $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$.

[5]Por definición se tiene que $\log_b a = c$ si y sólo si $b^c = a$.

[6]Una razón trigonométrica es el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo asociado a sus ángulos. De este tipo de funciones no puntualizaremos por ser un tema en extremo extenso.

Definida a trozos. Es una función cuya definición o regla de correspondencia cambia dependiendo del valor de la variable independiente. La función valor absoluto es en esencia una función de este tipo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Implícita. Una función que no se halle escrita de la forma $y = f(x)$ se dice que es una función escrita en *forma implícita*. Por ejemplo $y^5 - 2xy^2 + 1 = 0$ es una función de este tipo (la variable dependiente no está despejada respecto a la variable independiente).

2.3. Las funciones como modelos matemáticos

Las funciones se constituyen en una herramienta muy valiosa a la hora de modelar situaciones con el propósito de explicar, simular y predecir resultados para problemas o fenómenos extraídos bien sea del entorno físico (movimientos, fuerzas, reacciones químicas, etc.) o de la actividad humana (flujos de dineros, administración de recursos, entre otros).

Las funciones al relacionar variables entre sí permiten cuantificar cambios, establecer patrones y diseñar modelos razonables del mundo real. Estos modelos a su vez permitirán realizar predicciones de situaciones concretas y en algunos casos ayudar a tomar decisiones.

A título de ejemplo, en física se estudian las famosas ecuaciones cinemáticas que no son otra cosa que la representación analítica del valor y comportamiento de la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo como función del tiempo. Algunas de estas ecuaciones son:

- $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Esta ecuación permite expresar la posición x como función del tiempo t de un cuerpo que se mueve en línea recta con aceleración constante a, partiendo desde una posición x_0 con una velocidad inicial v_0. Corresponde a una función cuadrática.
- $v(t) = v_0 + at$. Mediante esta expresión se describe la velocidad v como función del tiempo t de un cuerpo que se mueve en línea recta con aceleración constante a cuando su velocidad inicial es v_0. Se trata de una función lineal.
- $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$. Aquí se expresa la aceleración a como función del tiempo r de un objeto que describe un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia angular ω. Es una función trigonométrica.

Pero funciones hay por toda la física, la química y en general en todas las disciplinas científicas donde se estudian cómo algunas variables (temperatura, volumen, presión, concentración química, cantidad de sustancia, etc.) influyen en otras y estas relaciones se expresan a manera de ecuaciones y funciones.

Parte II

Desarrollo

En este apartado se presenta el desarrollo de cada una de las preguntas que con respecto a funciones nos plantean las once pruebas de admisión para la UNAL estudiadas (un capítulo por cada una). Se entregan con cada pregunta su respectivo análisis y respuesta enmarcados en los conceptos que sobre funciones se plantearon en el marco teórico.

Capítulo 3

Examen uno (2004-2)

La presente prueba corresponde a ocho preguntas que sobre funciones se plantearon para el examen de admisión de la UNAL para el segundo semestre de 2004. En esta prueba se evaluaron conceptos relacionados con proporcionalidad (directa e inversa), función lineal, cuadrática y periódica. Algunas de las preguntas apuntan a aplicaciones concretas de las funciones como en el caso de crecimiento de poblaciones o involucrando parámetros físicos de ciertos fenómenos.

Preguntas

11. Si *"La concentración de dióxido de carbono se ha incrementado un 0.3 por ciento cada año"*, se infiere que si la concentración de CO_2 en la atmósfera en una fecha dada es x, la concentración al cabo de un año será:

    A. $x\left(1+\frac{3}{10}\right)$

    B. $x\left(1+\frac{0.3}{100}\right)$

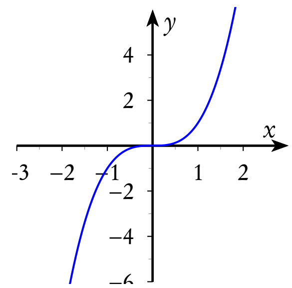
    C. $0.3\left(x+\frac{1}{10}\right)$

    D. $3\left(x+\frac{1}{100}\right)$

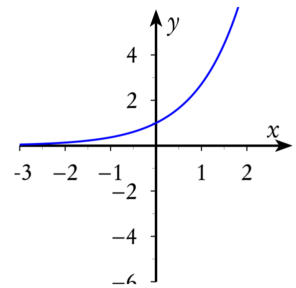
    Solución: El enunciado plantea a la concentración de dióxido de carbono como función de la concentración del mismo en el periodo inmediatamente anterior, esto es, una función definida recurrentemente. Tenemos que si la concentración para un instante dado es x al aumentar un $0.3\,\%$ la concentración se amplifica en un factor de 1.003, o lo que es lo mismo $1 + 0.3/100$. La respuesta correcta es la B.

26. Observe las gráficas de las funciones que aparecen a continuación.

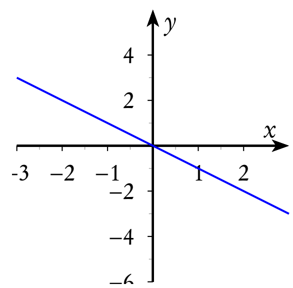
1.



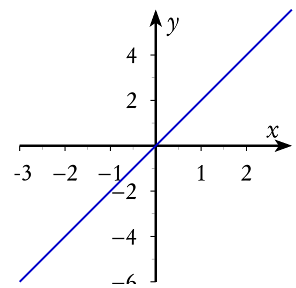
3.



2.



4.



Las variables y y x son

A. directamente proporcionales en todas las funciones.

B. directamente proporcionales sólo en la función 4.

C. inversamente proporcionales en todas las funciones.

D. directamente proporcionales sólo en la gráfica 3.

Solución: Para que dos variables sean directamente proporcionales debe cumplirse que el valor de la variable dependiente sea el valor de la independiente por una constante positiva ($y = kx$, $k \in \mathbb{R}^+$). Gráficamente lo anterior se corresponde a una recta con pendiente positiva que pasa por el orígen. Esto se cumple en la gráfica 4 y por tanto la respuesta correcta es la B.

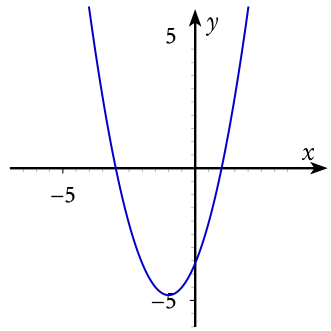
28. La siguiente gráfica corresponde a una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Se puede afirmar que

A. a y b son positivos y c negativo.

B. b es positivo y a y c son negativos.

C. a es positivo y b y c son negativos.

D. c es positivo y a y b son negativos.



Solución: La función cuadrática de la figura posee, evidentemente, dos raíces reales. Para que esto se de, debe cumplirse que el *discriminante* $b^2 - 4ac$ sea estrictamente positivo y por tanto cumplirse que $b^2 > 4ac$. Por otro lado, la parábola en cuestión presenta concavidad posiva (abre hacia arriba, $a > 0$) y el punto de corte con el eje de las y es negativo ($c < 0$), lo que corrobora la desigualdad del discriminante dado que $b^2 \in \mathbb{R}^+$ y $4ac \in \mathbb{R}^-$. Ahora bien, con respecto al signo de b tenemos que el vértice posee coordenada en x negativa entonces éste ha de ser positivo ya que en este caso $x = -b/(2a)$ y con a positivo b también debe serlo. La respuesta correcta es la A.

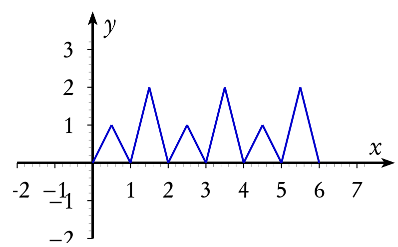
29. Una de las características de las funciones periódicas es la de que su gráfica se repite a intervalos de la misma longitud. La longitud del menor intervalo en el cual se repite, recibe el nombre de periodo. De la función representada por la gráfica se puede decir que:

    A. no es periódica.

    B. su periodo es 1.

    C. su periodo es 2.

    D. su periodo es 4.



Solución: Como se indica en el enunciado, el periodo corresponde a la longitud del menor intervalo en el cual se repite la función, y en este caso notamos que cada dos unidades de x la función se repite siendo este el menor valor en que esto sucede, por tal razón tenemos que la función es periódica de periodo 2. La respuesta es la C.

Responda las preguntas 30 a 32 de acuerdo a la siguiente información:

A finales del año 1990 la población de una ciudad A era de 500000 habitantes y ha crecido aproximadamente en 9000 habitantes por año; mientras que los habitantes de una ciudad B era en ese mismo año de 696000 habitantes y ha decrecido aproximadamente en 800 personas por año.

30. De acuerdo con las condiciones del problema, al finalizar el 2004 el número de las habitantes de las cuidades A y B serán respectivamente:

    A. 626000, 684800
    B. 374000, 707000
    C. 374000, 684800
    D. 626000, 707200

    Solución: La variación de las poblaciones (en este caso incrementos) está relacionado tanto con el tiempo considerado como con la rata de crecimiento por año. El primer factor corresponde a 14 años para ambas ciudades, mientras que el segundo es de 9000 habitantes/año para A y −800 habitantes/año para B. En este orden de ideas los incrementos serían:

    $$\Delta P_A = (14)(9000) = 126000 \quad ; \quad \Delta P_B = (14)(-800) = -11200$$

    De este modo las poblaciones serían:

    $$P_A = 500000 + 126000 = 626000 \quad ; \quad P_B = 696000 - 11200 = 684800$$

    La respuesta es por tanto la A.

31. El número de habitantes de la ciudad B, transcurrido un tiempo t (años), se puede determinar mediante la expresión:

    A. $P(t) = 696000 + 800t$
    B. $P(t) = 696000 - 800t$
    C. $P(t) = 500000 + 9000t$
    D. $P(t) = 500000 - 9000t$

    Solución: La tasa de decrecimiento es constante (−800 habitantes/año) partiendo de un valor fijo inicial de 696000, de modo que el comportamiento del crecimiento de la población estudiada corresponde a una función lineal con pendiente −800 e intercepto 696000. Por tanto la relación que describe la misma como función del tiempo sería $P(t) = 696000 - 800t$. La respuesta correcta es la B.

32. Suponiendo que las razones de crecimiento y decrecimiento de la población en estas ciudades se mantiene, se puede afirmar que al terminar el año 2010,

    A. la ciudad A tendrá más habitantes.
    B. la ciudad B tendrá más habitantes.
    C. las dos ciudades tendrán más de 700000 habitantes.
    D. las dos ciudades tendrán el mismo número de habitantes.

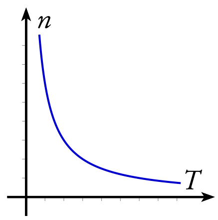
    Solución: El tiempo transcurrido sería de 20 años para los cuales ha de cumplirse que al finalizar dicho periodo las poblaciones respectivas de las ciudades serían:

    $$P_A = 500000 + 9000(20) = 680000 \quad ; \quad P_B = 696000 - 800(20) = 680000$$

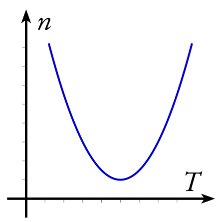
    Así que la respuesta correcta es la D.

51. La ecuación de estado de los gases ideales es $PV = nRT$, donde P es presión, V es volumen, n es el número de moles, R es una constante y T es temperatura. De las siguientes gráficas la que mejor expresa la relación entre el número de moles del gas en función de la temperatura en condiciones P y V constantes es:

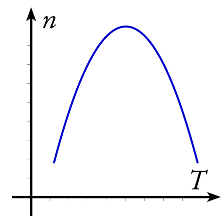
A.



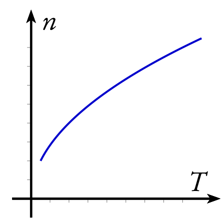
B.



C.



D.



Solución: La expresión puede escribirse como $n = (PV/R)/T$, y en las condiciones dadas es posible afirmar que $n \propto 1/T$ (son inversamente proporcionales). De acuerdo a esto la gráfica corresponde a una curva como la mostrada en la primera figura (con asíntota vertical $x = 0$ y asíntota horizontal $y = 0$) y por tanto esa es la respuesta, la A.

Capítulo 4

Examen dos (2005-2)

En esta ocasión se aprecian diez preguntas relacionadas con el tema de funciones realizadas para la prueba de admisión del segundo semestre de 2005 en las cuales se puntualiza un poco más en las gráficas de funciones, monotonía (crecimiento y decrecimiento), raíces de funciones, y en cuanto a tipos de funciones se da énfasis en las cuadráticas y las trigonométricas.

Preguntas

51. Si $f(a) = a + 1$ y $F(a, b) = 2a + b^2$ entonces $F(-2, f(1))$ es igual a

    A. -3 B. -1 C. 2 D. 0

    Solución: De acuerdo a como están definidas las funciones tenemos que

    $$F(-2, f(1)) = 2(-2) + [f(1)]^2 = -4 + (1+1)^2 = -4 + 2^2 = 0$$

    La respuesta correcta es la D.

52. Sean:

    P la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2x + 3$

    Q la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 2x + 1$

    Considere las siguientes afirmaciones suponiendo que P y Q están trazadas en el mismo sistema de coordenadas:

    I. P y Q coinciden
    II. P está a la izquierda de Q
    III. P está a la derecha de Q
    IV. P está más arriba que Q
    V. P está más abajo que Q

De las anteriores afirmaciones es o son verdaderas:

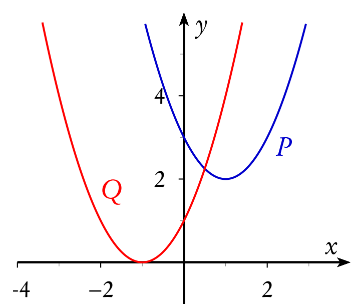
A. Sólo I   B. II y V   C. II y IV   D. III y IV

Solución: P y Q pueden escribirse respectivamente como

$$P : y - 2 = (x-1)^2,$$
en este caso $V_P = (1, 2)$
$$Q : y - 0 = (x+1)^2,$$
en este caso $V_Q = (-1, 0)$

Con esto podemos afirmar que P está a la derecha de Q puesto que su vértice está al lado derecho del origen mientras que para Q el vértice está a la izquierda de este. Por otro lado es evidente que el vértice de P está dos unidades por encima del vértice de Q. De esta manera tenemos que la respuesta correcta es la D.

La siguiente gráfica apoya lo dicho anteriormente:

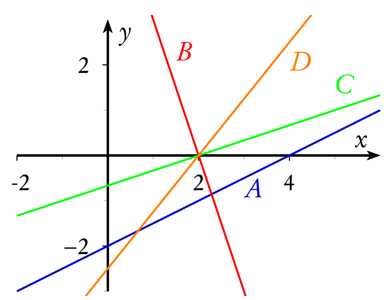


53. Una recta que no intercepta al eje x en el punto $x = 2$ tiene por ecuación:

A. $x - 2y = 4$ C. $x - 3y = 2$
B. $3x + y - 6 = 0$ D. $5x - 4y = 10$

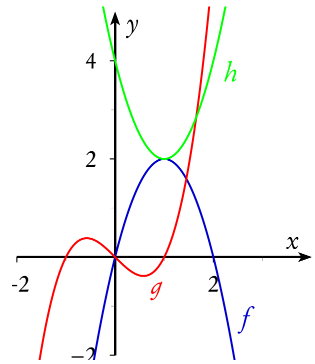
Solución: Si la recta no corta al eje x en $x = 2$ implica que el punto $(2, 0)$ no debe pertenecer a dicha recta y por tanto no satisface su ecuación. En la única ecuación que no se cumple esto es en la primera puesto que $2 - 2(0) = 2 \neq 4$. La respuesta es la A.

La siguiente gráfica ilustra las funciones en cuestión (A, B, C, D):



55. Una raíz real de una función f es un número real r que satisface $f(r) = 0$. Observando las siguientes gráficas, de las raíces de las funciones f, g y h se puede afirmar que:

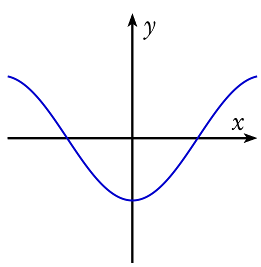
A. f y h tienen una raíz real común   C. f y g tienen una raíz real común
B. g tiene cuatro raíces reales   D. h tiene una raíz real



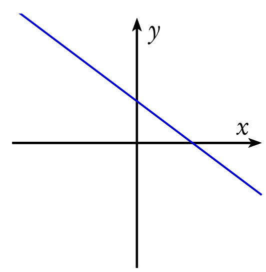
Solución: En la figura se aprecia que f tiene dos raíces reales $r = 0$ y $r = 2$, g tiene tres raíces reales $-2 < r < 0$, $r = 0$ y $0 < r < 2$, y h no tiene raíces reales. Así que f y g tienen una raíz real común $r = 0$. Por tanto la respuesta correcta es la C.

56. Se dice que una función $f(x)$ es creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ para números reales cualesquiera x_1 y x_2. Entre las siguientes gráficas, la que representa una función creciente es:

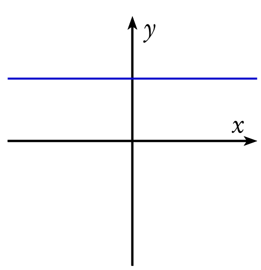
A.



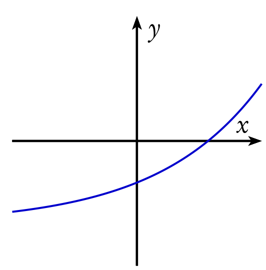
C.



B.



D.



Solución: De las gráficas la única que corresponde a la definición de *función creciente* expuesta en el enunciado es la D. En la gráfica de la figura D es en la única que de trazarse cualquier pendiente arbitraria entre dos puntos cualesquiera de la curva se obtendría una pendiente positiva. Respuesta D.

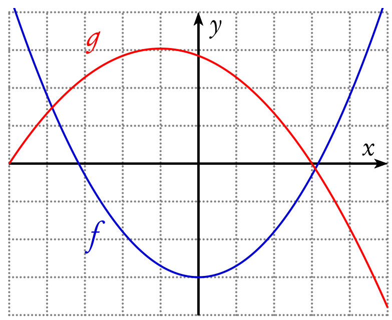
58. Observe las gráficas de las funciones f, g que se presentan a continuación.

De las afirmaciones:

I. $f(4) = g(4) = 0$
II. f y g tienen el mismo dominio
III. $f(1) > g(1)$
IV. f y g interceptan el eje x en un único punto
V. $g(x) > f(x)$ para todo x en el intervalo $[-4, 4]$

Es o son verdaderas

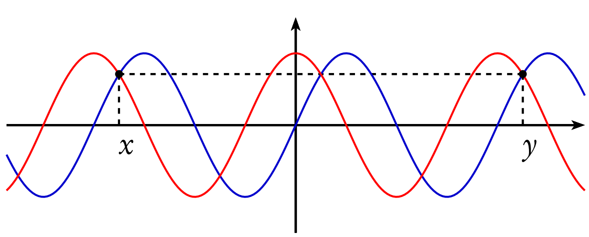
A. I y II
B. II y IV
C. Solamente II
D. Solamente IV



Solución: En la gráfica se observa: $f(4) \approx 2$; $g(4) \approx -2$, lo cual significa que I no es verdadera. El dominio de f y g es común para las dos funciones lo cual quiere decir que II es verdadera. Por otro lado $f(1) \approx -2.8$ y $g(1) \approx 2.2$ lo cual implica que III no es verdadera. Además f y g se intersectan en dos puntos y $g(x) < f(x)$ en los intervalos $[-5, -4]$ y $(3, 5]$. La respuesta es la C.

64. En el sistema de coordenadas se muestran las gráficas de las funciones seno y coseno. A partir de ellas se puede afirmar que

A. $\operatorname{sen} x = \cos y$
B. $\cos x = -\cos y$
C. $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} y$
D. $\operatorname{sen} y = -\cos x$



Solución: Es posible apreciar que para el valor x se cumple que $\operatorname{sen} x = \cos x$ e igualmente para el valor de y que $\operatorname{sen} y = \cos y$. Ahora bien, dado que los dos valores son los mismos en el eje de las ordenadas entonces $\operatorname{sen} x = \cos x = \operatorname{sen} y = \cos y$, entonces se concluye que la respuesta correcta es la A.

65. Si $f(\theta) = \cos\left(\dfrac{\pi - \theta}{3}\right)$, entonces $f(2\pi) - f(0)$ es igual a

A. $2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ B. $-2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ C. 0 D. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución: Tenemos que $f(2\pi) - f(0)$ equivale a

$$\cos\left(\frac{\pi - 2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi - 0}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

(Recuérdese que la función coseno es una *función par*, y por tal motivo $\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3)$). La respuesta correcta es por tanto la C.

66. Si $g(x) = \sec x + \cos x$ es verdadero afirmar que

A. $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

B. $g(\pi) = 1$

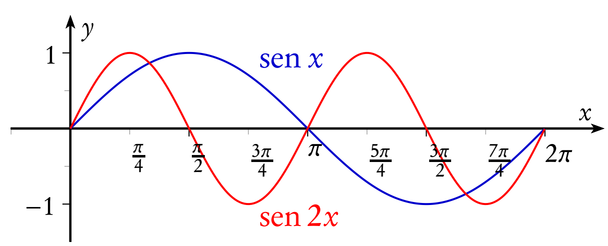
C. $g(\pi)$ no está definida

D. $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ no está definida

Solución: Dado que $\cos(\pi/2) = 0$ y $\cos(\pi) = -1$ entonces $\sec(\pi/2) = 1/\cos(\pi/2)$ no está definida y por tanto $g(\pi/2)$ no está definida. Por otro lado $g(\pi)$ está definida: $g(\pi) = \sec(\pi) + \cos(\pi) = 1/(-1) + (-1) = -1 - 1 = -2$.

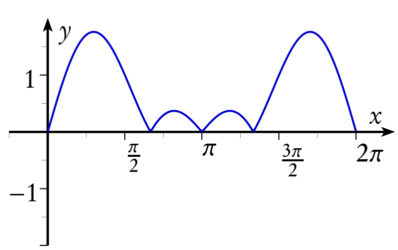
De esta manera la respuesta correcta es la D.

67. En la figura se han trazado las gráficas de las funciones sen x y sen $2x$

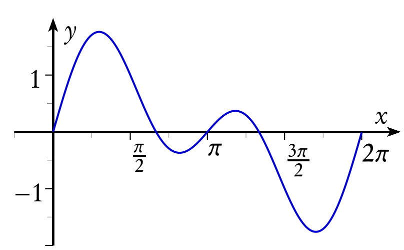


La gráfica que corresponde a la función sen x + sen $2x$ es

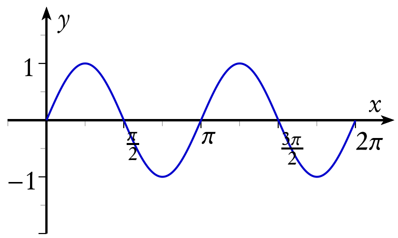
A.



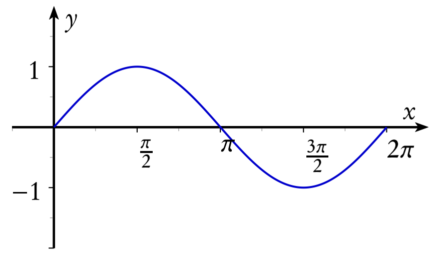
B.



C.



D.



Solución: Al observar con detenimiento la gráfica proporcionada en el enunciado es posible establecer algunas cosas sobre la suma de las funciones con respecto a algunos valores específicos de x. La siguiente tabla de valores se deduce de manera inmediata:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	1	0	-1	0
$\operatorname{sen} 2x$	0	0	0	0	0
$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$	0	1	0	-1	0

Quedando descartadas automáticamente las opciones A (puesto que no coincide para $x = \pi/2$) y C (dado que no es correcta para $x = 3\pi/2$).

Por otra parte si consideramos el valor de $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$ para $x = \pi/4$ se tiene que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 > 1$$

por lo que la opción D no es válida y se reafirma como verdadera la B.

Capítulo 5

Examen tres (2006-1)

En este capítulo examinaremos seis preguntas del examen de admisión para el primer semestre de 2006. Se indaga en estas preguntas principalmente sobre los conceptos relacionados con funciones racionales, cuadráticas, periódicas (más concretamente trigonométricas), y definidas a trozos.

Preguntas

57. Sea $f(x) = \dfrac{x+2}{2x}$. Considere las siguientes afirmaciones:

I. $f(x) = 0$ sólo si $x = -2$

II. $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{2}$

III. $f(3x) = 3f(x)$

IV. Si $f(x) = 1$, entonces $x = 2$

De las anteriores afirmaciones son verdaderas

A. I y III B. II y IV C. II y III D. I y IV

Solución: Analizando cada una de las afirmaciones tenemos:

- Para I:

$$f(-2) = \frac{-2+2}{2(-2)} = \frac{0}{-4} = 0$$

Además $f(x) = 0$ implica que $(x+2)/(2x) = 0$, y la única posibilidad para que esto ocurra es que $x + 2 = 0$ y por tanto $x = -2$. Esta afirmación es verdadera.

- Para II:

$$f(x+1) = \frac{x+1+2}{2(x+1)} = \frac{x+3}{2x+2} \quad ; \quad f(x)+\frac{1}{2} = \frac{x+2}{2x}+\frac{1}{2} = \frac{x+2+x}{2x} = \frac{x+1}{x}$$

  luego $f(x+1) \neq f(x) + \frac{1}{2}$.
- Para III:

$$f(3x) = \frac{3x+2}{2(3x)} = \frac{3x+2}{6x} \quad ; \quad 3f(x) = 3\left(\frac{x+2}{2x}\right) = \frac{3x+6}{2x}$$

  por lo tanto $f(3x) \neq 3f(x)$.
- Si $f(x) = 1$ entonces $(x+2)/(2x) = 1$, así que $x+2 = 2x$ de donde $x = 2$, por lo tanto la afirmación es verdadera.

De este modo tenemos que la respuesta correcta es la D.

58. Si $f(x) = 20 + x - x^2$ y $f(a) = 8$ entonces a es igual a

A. -4 ó 3 B. -3 ó 4 C. 2 ó 5 D. -2 ó -5

Solución: De acuerdo al enunciado tendríamos que $20 + a - a^2 = 8$ y por tanto $a^2 - a - 12 = 0$, es decir, $(a-4)(a+3) = 0$ con lo que $a = 4$ ó $a = -3$, de aquí que la respuesta correcta es la B.

59. Las funciones f y g están definidas por $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x^4 - 18x^2 + 81$, los valores de x para los cuales **no** está definida la función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ son

A. 3 y 2 B. 3 y -1 C. 2 y -2 D. 3 y -3

Solución: La nueva función sería:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-4}{x^4-18x^2+81} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x^2-9)^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

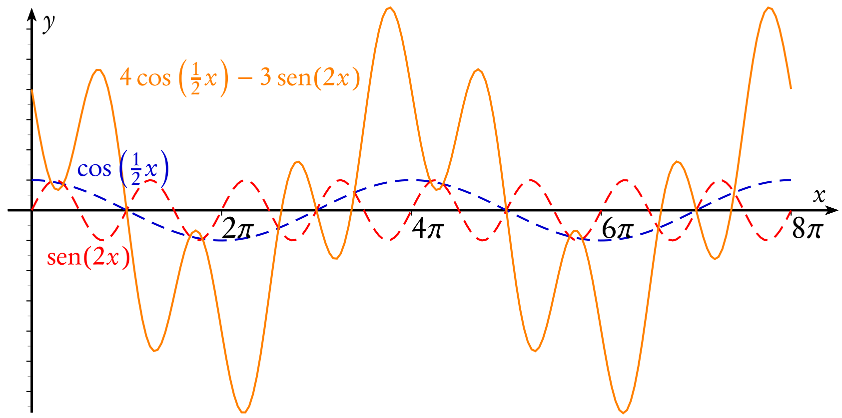
la cual no estaría definida para los valores $x = 3$ y $x = -3$ (en estos casos el denominador se hace cero). La respuesta correcta es por tanto la D.

68. La función $y = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 3\,\mathrm{sen}\,(2x)$ es de periodo

A. π B. 4π C. 3π D. 2π

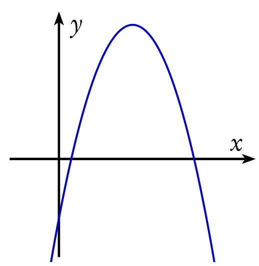
Solución: Tanto $\mathrm{sen}\,x$ como $\cos x$ tiene por periodo 2π, ahora para $\cos(\pi/2)$ el periodo se duplica y sería por tanto 4π; para el caso de $\mathrm{sen}\,(2x)$ el periodo se reduce a la mitad, esto es, π. Ahora, el mínimo común múltiplo de 4π y π es 4π y este sería el periodo para $y = 4\cos(\pi/2) - 3\,\mathrm{sen}\,(2x)$. La respuesta correcta es la B.

La siguiente figura ilustra la situación:



70. La gráfica tiene por ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Es correcto afirmar que a y c tienen _______ y las soluciones de la ecuación $y = 0$ tienen _______.

   A. mismo signo — mismo signo
   B. signos contrarios — mismo signo
   C. mismo signo — signos contrarios
   D. signos contrarios — signos contrarios



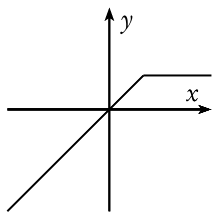
Solución: El signo de a determina la concavidad y viceversa, y ya que la parábola abre hacia abajo entonces $a < 0$. El intercepto con el eje y corresponde al valor de c y como se aprecia en la figura $c < 0$, así que a y c tienen el mismo signo. Por otro lado las dos raíces de la curva son positivas (los puntos de corte con el eje x están a la derecha del origen), es decir, tienen el mismo signo. Concluimos que la respuesta correcta es la A.

71. La gráfica de la función $f(x)$ está definida por

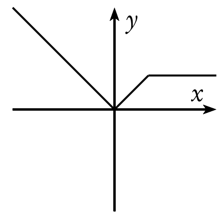
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

se representa correctamente en

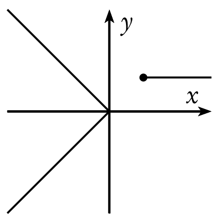
A.



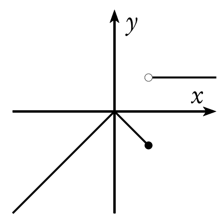
C.



B.



D.



Solución: La función $f(x)$ de acuerdo a como está definida es una línea recta con pendiente 1 para todos los x negativos, luego una segunda recta pero de pendiente -1 para el intervalo $[0, 1]$ y finalmente la recta horizontal $y = 1$ para todos los $x > 1$. La gráfica que coincide con esta descripción es la mostrada en D y por tanto la respuesta correcta es esta.

Capítulo 6

Examen cuatro (2006-2)

El examen que a continuación se presenta corresponde a preguntas liberadas de la prueba de admisión para el segundo semestre de 2006 de la Universidad Nacional de Colombia. Las once preguntas que se desarrollan a continuación y que como tópico general corresponden al tema de funciones, puntualizan en el valor absoluto, las funciones cuadráticas, trigonométricas, función inversa, la propiedad de la *aditividad* en una función, y un par de aplicaciones a la economía (función de costos y función utilidad) y a la física (dilatación térmica y relación entre escalas de temperatura).

Preguntas

50. Si x es un número real, se define el valor absoluto de x de la siguiente manera: $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$. De acuerdo con la información anterior, es verdadero que

    A. Si $x \geq -3$, $|x + 3| = x + 3$

    B. Si $x < 0$, $|x - 2| = x - 2$

    C. Si $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = x$

    D. Si $x \in \mathbb{R}$, $|x - 5| = 5 - x$

    Solución: La respuesta correcta es la A, puesto que que si $x \geq -3$ entonces $x + 3 \geq 0$ y por tanto $|x + 3| = x + 3$. Si $x < 0$, entonces $x < 2$, por lo tanto $x - 2 < 0$ y $|x - 2| = 2 - x$ lo cual significa que la opción B es falsa. $|-x|$ puede ser x o $-x$ dependiendo del signo de x, de lo cual se concluye que la opción C puede ser falsa. De igual manera $|x - 5|$ puede ser $x - 5$ o $5 - x$ dependiendo del signo de $x - 5$, así que D también puede ser falsa.

51. Un fabricante de zapatos puede vender todos los pares de zapatos que produce a un precio de $60 mil cada par. El fabricante tiene costos fijos mensuales de $24 millones. Si el cuero e insumos necesarios para producir cada par le cuesta $20

mil, el menor número de pares que debe producir y vender al mes para obtener utilidades es

A. 300 B. 600 C. 1200 D. 4000

Solución: Podemos suponer dos funciones, una de costos $C(x) = 24000000 + 20000x$, y una de ingresos $I(x) = 60000x$ donde x corresponde a cada par de zapatos fabricado y vendido. Una tercera función llamada utilidad que se obtiene al restar los costos a los ingresos y representa las ganancias netas: $U(x) = I(x) - C(x) = 60000x - 24000000 - 20000x = 40000x - 24000000$. Ahora, para que haya utilidades debe ocurrir que

$$U(x) = 40000x - 24000000 \geq 0, \text{ es decir, } x \geq \frac{24000000}{40000} = 600$$

La respuesta correcta es por tanto la B.

52. La ecuación cuadrática $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$ tiene raíces iguales cuando m es

A. 3 ó 5 B. −3 ó −5 C. 1 ó 2 D. −1 ó −2

Solución: Una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales repetidas cuando su discriminante es cero, esto es, $b^2 - 4ac = 0$. Ahora, la ecuación $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$ equivale a $x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$ y esta tiene raíces iguales cuando $(-2m)^2 - 4(1)(8m - 15) = 0$, es decir $4m^2 - 4(8m - 15) = 0$ o equivalentemente $m^2 - 8m + 15 = 0$ o dicho de otra forma $(m - 5)(m - 3) = 0$ de donde $m = 5$ o $m = 3$. Por lo tanto la respuesta es la A.

53. Una función f es aditiva si para todo par de elementos en su dominio x, y, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Suponga que f es una función aditiva en los enteros positivos. De las siguientes afirmaciones sobre f:

1. $f(n) = nf(1)$
2. $f(nk) = f(n)f(k)$
3. $f\left(n^2\right) = 2n$
4. $f(2n) = 2f(n)$

Son verdaderas

A. 1 y 2 B. 2 y 4 C. 1 y 4 D. 3 y 2

Solución: Tenemos que $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, $f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1)$, así debe tenerse que $f(n) = nf(1)$, es decir, la opción 1 es verdadera. Por otra parte $f(nk) = nkf(1) \neq (nf(1))\,(kf(1)) = f(n)f(k)$, es decir, la opción 2 es falsa. También $f\left(n^2\right) = n^2 f(1) \neq 2n$ lo que significa que la opción 3 es falsa. Por último $f(2n) = 2nf(1) = 2\,(nf(1)) = 2f(n)$, de donde la opción 4 es verdadera.

Tanto 1 y 4 son verdaderas que corresponden a la opción C.

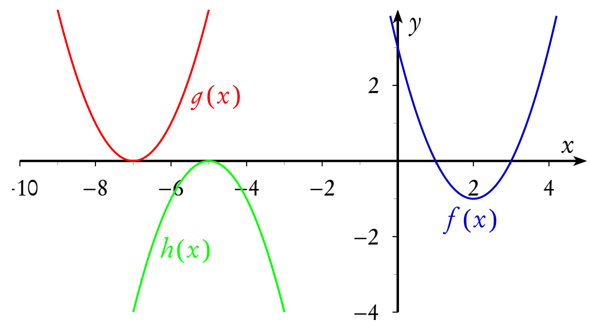
63. En la figura se presentan las gráficas de tres funciones f, g, h. Es correcto afirmar que

A. $g(x) = f(x+9)$

B. $h(x) = f(x+7) - 1$

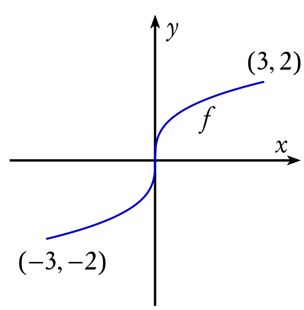
C. $h(x) = -f(x-7) + 1$

D. $g(x) = f(x+9) - 1$



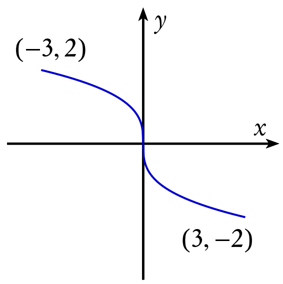
Solución: NINGUNA de las opciones de respuesta es correcta. A saber, si expresamos a g en términos de f tendríamos que $g(x) = f(x+9)+1$ (f se traslada 9 unidades hacia la izquierda y luego una unidad hacia arriba), y si expresamos a h en términos de f tendríamos que $h(x) = -f(x+7)-1$ (f se refleja con respecto al eje x, se traslada 7 unidades hacia la derecha y finalmente una unidad hacia abajo), y a la que expresamos es a g en función de h tendríamos $g(x) = -h(x+2)$, y ninguna de estas opciones aparece.

65. A continuación se presenta la gráfica de una función f.

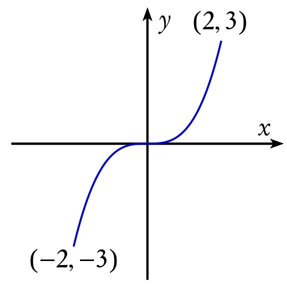


La gráfica que representa la función inversa de f, f^{-1} es

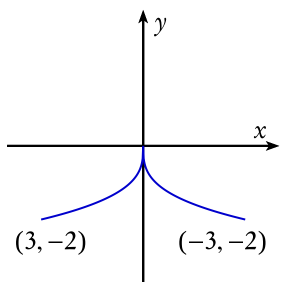
A.



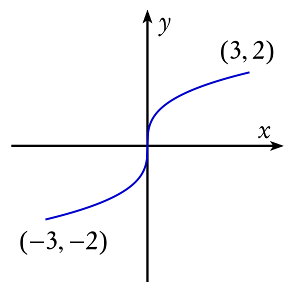
C.



B.

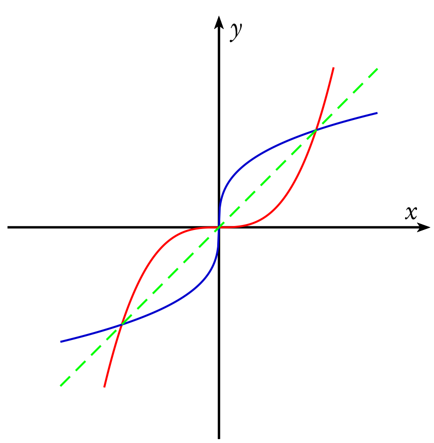


D.

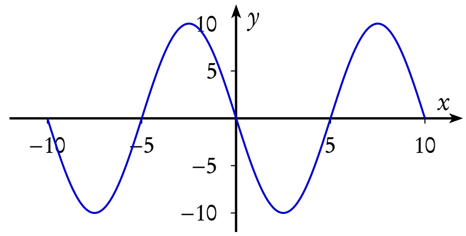


Solución: Dado que por definición de función inversa si (a, b) pertenece a f entonces (b, a) ha de pertenecer a f^{-1}, la función inversa de f es la mostrada en la figura C.

Además, una característica de las funciones inversas es que son reflejo de la función original con respecto a la recta $y = x$, esto se aprecia en la siguiente figura donde f está de azul, f^{-1} de rojo, y $y = x$ de verde:

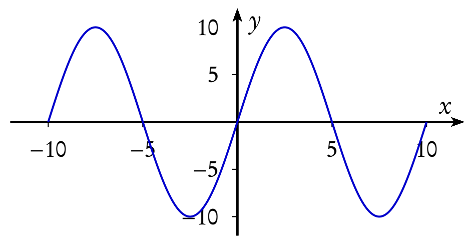


66. En la gráfica se presenta la función $y = f(x)$

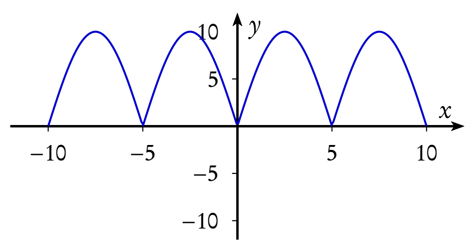


La gráfica de la función $y = |f(x)|$ se presenta en

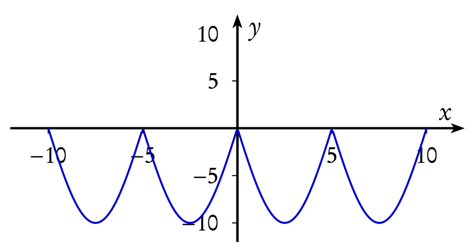
A.



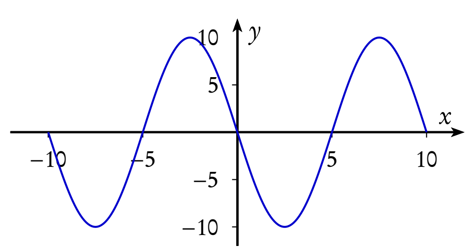
B.



C.



D.



Solución: La gráfica correcta es la B puesto que $|f(x)|$ ha de ser una curva con sólo valores no negativos donde los valores para los cuales $f(x) < 0$ se han reflejado con respecto al eje x por la definición de valor absoluto.

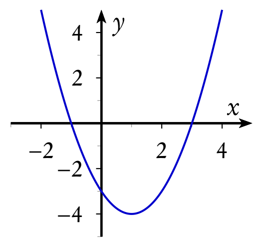
67. La gráfica representa la ecuación

A. $y = x^2 - 2x - 3$

B. $y = 2x^2 - 2x - 3$

C. $y = 2x^2 - 4x - 6$

D. $y = x^2 - 2x - 6$



Solución: La curva corta al eje x en $x = -1$ y $x = 3$, luego $x + 1 = 0$ y $x - 3 = 0$ y por lo tanto $0 = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$. Ahora considerándola como $y = x^2 - 2x - 3$ vemos que la respuesta correcta es la A.

También podemos proceder así: Primero observamos que el intercepto de la curva con el eje y es $c = -3$. Por otro lado, al factorizar la expresión A nos da que $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ y por tanto tiene por raíces a $x = -1$ y $x = 3$, lo que indica que la A es la respuesta correcta verificarse en la figura mostrada que coincide con la curva en los puntos $(0, -3)$, $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

69. La variación de la longitud de una varilla que se calienta es directamente proporcional a la longitud original y a la variación de la temperatura. La constante de proporcionalidad, λ, se denomina coeficiente de dilatación y es característica de cada sustancia.

Sean L_1 y L_2 las longitudes de una varilla a las temperaturas T_1 y T_2 respectivamente. El enunciado anterior se puede traducir a la siguiente expresión matemática:

A. $L_2 - L_1 = \lambda L_1 (T_2 - T_1)$

B. $L_2 = \lambda L_1 T_2$

C. $L_2 - L_1 = \dfrac{\lambda L_1}{(T_2 - T_1)}$

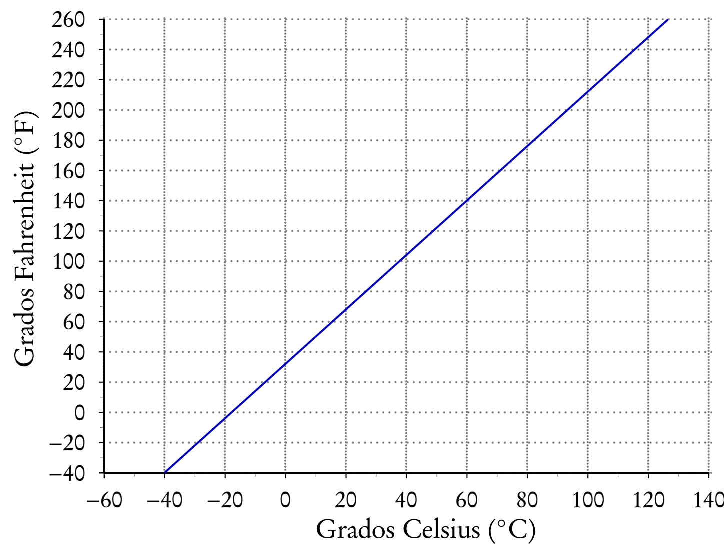
D. $L_2 = \lambda L_1 (T_2 - T_1)$

Solución: El enunciado nos dice que $\Delta L \propto L_1 \Delta T$, donde Δ representa variación en las respectivas variables. Dicha relación de proporcionalidad se reescribe entonces en forma de ecuación como sigue:

$$L_2 - L_1 = \lambda L_1 (T_2 - T_1) .$$

Por tanto la respuesta correcta es la A.

Las preguntas 73 y 74 se refieren a la siguiente gráfica, que muestra la relación que existe entre la medida de la temperatura en grados Fahrenheit y Celsius.



73. A partir de la gráfica, se puede deducir que la relación entre °C y °F es

A. $C = \frac{5}{9}F + 32$

B. $C = \frac{9}{5}F - 32$

C. $F = \frac{9}{5}C + 32$

D. $F = \frac{5}{9}C - 32$

Solución: De la gráfica podemos tomar parejas ordenadas con un grado de relativa confianza y a partir de allí determinar una ecuación aproximada para comparar. Se trataría de una ecuación lineal de la forma $y = mx + b$ (o en nuestro caso $F = mC + b$). Puesto que los puntos $(60, 140)$ y $(-40, -40)$ pertenecen a la recta entonces tenemos que

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{160 - (-40)}{60 - (-40)} = \frac{180}{100} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5},$$

luego $F - (-40) = \frac{9}{5}(C - (-40))$, es decir $F + 40 = \frac{9}{5}C + 72$, y por tanto

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

y esta ecuación corresponde a la opción C.

74. La temperatura a la cual las dos escalas coinciden es

A. $C = 40°C$ B. $C = -40°C$ C. $C = 0°C$ D. $C = 100°C$

Solución: Se debe tener que $F = C$, así $C = \frac{9}{5}C + 32$ de donde $-32 = \frac{9}{5}C - C = \frac{4}{5}C$ y por lo tanto $-8 = \frac{1}{5}C$, así que $C = -40$. La respuesta correcta es la B.

Capítulo 7

Examen cinco (2007-1)

La prueba que a continuación se presenta corresponde al examen de admisión para el segundo semestre del 2006. Para el tema de funciones se plantearon 15 preguntas entre las cuales se destacan algunas cuyo enfoque es la aplicación a la física, la alusión a funciones lineales, funciones definidas a trozos, exponenciales y trigonométricas.

Preguntas

Las preguntas 1 a 24 se refieren al siguiente texto[1]:

Masa añadida en los despejes de cabeza en fútbol

Un balón lanzado de un puntapié, que llega a adquirir una velocidad inicial de $v_0 = 26$ m/s, constituye un disparo bastante potente, pues podría recorrer unos 44 m de campo con una inclinación inicial de 20°, teniendo en cuenta que el alcance D de un proyectil que inicialmente forma un ángulo de $\theta°$ con la horizontal es

$$D = v_0^2 \frac{(\operatorname{sen} 2\theta)}{g}$$

(...) La fuerza media, F, sobre la frente, de ser grande, puede producir por sí misma daños irreversibles en el hueso. Esta fuerza se calcula a partir de la expresión

$$F = F_m \frac{m_c}{m_b + m_c},$$

[1]El texto presentado a continuación omite algunos párrafos que entregan información que no es pertinente para resolver las preguntas que con respecto a funciones se desarrollan en este trabajo de grado.

donde $F_m = 978$ N es la fuerza máxima que ejerce el balón cuando colisiona con un jugador completamente rígido, $m_b = 0.43$ kg es la masa del balón y m_c es la masa de la cabeza más la masa añadida. (...)

(...) La masa de la cabeza sola es de 6 kg (...)

2. Suponiendo la velocidad inicial y la aceleración constantes, al considerar el alcance D en término del ángulo θ se obtiene una función

   A. periódica B. cuadrática C. lineal D. constante

   Solución: De acuerdo al texto introductorio, el alcance D de un proyectil que inicialmente forma un ángulo θ con la horizontal y parte con una velocidad inicial v_0 es $D = v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)/g$. Si tanto v_0 como g son constantes entonces la función puede expresarse de la forma $D = K \operatorname{sen}(2\theta)$, con $K = v_0^2/g$ constante, la cual es una función periódica. La respuesta correcta es la A.

3. Suponiendo la velocidad inicial y la aceleración constantes, el alcance máximo de la pelota se obtiene con un ángulo θ de

   A. 15° B. 45° C. 30° D. 90°

   Solución: El valor máximo de D se obtendría en este caso para cuando $\sin(2\theta)$ sea máximo. Sabemos que la función seno tiene su máximo para un ángulo de 90° (considerando su primer periodo), de modo que $2\theta = 90°$ y por tanto $\theta = 45°$. La respuesta correcta es la B.

4. Si el ángulo θ es de 15° y $v_0 = 26$ m/s, entonces el alcance D en metros de la pelota, en metros, está entre

   A. 10 y 15 B. 20 y 25 C. 40 y 45 D. 30 y 35

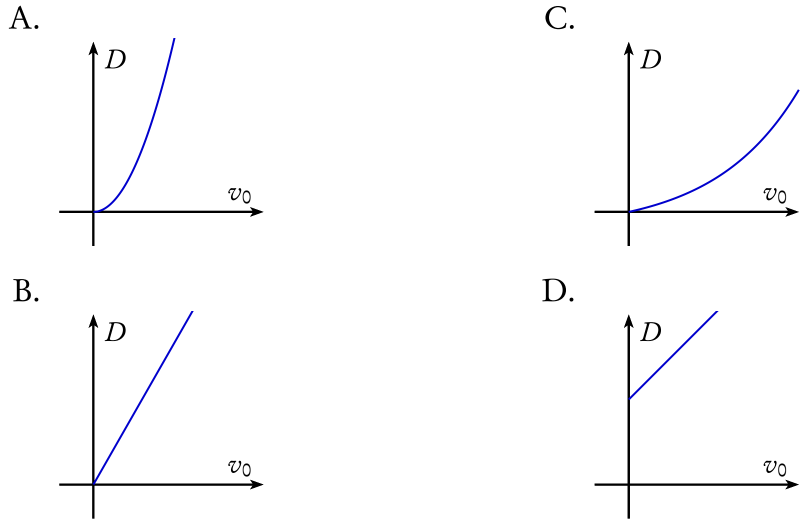
   Solución: Reemplazando valores tendríamos que

$$D = v_0^2 \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{g} = (26)^2 \frac{\operatorname{sen}(2 \times 15°)}{9.8} \approx \frac{26 \times 26 \times 0.5}{10} = \frac{13 \times 13}{5} \approx \frac{170}{5} = 34,$$

   así que la respuesta correcta es la D.

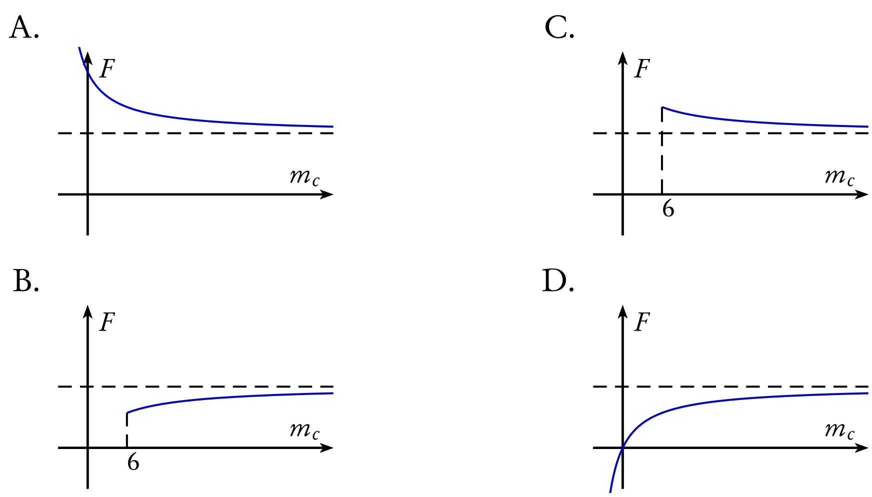
   (NOTA: Se hizo uso razonable de redondeos recordando el hecho de que en una prueba de este tipo el uso de calculadora no es permitido)

5. Suponiendo que θ y g son constantes, la gráfica que representa el comportamiento de D, como función de v_0, cuando se lanza el balón de un puntapié, es



Solución: Al ser θ y g constantes la expresión $D = v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)/g$ quedaría de la forma $D = Kv_0^2$ con K constante por lo que su gráfica ha de ser una parábola que abre hacia arriba y con vértice en $(0,0)$. Ahora bien, $\operatorname{sen} 2\theta < 1 < g$ y por tanto $(\operatorname{sen} 2\theta)/g < 1$, esto es, $K < 1$ por lo que corresponde a una parábola no tan estrecha. La figura que más se acerca a estas características es la C.

12. De las siguientes gráficas la que representa mejor la relación entre F y m_c es



Solución: $F = F_m m_c/(m_b + m_c)$ es la expresión que relaciona las variables en mención. Si consideramos a m_b y F_m constantes y positivas entonces tenemos una función $F(m_c)$ que es creciente puesto que si $m_{c1} < m_{c2}$ entonces $m_{c1}m_b < m_{c2}m_b$, de donde, $m_{c1}m_b + m_{c1}m_{c2} < m_{c2}m_b + m_{c1}m_{c2}$, es decir, $m_{c1}(m_b + m_{c2}) < m_{c2}(m_b + m_{c1})$, y de esto,

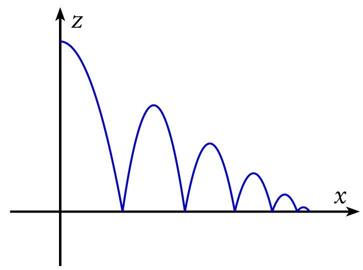
$$\frac{m_{c1}}{m_b + m_{c1}} < \frac{m_{c2}}{m_b + m_{c2}},$$

finalmente

$$F(m_{c1}) = \frac{F_m m_{c1}}{m_b + m_{c1}} < \frac{F_m m_{c2}}{m_b + m_{c2}} = F(m_{c2}),$$

y que tiende a F_m en la medida en que m_c se hace muy grande[2]. Ahora bien, según la información del texto base $m_c \geq 6$ y por tanto la gráfica correcta es la B.

52. Suponga que una pelota rebota repetidamente y que, para cada instante, se puede determinar su altura z con respecto al piso, por medio de una función del tiempo cuya representación gráfica es la siguiente:



Acerca de esa función es correcto afirmar que

A. es una suma de una función cuadrática y una función lineal.
B. no toma valores negativos y tiene más de tres ceros.
C. es una suma de funciones cuadráticas.
D. es decreciente e impar.

Solución: La respuesta correcta es la B ya que en efecto la función no toma valores negativos pero sí tiene más de tres raíces. Adviértase que la función aunque está formada por varias funciones cuadráticas no se trata de una suma de éstas.

62. La siguiente tabla corresponde a una función lineal

x	2	4	10	b
y	3	a	15	21

Los valores de a y b son respectivamente

[2]Es posible afirmar esto ya $F_m > 0$ y que el cociente $m_c/(m_b + m_c)$ puede escribirse como

$$\frac{m_c}{m_b + m_c} = \frac{m_b + m_c - m_b}{m_b + m_c} = 1 - \frac{m_b}{m_b + m_c}.$$

Dado que m_b es un valor constante positivo y m_c un valor variable mayor o igual a 6, entonces al aumentar m_c se tendrá que $m_b/(m_b + m_c)$ se hará cada vez más pequeño. Así que la curva ha de ir creciendo en la medida que m_c se hace más grande.

A. 6 y 15 B. 9 y 15 C. 9 y 14 D. 6 y 14

Solución: Es fácilmente observable que la función lineal en cuestión corresponde a una proporcinalidad directa pues $2/3 = 10/15$; en este orden de ideas tendríamos que $2/3 = 4/a$ y por tanto $a = 6$, y que $2/3 = b/21$ por lo que $b = 14$. La respuesta correcta es por tanto la D.

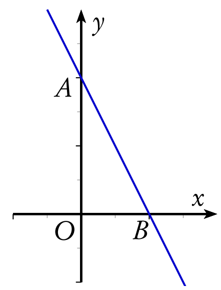
68. La recta que pasa por los puntos A y B, determina el triángulo de vértices $A(0,4)$, $O(0,0)$, $B(2,0)$. Una recta de pendiente negativa pasa por el punto $(4,0)$ y, de manera similar, determina un triángulo semejante a AOB. La ecuación de esa recta es

A. $y = -2x + 4$

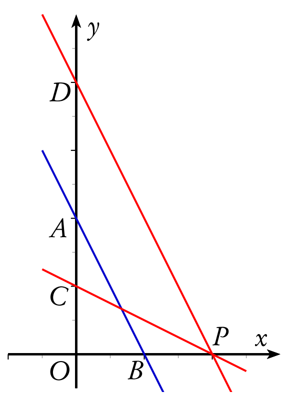
B. $y = -x + 4$

C. $y = -2x + 8$

D. $y = -x + 8$



Solución: Al pasar la recta (de pendiente negativa) por el punto $(4,0)$ tendríamos gráficamente dos triángulos semejantes al triángulo AOB: el triángulo POC ($C(0,2)$ y $P(4,0)$) y el triángulo DOP ($D(0,8)$).



La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{CP}$ es

$$m = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

y la ecuación de esta es

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0) = -\frac{1}{2}x$$

así que $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

La pendiente de la recta $\overleftrightarrow{DP}$ es

$$m = \frac{8-0}{0-4} = -2$$

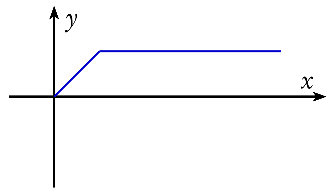
y la ecuación de esta es

$$y - 0 = -2(x - 4) = -2x + 8,$$

es decir, $y = -2x + 8$.

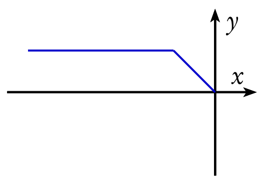
La respuesta correcta es la C.

75. Si la gráfica de $y = f(x)$ es

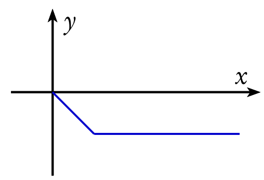


La gráfica de $y = -f(x)$ es

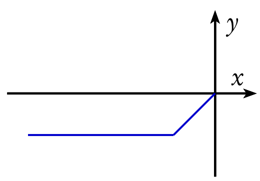
A.



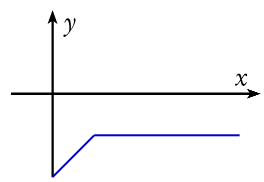
C.



B.



D.



Solución: $y = -f(x)$ debe corresponder a la reflexión con respecto al eje x de la función $f(x)$, por tanto la respuesta correcta es la C.

76. Si $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se grafican sobre los mismos ejes coordenados, la transformación que envía una de las curvas sobre la otra es una reflexión respecto

A. al eje y.

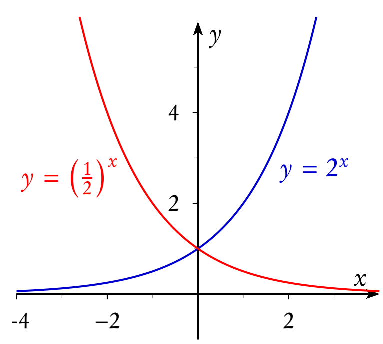
B. al eje x.

C. al origen.

D. a la recta $y = x$.

Solución: Podemos observar que $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ y por tanto podemos afirmar que una curva es reflexión de la otra con respecto al eje y. La respuesta correcta es la A.

La figura siguiente muestra las dos curvas: $y = 2^x$ en azul, y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en rojo. Allí la simetría mencionada es evidente.



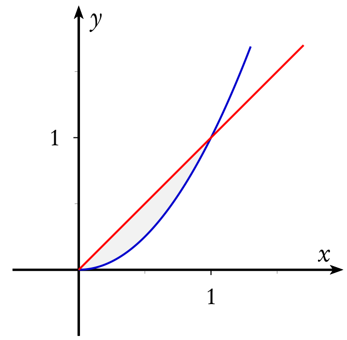
77. La región sombreada está limitada por la recta de ecuación $y = x$ y la curva $y = x^2$. A esta región pertenece el punto

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{7}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$



Solución: Para que un punto (a, b) pertenezca a esta región, debe suceder que $0 < a < 1$, y, $a^2 < b < a$.

En todos los casos la primera componente está en el intervalo $(0, 1)$. Si $x = 1/2$, la segunda componente $(1/5)$ debe satisfacer que esté entre $1/4$ y $1/2$. Puesto que $1/4 < 1/5 < 1/2$ es imposible porque $5 \not< 4$. Descartamos el punto $(1/2, 1/5)$.

Si $x = 1/3$ la segunda componente debe satisfacer que esté entre $1/9$ y $1/3$. Pero $1/9 < 3/7 < 1/3$ es imposible ya que $9 \not< 7$, con lo cual descartamos el punto $(1/3, 3/7)$. De igual forma descartamos el punto $(1/3, 1/10)$.

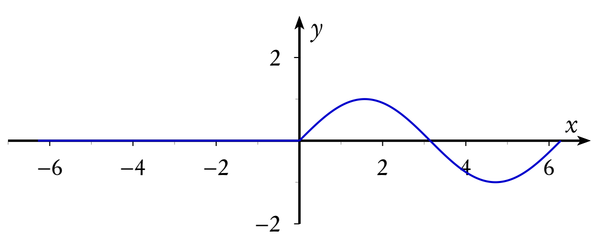
La respuesta correcta es la D, pues $0 < 1/2 < 1$, y, $1/4 < 3/8 < 1/2$.

78. Si f y g son funciones con el mismo dominio, el producto fg está definido por: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

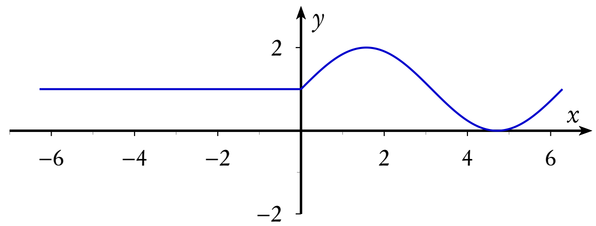
Suponga que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y que $f(x) = \operatorname{sen} x$.

La gráfica de $y = (fg)(x) + 1$ en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ es

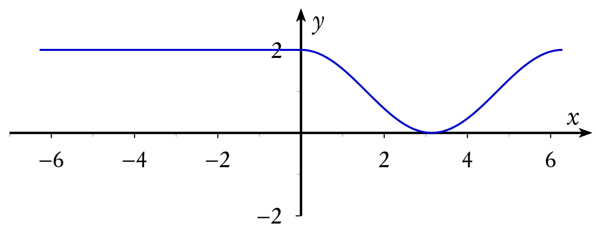
A.



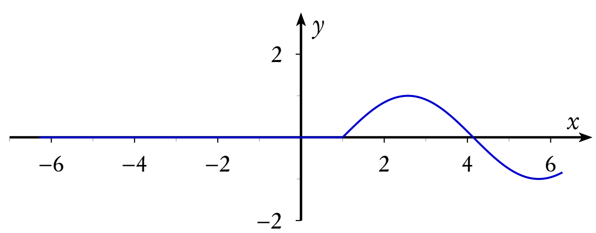
B.



C.



D.



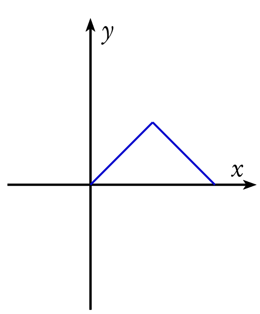
Solución: Se tiene que

$$y = (fg)(x) + 1 = f(x)g(x) + 1 = \operatorname{sen} x \cdot g(x) + 1 = \begin{cases} \operatorname{sen} x + 1 & \text{si } x \in [0, 2\pi) \\ 1 & \text{si } x \in (-2\pi, 0) \end{cases}$$

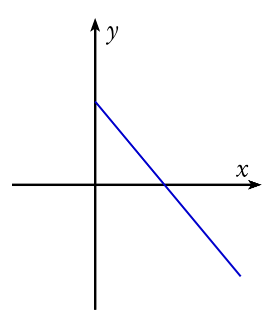
y por tanto la gráfica que representa correctamente la curva de y es la B.

Las preguntas 79 a 81 se refieren a los siguientes gráficos:

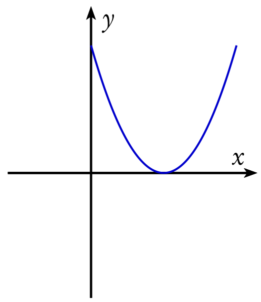
A.



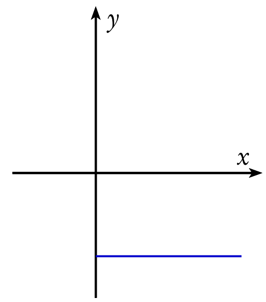
B.



C.



D.



79. La gráfica _______ representa la **velocidad en función del tiempo** de un objeto que se mueve con aceleración constante (diferente de cero).

    Solución: La velocidad en función del tiempo de un *movimiento uniformemente acelerado* viene dado por la expresión $v = v_0 + at$ que gráficamente corresponde a una línea recta. En efecto por definición la aceleración es $a = \Delta v/\Delta t$ y en este caso $a = (v - v_0)/t$ que al despejar v nos da que $v = v_0 + at$.

    La respuesta es la B. (NOTA: en este caso la aceleración sería negativa por ser una recta de pendiente negativa)

80. La gráfica _______ representa la **posición en función del tiempo** de un objeto que se mueve con aceleración constante (diferente de cero).

    Solución: La posición en función del tiempo de un *movimiento uniformemente acelerado* viene dado por la expresión $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ que gráficamente corresponde a una parábola.

    En efecto, el desplazamiento de dicho cuerpo vendría dado por $\Delta x = x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)\, t$ donde la expresión $\frac{1}{2}(v + v_0)$ corresponde a la velocidad media durante el recorrido. Dado que $v = v_0 + at$ (ver pregunta 79.) entonces tendríamos que $x - x_0 = \frac{1}{2}(2v_0 + at)\, t$ que al desarrollar y despejar queda como $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (una función cuadrática).

    La respuesta es la C.

81. La gráfica _______ representa la **aceleración en función del tiempo** de un objeto que cae libremente.

    Solución: La aceleración de un cuerpo que cae libremente corresponde a la de la gravedad la cual es constante y de valor$-g = -9.81$ m/s^2. Por tanto la gráfica correcta es la D.

Capítulo 8

Examen seis (2007-2)

Las nueve preguntas que sobre funciones se presentan y desarrollan a continuación forman parte del examen de admisión para la UNAL en el semestre II del 2007. En esta prueba en lo relacionado con funciones se enfatiza en las funciones trigonométricas, cuadráticas, exponencial y valor absoluto. Se consideran adicionalmente un par de aplicaciones prácticas en lo que tienen que ver con la implementación en el diseño de una caja y en el análisis del comportamiento de una población de individuos. Se analiza adicionalmente la propiedad de ser una función par y las consecuencias que a nivel geométrico se observan en su curva. Se finaliza con una pregunta que apunta a la comprensión adecuada de la proporcionalidad inversa en una función.

Preguntas

60. La carga de una columna cilíndrica sobre una superficie plana varía directamente con la cuarta potencia de su diámetro e inversamente con el cuadrado de su longitud. Si el diámetro y la longitud se reducen a la mitad, entonces la carga

    A. se duplica.
    B. se reduce a la mitad.
    C. se hace cuatro veces mayor.
    D. se reduce a la cuarta parte.

    Solución: Podemos considerar la carga C como una función del diámetro D y la longitud L del cilindro como sigue: $C = kD^4/L^2$ (donde k es la constante de proporcionalidad). Si modificamos las medidas como se indica en el problema entonces tendríamos que

    $$C_2 = k\frac{(D/2)^4}{(L/2)^2} = k\frac{D^4/16}{L^2/4} = \frac{1}{4}\left(k\frac{D^4}{L^2}\right) = \frac{1}{4}C$$

    por lo que podemos afirmar que la respuesta correcta es la D, es decir, la carga se reduce a la cuarta parte.

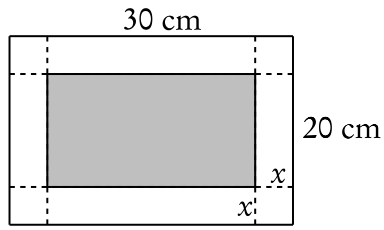
62. Para elaborar una caja sin tapa con base rectangular se dispone de un cartón con 30 cm de largo y 20 cm de ancho. Si para hacerlo, en cada esquina del cartón se recorta un cuadrado de lado x y se doblan los lados hacia arriba, el área en cm^2 de la base de la caja estará dada por

A. $600 - 100x + 4x^2$

B. $150 - 25x + x^2$

C. $600 - 4x^2$

D. $150 - 50x + x^2$



Solución: El área de la base (zona sombreada), está dada por

$$\begin{aligned} A_{\text{base}} &= (30 - 2x)(20 - 2x) \\ &= 600 - 60x - 40x + 4x^2 \\ &= 4x^2 - 100x + 600 \end{aligned}$$

y por tanto la respuesta correcta es la A.

70. Una población de conejos fluctúa en periodos cíclicos de 10 años. En condiciones normales el número de conejos a los t años está dado por: $N(t) = 1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000$. Si no hay agentes externos que afecten este comportamiento

(1) nunca habrá más de 4000 conejos.

(2) el menor número posible de conejos es 3000.

De los anteriores enunciados se puede asegurar correctamente que

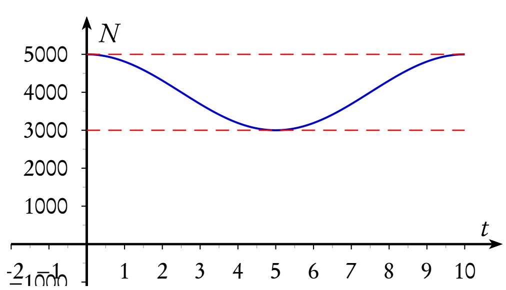
A. (1) y (2) son verdaderos.

B. (1) y (2) son falsos.

C. (1) es verdadero y (2) es falso.

D. (1) es falso y (2) es verdadero.

Solución: Dado que $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \leq 1$ entonces $-1000 \leq 1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) \leq 1000$ y por tanto $3000 \leq 1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000 \leq 5000$. De lo anterior se puede afirmar que (1) es falso y (2) es verdadero, por lo que la respuesta correcta es la D.



72. Considere los conjuntos

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R} : 0 < t < \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$T = \left\{ t \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{2} < t < \pi \right\}$$
$$U = \left\{ t \in \mathbb{R} : \pi < t < \frac{3\pi}{2} \right\}$$
$$V = \left\{ t \in \mathbb{R} : \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi \right\}$$

La función definida por $f(t) = \operatorname{sen} t$ es creciente para t en

A. T ó U

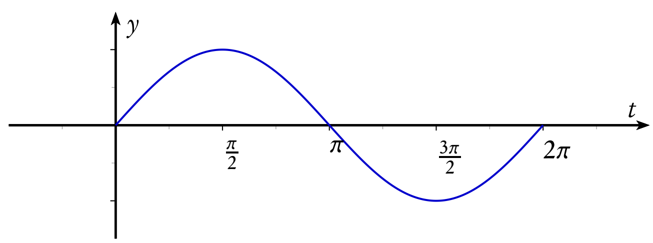
B. S ó V

C. S ó U

D. T ó V

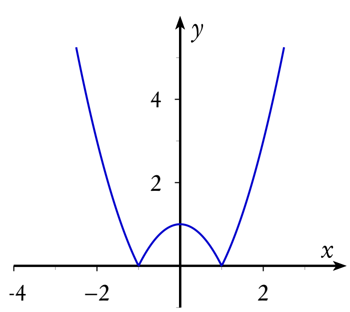
Solución: Como sabemos, la función seno es creciente tanto en el primer como en el cuarto cuadrante, por lo que en términos de los intervalos arriba mencionados serían S y V. La respuesta correcta es por tanto la B.

En la siguiente figura se muestra la función $f(t) = \operatorname{sen} t$ para reforzar lo dicho.

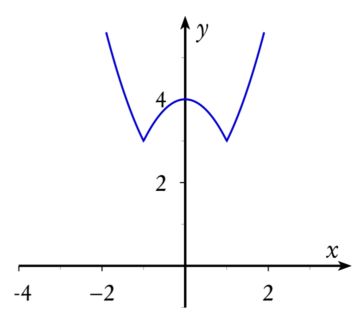


73. La gráfica de $y = \left|1 - x^2\right| + 3$ es

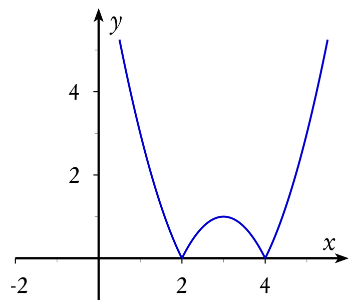
A.



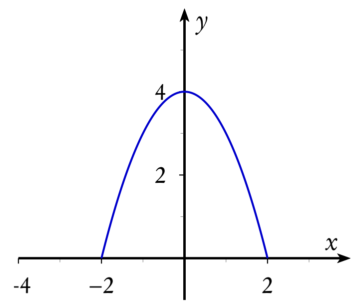
B.



C.



D.



Solución: Puesto que la función $g(x) = 1 - x^2$ es una parábola con vértice en $(0, 1)$, puntos de corte con el eje x en -1 y en 1, y concavidad negativa (abre hacia abajo), al tomarse el valor absoluto la parte negativa de la curva se refleja con respecto al eje x quedando como se muestra en la figura A. Finalmente se le adiciona 3 unidades en los valores en y de la función para quedar finalmente como se muestra en B.

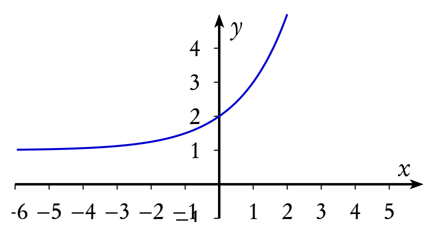
74 La ecuación de la gráfica que se presenta en la figura es

A. $y = 2^x$

B. $y = x^2 + 1$

C. $y = 2^x + 1$

D. $y = 2^{x+1}$



Solución: Se observa que el punto $(0, 2)$ pertenece a la curva, pero sólo las ecuaciones C y D admiten ese punto. Por otra parte en la curva se aprecia la tendencia de la curva a poseer una asíntota horizontal en $y = 1$, de modo que descartamos la D quedando como respuesta correcta la C.

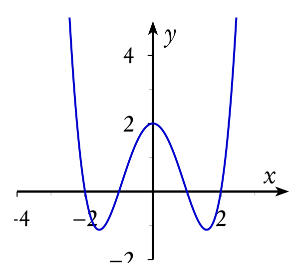
75. En la gráfica se representa una función f. Es correcto afirmar que para todo x se cumple

A. $f(-x) = f(x)$

B. $f(-x) = f(x) + 1$

C. $f(-x) = f(x) - 1$

D. $f(-x) = -f(x)$



Solución: Algo evidente en esta curva es que es simétrica con respecto al eje y, por lo que podemos afirmar que se trata de una *función par*. Para toda función par se cumple que $f(-x) = f(x)$ para todo x de su dominio, por tanto la respuesta correcta es la A.

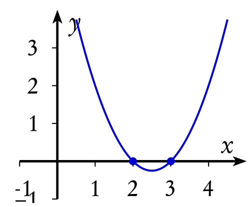
76. En la gráfica se representa una función cuadrática de la forma $y = f(x) = x^2 + ax + b$. Los valores de a y b son respectivamente

    A. 5 y −6

    B. −5 y −6

    C. 5 y 6

    D. −5 y 6



Solución: Se aprecian que las dos raíces de la parábola son en $x = 2$ y $x = 3$, es decir que $(x-2)(x-3) = 0$, por lo tanto puede asumirse que $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$. Así que comparando $f(x) = x^2 + ax + b$ con $f(x) = x^2 - 5x + 6$ encontramos que $a = -5$ y $b = 6$. La respuesta correcta es por tanto la D.

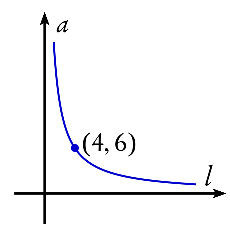
77. La gráfica muestra la relación entre el ancho (a) y el largo (l) de todos los rectángulos de un área fija. El valor de a para $l = 8$ es

    A. 3

    B. 6

    C. 8

    D. 24



Solución: Dado que $A = l \times a$ y el punto $(4, 6)$ pertenece a la gráfica tenemos que $A = 4 \times 6 = 24$. De otra parte $a = A/l = 24/l$. Ahora si $l = 8$ tenemos que $a = 24/8 = 3$, lo cual significa que la respuesta correcta es la A.

Capítulo 9

Examen siete (2008-1)

PARA LA prueba que se presenta a continuación que corresponde al examen de admisión para el primer semestre de 2008 se enfatizó —como se verá a continuación— en las aplicaciones de las funciones en casos muy concretos (en fenómenos físicos y en la descripción del comportamiento de una población), así como también en el concepto de función inversa y el análisis de gráficas.

Preguntas

Para las preguntas 54 a 61 considerar el siguiente fragmento:

"(...) En 1807 quise medir la altura de esta cascada. Usé, como Humboldt, el descenso de los graves y hallé constantemente que éstos tardaban seis instantes en bajar. De ahí deduje que la cascada tenía 220 varas de altura. (...)". **La altura de la Catarata del Tequendama**, Francisco José de Caldas.

NOTA: Un *grave* es simplemente un cuerpo que cae libremente, y un *instante* es una unidad de tiempo actualmente en desuso.

Para responder las preguntas 54 y 55 tenga en cuenta que el tiempo de caída de un objeto es $t = \sqrt{2H/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad y H es la altura.

54. El valor de g en varas/instantes^2 es

    A. $220/36$ B. $\sqrt{2 \times 220/6}$ C. $2 \times 220/6$ D. $2 \times 220/36$

    Solución: Según el texto se dice que durante la caída el tiempo medido fue de 6 instantes y que de ahí se deduce que la altura de la misma era de 220 varas. La expresión $t = \sqrt{2H/g}$ corresponde al tiempo de caída en función de la altura y de ella se deduce que dados un valor conocido de t y H el valor de la gravedad vendría dado por $g = 2H/t^2$. Por tanto se tendría que el valor de la gravedad es de $g = 2 \times 220/6^2 = 2 \times 220/36$ varas/instantes^2 y con ello la respuesta correcta entonces es la D.

55. Si se deja caer una piedra desde lo alto de una cascada, y gasta 3 instantes en caer, la altura de la cascada es

    A. 55 varas B. 440 varas C. 550 varas D. 110 varas

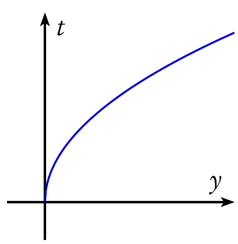
    Solución: Usando la expresión $t = \sqrt{2H/g}$ tenenos que $H = \frac{1}{2}gt^2$ y de esta manera para el caso específico

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{2 \times 220}{36}\right)3^2 = \frac{220}{4} = 55 \text{ varas},$$

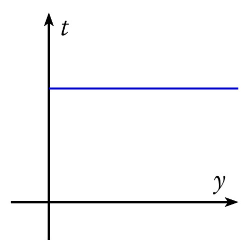
    y por tanto la respuesta correcta es la A.

Para responder las preguntas 59 a 61 utilice las siguientes opciones de respuesta:

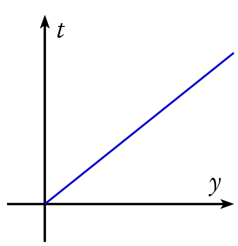
A.



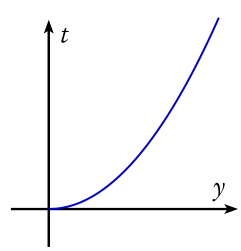
C.



B.



D.



Suponga que Caldas hubiera podido medir la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida por los graves mientras caían. Bajo las condiciones ideales que el sabio suponía, identifique el gráfico correcto según cada situación planteada en las preguntas 59 a 61.

59. Si y representa la velocidad, el gráfico de velocidad en función del tiempo que el sabio habría elaborado sería el _______.

Solución: La velocidad media está dada como el cambio de posición en un tiempo determinados, es decir

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

y la velocidad instantánea ocurre cuando $t_2 \to t_1$. Así

$$\frac{H_2 - H_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}g\left(t_2^2 - t_1^2\right)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}g\,(t_2 - t_1)\,(t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}g\,(t_2 + t_1)$$

luego la velocidad es $v = \frac{1}{2}g\,(2t) = gt$ que corresponde a la gráfica presentada en B.

60. Si y representa la aceleración, el gráfico de aceleración en función del tiempo que el sabio habría elaborado sería el _______.

    Solución: La respuesta es la C. Esto se debe a que el valor de la aceleración (en este caso la gravedad) es un valor fijo durante toda la caída y por tanto la gráfica que representa esto ha de ser una recta con pendiente cero (horizontal). De hecho en la pregunta 54 se obtuvo dicho valor de acuerdo a las mediciones hechas por el sabio Caldas.

61. Si y representa la distancia recorrida por los graves, el gráfico de distancia en función del tiempo que el sabio habría elaborado sería el _______.

    Solución: La respuesta es la D. Esto debido a que como ya se mencionó, la altura en función del tiempo queda expresada como $H = \frac{1}{2}gt^2$ la cual es una función cuadrática y por tanto su curva una parábola (en este caso de concavidad positiva).

75. Al golpear un balón de fútbol, éste se eleva y vuelve a caer al campo de juego describiendo una trayectoria parabólica del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Si $x = 0$ el punto donde fue pateado, y $x = 50$ el punto de caída, sobre a y b se puede afirmar que

    A. a es positivo y b es negativo
    B. son ambos negativos
    C. a es negativo y b es positivo
    D. son ambos positivos

    Solución: Si en $x = 0$ y $x = 50$ el balón está en el suelo y el balón describe una trayectoria parabólica hacia abajo por lo tanto $a < 0$. En el punto $x = 25$ se encuentra el vértice de la parábola así que $25 = -b/(2a)$. Puesto que $a < 0$ entonces b debe ser positivo. La respuesta correcta es la C.

83. Diversas poblaciones de animales, entre ellas la de los conejos, fluctúan en periodos cíclicos de 10 años. Si se supone que el número de conejos en el tiempo t (en años) está dado por la expresión $N(t) = 1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000$ para $0 \leq t \leq 10$, la población de conejos sobrepasará los 4000 para

A. $\frac{5}{6} < t < \frac{55}{6}$

B. $\frac{5}{2} < t < \frac{15}{2}$

C. $0 \leq t < \frac{5}{2}$ y $\frac{15}{2} < t \leq 10$

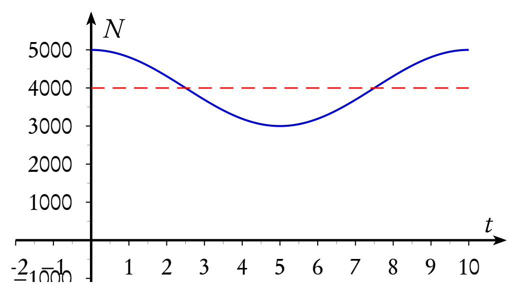
D. $0 \leq t < \frac{5}{6}$ y $\frac{55}{6} < t \leq 10$

Solución: Lo que buscamos es saber cuándo $N(t) > 4000$, esto es, cuándo $1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 4000 > 4000$ y por tanto $\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) > 0$. Pero como $\cos x > 0$ para valores entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ y entre $\frac{3}{2}\pi$ y 2π entonces (esto considerando el periodo entre 0 y 2π). De esta manera tenemos que

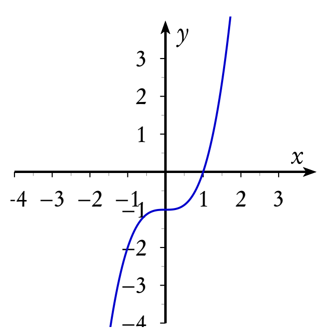
$$\begin{array}{rcl} 0 \leq \frac{\pi}{5}t < \frac{\pi}{2} & & \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{5}t \leq 2\pi \\ 0 \leq \frac{1}{5}t < \frac{1}{2} & \text{y,} & \frac{3}{2} < \frac{1}{5}t \leq 2 \\ 0 \leq t < \frac{5}{2} & & \frac{15}{2} < t \leq 10 \end{array}$$

y por tanto los intervalos que nos interesan son $\left[0, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{15}{2}, 10\right]$.

En la siguiente figura se aprecia la función $N(t)$ en azul y la línea punteada para $N = 4000$ y así corroborar los intervalos antes mencionados.

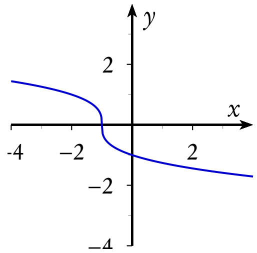


84. La gráfica corresponde a una función f.

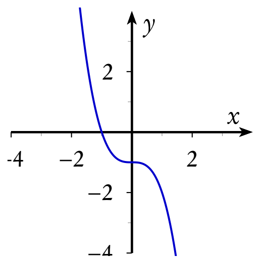


La inversa de f es una función cuya gráfica está formada por los puntos de coordenadas (b, a) tales que (a, b) pertenece a la gráfica de f. La gráfica de la inversa de f es

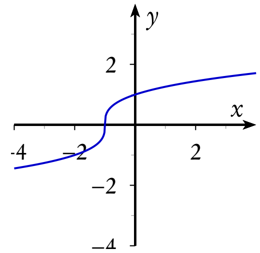
A.



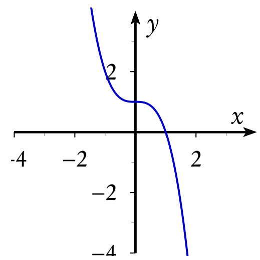
B.



C.



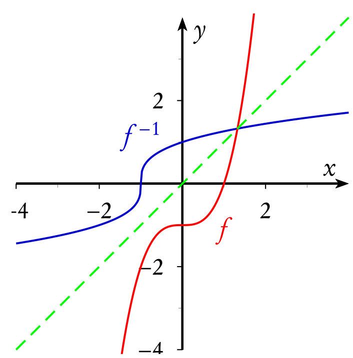
D.



Solución: Al observar la gráfica de f nos percatamos que $(0,-1)$ y $(1,0)$ pertenecen a la curva, y por tanto debe cumplirse que $(-1,0)$ y $(0,1)$ han de pertenecer a la inversa. La respuesta es la C.

Por otro lado, una característica de las funciones inversas es que son reflejo de la función original con respecto a la función idéntica. En este orden de ideas la única función que satisface esa condición es la de la opción C, lo que corrobora lo anteriormente dicho.

La figura siguiente muestra esta característica (en rojo está f, en azul está f^{-1} y en verde está la función idéntica):



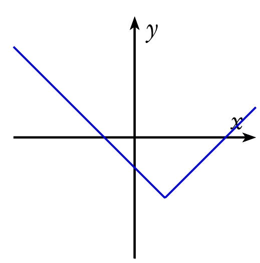
86. La gráfica corresponde a una ecuación de la forma

A. $y = |ax + b| + c$, con $c < 0$

B. $y = |ax + b + c|$, con $c < 0$

C. $y = |ax + b + c|$, con $c > 0$

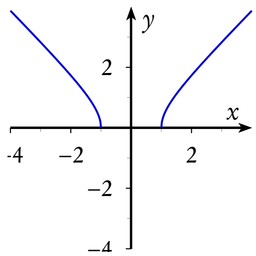
D. $y = |ax + b| + c$, con $c > 0$



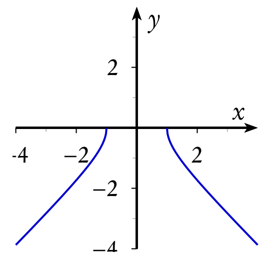
Solución: Para esta pregunta diremos que las opciones B y C quedan descartadas debido a que $y = |ax + b + c| \geq 0$ para cualquier x real sin importar el signo de c. Ahora bien, dado que la función toma también valores negativos y como $|ax + b| \geq 0$ entonces c ha de ser menor que cero para que se cumpla el hecho de que, como se aprecia en la gráfica, y tome valores negativos en un intervalo de su dominio. Concluimos que la respuesta correcta es la A.

88. De las siguientes gráficas la que corresponde a la función $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es

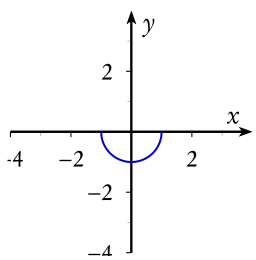
A.



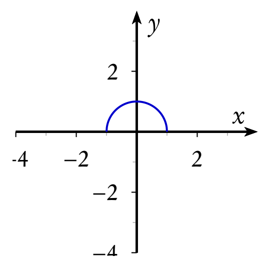
C.



B.



D.



Solución: Es evidente que el dominio de g son todos los reales para los cuales $x^2 - 1 \geq 0$, es decir, $x^2 \geq 1$, de aquí que $x \geq 1$ o $x \leq -1$, es por esto que el dominio de g son todos los reales x excepto aquellos que pertenecen al intervalo $(-1, 1)$. Por otro lado el rango serían sólo números reales positivos y el cero. La única curva que cumple esto es la A y por tanto esta es la opción correcta.

Capítulo 10

Examen ocho (2009-1)

En la prueba de admisión correspondiente al primer semestre de 2009 se plantearon siete (7) preguntas relacionadas con el tema de funciones. En concreto la prueba indaga en qué tanto los aspirantes manejan el álgebra de funciones, las funciones lineales (adicionalmente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas de funciones lineales), y funciones trigonométricas. Se preguntó adicionalmente cosas concretas relacionadas con la traslación de una curva en el plano y aspectos referentes al concepto de dominio de una función y función par e impar.

Preguntas

56. Sea g la función definida por $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Es correcto afirmar que

    A. $g(-1) = -g(1)$
    B. $g(4) = 2g(2)$
    C. $g(x+1) = g(x) + 1$
    D. $g(-x) = g(x)$

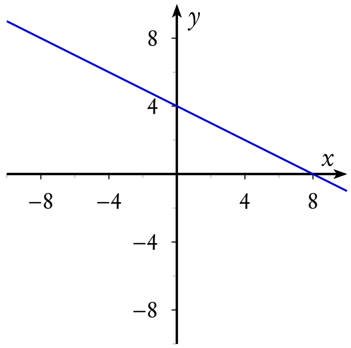
    Solución: Es claro que $g(x)$ es una función impar, lo cual se corrobora en el hecho de que

    $$g(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -g(x).$$

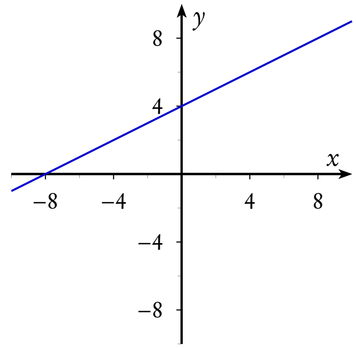
    De esta manera la afirmación dada en A de que $g(-1) = -g(1)$ es correcta. La respuesta correcta es A.

57. La gráfica que representa la recta que pasa por el punto $(0, 4)$ y es perpendicular a la recta $y = \frac{1}{2}x$ es

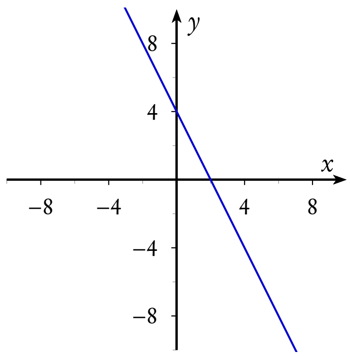
A.



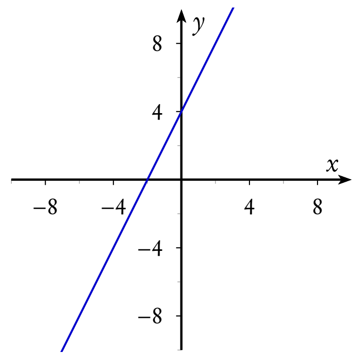
C.



B.



D.



Solución: Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si $m_1 \cdot m_2 = -1$, de modo que en este caso $\frac{1}{2} \cdot m_2 = -1$ y de aquí que $m_2 = -2$.

Para la ecuación de la recta buscada tenemos que

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 4 &= -2\,(x - 0) \\ y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la B.

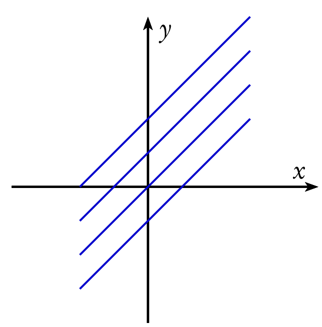
58. Las rectas que se presentan en el sistema de coordenadas cartesianas son paralelas; la ecuación general de una de estas rectas es $Ax + By + C = 0$. De las afirmaciones

(1) la pendiente de todas las rectas es $-A/B$.

(2) para ninguna de las rectas $C = 0$.

(3) $AB > 0$

(4) $AB < 0$

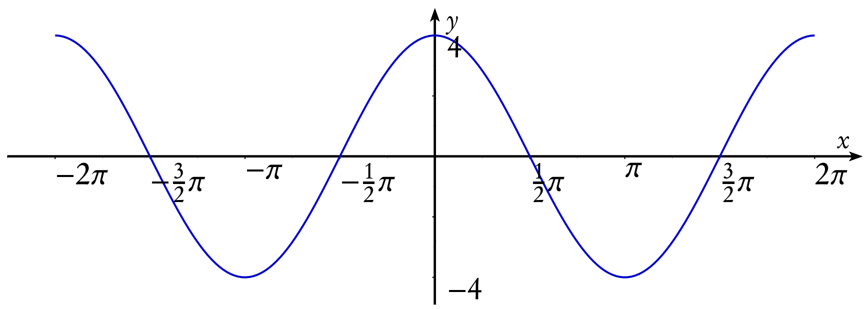


son verdaderas

A. (2), (3) y (4) B. (1) y (4) C. (2) y (4) D. (1) y (3)

Solución: La ecuación de las rectas antes mencionadas puede escribirse como $y = (-Ax - C)/B = (-A/B)x - C/B$. De aquí se concluye que (1) es válida pues se tendría que $m = -A/B$. Por otro lado (2) es incorrecta pues se aprecia que una de las rectas pasa por el origen, lo cual sólo sería válido cuando $C/B = 0$, esto es, $C = 0$. Ahora, siendo la pendiente positiva ($m > 0$) entonces $-A/B > 0$ con lo que A y B han de tener signos contrarios, con lo que (3) es falsa y (4) verdadera. La respuesta correcta es la B.

64. La ecuación que describe la curva de la figura es



A. $y = 4\,\mathrm{sen}\,(x - \pi)$ C. $y = 4\,\mathrm{sen}\,(x + \pi)$

B. $y = 4\,\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ D. $y = 4\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solución: Si consideramos la función $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(x - h)$, lo que se tiene es una función seno que verticalmente se ha amplificado en un factor de 4 y que horizontalmente ha sido trasladada h unidades hacia la derecha, entendiéndose a h como positivo. En el caso concreto mostrado en la gráfica se trata de una traslación hacia la izquierda ($h < 0$) un valor equivalente a la cuarta parte de su periodo, esto es, $(2\pi)/4 = \pi/2$. Así que $h = -\pi/2$ y por tanto $y = 4\,\mathrm{sen}\,(x - (-\pi/2)) = 4\,\mathrm{sen}\,(x + \pi/2)$, de modo que la respuesta correcta es la D.

65. De las afirmaciones

(1) $\tan\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ no está definida para ningún entero n.

(2) Si x, y son elementos del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tales que $x < y$, entonces $\tan x < \tan y$.

(3) Si $(\mathrm{sen}\,x)(\cos x) < 0$, entonces x es un elemento del intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(4) La ecuación $(\tan x)(\cos x) = 1$ **no** tiene solución en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

son **falsas**

A. (3) y (4) B. (1) y (3) C. (1) y (2) D. (2) y (4)

Solución: Tenemos que (1) es **falsa** pues $\tan x$ es una función que está definida para cualquier múltiplo entero de π, y por tanto para cualquier $n\frac{\pi}{2}$ tal que n sea par. La afirmación (2) es correcta puesto que en dicho intervalo la tangente es una función creciente, así que si $x < y$ entonces $\tan x < \tan y$, para $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (3) es **falsa** dado que aunque en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tenemos que $\operatorname{sen} x > 0$ y $\cos x < 0$, por lo que en efecto su producto allí será negativo, también esto ocurre en otros intervalos, como en $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ en donde $\operatorname{sen} x < 0$ y $\cos x > 0$. (4) es verdadera debido a que $(\tan x)(\cos x) = \operatorname{sen} x = 1$, pero $\operatorname{sen} x = 1$ cuando $x = \pi/2$, valor que no pertenece al intervalo en mención.

La respuesta correcta es la B.

66. La gráfica de la función $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = \cos x$, $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia

A. arriba. B. abajo. C. la derecha. D. la izquierda.

Solución: Una función de la forma $y = f(x - h)$ es una que partiendo de $y = f(x)$ ha sido trasladada h unidades hacia la derecha (con $h > 0$). Ahora, dado que tenemos que $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, esto es $h = -\frac{\pi}{2} < 0$, entonces significa que la traslación se ha dado hacia la izquierda. La respuesta correcta es la D.

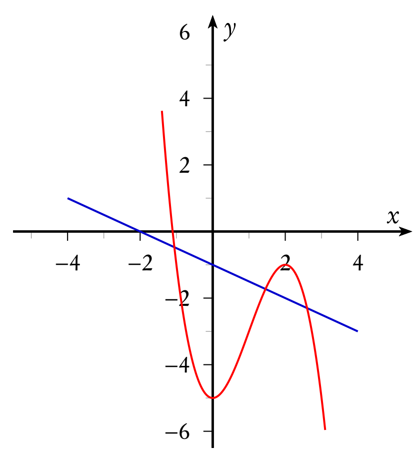
71. Las siguientes son las gráficas de las funciones f y g. Suponga que $g(x) = mx + b$. Es verdadero que

A. $(f + g)(2) > 0$.

B. $(f - g)(x) = 0$ para dos valores negativos de x.

C. $(f/g)(0)$ no está definida.

D. $(f \cdot g)(-1) > 0$.



Solución: Tenemos que $(f + g)(2) = f(2) + g(2)$ donde $g(2) < f(2) < 0$ por lo que $(f + g)(2) < 0$ y por tanto A es falsa. Por otro lado $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0$ implica que $f(x) = g(x)$ lo cual es cierto para un valor negativo de x y no para dos (B es falsa). $(f/g)(0)$ sí está definida pues $g(x) \neq 0$ y por tanto C es falsa. D es verdadera pues $(f \cdot g)(-1) = f(-1) \cdot g(-1) > 0$ porque $f(-1)$ y $g(-1)$ son negativos. De esta manera se tiene que la respuesta correcta es la D.

Capítulo 11

Examen nueve (2009-2)

Para la segundaprueba de admisión del año 2009 la Universidad Nacional planteó nueve (9) preguntas sobre funciones que indagan principalmente sobre funciones trigonométricas, polinómicas (de grados uno, dos y tres para ser más precisos), racionales, función par, dominio y rango, y sucesiones numéricas.

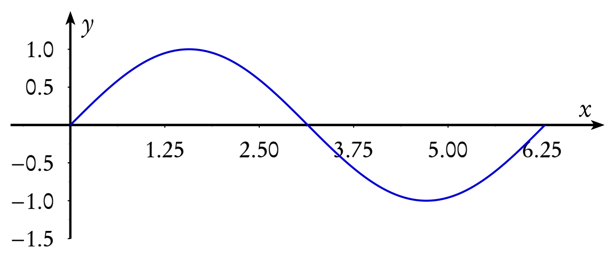
Preguntas

54. El mínimo valor que toma la función $f(t) = -3\cos(2t - 5)$ para cualquier número real es

    A. -5 B. -3 C. 2 D. 3

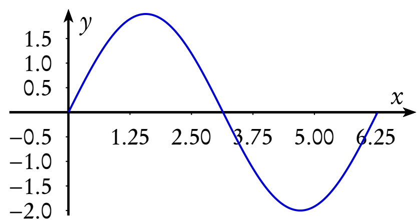
    Solución: Tenemos que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, en particular $-1 \leq \cos(2t-5) \leq 1$, que al multiplicar por -3 nos da que $3 \geq -3\cos(2t-5) \geq -3$, lo cual significa que $-3 \leq f(t) \leq 3$, por lo tanto podemos afirmar que el mínimo es -3. La respuesta correcta es la B.

56. La gráfica representa la ecuación $y = \operatorname{sen} x$ para x entre 0 y 2π.

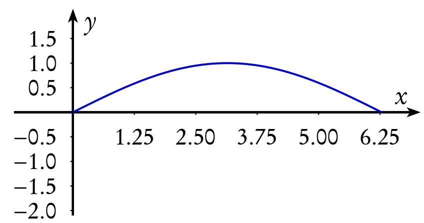


La gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ para x entre 0 y 2π es

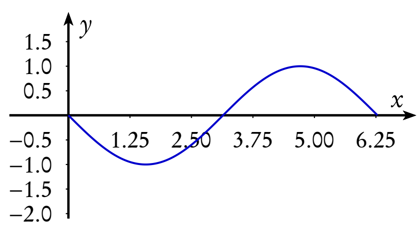
A.



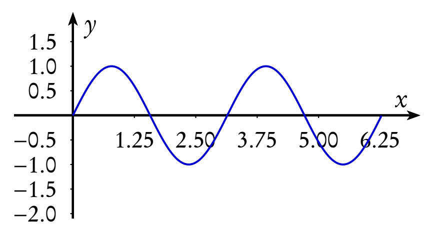
C.



B.



D.



Solución: El factor 2 de la x lo que hace es modificar el periodo de la función seno reduciéndolo a la mitad (de 2π a sólo π), lo que implica que en el intervalo $[0, 2\pi]$ haya dos ciclos como se aprecia en D. D es la respuesta correcta.

60. El producto de las soluciones de la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$ es

A. 5/2 B. 1/2 C. 1 D. 2

Solución: Esto es equivalente a buscar el producto de las raíces de la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Una raíz r de una función es un número real para el cual $f(x) = 0$, lo cual convierte a la función en una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y cuyas raíces son

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto $r_1 + r_2 = (-2b)\,/\,(2a) = -b/a$, y

$$r_1 r_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

así que la solución del ejercicio planteado es $2/2 = 1$. C.

62. El polinomio $x^3 - 8x^2 + 4x + 48$ posee tres raíces reales una de las cuales es 4. La suma y el producto de las otras dos raíces son, respectivamente,

A. -4 y -12 B. 4 y -12 C. -4 y 12 D. 4 y 12

Solución: Sea $f(x) = x^3 - 8x^2 + 4x + 48$. Puesto que 4 es raíz entonces $f(x) = (x-4)q(x)$, además $f(4) = 0$. Entonces por división sintética

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -8 & 4 & 48 & 4 \\ & 4 & -16 & -48 & \\ \hline 1 & -4 & -12 & 0 & \end{array}$$

lo cual significa que $f(x) = (x-4)\left(x^2 - 4x - 12\right)$. Ahora, puesto que $f(x) = (x-4)q(x)$ entonces $x = 4$ o $q(x) = 0$, es decir estamos buscando las raíces de $q(x) = x^2 - 4x - 12$, cuya suma y producto serían respectivamente $-b/a = -(-4)/1 = 4$ y $c/a = -12/1 = -12$. La respuesta correcta es la B.

63. Si el polinomio $x^3 + \left(k^2 - 1\right)x^2 - 4x + (4k + 1)$ es divisible por $x + 1$, entonces k es igual a

A. -3 ó -1
B. $-2 + \sqrt{7}$ ó $-2 - \sqrt{7}$
C. $2 + \sqrt{7}$ ó $2 - \sqrt{7}$
D. 3 ó 1

Solución: Tenemos que $p(x) = (x+1)q(x)$ luego -1 es raíz puesto que $p(-1) = (-1+1)q(-1) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} -1 + \left(k^2 - 1\right) - 4(-1) + 4k + 1 &= 0 \\ k^2 + 4k + 3 &= 0 \\ (k+3)(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

así que $k = -1$ ó $k = -3$. La respuesta es la A.

64. La recta $y = mx + 1$ y la hipérbola $y = 2/(2x - 1)$ se intersectan en $x = 1$ y en $x = t$. Los valores de m y t, respectivamente, son

A. 1 y $\frac{3}{2}$ B. -1 y $\frac{3}{2}$ C. -1 y $-\frac{3}{2}$ D. 1 y $-\frac{3}{2}$

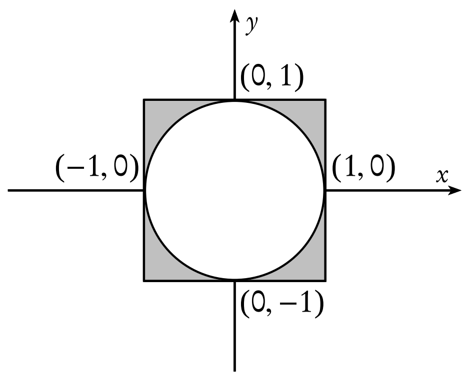
Solución: Tenemos que $y(1) = m(1) + 1 = m + 1$, y $y(1) = 2/(2(1) - 1) = 2$. Así $m + 1 = 2$ y por tanto $m = 1$.

Ahora $y(t) = mt + 1 = t + 1$, y $y(t) = 2/(2t - 1)$, de aquí que

$$\begin{aligned}\frac{2}{2t-1} &= t + 1\\ 2 &= 2t^2 + 2t - t - 1\\ 0 &= 2t^2 + t - 3\\ 0 &= 2t^2 - 2t + 3t - 3\\ 0 &= 2t(t-1) + 3(t-1)\\ 0 &= (2t+3)(t-1)\end{aligned}$$

luego $t = 1$ ó $t = -3/2$. De este modo $m = 1$ y $t = -3/2$, por lo que la respuesta es la D.

65. En la gráfica la región sombreada representa el conjunto:



A. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\right\} \cup$
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - x^2} < y < 1 \text{ ó } -1 < y < -: \sqrt{1 - x^2}\right\}$

B. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\right\} \cap$
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - x^2} < y < 1 \text{ ó } -1 < y < -: \sqrt{1 - x^2}\right\}$

C. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\right\} \cup$
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - x^2} < y < 1 \text{ y } -1 < y < -: \sqrt{1 - x^2}\right\}$

D. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\right\} \cap$
$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1 - x^2} < y < 1 \text{ y } -1 < y < -: \sqrt{1 - x^2}\right\}$

Solución: En efecto, de la gráfica concluimos que $x \in (-1, 1)$, región que se interseca con la región que resulta de unir $-1 < y < -\sqrt{1 - x^2}$ con $\sqrt{1 - x^2} < y < 1$. De modo que la respuesta correcta es la B.

66. Suponga que f es una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(-x)$ para todo x. Entonces es correcto afirmar que la gráfica de f es simétrica con respecto

A. al eje y C. al origen

B. al eje x D. a la recta $y = x$

Solución: Una función real f para la cual se cumpla que $f(x) = f(-x)$ para todo x de su dominio se denomina *par*. Son ejemplos de funciones pares $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, entre otras. Dado que y es igual tanto para x como para $-x$ en este tipo de funciones entonces se cumple que sus curvas han de ser simétricas con respecto al eje y. La respuesta es la A.

67. Observe el patrón

			□□□□
		□□□	□□□□
	□□	□□□	□□□□
□□□	□□□□	□□□□□□	□□□□□□□
Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4

Si el patrón continua, la cantidad de □ que se deberán utilizar en el paso 50 es

A. 100 B. 102 C. 2500 D. 2502

Solución: La figura indica la siguiente situación: para $n = 1$ tenemos 3 cuadritos, para $n = 2$ tenemos 6 cuadritos, para $n = 3$, once cuadritos, para $n = 4$, 18 cuadritos. Tenemos la sucesión $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 11$, $a_4 = 18$, pero $3 = 1^2 + 2$, $6 = 2^2 + 2$, $11 = 3^2 + 2$, $18 = 4^2 + 2$, de donde deducimos que $a_n = n^2 + 2$. Por lo tanto $a_{50} = 50^2 + 2 = 2502$. La respuesta correcta es la D.

Capítulo 12

Examen diez (2010-2)

En la presente prueba que corresponde al examen de admisión para el segundo semestre de 2010 se plantearon cinco preguntas relacionadas con funciones. Los conceptos abarcados corresponden a funciones lineales, trigonométricas, logarítmicas, pares, dominio de una función, evaluación de una función y límites de funciones.

Preguntas

58. De las afirmaciones:

    (1) $\cos(-x) = -\cos x$

    (2) Hay infinitos números reales x para los cuales $\operatorname{sen} x = \cos x$.

    A. (1) es falsa y (2) es verdadera
    B. (1) y (2) son verdaderas.
    C. (1) y (2) son falsas.
    D. (1) es verdadera y (2) es falsa.

    Solución: (1) es falsa ya que la función coseno es *par*, de modo que $\cos(-x) = \cos x$. Por su parte (2) es verdadera ya que $\operatorname{sen} x = \cos x$ para $x = \pi/4$ y por lo tanto también para toda $x = \pi/4 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La respuesta por tanto es la A.

59. El punto ________ está sobre la recta cuya ecuación es $2x - 3y - 1 = 0$.

    A. $(3, 2)$ B. $(2, 3)$ C. $(5, 3)$ D. $(3, 5)$

    Solución: Reemplazamos en la ecuación y con ello verificamos cuál de los puntos dados satisfacen en efecto la igualdad. A saber: $2(3) - 3(2) - 1 = -1 \neq 0$; $2(2) - 3(3) - 1 = -6 \neq 0$; $2(5) - 3(3) - 1 = 0$; $2(3) - 3(5) - 1 = -10 \neq 0$.

    La respuesta correcta es la C.

60. Sean x y y números reales que verifican la igualdad $\log_{10} y = 2\log_{10} x$. La gráfica que ilustra la relación entre las variables x y y es la parte de la curva ________ con la restricción ________ .

A. $y = 2x,\ x > 0$ C. $y = 2x,\ x \neq 0$
B. $y = x^2,\ x > 0$ D. $y = x^2,\ x \neq 0$

Solución: Es claro que $\log_{10} x$ se restringe sólo para valores positivos de x. Por otro lado por propiedades de los logaritmos se tiene que $2\log_{10} x = \log_{10} x^2$ por lo que $\log_{10} y = \log_{10} x^2$, y de este modo $\log_{10} y - \log_{10} x^2 = 0$ de aquí que $\log_{10}\left(y/x^2\right) = 0$. Esto significa que $10^0 = y/x^2$, es decir que $y/x^2 = 1$ de donde $y = x^2$. La respuesta correcta es la B.

64. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 5x + 7$ en el punto $(1, 3)$ es

A. 3 B. -3 C. 2 D. -2

Solución: La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = a$ se define como $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \left(f(a+h) - f(a)\right)/h$, lo que se traduce para nuestro caso en que

$$\begin{aligned}
m = f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left((1+h)^3 - 5(1+h) + 7\right) - \left(1^3 - 5(1) + 7\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 5 - 5h + 7 - 1 + 5 - 7}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 3h^2 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \left(h^2 + 3h - 2\right) \\
&= -2
\end{aligned}$$

La respuesta es por tanto la D.

65. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{-x - 1}$, sobre los dominios de f y g es correcto afirmar que

A. $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g = \emptyset$ C. $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g$
B. $\operatorname{Dom} f \subset \operatorname{Dom} g$ D. $\operatorname{Dom} g \subset \operatorname{Dom} f$

Solución: $\operatorname{Dom} f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1,\ \text{o},\ x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$\mathrm{Dom}g = \{x \in \mathbb{R} : -x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\} = (-\infty, -1]$

Se aprecia entonces que $\mathrm{Dom}g \subset \mathrm{Dom}f$ y por tanto la respuesta es la D.

Capítulo 13

Examen once (2011-2)

Para la prueba de admisión correspondiente al segundo periodo de 2012, la Universidad Nacional de Colombia dentro del apartado de matemáticas tres preguntas relacionadas con funciones. Una trata sobre las funciones polinómicas y sus raíces reales, otra sobre las funciones compuestas y la evaluación de las mismas, y finalmente otra relacionada con las funciones trigonométricas. A continuación encontramos dichas preguntas, su análisis y solución.

Preguntas

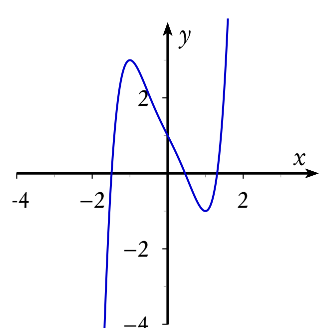
37. La gráfica corresponde a la curva cuya ecuación es $x^5 - x^3 - 2x + 1 = y$. De la ecuación $x^5 - x^3 - 2x + 1 = 0$ es correcto afirmar que

    A. tiene cinco soluciones reales.

    B. tiene sólo una solución real positiva.

    C. no tiene soluciones reales.

    D. tiene dos soluciones reales positivas.



Solución: La ecuación en mención equivale a $f(x) = 0$ que no es otra cosa que las raíces o puntos de corte que con el eje x tiene la curva de f. En la gráfica se aprecian tres raíces reales de las cuales dos son positivas. Por tanto la respuesta correcta es la D.

38. Considere las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x}$. El valor de $(g \circ f)(-2)$ es

A. $-\dfrac{15}{16}$ B. $\dfrac{1}{6}$ C. 6 D. $\dfrac{1}{16}$

Solución: Tenemos que

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = \frac{1}{2f(-2)} = \frac{1}{2\left((-2)^2 - 1\right)} = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$$

La respuesta es la B.

43. Considere los siguientes enunciados:

(1) Si $\cos 2x > 0$, entonces $\cos x > 0$.

(2) $(\operatorname{sen} x)(\cos x) < 1$ para todo número real x.

De los enunciados es correcto afirmar que

A. (1) y (2) son verdaderos.
B. (1) y (2) son falsos.
C. (1) es falso y (2) es verdadero.
D. (1) es verdadero y (2) es falso.

Solución: Tomemos $2x$ en el cuarto cuadrante, es decir, $\frac{3}{2}\pi < 2x < 2\pi$, entonces $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$. Aquí tenemos que $\cos 2x > 0$ mientras que $\cos x < 0$. A manera de ejemplo, sea $2x = \frac{5}{3}\pi$, y por tanto $x = \frac{5}{6}\pi$; aquí tenemos que $\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} > 0$ mientras que $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Concluimos que (1) es falso.

Por otro lado tenemos que $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\left(2 \sin x \cos x\right) = \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} < 1$. De aquí que (2) es verdadero para todo $x \in \mathbb{R}$.

La respuesta correcta es la C.

Parte III

Anexos

En este apartado se incluye información adicional y pertinente para este trabajo de grado.

Anexo A

Exámenes estudiados

Las once pruebas estudiadas se presentan a continuación. Corresponden a los exámenes de admisión como fueron propuestos en su momento por la Universidad Nacional de Colombia como requisito de admisión y entre los cuales se hallan las preguntas que con respecto a funciones fueron analizadas y resueltas en los anteriores capítulos.

Examen
2004-2

11. Si "*La concentración de bióxido de carbono se ha incrementado un 0.3 por ciento cada año*", se infiere que si la concentración de CO_2 en la atmósfera en una fecha dada es "x", la concentración al cabo de un año será:

A. $x\left(1+\frac{3}{10}\right)$

B. $x\left(1+\frac{0.3}{100}\right)$

C. $0,3\left(x+\frac{1}{10}\right)$

D. $3\left(x+\frac{1}{100}\right)$

12. Según el texto, el mayor impacto humano sobre el clima se debe

A. a la generación de oxido nitroso.
B. a la agricultura intensiva del arroz.
C. al consumo de combustibles fósiles.
D. a la ganadería en gran escala.

13. En la afirmación «*Los seres humanos ejercemos poco control directo sobre el volumen de agua en la atmósfera, pero producimos otros gases de efecto invernadero que lo intensifican.*» muestra que

A. no hay coherencia entre la industrialización y las costumbres de la población humana.
B. los seres humanos no controlan ciertas emisiones pero otras sí.
C. el deterioro del medio ambiente se debe a falta de políticas estatales.
D. el efecto invernadero se ocasiona porque algunos grupos humanos descuidan la atmósfera.

14. El calentamiento global a que se refiere el texto esta relacionado con que la temperatura promedio mundial

A. ha subido 33°C desde 1850
B. ha subido 3,5°C desde "la pequeña edad del hielo"
C. aumentará aproximadamente 2°C en 100 años
D. aumentará 0,3°C por año.

PULSO DE LA TIERRA

El agua mundial ¿alcanza para todos?

La disponibilidad de agua dulce depende de varios factores humanos

Se evapora del océano, se precipita al suelo, corre por los ríos y vuelve al mar, tal es el ciclo del agua, un recurso aparentemente inagotable. Sin embargo, sólo 2,5 por ciento del agua en la Tierra es dulce y casi toda está congelada en los casquetes polares o en forma de nieve. No más el 0,6 por ciento del agua fresca es aprovechable y los cambios climáticos podrían modificar su distribución y disponibilidad, pues el aumento en el nivel del mar volvería salobre las aguas dulces de la costa.

El ciclo hidrológico produce una cantidad constante de agua, mas la calidad se deteriora al crecer la población humana. Unos 80 países ya han declarado un estado de escasez, y hoy más de mil millones de personas no tiene agua potable y 25 mil mueren cada día por algún padecimiento relacionado con el líquido vital. Al agravarse la escasez de agua, lo mismo ocurre con la competencia – por ejemplo entre naciones que comparten la ribera de un río- y esto podría engendrar violencia.

Según el especialista Meter H. Gleick, cada individuo necesita por lo menos 13 galones (0,05m^3) diarios de agua dulce para uso personal y sanitario. Pero la sexta parte de la población mundial debe conformarse con menos, pues la densidad poblacional y la contaminación ocasionan escasez aun en las regiones más húmedas de África y Asia.

Parte del agua puede volver a utilizarse, aunque requiere de un proceso previo de purificación. Mas es imposible reciclar la mayor parte del agua usada en irrigación, la actividad de mayor consumo.

(National Geographic en español, Abril 2001)

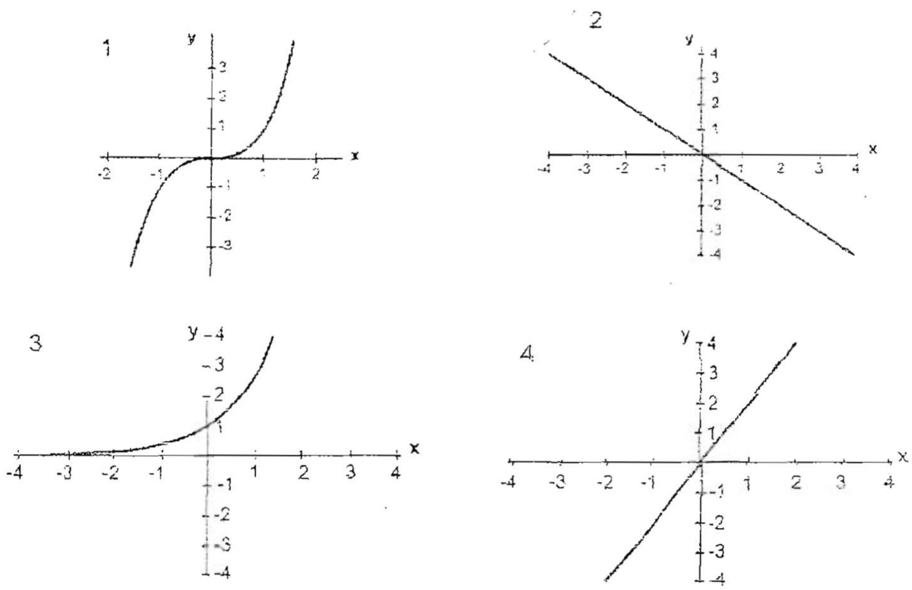
24. Suponga que A y B son dos puntos del planeta Tierra, que A se halla a 30° de longitud oeste y B se encuentra a 75° de longitud oeste, en **falso** que:

A. Entre A y B existen tres horas de diferencia.
B. Entre A y B existen siete horas de diferencia.
C. En B siempre es más temprano que en A.
D. Cuando en A son las 3 p.m., en Greenwich son las 5 p.m.

25. Si en cierto punto A es mediodía cuando en Greenwich es medianoche, entonces el punto A se halla a una longitud de

A. 15°
B. 90°
C. 180°
D. 360°

26. Observe las gráficas de las funciones que aparecen a continuación.



Las variables y y x son

A. directamente proporcionales en todas las funciones.
B. directamente proporcionales sólo en la función 4.
C. inversamente proporcionales en todas las funciones.
D. directamente proporcionales sólo en la gráfica 3.

27. El punto P que se señala en la recta numérica corresponde al número racional

A. $\frac{8}{10}$

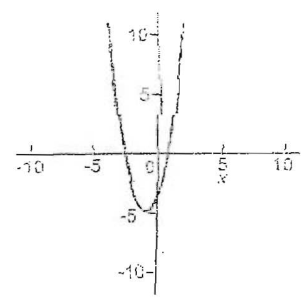
B. $\frac{10}{8}$

C. $-\frac{10}{8}$

D. $-\frac{8}{10}$

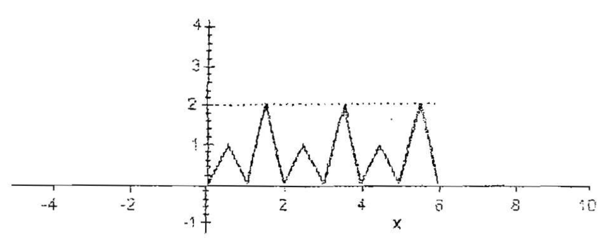
28. La siguiente gráfica corresponde a una ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Se puede afirmar que

A. a y b son positivos y c es negativo
B. b es positivo y a y c son negativos
C. a es positivo y b y c son negativos
D. c es positivo y a y b son negativos



29. Una característica de las funciones periódicas es la de que su gráfica se repite a intervalos de la misma longitud. La longitud del menor intervalo en el cual se repite, recibe el nombre de periodo. De la función representada por la gráfica se puede decir que:

A. no es periódica
B. su periodo es 1
C. su periodo es 2
D. su periodo es 4



Responda las preguntas 30 a 32 a partir de la siguiente información.

A finales del año 1990 la población de una ciudad *A* era de 500.000 habitantes y ha crecido aproximadamente en 9.000 habitantes por año; mientras que la población de una ciudad *B* era en ese mismo año de 696.000 habitantes y ha decrecido aproximadamente en 800 personas por año.

ESPACIO PARA REALIZAR OPERACIONES

30. De acuerdo con las condiciones del problema, al finalizar el 2004 el número de habitantes de las dos ciudades serán:

	Ciudad A	Ciudad B
A.	626.000	684.800
B.	374.000	707.000
C.	374.000	684.800
D.	626.000	707.200

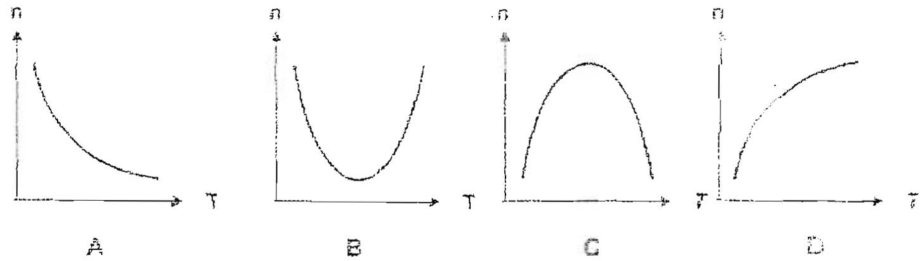
31. El número de habitantes de la ciudad *B*, transcurrido un tiempo *t*, se puede determinar con la expresión:

A. $P(t) = 696.000 + 800\,t$
B. $P(t) = 696.000 - 800\,t$
C. $P(t) = 500.000 + 9000\,t$
D. $P(t) = 500.000 - 9000\,t$

32. Suponiendo que las razones de crecimiento y decrecimiento de la población en estas ciudades se mantiene, se puede afirmar que al terminar año 2010,

A. la ciudad A tendrá más habitantes.
B. la ciudad B tendrá más habitantes
C. las dos ciudades tendrán más de 700.000 habitantes.
D. las dos ciudades tendrán el mismo número de habitantes.

51. La ecuación de estado de los gases ideales es $PV = nRT$, donde P es presión, V es volumen, n es número de moles, R es una constante y T es temperatura. De las siguientes gráficas la que mejor expresa la relación entre el número demoles del gas en función de la temperatura en condiciones P y V constantes es:



52. En las siguientes gráficas se compere el vector momento dipolar $(\mu = d \times q)$ de los enlaces de un átomo A con otros dos átomos, B y C, en dos moléculas diferentes, I y II.

Molécula I Molécula II

De las gráficas se deduce que la

A. longitud del enlace A—B es igual a la de A—C en la molécula II.
B. electronegatividad de C unido a A es mayor que la de B unido a A.
C. electronegatividad de B unido a A es mayor que la de C unido a A.
D. longitud del enlace A—B es igual a la de A—C en la molécula I.

53. Un gas ideal ocupa un volumen V, a cierta presión P, y temperatura T. El volumen que ocupará al triplicar la presión y reducir la temperatura a la mitad, será:

A. $6V$
B. $2V/3$
C. $3V/2$
D. $V/6$

54. El número atómico del cloro es 17. Un átomo de cloro con 14 electrones es el ion:

A. Cl^{-1}
B. Cl^{+1}
C. Cl^{+3}
D. Cl^{+5}

Examen

2005-2

ESPACIO PARA REALIZAR OPERACIONES

51. Si $f(a) = a+1$ y $F(a,b) = 2a + b^2$ entonces $F(-2, f(1))$ es igual a

A. -3
B. -1
C. 2
D. 0

52. Sean

P la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2x + 3$

Q la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 2x + 1$

Considere las siguientes afirmaciones suponiendo que ***P*** y **Q** están trazadas en e mismo sistema de coordenadas

I ***P*** y ***Q*** coinciden
II ***P*** está a la izquierda de ***Q***
III ***P*** está a la derecha de ***Q***
IV ***P*** está más arriba que ***Q***
V ***P*** está más abajo que ***Q***

De las anteriores afirmaciones es o son verdaderas

A. sólo I
B. II y V
C. II y IV
D. III y IV

53. Una recta que **no** intercepta el eje **X** en el punto $x = 2$ tiene por ecuación

A. $x-2y = 4$
B. $3x + y-6=0$
C. $x - 3y = 2$
D. $5x - 4y = 10$

54. La diagonal de un rectángulo mide 17 cm y su perímetro 46 cm. Si $x,\ y$ son sus lados, éstos se pueden determinar resolviendo el sistema de ecuaciones

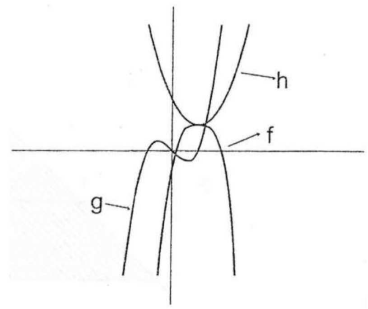
A. $\begin{aligned} x^2+y^2&=17 \\ x+y&=46 \end{aligned}$

C. $\begin{aligned} x^2+y^2&=17 \\ x+y&=23 \end{aligned}$

B. $\begin{aligned} x^2+y^2&=289 \\ x+y&=23 \end{aligned}$

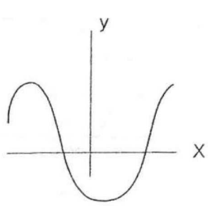
D. $\begin{aligned} x^2+y^2&=289 \\ x+y&=46 \end{aligned}$

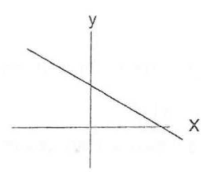
55. Una raíz real de una función f es un número real *r* que satisface *f(r) = 0.* Observando las siguientes gráficas, de las raíces de las funciones *f, g* y *h* se puede afirmar que

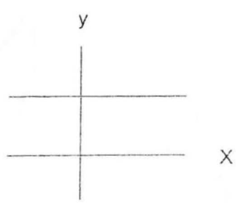


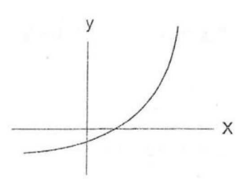
A. *f* y *h* tienen una raíz real en común
B. *g* tiene cuatro raíces reales
C. *f* y *g* tienen una raíz real en común
D. *h* tiene una raíz real

56. Se dice que una función $f(x)$ es creciente si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ para números reales cualesquiera x_1 y x_2. Entre las siguientes gráficas, la que representa una función creciente es

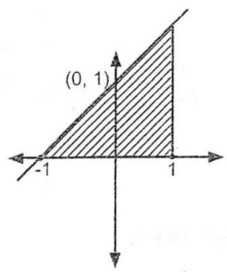
A.


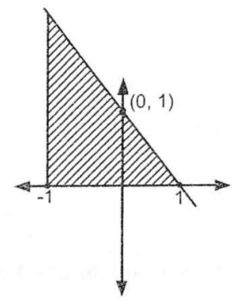
C.


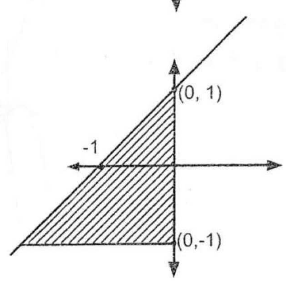
B.


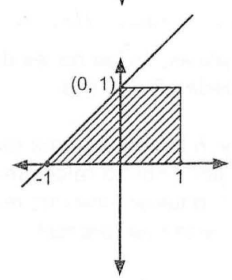
D.


57. La gráfica que representa correctamente el subconjunto
$S = \{(x,y) / -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x+1\}$ es

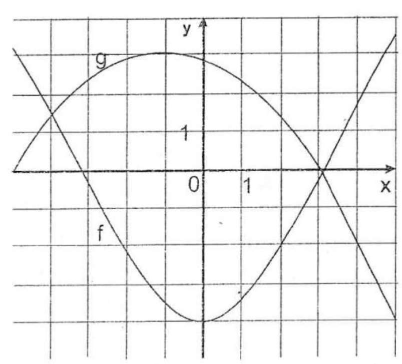
A


C


B


D


58. Observe las gráficas de las funciones *f*, *g* que se presentan a continuación.



De las siguientes afirmaciones

I $f(4) = g(4) = 0$
II *f* y *g* tienen el mismo dominio
III $f(1) > g(1)$
IV *f* y *g* interceptan el eje *x* en un único punto
V $g(x) > f(x)$ para todo *x* en el intervalo $[-4, 4]$

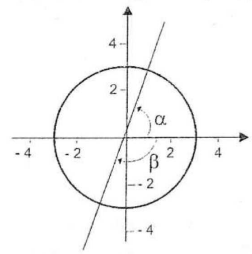
Es o son verdaderas

A. I y II
B. II y IV
C. solamente II
D. solamente IV

ADMISIÓN SEGUNDO SEMESTRE DE 2005 F1

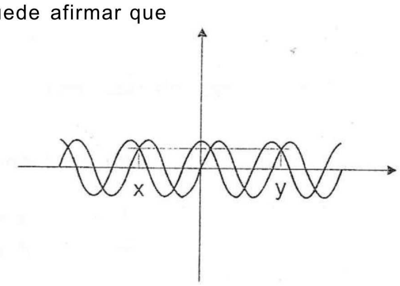
63. De los ángulo α y β, representados en la gráfica, se puede afirmar que

A. $sen\,\alpha = sen\,\beta$
B. $sec\,\beta = sec\,\alpha$
C. $tan\alpha = tan\,\beta$
D. $csc\,\beta = csc\,\alpha$



64. En el sistema de coordenadas se muestran ¡as gráficas de las funciones seno y coseno. A partir de ellas se puede afirmar que

A. $sen\,x = cos\,y$
B. $cos\,x = -cos\,y$
C. $sen\,x = -sen\,y$
D. $sen\,y = -cos\,x$



65. Si $f(\theta) = cos\,\frac{\pi - \theta}{3}$, entonces $f(2\pi) - f(0)$ es igual a

A. $2\,cos\,\frac{\pi}{3}$

B. $-2\,cos\,\frac{\pi}{3}$

C. 0

D. $cos\,\frac{\pi}{3}$

66. Si $g(x) = sec\,x + \cos x$ es verdadero afirmar que

A. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

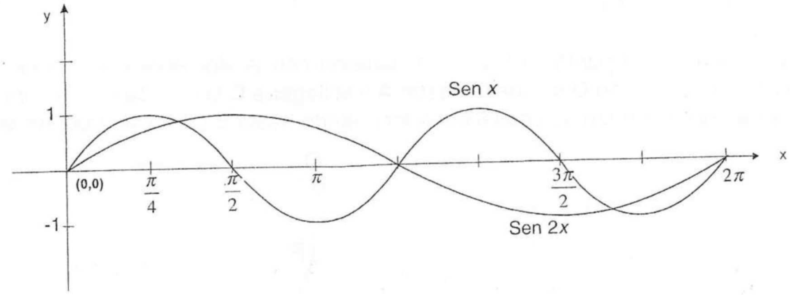
B. $g(\pi) = -1$

C. $g(\pi)$ no está definida

D. $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no está definida

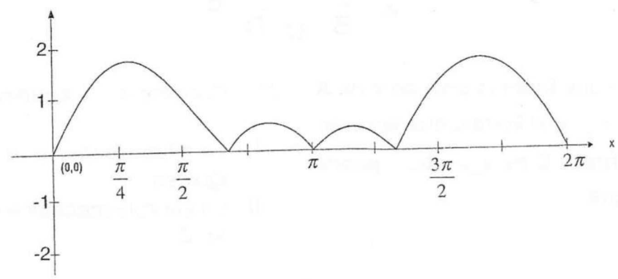
ADMISIÓN SEGUNDO SEMESTRE DE 2005

67. En la figura se han trazado las gráficas de las funciones $sen\ x$ y $sen 2x$

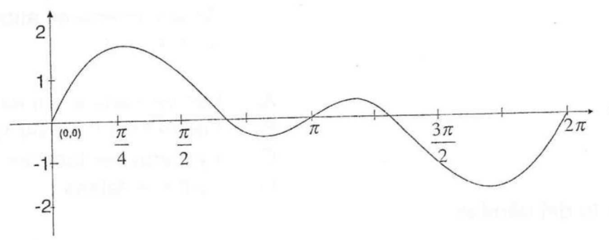


La gráfica que corresponde a la función $sen\ x + sen\ 2x$ es

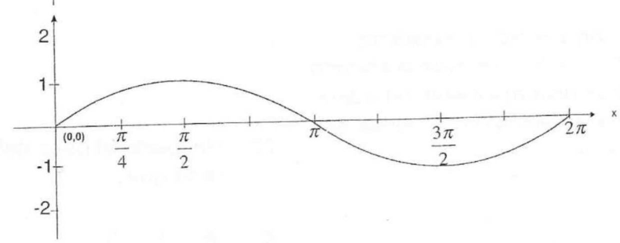
A.



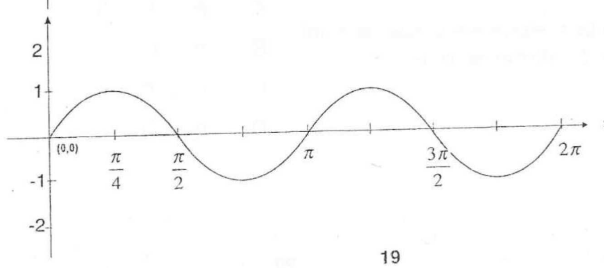
B.



C.



D.



Examen
2006-1

57. Sea $f(x) = \dfrac{(x+2)}{(2x)}$. Considere las siguientes afirmaciones:

I $f(x) = 0$ sólo si $x = -2$

II $f(x+1) = f(x) + \left(\dfrac{1}{2}\right)$

III $f(3x) = 3f(x)$

IV Si $f(x) = 1$, entonces $x = 2$

De las anteriores afirmaciones son verdaderas

A. I y III

B. II y IV

C. II y III

D. I y IV

58. Si $f(x) = 20 + x - x^2$ y $f(a) = 8$, entonces a es igual a

A. -4 ó 3

B. -3 ó 4

C. 2 ó 5

D. -2 ó -5

59. Las funciones f y g están definidas por $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x^4 - 18x^2 + 81$, los valores de x para los cuales **no** está definida la función $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ son

A. 3 y 2

B. 3 y -1

C. 2 y -2

D. 3 y -3

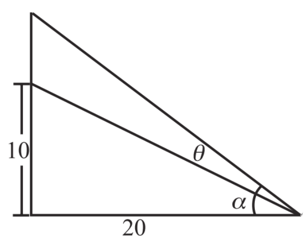
66. Se construyó una rampa de 10 metros de altura con una base de 20 metros. El valor del ángulo θ que se le debe incrementar al ángulo α para que la altura de la rampa sea igual a 15 metros, sin cambiar la medida de la base, satisface la siguiente igualdad:

A. $sen(\theta) = \frac{11}{25}\sqrt{5}$

B. $sen(\theta) = \frac{11}{5}\sqrt{5}$

C. $cos(\theta) = \frac{11}{25}\sqrt{5}$

D. $cos(\theta) = \frac{11}{5}\sqrt{5}$



67. Si el ángulo α mide 4 radianes, entonces

A. $sen\alpha$ y $cos\alpha$ son positivos.

B. $sen\alpha$ y $cos\alpha$ son negativos.

C. $sen\alpha$ es positivo y $cos\alpha$ es negativo.

D. $sen\alpha$ es negativo y $cos\alpha$ es positivo.

68. La función $y = 4\,cos\frac{x}{2} - 3\,sen2x$ es de período

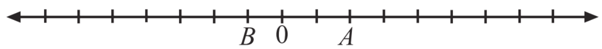
A. π

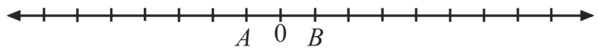
B. 4π

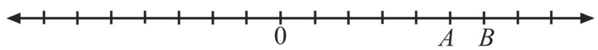
C. 3π

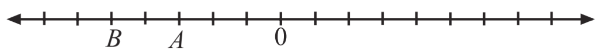
D. 2π

69. Si la distancia entre dos puntos A y B de una recta numérica **no** es menor que 3, la gráfica que representa dos puntos con esta condición es

A. 

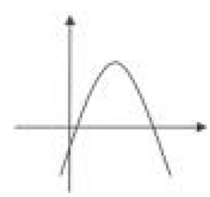
B. 

C. 

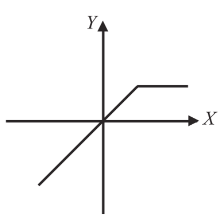
D. 

70. La gráfica tiene ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Es correcto afirmar que a y c tienen ______ y las soluciones de la ecuación $y = 0$ tienen ______.

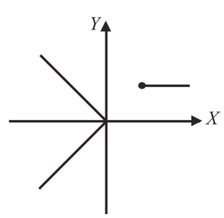
A. mismo signo - mismo signo
B. signos contrarios - mismo signo
C. mismo signo - signos contrarios
D. signos contrarios - signos contrarios



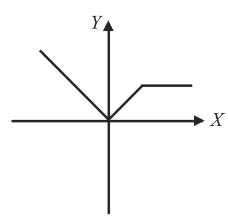
71. La gráfica de la función $f(x)$ definida por $f(x)\begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ se representa correctamente en



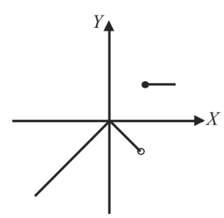
A



B



C



D

Examen

2006-2

MATEMÁTICAS

Preguntas 48 a 67

48. Se dice que una sucesión de números está en progresión aritmética si cada uno de ellos es igual al anterior más una cantidad constante, llamada diferencia de la progresión. De las siguientes sucesiones de números la que **no** está en progresión aritmética es

A. $\frac{-25}{2}, \quad -7, \quad \frac{-3}{7}, \quad 4, \ldots$

B. $\frac{2}{3}, \quad 2, \quad \frac{10}{3}, \quad \frac{14}{3}, \quad 6, \ldots$

C. $\frac{1}{25}, \quad \frac{-1}{25}, \quad \frac{1}{5}, \quad -1, \ldots$

D. $\frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{5}, \quad \frac{6}{\sqrt{5}}, \ldots$

49. Un entero positivo n se denomina un número perfecto si es igual a la suma de todos sus divisores propios, el número 1 se cuenta como un divisor propio pero el número no. Un ejemplo de número perfecto es

A.	B.	C.	D.
3	4	5	6

50. Si x es un número real, se define el valor absoluto de x de la siguiente manera: $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $|x| = -x$ si $x < 0$. De acuerdo con la definición anterior, es verdadero que

A. si $x \geq -3$, $|x+3| = x+3$

B. si $x < 0$, $|x-2| = x-2$

C. si $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = x$

D. si $x \in \mathbb{R}$, $|x-5| = 5-x$

51. Un fabricante de zapatos puede vender todos los pares de zapatos que produce a un precio de $\$60$ mil cada par. El fabricante tiene costos fijos mensuales de $\$24$ millones. Si el cuero e insumos necesarios para producir cada par le cuesta $\$20$ mil, el menor número de pares que debe producir y vender al mes para obtener utilidades es

A.	B.	C.	D.
300	600	1200	4000

52. La ecuación cuadrática $x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$ tiene raíces iguales cuando m es

A. 3 ó 5
B. -3 ó -5
C. 1 ó 2
D. -1 ó -2

53. Una función f es aditiva si para todo par de elementos en su dominio x, y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Suponga que f es una función aditiva en los enteros positivos. De las siguientes afirmaciones sobre f:

1. $f(n) = nf(1)$
2. $f(nk) = f(n)f(k)$
3. $f(n^2) = 2n$
4. $f(2n) = 2f(n)$

Son verdaderas

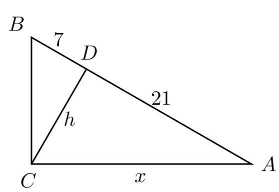
A.	B.	C.	D.
1 y 2	2 y 4	1 y 4	3 y 2

54. Los valores de x que satisfacen la igualdad $\frac{3}{2x} - \frac{1}{2} = 2x$ son

A. $0, \quad \dfrac{-1}{2}$
B. $-1, \quad \dfrac{3}{4}$
C. $1, \quad \dfrac{-3}{4}$
D. $1, \quad \dfrac{-1}{2}$

55. En la figura $BC \perp CA$, $CD \perp AB$; la medida de DA es de 21 unidades lineales; la medida de BD es 7 unidades. La longitud de x en unidades lineales es

A. $4\sqrt{7}$
B. 28
C. 21
D. $14\sqrt{3}$



60. Si $0^o \leq \theta \leq 2\pi$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{b}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ y $b > 0$, una de las siguientes afirmaciones es verdadera

A. $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ y $a > 0$

B. $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ y $a < 0$

C. $\pi < \theta < 2\pi$ y $a < 0$

D. $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ y $a > 0$

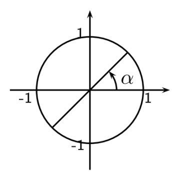
61. Suponga que $x, y \in (0, \pi)$. De las afirmaciones:

1. si $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$ entonces $x = y$
2. si $\cos x = \cos y$ entonces $x = y$
3. si $x < y$ entonces $\cos x > \cos y$
4. si $x < y$ entonces $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen} y$

son verdaderas

A.	B.	C.	D.
1 y 2	2 y 3	1 y 4	3 y 4

62. La gráfica ilustra el hecho de que **todo** α satisface la ecuación



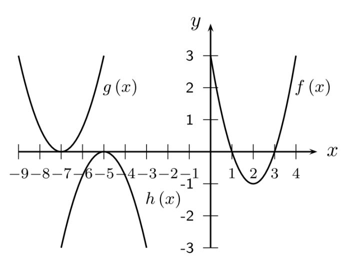
A. $\cos(\alpha - 90°) = \cos(\alpha + 90°)$

B. $\cos(\alpha + 270°) = \operatorname{sen}(\alpha + 90°)$

C. $\cos(\alpha + 180°) = \operatorname{sen}(\alpha - 90°)$

D. $\operatorname{sen}(\alpha - 90°) = \operatorname{sen}(\alpha + 90°)$

63. En la figura se presentan las gráficas de tres funciones f, g, h. Es correcto afirmar que



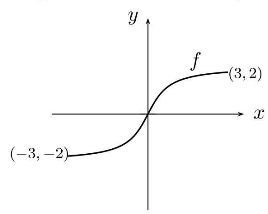
A. $g(x) = f(x+9)$

B. $h(x) = f(x+7) - 1$

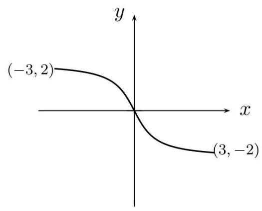
C. $h(x) = -f(x-7) + 1$

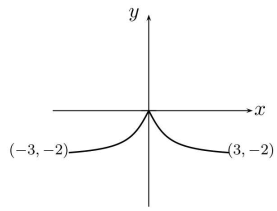
D. $g(x) = f(x+9) - 1$

65. A continuación se presenta la gráfica de una función f.



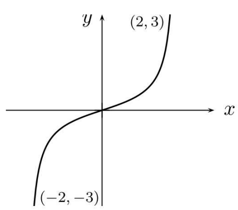
La gráfica que representa la función inversa de f, f^{-1} es

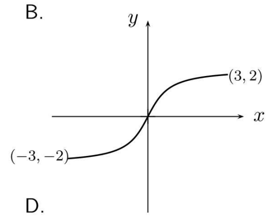




A.

B.

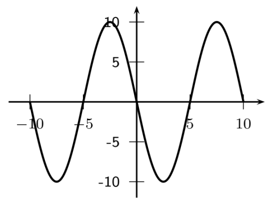




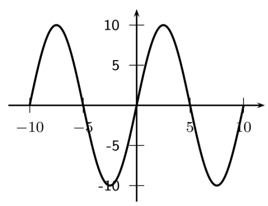
C.

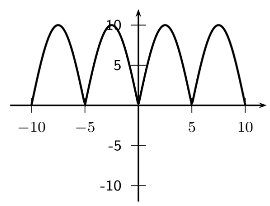
D.

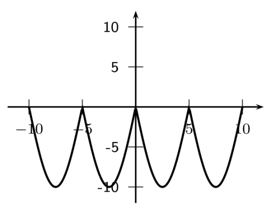
66. En la gráfica se presenta la función $y = f(x)$

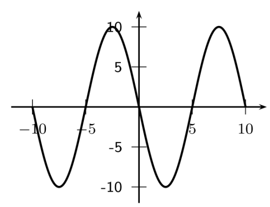


La gráfica de la función $y = |f(x)|$ se presenta en

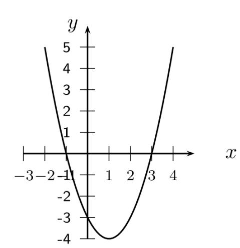
A. 

B. 

C. 

D. 

67. La gráfica representa la ecuación



A. $y = x^2 - 2x - 3$

B. $y = 2x^2 - 2x - 3$

C. $y = 2x^2 - 4x - 6$

D. $y = x^2 - 2x - 6$

CIENCIAS

Preguntas 68 a 87

68. Se hace un agujero en un tarro vacío con una puntilla del mismo metal del tarro. La puntilla se desliza justamente por el hueco. Ambos objetos se calientan hasta la misma temperatura. Después de calentarlos la puntilla

    A. no entra en el agujero porque se dilató mientras el agujero se cerró.

    B. entra justamente en el agujero porque tanto ella como el agujero se dilataron en la misma proporción.

    C. no entra en el agujero porque se dilató y el agujero quedó igual.

    D. entra más fácilmente en el agujero porque su diámetro no aumentó pero el agujero sí.

Para responder las preguntas 69 a 72 considere la siguiente información: La variación de la longitud de una varilla que se calienta es directamente proporcional a la longitud original y a la variación de la temperatura. La constante de proporcionalidad, λ, se denomina coeficiente de dilatación y es característica de cada sustancia.

69. Sean L_1 y L_2 las longitudes de una varilla a las temperaturas T_1 y T_2 respectivamente. El enunciado anterior se puede traducir a la siguiente expresión matemática:

    A. $L_2 - L_1 = \lambda L_1 (T_2 - T_1)$

    B. $L_2 = \lambda L_1 T_2$

    C. $L_2 - L_1 = \lambda \dfrac{L_1}{(T_2 - T_1)}$

    D. $L_2 = \lambda L_1 (T_2 - T_1)$

70. Una varilla de acero tiene una longitud de $0,45000m$ a 18° y una longitud de $0,45044$ a 102°. Cuando la varilla se calienta de 18° a 60° su longitud final será

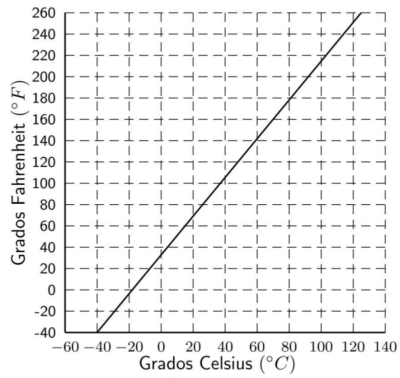
    A. $0,22522m$

    B. $0,22500m$

    C. $0,45018m$

    D. $0,45022m$

Las preguntas 73 y 74 se refieren a la siguiente gráfica, que muestra la relación que existe entre la medida de la temperatura en grados Fahrenheit y Celsius.



73. A partir de la gráfica, se puede deducir que la relación entre $°C$ y $°F$ es

    A. $C = \frac{5}{9}F + 32$
    B. $C = \frac{9}{5}F - 32$
    C. $F = \frac{9}{5}C + 32$
    D. $F = \frac{5}{9}C - 32$

74. La temperatura a la cual las dos escalas coinciden es

    A. $C = 40°$
    B. $C = -40°$
    C. $C = 0°$
    D. $C = 100°$

Examen
2007-1

Las preguntas 1 a 24 se refieren al siguiente texto .

MASA AÑADIDA EN LOS DESPEJES DE CABEZA EN FÚTBOL

Un balón lanzado de un puntapié, que llega a adquirir una velocidad inicial de $v_0 = 26ms^{-1}$, constituye un disparo bastante potente, pues podría recorrer unos $44\ m$ de campo con una inclinación inicial de $20°$, teniendo en cuenta que el alcance D de un proyectil que inicialmente forma un ángulo de $\theta°$ con la horizontal es

$$D = v_0^2 \frac{(\operatorname{sen} 2\theta)}{g}$$

Si un jugador totalmente desprevenido recibe desde muy cerca y en la frente tal balonazo, corre el riesgo de producirse una lesión importante. Se trata, en primer lugar, de evaluar las consecuencias que tendría para el jugador ese impacto.

Puede pensarse que los efectos adversos sobre el jugador provienen de tres causas: la fuerza, la aceleración y la energía disipada en la cabeza.

La fuerza media, F, sobre la frente, de ser grande, puede producir por sí misma daños irreversibles en el hueso. Esta fuerza se calcula a partir de la expresión

$$F = F_m \frac{m_c}{m_b + m_c},$$

donde $F_m = 978\ N$ es la fuerza máxima que ejerce el balón cuando colisiona con un jugador completamente rígido, $m_b = 0,43\ kg$ es la masa del balón y m_c es la masa de la cabeza más la masa añadida.

Miremos ahora cómo el jugador devuelve el balón con la cabeza. Hay una posición límite en la que el jugador se encuentra del todo rígido. El balón de masa m_b no lo distinguiría de una estatua de piedra anclada al suelo; en este caso, $m_c = \infty$. La otra posición extrema corresponde al jugador totalmente desprevenido. Aquí el balón golpea la cabeza de masa $m_c = 6\ kg$ que se encuentra prácticamente libre de pares resistentes: los músculos no contrarrestan el impacto y la cabeza gira bruscamente en torno a la unión atlanto-occipital. Tomamos este caso como un choque entre dos cuerpos libres: el balón y la cabeza.

Entre estos dos casos límite hay toda una gama de situaciones intermedias en las que el jugador atento trata de que su cabeza y tronco formen un solo cuerpo y da a la unión diferentes grados de rigidez, de acuerdo con el peligro al que se ve enfrentado. En términos de colisiones podría decirse que el jugador trata de añadir masa a su cabeza y une rígidamente a ella una parte mayor o menor de su cuerpo.

El otro efecto de la colisión es la aceleración de retroceso de la cabeza. Es bien conocido que una aceleración de unas pocas decenas de g (aceleración de la gravedad) es suficiente, por ejemplo, para partir una vértebra.

La tercera causa de una posible lesión es la energía que el balón transfiere a la cabeza. Una buena parte de esta energía debe disiparse en la cabeza en un tiempo bastante breve.

En el cuadro siguiente se muestran los valores de la fuerza, la aceleración de retroceso y la energía transferida a la cabeza para diferentes valores de mc.

$mc\ (kg)$	$F\ (N)$	$a\ (g)$	% de la energía disipada en la cabeza
6 (la cabeza sola)	912	$15,5$	60
$6,87$ (la cabeza y el cuello)	920	$13,7$	58
$49,6$ (cabeza, cuello y tronco)	970	2	46
∞ (el caso límite)	978	0	44

Cuando la presión de aire del balón se hace mayor, aumentan los valores de fuerza y aceleración, pero la energía que absorbe la cabeza es considerablemente menor. Un balón blando y pesado atonta considerablemente más que uno ligero y apropiadamente inflado.

Savirón, J.M.,1984,*Problemas de física general en un año olímpico*, España, Reverté.
Con adaptación.

1. Cuando un futbolista patea el balón le imprime una velocidad que forma un ángulo θ con la horizontal. Después de este impulso inicial el balón se mueve con

   A. rapidez constante.
   B. velocidad constante.
   C. aceleración constante.
   D. velocidad y aceleración variables.

2. Suponiendo la velocidad inicial y la aceleración constantes, al considerar el alcance D en término del ángulo θ se obtiene una función

A.	B.	C.	D.
periódica	cuadrática	lineal	constante

3. Suponiendo la velocidad inicial y la aceleración constantes, el alcance máximo de la pelota se obtiene con un ángulo θ de

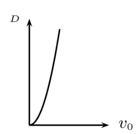
A.	B.	C.	D.
$15°$	$45°$	$30°$	$90°$

4. Si el ángulo θ es de $15°$ y $v_0 = 26\frac{m}{s}$, entonces el alcance D de la pelota, en metros, está entre

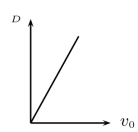
   A. 10 y 15
   B. 20 y 25
   C. 40 y 45
   D. 30 y 35

5. Suponiendo que θ y g son constantes, la gráfica que representa el comportamiento de D, como función de v_0, cuando se lanza el balón de un puntapié, es

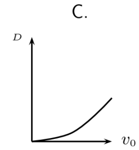
A.



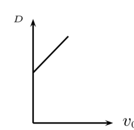
B.



C.



D.

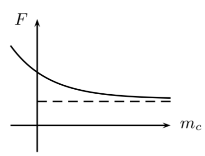


6. Según el texto, la fuerza, la aceleración y la energía disipada en la cabeza, son

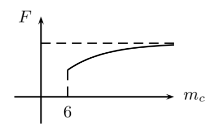
   A. consecuencias del disparo del balón.
   B. posibles causas de lesión en el jugador.
   C. efectos adversos en el jugador golpeado.
   D. causas del disparo del balón.

12. De las siguientes gráficas la que representa mejor la relación entre F y m_c es

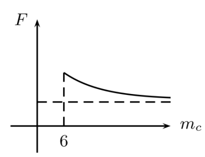
A.



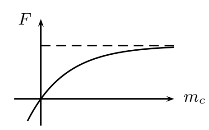
B.



C.



D.



13. Suponga que la pelota lleva una rapidez v al chocar elásticamente con el jugador; en la situación límite de jugador rígido, se esperaría que después del impacto la pelota rebote con una rapidez igual a

A.	B.	C.	D.
$2v$	v	$\frac{v}{2}$	$\frac{v}{4}$

14. Es más probable que la aceleración de la cabeza pueda lesionar las vértebras del cuello cuando el jugador añade a su cabeza

A.	B.	C.	D.
$\infty\ kg$	$43,6\ kg$	$0,87\ kg$	$0\ kg$

15. Cuando el balón choca inelásticamente con la cabeza, un gran porcentaje de su energía __________ se transfiere a la cabeza en forma de __________ .

A. potencial — trabajo
B. calórica — trabajo
C. cinética — calor
D. elástica — calor

16. La expresión: "El balón de masa m_b no lo distinguiría de una estatua de piedra anclada al suelo", tiene un lenguaje

A.	B.	C.	D.
figurado	denotativo	científico	cotidiano

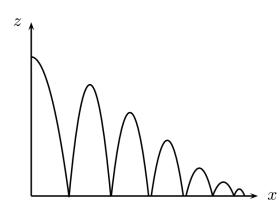
50. Desde el punto de vista de la física el cambio de velocidad que un jugador produce cuando golpea una pelota en el corto tiempo Δt también puede obtenerse aplicando a la pelota la mitad de la fuerza que ejerce el jugador durante

A.	B.	C.	D.
$2\Delta t$	$4\Delta t$	$\frac{\Delta t}{2}$	$\frac{\Delta t}{4}$

51. Suponga que una pelota de cuero pesa el doble que una pelota moderna; si un jugador cambia la velocidad de una pelota moderna en una cantidad ΔV al darle cierto impulso, al darle el mismo impulso a una pelota de cuero su velocidad cambiará

A.	B.	C.	D.
$2\Delta V$	$4\Delta V$	$\frac{\Delta V}{4}$	$\frac{\Delta V}{2}$

52. Suponga que una pelota rebota repetidamente y que, para cada instante, se puede determinar su altura z con respecto al piso, por medio de una función del tiempo cuya representación gráfica es la siguiente:



Acerca de esa función es correcto afirmar que

A. es una suma de una función cuadrática y una función lineal.
B. no toma valores negativos y tiene más de tres ceros.
C. es una suma de funciones cuadráticas.
D. es decreciente e impar.

Las preguntas 53 a 58 se refieren al siguiente texto .

(...)la esencia del juego se refleja en el comportamiento lúdico: todo jugar es un ser jugado. La atracción del juego, la fascinación que ejerce, consiste precisamente en que el juego se hace dueño de los jugadores. Incluso cuando se trata de juegos en los que uno debe cumplir tareas que uno mismo se ha planteado, lo que constituye la atracción del juego, es el riesgo de si "se podrá", si "saldrá" o "volverá a salir". El que tienta así es en realidad tentado. Precisamente las experiencias en las que no hay más que un solo jugador hacen evidente hasta qué punto el verdadero sujeto del juego no es el jugador sino el juego mismo. Es éste el que mantiene hechizado al jugador, el que le enreda en el juego y le mantiene en él.

Gadamer,H.G.,1995, *Verdad y método I*, Salamanca, Ediciones Sígueme.

53. La expresión "todo jugar es un ser jugado", significa que el juego y el jugador son

A.	B.	C.	D.
equivalentes	independientes	diferentes	interdependientes

MATEMÁTICAS
Preguntas 59 a 78

59. Si $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ entonces $p + q$ es igual a

A.	B.	C.	D.
f	$\frac{pq}{f}$	$\frac{f}{pq}$	$2f$

60. Si x es cualquier real mayor que 1, al ordenar de menor a mayor los números

$$1, \quad x, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

se obtiene

A. $\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1, \quad \sqrt{x}, \quad x$

B. $\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}, \quad 1, \quad x$

C. $\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{x}, \quad 1, \quad x$

D. $\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{x}, \quad 1, \quad \sqrt{x}, \quad x$

61. Sean a y b dos enteros positivos. Se designa con $m.c.d.(a, b)$ al máximo común divisor y con $m.c.m.(a, b)$ al mínimo común múltiplo entre a y b. De las siguientes afirmaciones la única verdadera es

A. si $m.c.d.(a, b) = a$, entonces $b = a$.

B. si a y b son diferentes, entonces $m.c.d.(a, b) > m.c.m.(a, b)$.

C. si k es un entero positivo y $a = m.c.d.(a, b)$, entonces $\left(\frac{b}{a}\right)^k$ es un entero.

D. $m.c.m.(a, b) < b$.

62. La siguiente tabla corresponde a una función lineal

x	2	4	10	b
y	3	a	15	21

Los valores de a y b son respectivamente

A.	B.	C.	D.
6 y 15	9 y 15	9 y 14	6 y 14

63. Cuando se agrega un disco duro a un computador personal, el sistema nuevo cuesta $\$2900 \times 10^3$. Se sabe que $\frac{1}{3}$ del valor del computador, más $\frac{1}{5}$ del disco duro suman $\$870 \times 10^3$. Si x representa el valor del computador e y el del disco duro, un sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el valor del disco duro es

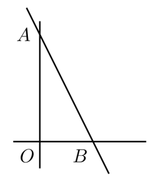
A.
$$x - y = 290 \times 10^4$$
$$5x + 3y = 1305 \times 10^4$$

B.
$$x + y = 290 \times 10^4$$
$$3x + 5y = 87 \times 10^4$$

C.
$$x - y = 290 \times 10^4$$
$$5x + 3y = 87 \times 10^4$$

D.
$$x + y = 290 \times 10^4$$
$$5x + 3y = 1305 \times 10^4$$

68. La recta que pasa por los puntos A y B, determina el triángulo de vértices $A(0, 4)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$. Una recta de pendiente negativa pasa por el punto $(4, 0)$ y, de manera similar, determina un triángulo semejante a AOB. La ecuación de esa recta es



   A. $y = -2x + 4$
   B. $y = -x + 4$
   C. $y = -2x + 8$
   D. $y = -x + 8$

69. El corte transversal de una varilla de acero, de $200\ cm$ de longitud, es un hexágono regular cuyo lado mide $1\ cm$. Suponiendo que el peso del acero es $7,8\ gr/cm^3$. El peso de la varilla es

   A. $4680\sqrt{3}gr$
   B. $468\sqrt{3}gr$
   C. $234\sqrt{3}gr$
   D. $2340\sqrt{3}gr$

70. Si α, β son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, de los siguientes enunciados:

   1. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 1$
   2. $\tan(\alpha + \beta)$ no está definida
   3. $\cos(\alpha + \beta) = 1$
   4. $\cot(\alpha + \beta)$ no está definida

   son afirmaciones verdaderas

A.	B.	C.	D.
2 y 3	1 y 2	3 y 4	1 y 4

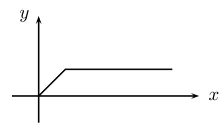
71. El origen de un sistema de coordenadas es el punto A. En el primer cuadrante se traza un segmento de recta AB que forma un ángulo de $30°$ con el eje x. Si $AB = 8$ las coordenadas de B son

   A. $(6,\ 4)$
   B. $(8 \operatorname{sen} 30°,\ 8 \cos 30°)$
   C. $(8 \cos 30°,\ 8 \operatorname{sen} 30°)$
   D. $\left(4,\ 4\sqrt{3}\right)$

72. Si α es un ángulo del tercer cuadrante cuyo lado final está sobre la recta $y = 2x$, entonces los valores de $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$, son respectivamente

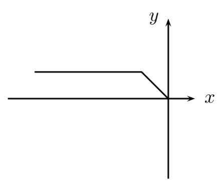
   A. $\frac{-\sqrt{5}}{5};\quad \frac{-2\sqrt{5}}{5};\quad \frac{1}{2}$
   B. $\frac{-1}{2};\quad \frac{-1}{3};\quad \frac{3}{2}$
   C. $\frac{-1}{3};\quad \frac{-1}{2};\quad \frac{2}{3}$
   D. $\frac{-2\sqrt{5}}{5};\quad \frac{-\sqrt{5}}{5};\quad 2$

75. Si la gráfica de $y = f(x)$ es

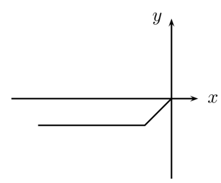


La gráfica de $y = -f(x)$ es

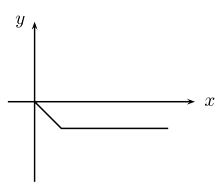
A.



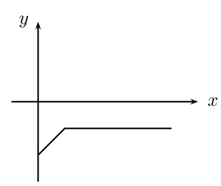
B.



C.



D.



76. Si $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se grafican sobre los mismos ejes coordenados,la transformación que envía una de las curvas sobre la otra es una reflexión respecto

A. al eje y.
B. al eje x.
C. al origen.
D. a la recta $y = x$.

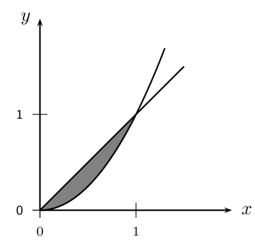
77. La región sombreada está limitada por la recta de ecuación $y = x$ y la curva $y = x^2$. A esta región pertenece el punto

A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{7}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{10}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$



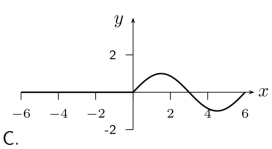
78. Si f y g son funciones con el mismo dominio, el producto fg está definido por:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

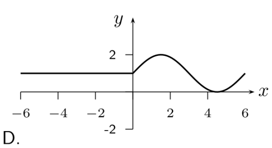
Suponga que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y que $f(x) = \operatorname{sen} x$.

La gráfica de $y = (fg)(x) + 1$ en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ es

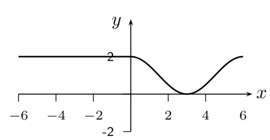
A.



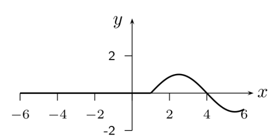
B.



C.



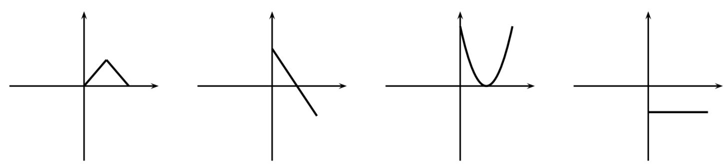
D.



CIENCIAS
Preguntas 79 a 98

Las preguntas 79 a 81 se refieren a los siguientes gráficos.

A. B. C. D.



79. La gráfica ________ representa la **velocidad en función del tiempo** de un objeto que se mueve con aceleración constante (diferente de cero).

80. La gráfica ________ representa la **posición en función del tiempo** de un objeto que se mueve con aceleración constante (diferente de cero).

81. La gráfica ________ representa la **aceleración en función del tiempo** de un objeto que cae libremente.

Examen
2007-2

MATEMÁTICAS
Preguntas 58 a 77

58. Si m y n representan números enteros cualesquiera, acerca de $m^2 - n^2$ es correcto afirmar que

A. es el cuadrado de un número entero.
B. es igual a 0 sólo si $m = n$.
C. es par sólo si m y n son pares.
D. es impar si m es par y n es impar.

59. Las igualdades

$$4 - 1 = 3$$
$$16 - 1 = 15$$
$$64 - 1 = 63$$
$$256 - 1 = 255, \ldots$$

ilustran el hecho de que para todo entero positivo n, __________ es divisible por 3.

A.	B.	C.	D.
$2^{n+2} - 1$	$4^{n+2} - 1$	$2^{2n} - 1$	$4^{2n} - 1$

60. La carga de una columna cilíndrica sobre una superficie plana varía directamente con la cuarta potencia de su diámetro e inversamente con el cuadrado de su longitud. Si el diámetro y la longitud se reducen a la mitad, entonces la carga

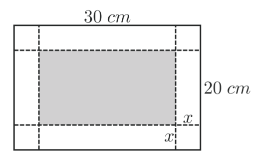
A. se duplica.
B. se reduce a la mitad.
C. se hace cuatro veces mayor.
D. se reduce a la cuarta parte.

61. Un comerciante rebaja en un 20 % el precio x de un cierto producto y, posteriormente, incrementa el nuevo precio en un 20 %. Si r denota el monto de la rebaja y a denota el monto del aumento, entonces

A.	B.	C.	D.
$r < a$	$r > a$	$r = a$	$r = 2a$

62. Para elaborar una caja sin tapa con base rectangular se dispone de un cartón de $30\ cm$ de largo y $20\ cm$ de ancho. Si para hacerlo, en cada esquina del cartón se recorta un cuadrado de lado x y se doblan los lados hacia arriba, el área en cm^2 de la base de la caja estará dada por

    A. $600 - 100x + 4x^2$
    B. $150 - 25x + x^2$
    C. $600 - 4x^2$
    D. $150 - 50x + x^2$



63. Un terreno rectangular tiene 5600 metros cuadrados de área. Si la suma de las longitudes de tres de sus lados es igual a 220 metros, entonces las ecuaciones que permiten encontrar las dimensiones del terreno son:

A.	B.	C.	D.
$x + y = 220$ $xy = 5600$	$2x + 2y = 5600$ $xy = 220$	$x + 2y = 220$ $2xy = 5600$	$2x + y = 220$ $xy = 5600$

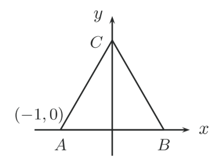
64. De las expresiones $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$ y $x - y$ es correcto afirmar que

    A. son siempre iguales.
    B. son siempre distintas.
    C. son iguales sólo cuando $x \neq -y$
    D. son iguales sólo cuando $x = y$

65. De los siguientes enunciados el único verdadero es

    A. todo cuadrilátero que tenga un ángulo recto es un rectángulo.
    B. si el volumen de un cubo es $V\ cm^3$ y el área total de su superficie es $A\ cm^2$, entonces $V > A$.
    C. un cuadrilátero que tenga dos lados paralelos y los otros dos congruentes, es un paralelogramo.
    D. toda circunferencia tiene infinitas parejas de diámetros que están en rectas perpendiculares.

68. El triángulo de la figura es equilátero. Si $A\ (-1,0)$, entonces C es



A. $(0,1)$

B. $(0,\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{3},0)$

D. $(1,0)$

69. La expresión $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ es igual a

A.	B.	C.	D.
$1-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	$1-\tan\alpha\tan\beta$	$1+\tan\alpha\tan\beta$

70. Una población de conejos fluctúa en periodos cíclicos de 10 años. En condiciones normales el número de conejos a los t años está dado por: $N(t)=1000\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)+4000$. Si no hay agentes externos que afecten este comportamiento

(1) nunca habrá más de 4000 conejos.

(2) el menor número posible de conejos es 3000.

De los anteriores enunciados se puede asegurar correctamente que

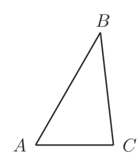
A. (1) y (2) son verdaderos

B. (1) y (2) son falsos

C. (1) es verdadero y (2) es falso

D. (1) es falso y (2) es verdadero

71. Si en la figura $\overline{AB}$ mide $5\ cm$, $\overline{AC}$ mide $3\ cm$ y $\angle BAC$ mide $\frac{\pi}{3}$ radianes, entonces $\overline{BC}$ mide entre



A. 4 y $5\ cm$

B. 2 y $3\ cm$

C. 5 y $6\ cm$

D. 3 y $4\ cm$

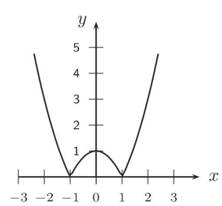
72. Considere los conjuntos

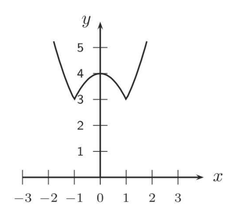
$$S = \left\{t \in \mathbb{R} : 0 < t < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$T = \left\{t \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{2} < t < \pi\right\}$$
$$U = \left\{t \in \mathbb{R} : \pi < t < \frac{3\pi}{2}\right\}$$
$$V = \left\{t \in \mathbb{R} : \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi\right\}$$

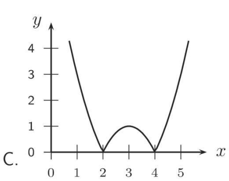
La función definida por $f(t) = \operatorname{sen} t$ es creciente para t en

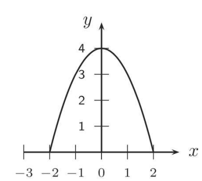
A.	B.	C.	D.
T ó U	S ó V	S ó U	T ó V

73. La gráfica de $y = \left|1 - x^2\right| + 3$ es

A.


B.


C.


D.


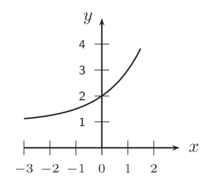
74. La ecuación de la gráfica que se presenta en la figura es

A. $y = 2^x$

B. $y = x^2 + 1$

C. $y = 2^x + 1$

D. $y = 2^{x+1}$



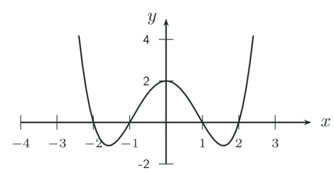
75. En la gráfica se representa una función f. Es correcto afirmar que para todo x se cumple

A. $f\,(-x) = f\,(x)$

B. $f\,(-x) = f\,(x) + 1$

C. $f\,(-x) = f\,(x) - 1$

D. $f\,(-x) = -f\,(x)$



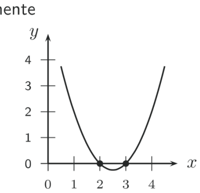
76. En la gráfica se representa una función cuadrática de la forma $y = f(x) = x^2 + ax + b$. Los valores de a y b son respectivamente

A. 5 y -6

B. -5 y -6

C. 5 y 6

D. -5 y 6



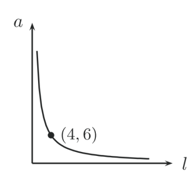
77. La gráfica muestra la relación entre el ancho (a) y el largo (l) de todos los rectángulos de un área fija. El valor de a para $l = 8$ es

A. 3

B. 6

C. 8

D. 24



Examen 2008-1

Las preguntas 43 a 68 se refieren al siguiente texto.

LA ALTURA DE LA CATARATA DE TEQUENDAMA

Las márgenes del río Bogotá, desde que entra en la garganta del Tequendama, están hermoseadas con arbustos y también con árboles corpulentos. Las vistosas *beffarias resinosa* y *urcus*, las *melastomas*, la *cuphea*, esmaltan esos lugares deliciosos que ponen a la sombra el roble, las aralias y muchos otros árboles. El punto más alto de la catarata, aquel de donde se precipitan las aguas, está 312 varas más abajo que el nivel de la explanada de Bogotá y esto basta para comenzar a sentir la más dulce temperatura. A la derecha y a la izquierda se ven grandes bancos horizontales de piedra, tajados a plomo, y coronados de una selva espesa. Cuando los días son serenos y el sol llega de los 45 a 60 grados de altura sobre el horizonte del lado del Oriente, el ojo del espectador queda colocado entre este astro y la lluvia que forman las aguas al caer. Entonces percibe muchos iris concéntricos bajo sus pies, que mudan de lugar conforme se va levantando el astro del día.

(...)

En 1807 quise medir la altura de esta cascada. Usé, como Humboldt, el descenso de los graves[a], y hallé constantemente que estos gastaban seis instantes[b] en bajar. De ahí deduje que la cascada tenía 220 varas de altura. El método de los graves incluye errores, y es de los más delicados. Con un cuarto de instante que se dé de más o de menos, lo que es muy fácil, la medida resulta monstruosamente errada. A más de esto, en Tequendama no se puede asegurar el observador del momento preciso en que el grave toca la parte inferior de la cascada. La lluvia, las nieblas continuas que se levantan, impiden el que se haga por este medio una medida exacta.

Tomado de: Francisco José de Caldas, La Altura de la Catarata de Tequendama, en *Naturaleza, Educación y Ciencia*,1983, Número 2, p. 33 a 35.

[a]Cuerpo que cae libremente.
[b]Unidad de tiempo en desuso.

43. La palabra "hermoseadas" deja ver un recurso del autor en el que

A. el verbo se vuelve adjetivo.
B. el verbo se elude.
C. el adjetivo se elude.
D. el adjetivo se vuelve verbo.

44. De acuerdo con el texto, la palabra esmalte designa

A. una fuente de luz de varios colores muy vivos.
B. una pintura verde de color muy intenso.
C. una sustancia que al aplicarla sobre algo la hace más viva y vistosa.
D. un dibujo muy vistoso que se pinta sobre una superficie como adorno.

CONTINÚE ABAJO

Para responder las preguntas 54 y 55 tenga en cuenta que el tiempo de caída de un objeto es $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, donde g es la aceleración de gravedad.

54. El valor de g en varas/instantes^2 es

A. $\frac{220}{36}$

B. $\sqrt{\frac{2 \times 220}{6}}$

C. $\frac{2 \times 220}{6}$

D. $\frac{2 \times 220}{36}$

55. Si se deja caer una piedra desde lo alto de otra cascada, y gasta 3 instantes en caer, la altura de la cascada es

A. 55 varas

B. 440 varas

C. 550 varas

D. 110 varas

56. Según Caldas no es posible realizar una medida exacta de la altura de la cascada porque

A. el método de medida está errado.

B. es difícil determinar cuando el cuerpo toca el fondo.

C. las unidades que se usan no son las correctas.

D. la lluvia y la niebla impiden una medición directa.

57. La altura del Salto de Tequendama es 132 m. Si Caldas usó la vara, que equivale aproximadamente a 80 cm, la altura que él midió corresponde a ________ de la aceptada actualmente.

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{40}{3}$

C. $\frac{3}{4}$

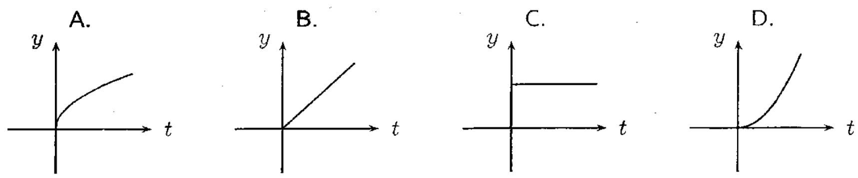
D. $\frac{3}{40}$

CONTINÚE ABAJO

58. De acuerdo con el texto, Caldas midió la altura del salto suponiendo que, mientras descendían, los graves se movían con

   A. aceleración proporcional al cuadrado del tiempo.
   B. velocidad constante.
   C. aceleración constante.
   D. velocidad proporcional al cuadrado del tiempo.

Para responder las preguntas 59 a 61 utilice las siguientes opciones de respuesta.



Suponga que Caldas hubiera podido medir la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida por los graves mientras caían. Bajo las condiciones ideales que el sabio suponía, identifique el gráfico correcto según cada situación planteada en las preguntas 59 a 61.

59. Si y representa la velocidad, el gráfico de velocidad en función del tiempo que el sabio habría elaborado sería el __________ .

60. Si y representa la aceleración, el gráfico de aceleración en función del tiempo que el sabio habría elaborado sería el __________ .

61. Si y representa la distancia recorrida por los graves, el gráfico de distancia en función del tiempo que el sabio habría elaborado sería el __________ .

62. El Método de los graves es un método utilizado en la rama de la física

   A. acústica
   B. cinemática
   C. estática
   D. óptica

63. Caldas fue un miembro aventajado de

   A. la Comisión Pedagógica.
   B. la Expedición de Límites.
   C. la Comisión Corográfica.
   D. la Expedición Botánica.

73. La ecuación $x^2 - 2\sqrt{5}x + c = 0$ tiene soluciones reales sólo si

A. $c < 0$

B. $c \geq 0$

C. $c \leq 5$

D. $c > 5$

74. Para resolver la ecuación $x - a = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$, donde $a \neq 0$, se siguieron estos pasos

$$\begin{aligned} x - a &= \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \\ x - a &= \frac{x-a}{ax} \\ ax(x-a) &= x - a \\ ax &= 1 \\ x &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

El procedimiento permite determinar

A. todas las soluciones.

B. sólo las soluciones positivas.

C. sólo las soluciones negativas.

D. sólo las soluciones diferentes de a.

75. Al golpear un balón de fútbol, éste se eleva y vuelve a caer al campo de juego describiendo una trayectoria parabólica del tipo $y = ax^2 + bx$. Si $x = 0$ es el punto donde fue pateado y $x = 50$ el punto de caída, sobre a y b se puede afirmar que

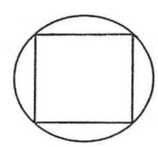
A. a es positivo y b es negativo.

B. son ambos negativos.

C. a es negativo y b positivo.

D. son ambos positivos.

76. Si la circunferencia es de radio $1\ cm$, entonces el área del cuadrado es



A. $\frac{1}{2\ cm^2}$

B. $4\ cm^2$

C. $2\ cm^2$

D. $\sqrt{2}cm^2$

CONTINÚE EN EL SIGUIENTE PLIEGUE (arriba)

81. El menor entero positivo n tal que $\operatorname{sen}(60 + 90n)^\circ = \cos 60^\circ$ es

A. 1
B. 3
C. 2
D. 4

82. Si θ es un ángulo que satisface la ecuación: $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$, entonces

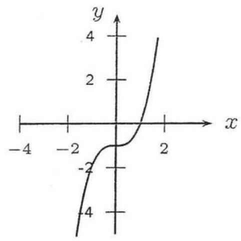
A. θ es múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$.
B. θ es múltiplo entero de π.
C. θ es un ángulo de segundo o tercer cuadrante.
D. θ es un ángulo de primero o cuarto cuadrante.

83. Diversas poblaciones de animales, entre ellas la de los conejos, fluctúan en periodos cíclicos de 10 años. Si se supone que el número de conejos en el tiempo t (en años) está dado por la expresión $N(t) = 1000\cos\frac{\pi}{5}t + 4000$ para $0 \leq t \leq 10$, la población de conejos sobrepasará los 4000 para

A. $\frac{5}{6} < t < \frac{55}{6}$
B. $\frac{5}{2} < t < \frac{15}{2}$
C. $0 \leq t < \frac{5}{2}$ y $\frac{15}{2} < t \leq 10$
D. $0 \leq t < \frac{5}{6}$ y $\frac{55}{6} < t \leq 10$

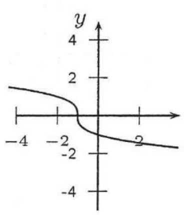
CONTINÚE ABAJO

84. La gráfica corresponde a una función f.

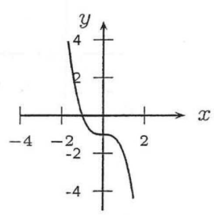


La inversa de f es una función cuya gráfica está formada por los puntos de coordenadas (b, a) tales que (a, b) pertenece a la gráfica de f. La gráfica de la inversa de f es

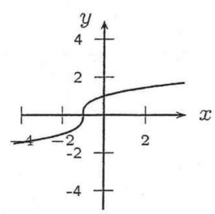
A.



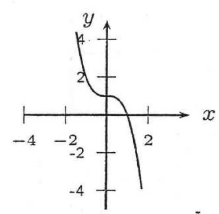
B.



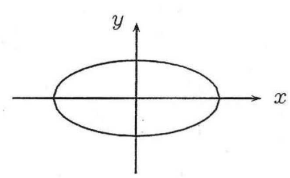
C.



D.



85. Si la gráfica corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, entonces es correcto afirmar que



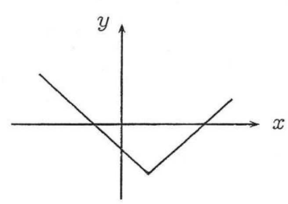
A. la escala del eje y es un tercio de la del eje y.

B. los ejes x e y tienen la misma escala.

C. la escala del eje y es el doble de la del eje x.

D. la escala del eje x es el doble de la del eje y.

86. La gráfica corresponde a una ecuación de la forma



A. $y = |ax + b| + c$ con $c < 0$

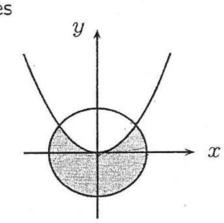
B. $y = |ax + b + c|$ con $c < 0$

C. $y = |ax + b + c|$ con $c > 0$

D. $y = |ax + b| + c$ con $c > 0$

CONTINÚE EN EL SIGUIENTE PLIEGUE (arriba)

87. En la gráfica la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 4$ y la ecuación de la parábola es $y = x^2$. La región sombreada está descrita por las siguientes desigualdades



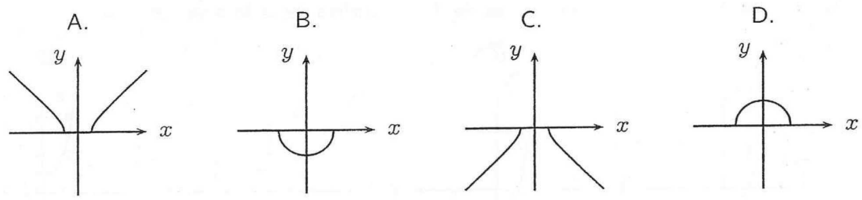
A. $y \geq x^2 \qquad x^2 + y^2 \leq 4$

B. $y \geq x^2 \qquad x^2 + y^2 \geq 4$

C. $y \leq x^2 \qquad x^2 + y^2 \geq 4$

D. $y \leq x^2 \qquad x^2 + y^2 \leq 4$

88. De las siguientes gráficas la que corresponde a la función $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es



CONTINÚE ABAJO

Examen

2009-1

MATEMÁTICAS
Preguntas 52 a 71

52. Si m y n son enteros impares, entonces es correcto afirmar que m^2+n^2 siempre es

A. un cuadrado perfecto.
B. divisible por 4.
C. par.
D. impar.

53. La expresión $(5n-2)3n-(5n-2)(n-1)$ es equivalente a

A. $10n^2-13n+2$
B. $n-1$
C. $3n^2-3n$
D. $10n^2+n-2$

54. Los puntos A, B y C son colineales. La longitud del segmento $\overline{AC}$ es 12 unidades mayor que la longitud del segmento $\overline{AB}$ y la longitud de $\overline{BC}$ es cuatro veces la longitud del segmento $\overline{AB}$. Si el punto A está entre B y C, las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son respectivamente

A. 6 y 12 unidades
B. 6 y 18 unidades
C. 12 y 24 unidades
D. 18 y 24 unidades

55. Sean p, q y r primos diferentes y a, b y c enteros positivos con $a>b>c$. Si $n=p^a\,q^c\,r^b$ y $m=p^b\,q^a\,r^c$, entonces el máximo común divisor de m y n es

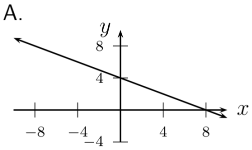
A. $p^c\,q^b\,r^c$
B. $p^b\,q^b\,r^c$
C. $p^b\,q^c\,r^c$
D. $p^a\,q^c\,r^b$

56. Sea g la función definida por $g\,(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Es correcto afirmar que

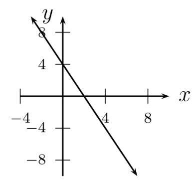
A. $g\,(-1)=-g\,(1)$
B. $g\,(4)=2g\,(2)$
C. $g\,(x+1)=g\,(x)+1$
D. $g\,(-x)=g\,(x)$

57. La gráfica que representa la recta que pasa por el punto $(0,4)$ y es perpendicular a la recta $y = \dfrac{1}{2}x$ es

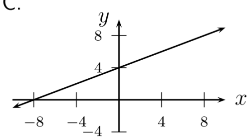
A.



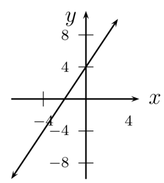
B.



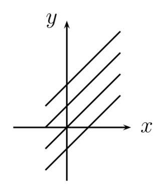
C.



D.



58. Las rectas que se presentan en el sistema de coordenadas cartesianas son paralelas; la ecuación general de una de estas rectas es $Ax + By + C = 0$. De las afirmaciones



(1) la pendiente de todas las rectas es $\frac{-A}{B}$.
(2) para ninguna de las rectas $C = 0$.
(3) $AB > 0$
(4) $AB < 0$

son verdaderas

A.	B.	C.	D.
(2), (3) y (4)	(1) y (4)	(2) y (4)	(1) y (3)

59. La solución de la ecuación $64^{x-2} = 256^{2x}$ es

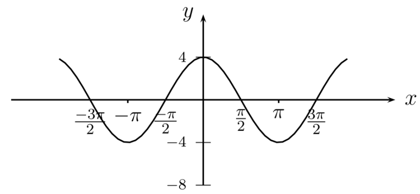
A. $x = -2$

B. $x = \dfrac{6}{7}$

C. $x = -\dfrac{6}{5}$

D. $x = 0$

64. La ecuación que describe la curva de la figura es



A. $y = 4\,\mathrm{sen}(x - \pi)$

B. $y = 4\,\mathrm{sen}(x - \frac{\pi}{2})$

C. $y = 4\,\mathrm{sen}(x + \pi)$

D. $y = 4\,\mathrm{sen}(x + \frac{\pi}{2})$

65. De las afirmaciones

(1) $\tan\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ **no** está definida para ningún entero n.

(2) Si x, y son elementos del intervalo $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, tales que $x < y$, entonces $\tan x < \tan y$.

(3) Si $(\mathrm{sen}\, x)(\cos x) < 0$, entonces x es un elemento del intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

(4) La ecuación $(\tan x)(\cos x) = 1$ **no** tiene solución en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

son **falsas**

A.	B.	C.	D.
(3) y (4)	(1) y (3)	(1) y (2)	(2) y (4)

66. La gráfica de la función $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ se obtiene trasladando la gráfica de $y = \cos x$, $\dfrac{\pi}{2}$ unidades hacia

A. arriba.

B. abajo.

C. la derecha.

D. la izquierda.

67. Un granjero tiene 2.000 metros de cerca y quiere bordear un terreno rectangular que limita con un río. Si el no cerca el lado que está a lo largo del río, la mayor área que puede cercar es de

A. $50.000\ m^2$

B. $2'000.000\ m^2$

C. $500\ m^2$

D. $500.000\ m^2$

68. Considere las siguientes afirmaciones sobre dos enteros positivos z y w.

(1) Si z y w tienen los mismos divisores primos, entonces $z = w$.

(2) Si z divide a w, entonces todo divisor de z es un divisor de w.

De las afirmaciones se puede asegurar que:

A. (1) y (2) son falsas.

B. (1) es falsa, (2) es verdadera.

C. (1) es verdadera, (2) es falsa.

D. (1) y (2) son verdaderas.

69. Si a y b son las medidas, en centímetros, de los catetos de un triángulo rectángulo y la hipotenusa mide $1\ cm$ más que el cateto que mide a, entonces el área del triángulo, expresada en cm^2, es

A. $\dfrac{(a-1)\,b}{4}$

B. $\dfrac{b^3+b}{4}$

C. $\dfrac{b^3-b}{4}$

D. $\dfrac{(a+1)\,b}{4}$

70. La ecuación $x^2+y^2-4x+6y+k=0$ describe una circunferencia de radio 1 cuando k es igual a

A. 12

B. 13

C. 1

D. 2

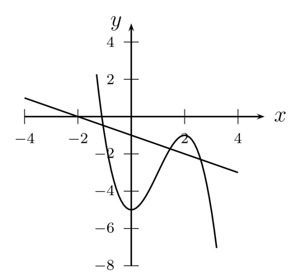
71. Las siguientes son las gráficas de las funciones f y g. Suponga que $g(x) = mx + b$. Es verdadero que

A. $(f+g)(2) > 0.$

B. $(f-g)(x) = 0$ para dos valores negativos de x.

C. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(0)$ no está definida.

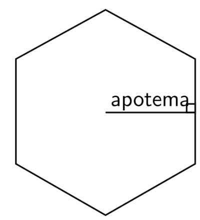
D. $(f \bullet g)(-1) > 0.$



Examen

2009-2

52. Suponga que H_1 y H_2 son hexágonos regulares. La longitud de la apotema de H_1 es $3\ cm$ y la de H_2 es $5\ cm.$ Si A_1 es la medida del área de H_1 y A_2 la de H_2, entonces la razón $\dfrac{A_1}{A_2}$ es



A. $\dfrac{9}{10}$

B. $\dfrac{3}{5}$

C. $\dfrac{9}{25}$

D. $\dfrac{4}{15}$

53. Las bases de un trapecio miden $5\ cm$ y $8\ cm$, su altura mide $4\ cm.$ Para que el área del trapecio se duplique es suficiente

(1) Duplicar las longitudes de las bases.
(2) Duplicar la altura.

De las acciones anteriores

A. (1) ó (2) es suficiente.
B. (1) es suficiente pero (2) no lo es.
C. (2) es suficiente pero (1) no lo es.
D. ni (1) ni (2) es suficiente.

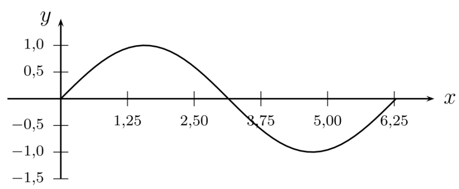
54. El mínimo valor que toma la función $f(t) = -3\cos(2t-5)$ para cualquier número real es

A. -5
B. -3
C. 2
D. 3

55. Una matriz de tamaño 2×2 con entradas reales es un arreglo cuadrado de cuatro números reales a, b, c y d, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. El determinante de esa matriz es el número $ad - bc$. Es correcto afirmar que, cualquiera sea t, el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$ es igual a

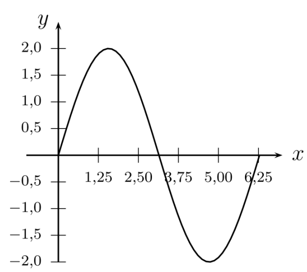
A. 1
B. $\cos 2t$
C. $\operatorname{sen} 2t$
D. 0

56. La gráfica representa la ecuación $y = \operatorname{sen} x$ para x entre 0 y 2π.

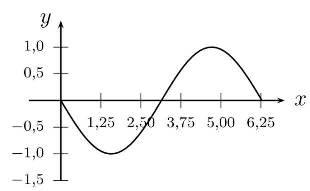


La gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ para x entre 0 y 2π es

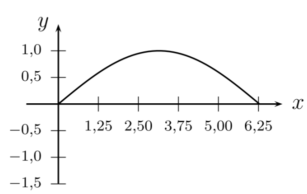
A.



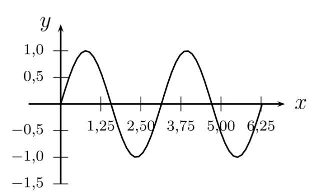
B.



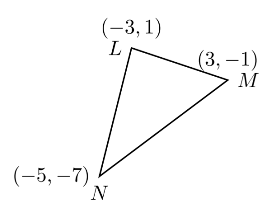
C.



D.



57. El triángulo LMN tiene más de ________ y menos de ________ unidades de perímetro.



A. 20 — 25

B. 15 — 20

C. 25 — 30

D. 10 — 15

58. Al lanzar una vez un par de dados, la probabilidad de que salgan dos números consecutivos es

A. $\frac{10}{21}$

B. $\frac{5}{21}$

C. $\frac{10}{36}$

D. $\frac{5}{36}$

59. En Colombia las placas de los automóviles tienen tres letras (de un alfabeto de 26) seguidas de tres dígitos. La cantidad de placas sin letras ni números repetidos que comienzan por vocal y son pares es

A. $5 + 25 + 24 + 10 + 9 + 5$

B. $(5 + 25 + 24)(9 + 8 + 5)$

C. $5 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 5$

D. $5 \times 25 \times 24 \times 9 \times 8 \times 5$

60. El producto de las soluciones de la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$ es

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

61. La suma de tres enteros impares consecutivos es 51. Si n es el mayor de estos enteros, para determinar el valor de n se debe resolver la ecuación

A. $3n = 51$

B. $3n + 3 = 51$

C. $3n - 4 = 51$

D. $3n - 6 = 51$

62. El polinomio $x^3 - 8x^2 + 4x + 48$ posee tres raíces reales una de las cuales es $4.$ La suma y el producto de las otras dos raíces son, respectivamente,

    A. -4 y -12
    B. 4 y -12
    C. -4 y 12
    D. 4 y 12

63. Si el polinomio $x^3 + (k^2 - 1)\,x^2 - 4x + (4k + 1)$ es divisible por $x + 1,$ entonces k es igual a

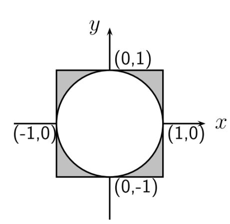
    A. -3 ó -1
    B. $-2 + \sqrt{7}$ ó $-2 - \sqrt{7}$
    C. $2 + \sqrt{7}$ ó $2 - \sqrt{7}$
    D. 3 ó 1

64. La recta $y = mx + 1$ y la hipérbola $y = \dfrac{2}{2x - 1}$ se intersectan en $x = 1$ y en $x = t.$ Los valores de m y $t,$ respectivamente, son

    A. 1 y $\dfrac{3}{2}$
    B. -1 y $\dfrac{3}{2}$
    C. -1 y $-\dfrac{3}{2}$
    D. 1 y $-\dfrac{3}{2}$

65. En la gráfica la región sombreada representa el conjunto:

    A. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 1\} \cup$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{1 - x^2} < y < 1$ ó $-1 < y < -\sqrt{1 - x^2}\}$
    B. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 1\} \cap$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{1 - x^2} < y < 1$ ó $-1 < y < -\sqrt{1 - x^2}\}$
    C. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 1\} \cup$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{1 - x^2} < y < 1$ y $-1 < y < -\sqrt{1 - x^2}\}$
    D. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 1\} \cap$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{1 - x^2} < y < 1$ y $-1 < y < -\sqrt{1 - x^2}\}$



66. Suponga que f es una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(-x)$ para todo x. Entonces es correcto afirmar que la gráfica de f es simétrica con respecto

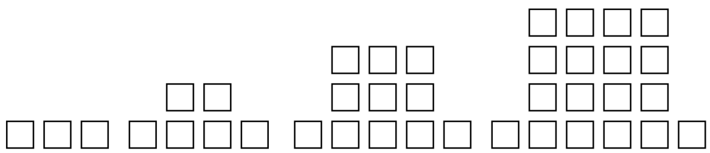
A. al eje y

B. al eje x

C. al origen

D. a la recta $y = x$

67. Observe el patrón



Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4

Si el patrón continua, la cantidad de $\square$ que se deberán utilizar en el paso 50 es

A. 100

B. 102

C. 2.500

D. 2.502

Examen
2010-2

58. De las afirmaciones:

    (1) $\cos(-x) = -\cos x$.

    (2) Hay infinitos números reales x para los cuales $\operatorname{sen} x = \cos x$.

    es correcto asegurar que

    A. (1) es falsa y (2) es verdadera
    B. (1) y (2) son verdaderas.
    C. (1) y (2) son falsas.
    D. (1) es verdadera y (2) es falsa.

59. El punto ____________ está sobre la recta cuya ecuación es $2x - 3y - 1 = 0$.

    A. (3, 2)
    B. (2, 3)
    C. (5, 3)
    D. (3, 5)

60. Sean x y y números reales que verifican la igualdad $\log_{10} y = 2\log_{10} x$. La gráfica que ilustra la relación entre las variables x y y es la parte de la curva ____________ con la restricción ____________ .

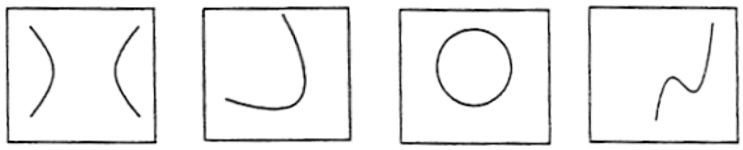
    A. $y = 2x$ — $x > 0$
    B. $y = x^2$ — $x > 0$
    C. $y = 2x$ — $x \neq 0$
    D. $y = x^2$ — $x \neq 0$

61. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $(1, -2)$ es

    A. $2x - y - 6 = 0$
    B. $x - 2y - 5 = 0$
    C. $y - 2x + 4 = 0$
    D. $x - 2y - 3 = 0$

62. De las siguientes gráficas la que NO representa una cónica es

A. B. C. D.



63. Del $\lim\limits_{x - 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ es correcto afirmar que

A. Es igual a 0.
B. es infinito.
C. no existe.
D. es igual a 27.

64. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 5x + 7$ en el punto (1, 3) es

A. 3
B. -3
C. 2
D. -2

65. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{-x-1}$, sobre los dominios de f y g es correcto afirmar que

A. Dom $f \cap$ Dom $g = \phi$
B. Dom $f \subset$ Dom g
C. Dom $f =$ Dom g
D. Dom $g \subset$ Dom f

Examen
2011-2

36. En el estudio estadístico sobre los puntajes obtenidos entre los aspirantes a ingresar a la Universidad Nacional el segundo semestre de 2008 se determinó que el puntaje promedio fue de 500 puntos y su desviación estándar de 100 puntos. Si la desviación estándar es el valor que al restarse dos veces del promedio y al sumarse dos veces al promedio da los extremos del intervalo en que se encuentran el $95\,\%$ de los puntajes, y si se supone que todo admitido a Medicina está por lo menos una desviación estándar por encima del promedio, considere las siguientes afirmaciones:

(1) Una persona con un puntaje de 800 puntos supera al menos al $95\,\%$ de los aspirantes.

(2) Un aspirante a Medicina con un puntaje de 590 puntos no es admitido.

De las afirmaciones es correcto asegurar que

A. (1) es verdadera y (2) es falsa.

B. (1) y (2) son verdaderas.

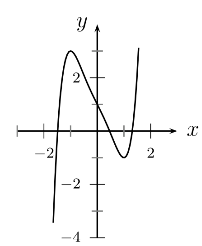
C. (1) es falsa y (2) verdadera.

D. (1) y (2) son falsas.

37. La gráfica corresponde a la curva cuya ecuación es $x^5 - x^3 - 2x + 1 = y$. De la ecuación $x^5 - x^3 - 2x + 1 = 0$ es correcto afirmar que

La gráfica corresponde a la curva cuya ecuación es equis a la cinco menos equis a la tres menos dos equis mas uno igual a y. De la ecuación equis a la cinco menos equis a la tres menos dos equis más uno igual a cero es correcto afirmar que

Descripción de la gráfica:
Aparece un sistema de coordenadas y una curva que empieza en el tercer cuadrante, sube hasta cortar el eje x entre -2 y -1, continua subiendo en el segundo cuadrante hasta el punto $(-1, 3)$ y empieza a bajar. Corta el eje y en 1 y baja por el primer cuadrante hasta cortar el eje x entre 0 y 1. Continua bajando en el cuarto cuadrante hasta el punto $(1, 1)$ y comienza a subir hasta cortar el eje x entre 1 y 2. Por último continua subiendo indefinidamente en el primer cuadrante.



A. tiene cinco soluciones reales.

B. tiene sólo una solución real positiva.

C. no tiene soluciones reales.

D. tiene dos soluciones reales positivas.

38. Considere las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x}$. El valor de $(g \circ f)(-2)$ es

Considere las funciones definidas por efe de equis igual a equis al cuadrado menos uno y ge de equis igual a uno sobre dos equis. El valor de ge compuesto con efe de menos dos es

A. $-\dfrac{15}{16}$
menos quince dieciseisavos

B. $\dfrac{1}{6}$
un sexto

C. 6
seis

D. $\dfrac{1}{16}$
un dieciseisavo

39. En la tabla se presentan las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en una prueba. De la información contenida en la tabla se afirma que:

(1) La nota promedio es de $3,5$.
(2) La moda en las notas es de $3,5$.

$2,5$	$3,5$	$4,0$	$5,0$	$1,0$	$3,0$	$4,5$	$3,5$

De las afirmaciones es correcto asegurar que

A. (1) y (2) son verdaderas.
B. (1) es verdadera y (2) es falsa.
C. (1) y (2) son falsas.
D. (1) es falsa y (2) es verdadera.

43. Considere los siguientes enunciados:

(1) Si $\cos 2x > 0$, entonces $\cos x > 0$.
(2) $(\operatorname{sen} x)(\cos x) < 1$ para todo número real x.

Considere los siguientes enunciados:

(1) Si coseno de dos equis es mayor que cero, entonces coseno de equis es mayor que cero

(2) Seno de equis por coseno de equis es menor que uno para todo número real equis

De los enunciados es correcto afirmar que

A. (1) y (2) son verdaderos.
B. (1) y (2) son falsos.
C. (1) es falso y (2) es verdadero.
D. (1) es verdadero y (2) es falso.

44. Para hallar el valor de los números reales que satisfacen la ecuación $\sqrt{x} = x$ se utilizó el siguiente razonamiento:

Para hallar el valor de los números reales que satisfacen la ecuación raíz cuadrada de equis igual a equis se utilizó el siguiente razonamiento:

1. Se eleva al cuadrado, entonces $x = x^2$
   Se eleva al cuadrado, entonces equis es igual a equis al cuadrado.
2. Se cancela x, por lo tanto $x = 1$
   Se cancela equis, por lo tanto equis es igual a uno.

Es correcto afirmar que el razonamiento

A. no es válido porque el cuadrado de un número es igual al cuadrado de su opuesto.
B. es válido porque se está cancelando el mismo número.
C. es válido porque se puede elevar al cuadrado.
D. no es válido porque no se puede dividir por cero.

45. Cada día de lunes a jueves gano $\$6.000$ más que el día anterior. ¿Cuánto gané el martes si el jueves recibí el cuádruplo de lo que gané el lunes?

A. 24.000
B. 12.000
C. 72.000
D. 42.000

Referencias bibliográficas

[1] http://www.unal.edu.co/ Portal principal de la Universidad Nacional de Colombia.

[2] http://www.topuniversities.com/ Worldwide university rankings, guides & events.

[3] www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-70799_archivo.pdf *La revolución educativa. Estándares básicos de matemáticas y lenguaje. Educación básica y media*. (MEN)

[4] Apostol, Tom. *Calculus, Volumen 1: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. (1967) Wiley, ISBN 0-536-00005-0, ISBN 978-0-471-00005-1.

[5] Leithold, Louis. *El Cálculo EC7*. Editorial Oxford – Harla. Oxford University Press (Enero 20, 1998), ISBN: 9706131825.