Neiva, 16 de julio de 2014

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Karla Ximena Cohetato Peña, con C.C. No. 1075245645,

Laura Stefany Rengifo Trujillo, con C.C. No. 1075225857,

autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o

titulado Teoría y aplicaciones de los Números de Catalan

presentado y aprobado en el año 2014 como requisito para optar al título de

Licenciado en Matemáticas;

autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

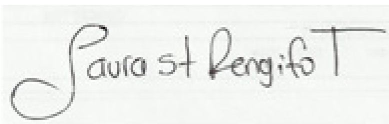
Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

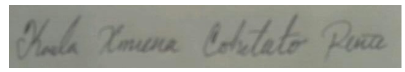
• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: TEORÍA Y APLICACIONES DE LOS NÚMEROS DE CATALAN

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cohetato Peña Rengifo Trujillo	Karla Ximena Laura Stefany

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Cedeño Tovar	Ricardo

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

FACULTAD: EDUCACIÓN

PROGRAMA O POSGRADO: LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

CIUDAD: NEIVA **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2014 **NÚMERO DE PÁGINAS: 53**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos x Ilustraciones en general x Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros x

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: pdf

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	**Números**	numbers	6.	____________	____________
2.	**Catalan**	**Catalan**	7.	____________	____________
3.	**Pascal**	**Pascal**	8.	____________	____________
4.	**Coeficiente binomial**	**Binomial coefficient**	9.	____________	____________
5.	**Factorial**	**Factorial**	10.	____________	____________

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se ilustra una idea general de lo que representan los Números de Catalan, los cuales hoy en día tienen un gran auge por sus aplicaciones al aparecer en varios problemas de conteo que habitualmente son recurrentes.

Se da una breve introducción de los Números de Catalan, algunos problemas sencillos donde surgen, su relación con el triángulo de Pascal y algunas propiedades. Además se muestran tres interpretaciones que pueden ser consideradas como primarias en tanto están relacionadas con ideas básicas de teoría de grafos, computación y geometría. A su vez, presentamos una cuarta interpretación que los relaciona con la trama entera del plano de coordenadas y por lo tanto permite introducir su estudio en un rico dominio del álgebra clásica.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

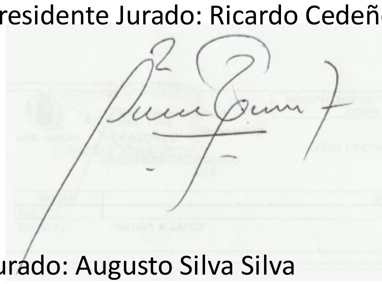
In this work a general idea of what the numbers represent Catalan, which today have a boom for their applications to appear in various counting problems that are usually recurrent illustrated.

It gives a brief introduction to the Catalan numbers, some simple problems which arise, their relationship to Pascal's triangle and some properties. In addition, three interpretations can be considered as primary are related to basic ideas of graph theory, computation and geometry is. In turn, we present a fourth interpretation that relates to the entire frame of the coordinate plane and therefore allows you to enter the studio in a rich domain of classical algebra.

APROBACION DE LA TESIS

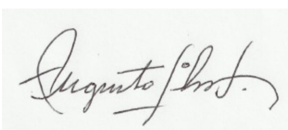
Nombre Presidente Jurado: Ricardo Cedeño Tovar

Firma:



Nombre Jurado: Augusto Silva Silva

Firma:



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Teoría y aplicaciones de los Números de Catalan

Karla Ximena Cohetato Peña
Laura Stefany Rengifo Trujillo

Neiva, Huila
2014

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Teoría y aplicaciones de los Números de Catalan

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Karla Ximena Cohetato Peña
2008172810
Laura Stefany Rengifo Trujillo
2008173156

Asesor:
Mg. Ricardo Cedeño Tovar

Neiva, Huila
2014

Nota de Aceptación

Jefe de Programa: Ricardo Cedeño Tovar

Asesor: Ricardo Cedeño Tovar

Segundo Lector: Augusto Silva Silva

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Julio de 2014

AGRADECIMIENTOS

Brindamos nuestro más sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la realización y culminación de este proyecto. En primer lugar a Dios que nos da la bendición de salir adelante con nuestros propósitos y por haber puesto en nuestro camino aquellas personas que han sido soporte y compañía durante todo el periodo de estudio. Al equipo del Programa de Licenciatura en Matemáticas, a cargo del profesor Ricardo Cedeño Tovar nuestro asesor y demás profesores quienes nos han enseñado a ser mejor en la vida y a realizarnos profesionalmente.

A nuestras familias que gracias a su apoyo permanente y confianza en todo lo necesario nos ayudaron a cumplir nuestros objetivos.

ÍNDICE GENERAL

Introducción 9

Objetivos 11

Justificación 13

Reseña Histórica 15

1. Preliminares 17
- 1.1. Factorial 17
  - 1.1.1. Propiedades 18
- 1.2. Doble Factorial 19
  - 1.2.1. Algunas identidades del doble factorial. 21
- 1.3. Coeficiente Binomial 23
  - 1.3.1. Propiedades 23
- 1.4. El Triángulo de Pascal 25
  - 1.4.1. Aspectos notables del Triángulo de Pascal 26

2. Números de Catalan 31
- 2.1. Algunas formas de calcular los Números de Catalan 32
- 2.2. Números de Catalan Generalizados 37
- 2.3. Algunos ejemplos donde aparecen los Números de Catalan 41
  - 2.3.1. Triangulación de polígonos 41
  - 2.3.2. Orden en la multiplicación 44
  - 2.3.3. Paréntesis balanceados 44
  - 2.3.4. Sierras 45
  - 2.3.5. Ordenar monedas 46
  - 2.3.6. Manos através de una mesa 47
  - 2.3.7. Caminos evitando la diagonal 48

Conclusiones 51

Bibliografía 53

INTRODUCCIÓN

"Teoría y aplicaciones de los Números de Catalan" es el nombre de este Trabajo de Grado, que estuvo a cargo de las estudiantes KARLA XIMENA COHETATO PEÑA y LAURA STEFANY RENGIFO TRUJILLO, realizado para optar al título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana.

En este trabajo se ilustra una idea general de lo que representan los Números de Catalan, los cuales hoy en día tienen un gran auge por sus aplicaciones al aparecer en varios problemas de conteo que habitualmente son recurrentes.

Se da una breve introducción de los Números de Catalan, algunos problemas sencillos donde surgen, su relación con el triángulo de Pascal y algunas propiedades. Además se muestran tres interpretaciones que pueden ser consideradas como primarias en tanto están relacionadas con ideas básicas de teoría de grafos, computación y geometría. A su vez, presentamos una cuarta interpretación que los relaciona con la trama entera del plano de coordenadas y por lo tanto permite introducir su estudio en un rico dominio del álgebra clásica.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Exponer los fundamentos teóricos e históricos sobre los cuales se desarrollan los Números de Catalan.

Objetivos Específicos

- Enunciar y estudiar definiciones relacionados con los Números de Catalan.
- Presentar una breve Reseña Historica de los Números de Catalan.
- Hacer una presentación del desarrollo y la construcción de los Números de Catalan.
- Mostrar algunos ejemplos de aplicaciones de los Números de Catalan.

JUSTIFICACIÓN

Las aplicaciones de los números de Fibonacci y de Lucas, llamadas "estrellas que brillan en la gran variedad de secuencias de enteros" tienen el don de la ubicuidad, aparecen inesperadamente en diferentes contextos, conservan propiedades interesantes, son de fácil entendimiento y han sido tema llamativo para matemáticos y aficcionados por igual. Sin embargo, los Números de Catalan son aún más fascinantes. Al igual que la estrella polar en el cielo nocturno, son una hermosa luz brillante en el cielo matemático. Ellos continúan proporcionando un terreno fértil para la teoría de números, especialmente para los aficionados catalanes y científicos de la computación.

Las hojas jóvenes tienen la belleza y la ubicuidad de los números de Catalan. "Ellos tienen la misma propensión encantadora para aparecer inesperadamente, sobre todo en problemas combinatorios," escribió Martin Gardner en la popular columna "Juegos Matemáticos" en la Scientific American.

Como Gardner ha señalado, muchos aficionados y los matemáticos saben el abecedario secuencia de Catalan, pero no pueden estar familiarizados con su infinidad inesperada de acontecimientos, las aplicaciones encantadoras, propiedades, además de las bellas y sorprendentes relaciones entre los numerosos ejemplos. Este trabajo se realiza para recoger y presentar algunas aplicaciones y propiedades de los Números de Catalan de varias fuentes de una manera ordenada y agradable.

El objetivo es recorrer junto al lector uno de los capítulos mas interesantes de la Combinatoria Enumerativa con las diferentes interpretaciones de los Números de Catalan que allí se encuentran, y quizas descubra la verdadera razón por la cual estos números aparecen con tanta frecuencia, y en situaciones tan diversas, en las matemáticas.

RESEÑA HISTÓRICA

Los Números de Catalan son la solución de varios problemas en diferentes áreas de las matemáticas, deben su nombre al matemático Belga Eugéne Charles Catalan, (1814-1894) quien los descubrió en 1838 mientras estudiaba el problema de las sucesiones bien formadas de paréntesis.

Aunque estos números fueron nombrados en honor a Catalan ya se conocian antes de él; alrededor de 1751 Leonhard Euler, (1707-1783), los descubrió mientras estudiaba el problema de la triangulación de polígonos convexos, sin embargo de acuerdo a un artículo de 1988 escrito por el matemático chino J. J. Luo, éstos números ya eran conocidos por el matemático chino Antu Ming, (1692 - 1763), quien hace referencia a ellos en algunos trabajos de 1730 sobre modelos geométricos. El trabajo de Ming fue publicado en chino, es ésta la razón por la cual no se conoció en Occidente.

Hoy en día se conocen alrededor de 400 artículos y problemas que tratan acerca de los Números de Catalan, en 1965 William G. Brown de la Universidad de Columbia Británica en Canadá presentó un antecedente histórico con una lista de 60 referencias.

En 1976, Henry W. Gould de la Universidad de West Virginia en Morgantown publicó una extensa bibliografía acerca de los números de Catalan conteniendo 470 referencias.

Richard P. Stanley del MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts) tiene enlistados, en su libro Enumerative Combinatorics vol. 2, 66 problemas cuya solución es un Número de Catalan. En éste trabajo se pretende dar una breve introducción a estos números. Algunos problemas sencillos donde surgen, su relación con el triángulo de Pascal y algunas propiedades.

A continuación presentamos una breve reseña bibliográfica de Eugene Charles Catalan. Hacemos referencia a los estudios y aportes que realizó con sus trabajos en análisis matemático, geometría y cálculo integral. Entre todos esos trabajos podemos destacar los números de Catalan y los poliedros de Catalan.

Eugéne Charles Catalan
1814-1894

Catalan nació en Brujas, Bélgica, hijo único de un joyero francés de nombre Joseph Catalan, en 1814. En 1825, viajó a París y aprendió matemática en la École Polytechnique, donde conoció a Joseph Liouville (1833). En 1833 obtuvo el primer lugar en el Concurso General de Matemáticas Especiales. En 1834 fue expulsado de la universidad y pasó a *Châlons-sur-Marne*, donde recibió un puesto tras su graduación. En 1835 se casó con *Charlotte Augustine Renée Perin*, conocida como Eugénie. Fue autor de un artículo en el segundo volumen, de 1837, del *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, que publicaba Liouville. Un año después, en la misma revista, publicó dos artículos más, el segundo de los cuales contiene los llamados "números de Catalan".

Figura 1: **Catalan (30 de mayo de 1814 - 14 de febrero de 1894).**

En 1838 volvió a la École Polytechnique y, con la ayuda de Liouville, obtuvo su título en matemáticas en 1841. Fue entonces al Charlemagne College a enseñar geometría descriptiva. Sin embargo era políticamente activo y extremadamente izquierdista, lo que le llevó a participar en la revolución de 1848, tuvo una carrera animada y además se sentó en la Cámara de los Diputados francesa.

La Universidad de Lieja le concedió la cátedra de Análisis en 1865. En 1879, aún en Bélgica, se convirtió en editor de un periódico donde publicó como nota al pie la teoría de *Paul-Jean Busschop* tras rechazarla en 1873 (haciéndole saber a Busschop que era demasiado empírica). En 1883 trabajó para la Academia Belga de las Ciencias en el campo de la teoría de números. Murió en Lieja,Bélgica.

Trabajó en fracciones continuas, geometría descriptiva, teoría de números y combinatoria. Dio su nombre a una superficie única (superficie periódica mínima en el espacio) que descubrió en 1855. Anteriormente había enunciado la famosa conjetura de Catalan, que fue publicada en 1844 y probada finalmente en 2002 por el matemático rumano *Preda Mihailescu*. Introdujo los números de Catalan para resolver un problema combinatorio.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

La operación de factorial aparece en muchas áreas de las matemáticas, particularmente en combinatoria y análisis matemático. De manera fundamental, el factorial de n representa el número de formas distintas de ordenar n objetos distintos (elementos sin repetición). Este hecho ha sido conocido desde hace muchos años, en particular en el siglo XII por los estudiosos hindúes. La notación actual $n!$ fue usada por primera vez por Christian Kramp en 1803.

La definición de la función factorial también se puede extender a números no naturales manteniendo sus propiedades fundamentales, pero se requieren matemáticas avanzadas, particularmente del análisis matemático.

1.1. Factorial

El factorial de un número entero positivo se define como el producto que se obtiene de multiplicar los números enteros desde 1 hasta el número n indicado en el factorial y se nota por $n!$.

Así:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ (n-1)!\, n & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

De aqui se deduce facilmente que si $n \geq 2$,

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Puesto que algunos casos necesitaremos el factorial de cero definimos a este como 1, es decir, $0! = 1$.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \\ 10! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800 \end{aligned}$$

1.1.1. Propiedades

1. $(n+1)! = n!\,(n+1)$, para todo $n \geq 0$

   si $n=0$ entonces $(0+1)! = 1! = 1 = 1 \cdot 1 = 0!\,1$

   si $n=1$ entonces $(1+1)! = 2! = 1!(1+1) = 1!\,2$

   Supongamos que $k \geq 2$ y $(k+1)! = k!\,(k+1)$, entonces $(k+2)! = (k+1)!\,(k+2)$, por la definición.

   Observemos que:

$$(n+1)! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=0 \\ n!\,(n+1) & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   Ejemplo: $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = [1 \times 2 \times 3 \times 4] \times 5 = 4!\ 5$

2. Para $n, m \geq 2 \quad n! = m!$ si y solo si $n = m$

   Observación: se pide $n, m \geq 2$ porque si hay esta restriccion $0! = 1!$ sin embargo $0 \neq 1$.

   Si $n = m$ evidentemente $n! = m!$.

   Ahora si $n! = m!$ mostremos que $n = m$.
   Si $n! = m!$ supongamos que $n \neq m$ en particular supongamos que $n < m$.

   De $n! = m!$ se dedude que $m! - n! = 0$ asi $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \times (n+1) \times \cdots \times m - 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = 0$ por lo tanto $(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)\,[(n+1) \times (n+2) \times \cdots \times m - 1] = 0$ pero $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n \neq 0$ así que $(n+1) \times (n+2) \times \cdots \times m = 1$ de donde $n+1 = 1$, $n+2 = 1$, $m = 1$ lo cual es imposible por lo tanto $n < m$ conduce a una contradicción. Igual ocurre si $n > m$. Por lo tanto $n = m$.

3. $n(n!) = (n+1)! - n!$

   En efecto,

$$\begin{aligned} (n+1)! - n! &= n!\,(n+1) - n! \\ &= n!\,[(n+1) - 1] \\ &= n!\,n \end{aligned}$$

   Ejemplo: $5\ (5!) = (6-1) \times 5! = 6 \times 5! - 5! = 6! - 5!$

4. (i) $(a+b)! \neq a! + b!$

$$(a+b)! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (a+b)$$

$a > b$

$$\begin{aligned}
a! + b! &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times a + 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b \\
&= [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b \times (b+1) \times \cdots \times a] + [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b] \\
&= [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b]\,[(b+1) \times (b+2) \times \cdots \times a - 1] \\
&\neq (a+b)!
\end{aligned}$$

Ejemplo: $(2+3)! = 5! = 120$; $2! + 3! = 2 + 6 = 8$

Luego $(2+3)! \neq 2! + 3!$

(ii) $(a \times b)! \neq (a)! \times (b)!$

$$(a \times b)! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (a \times b)$$

$a > b$

$$\begin{aligned}
a! \times b! &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times a \times 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b \\
&= [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b \times (b+1) \times \cdots \times a] \times [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b] \\
&= [1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times b]^2\,[(b+1) \times (b+2) \times \cdots \times a - 1 \times a] \\
&\neq (a \times b)!
\end{aligned}$$

Ejemplo: $(2 \times 3)! = 6! = 720$; $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$

Efectivamente $(2 \times 3)! \neq 2! \times 3!$

1.2. Doble Factorial

El doble factorial de un número entero no negativo es una generalización de $n!$ y se define así:

$$n!! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ n \times (n-2)!! & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

La definición establece que si n es un número mayor o igual a 2 su doble factorial es el producto de n con el doble factorial del número disminuido en 2.

Ejemplo: $3!! = 3 \times 1!! = 3 \times 1 = 3$

$4!! = 4 \times 2!! = 4 \times 2 \times 0!! = 4 \times 2 \times 1 = 8$

$8!! = 8 \times 6!! = 8 \times 6 \times 4!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 0!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 1 = 384$

$9!! = 9 \times 7!! = 9 \times 7 \times 5!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 945$

Es importante mencionar que $(2n)!!$ equivale a multiplicar todos los números pares desde 2 hasta $(2n)$, es decir,

$$(2n)!! = (2n) \times \cdots \times 6 \times 4 \times 2$$

Demostración por inducción:

$$(2n)!! = (2n) \times \cdots \times 6 \times 4 \times 2$$

Veamos si es válido para $n = 1$

$$(2 \times 1)!! = 2!! = 2 \times 0!! = 2 \times 1 = 2$$

Veamos si es válido para $n = 2$

$$(2 \times 2)!! = 4!! = 4 \times 2!! = 4 \times 2 \times 0!! = 4 \times 2$$

Suponemos que es válido para $n = k$

$$(2k)!! = (2k) \times (2k-2) \times (2k-4) \times \cdots \times 4 \times 2$$

Demostraremos que es válida para $n = k+1$

$$\begin{aligned}
(2(k+1))!! = (2k+2)!! &= (2k+2) \times (2k)!! \\
&= (2k+2) \times [(2k) \times (2k-2) \times (2k-4) \times \cdots \times 4 \times 2] \\
&= (2k+2) \times (2k) \times (2k-2) \times 4 \times 2
\end{aligned}$$

Asimismo, para $(2n-1)!!$ equivale a multiplicar todos los números impares desde 1 hasta $(2n-1)$, es decir se cumple que:

$$(2n-1)!! = (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1$$

Demostración por inducción:

$$(2n-1)!! = (2n-1) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1$$

Veamos si es válido para $n = 1$

$$(2(1)-1)!! = (2-1)!! = 1!! = 1$$

Veamos si es válido para $n=2$

$$(2(2)-1)!! = (4-1)!! = 3!! = 3\times 1!! = 3\times 1$$

Suponemos que es válido para $n=k$

$$(2k-1)!! = (2k-1)\times(2k-3)\times(2k-5)\times\cdots\times 3\times 1$$

Demostraremos que es válida para $n=k+1$

$$\begin{aligned}(2(k+1)-1)!! = (2k+1)!! &= (2k+1)\times(2k-1)!!\\ &= (2k+1)\,[(2k-1)\times(2k-3)\times(2k-5)\times\cdots\times 3\times 1]\\ &= (2k+1)\times(2k-1)\times(2k-3)\times(2k-5)\times\cdots\times 3\times 1\end{aligned}$$

1.2.1. Algunas identidades del doble factorial.

1. $n!!(n-1)!! = n!$ para $n\geq 1$

   Sea $n\in\mathbb{N}$, entonces n puede ser par o impar consideremos estos dos casos:

   a) Si n es par entonces $n-1$ es impar, por lo tanto, $n!! = n\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times 2$ y $(n-1)!! = (n-1)\times(n-3)\times\cdots\times 1$, asi que:

   $$\begin{aligned}n!!(n-1)!! &= [n\times(n-2)\times(n-4)\times\cdots\times 4\times 2]\,[(n-1)\times(n-3)\times(n-5)\times\cdots\times 3\times 1]\\ &= n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1\\ &= n!\end{aligned}$$

   Ejemplo: Si $n=8$

   $$\begin{aligned}8!!\times 7!! &= (8\times 6\times 4\times 2)\times 7!!\\ &= (8\times 6\times 4\times 2)(7\times 5\times 3\times 1)\\ &= 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\\ &= 8!\end{aligned}$$

   b) Si n es impar, $n-1$ es par luego $n!! = (n-1)\times(n-3)\times\cdots\times 1$ y $(n-1)!! = n\times(n-2)\times\cdots\times 2$, entonces:

   $$\begin{aligned}n!!(n-1)!! &= [(n-1)\times(n-3)\times\cdots\times 3\times 1]\,[n\times(n-2)\times(n-4)\times\cdots\times 4\times 2]\\ &= n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times\cdots\times 4\times 3\times 2\times 1\\ &= n!\end{aligned}$$

Ejemplo: Si $n = 5$

$$\begin{aligned} 5!! \times 4!! &= (5\times 3\times 1)\times 4!! \\ &= (5\times 3\times 1)(4\times 2) \\ &= 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \\ &= 5! \end{aligned}$$

2. $2^n n! = (2n)!!$ para $n \geq 0$

   Sea n un número natural, $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times(n-5)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$, y $(2n)!! = (2n)\times\cdots\times 6\times 4\times 2$.

   Luego:

$$\begin{aligned} 2^n n! &= \underbrace{(2\times 2\times 2\times 2\times\ldots)}_{n-veces}[n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1] \\ &= 2n\times 2(n-1)\times 2(n-2)\times 2(n-3)\times\cdots\times(2\times 5)\times(2\times 4)\times(2\times 3)\times(2\times 2)\times(2\times 1) \\ &= 2n\times(2n-2)\times(2n-4)\times(2n-6)\times\cdots\times 10\times 8\times 6\times 4\times 2 \\ &= (2n)!! \end{aligned}$$

   Ejemplo: Si $n = 3$

$$\begin{aligned} 2^3 3! &= (2\times 2\times 2)\times(3\times 2\times 1) \\ &= (2\times 3)\times(2\times 2)\times(2\times 1) \\ &= 6\times 4\times 2 \\ &= 6!! \end{aligned}$$

3. $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} 2^n n! = (2n)!! &= 2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n \\ &= \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times\cdots\times(2n-1)\times 2n}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-1)!!} \end{aligned}$$

   De donde

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

   Ejemplo: Si $n = 3$

$$\frac{(2\times 3)!}{2^3 3!} = \frac{6!}{2^3 3!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 2 \times 2)(3 \times 2 \times 1)} \\
&= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 3) \times (2 \times 2) \times (2 \times 1)} \\
&= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \\
&= 5 \times 3 \times 1 \\
&= 5!!
\end{aligned}
$$

1.3. Coeficiente Binomial

Cada uno de los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$ con n entero no negativo recibe el nombre de Coeficiente Binomial el cual puede interpretarse como el número de subconjuntos con k elementos que tiene un conjunto de n elementos.

Este número que aparece con tanta frecuencia en la combinatoria, recibe una notación y denominación especial y se representa por $\binom{n}{k}$.

Por definición,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

(se lee "n sobre k" o "n escoge k").

En efecto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (k-1) \times k}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción anterior por $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-k) = (n-k)!$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times 3 \times 2 \times 1}{[(n-k) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1]\,[k \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1]} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}
\end{aligned}
$$

1.3.1. Propiedades

En las demostraciones de estas propiedades se utilizan, siempre que sea posible, argumentos combinatorios, aunque no sea en muchos casos, la única vía de demostración. Si no se indica lo contrario, supondremos siempre que, en la expresión $\binom{n}{k}$, n y k son enteros no negativos, y $k \leq n$.

1. **Propiedad de simetría**

   Para cualquier par de números naturales n, k se cumple que

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

   En efecto:

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-n+k)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

   Ejemplo:
   Si $n=5 \quad k=3$

$$\begin{aligned}\binom{5}{2} &= \frac{5!}{(5-2)!\ \ 2!} \\ &= \frac{5!}{3!\ \ 2!} \\ &= \frac{5!}{2!\ \ 3!} \\ &= \frac{5!}{(5-3)!\ \ 3!} \\ &= \binom{5}{3}\end{aligned}$$

2. **Propiedad de la adición**

   Para cualquier par de numeros naturales n, k tenemos,

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} \qquad 0<k<n$$

   En efecto:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!\,k}{k\,(k-1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Ejemplo:
Si $n = 5 \quad k = 3$

$$\begin{aligned}
\binom{4}{3} + \binom{4}{2} &= \frac{4!}{1!\,3!} + \frac{4!}{2!\,2!} \\
&= 4! \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right] \\
&= 4! \left[\frac{2+3}{12}\right] \\
&= \frac{4!\,5}{12} \\
&= \frac{5!}{2 \times 6} \\
&= \frac{5!}{2!\,3!} \\
&= \binom{5}{3}
\end{aligned}$$

1.4. El Triángulo de Pascal

El Triángulo de Pascal o de Tartaglia es un conjunto infinito de números enteros ordenados en forma de triángulo que expresan coeficientes binomiales.

Tiene un origen que data del siglo XII en China. De hecho, algunas de sus propiedades fueron estudiadas por el matemático chino Yang Hui (siglo XIII), así como por el poeta persa Omar Khayyam (siglo XII).

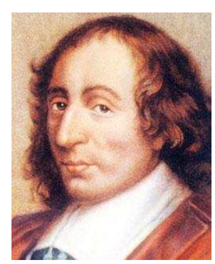


Figura 1.1: **Blaise Pascal (1623-1662). Filósofo, Físico y Matemático francés.**

Figura 1.2: **Yang Hui(1238-1298). Matemático chino de Qiantang. Trabajó en los cuadrados mágicos, los círculos mágicos y el teorema del Binomio.**

El que se le asocie el nombre del filósofo, y matemático Pascal (1623-1662) se debe a que él escribió el primer tratado sobre el triángulo. El de Tartaglia(1500-1557) porque éste italiano fue de los primeros que lo publicaron en Europa.

1.4.1. Aspectos notables del Triángulo de Pascal

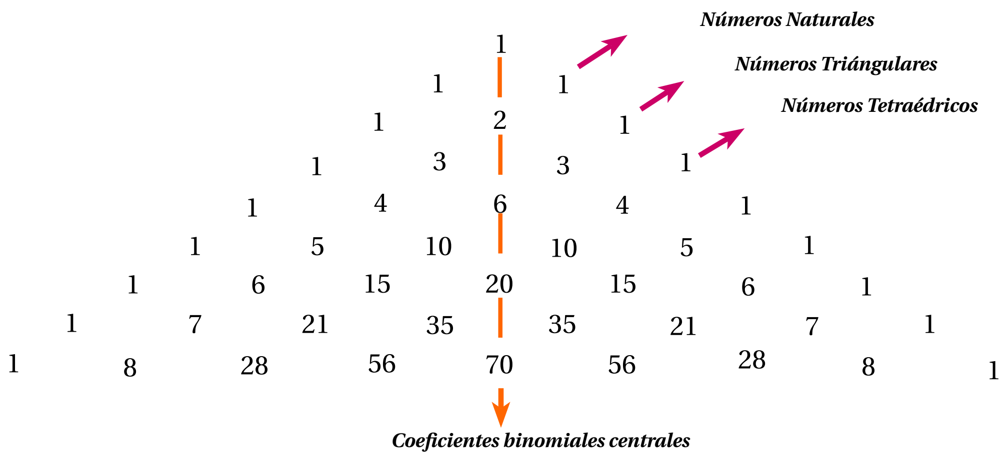


Figura 1.3: Triángulo de Pascal

En la segunda diagonal se encuentran los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,\ \ldots\}$$

En la tercera diagonal los números triángulares:

$$T_n = \{1,3,6,10,15,21,\ \ldots\}$$

En la cuarta diagonal los números tetraédricos:

$$Tt_n = \{1,4,10,20,35,56,\ \ldots\}$$

La suma de los coeficientes de cada renglón forman potencias de 2:

$$\mathbb{P}_2 = \{1,2,4,8,16,32,\ \ldots\}$$

Números Triángulares

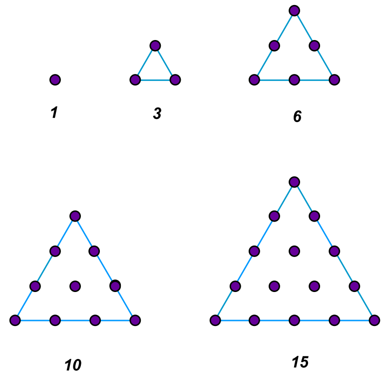


Figura 1.4: **Números Triángulares**

Son aquellos números que pueden ser presentados en forma de un triángulo equilátero, siendo el primer número triangular el 1.

Los números triángulares fueron estudiados por Pitágoras quien consideraba un número sagrado al 10 cuando es escrito en forma triangular, este número es conocido como **Tetraktys** o **trianón**.

Cada número triangular T_n es la suma de los n primeros números naturales:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

La fórmula para calcular el n-ésimo número triangular T_n es:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

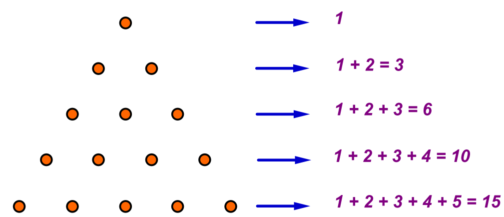


Figura 1.5: **Números Triángulares**

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\
T_2 &= 1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \\
T_3 &= 1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6 \\
\vdots &= \vdots \\
\ldots & \quad \ldots \\
T_n &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Figura 1.6: **Srinivasa Aayiangar Ramanujan; (1887-1920).**

Según la ecuación de Ramanujan - Nagell, se considera que el número triangular más grande puede ser representado mediante la fórmula 2^k-1 es 4095.

Cabe destacar que un número triangular es aquel que puede ser representado a través de un patrón triangular que tiene puntos espaciados de forma equilibrada.

Algunos ejemplos de números triangulares son:

- El número tres, es considerado como un número triangular porque se puede descomponer como la suma de números sucesivos, empezando en 1 y terminando en 2. Es decir, $3 = 1 + 2$.
- El número seis, también es un número triangular porque se puede descomponer como la suma de números sucesivos, empezando en 1 y terminando en 3. Es decir, $6 = 1 + 2 + 3$.

Figura 1.7: **Thomas Nagel ;(76 años) Filosofo estadounidense.**

Existe una propiedad de los números triangulares, la cual dice que si se suman dos números triangulares consecutivos, se llega a tener como resultado un número cuadrado, por ejemplo, si se suman, 3 y 6, se tiene como resultado el número cuadrado 9. Esto se debe a que si T_n es un número triángular, entonces $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ y $T_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1)$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
T_n + T_{n+1} &= (1+2+3+\cdots+n) + (1+2+3+\cdots+n+(n+1)) \\
&= 2(1+2+3+\cdots+n) + (n+1) \\
&= \frac{2n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= n(n+1) + (n+1) \\
&= (n+1)(n+1) \\
&= (n+1)^2
\end{aligned}$$

Números Tetraédricos

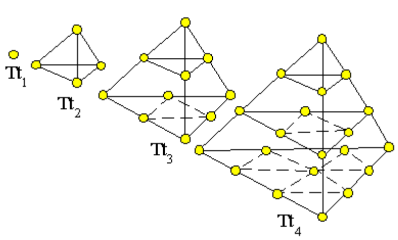


Figura 1.8: **Números tetraédricos**

Un número tetraédrico, o número piramidal triangular, es un número figurado que representa una pirámide de base triangular y cuatro caras, llamada tetraedro.

Los primeros números tetraédricos son:

$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, 680, 816, 969, \ldots$

La fórmula del n-ésimo número tetraédrico es:

$$Tt_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

El único número tetraédrico que es también un número piramidal cuadrado es el 1 (Beukers, 1988).
El n-ésimo número tetraédrico puede ser expresado como:

$$Tt_n = \binom{n+2}{3}$$

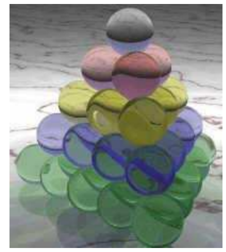


Figura 1.9: **Números tetraédricos**

Efectivamente,

$$\begin{aligned} Tt_n &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!\,6} \\ &= \frac{(n+2)!}{(n-1)!\,3!} \\ &= \binom{n+2}{3} \end{aligned}$$

El n-ésimo número tetraédrico es la suma de los n primeros números triangulares.
.
O sea:

$$\begin{aligned} Tt_1 &= 1 \\ Tt_2 &= 1+3 \\ Tt_3 &= 1+3+6 \\ \vdots &= \vdots \\ \ldots & \quad \ldots \\ Tt_n &= 1+3+6+\ldots+T_n \end{aligned}$$

En forma equivalente:

$$\binom{n+2}{3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$$

Resultado que puede probarse por inducción sobre n.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS DE CATALAN

En combinatoria, los números de Catalan forman una secuencia de números naturales que aparece en varios problemas de conteo que habitualmente son recurrentes. Obtienen su nombre del matemático belga Eugene Charles Catalan $(1814-1894)$.

El n-ésimo número de Catalan se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad n \geq 0$$

Que se consiguen de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathrm{n}=0 & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
\mathrm{n}=1 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
\mathrm{n}=2 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
\mathrm{n}=3 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\mathrm{n}=4 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & \\
\mathrm{n}=2\mathrm{k} & \binom{2k}{0} \quad \binom{2k}{1} & & \binom{2k}{2} & \cdots & \binom{2k}{k} & & \binom{2k}{k+1} & \cdots \; \binom{2k}{2k-1} & \binom{2k}{2k} \\
\vdots & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & \text{Coeficientes binomiales centrales} & & & &
\end{array}$$

Figura 2.1: Triángulo de Pascal

Los números de Catalan corresponden a los términos o coeficientes centrales del desarrollo $(a+b)^{2n}$ dividido por $n+1$.

Así

$$C_n = \frac{1}{n+1}\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \qquad n \geq 0$$

calculos directos muestran que

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{n+1}\left[\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}\right] \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\,n!} \\ &= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} \end{aligned}$$

Los primeros números de Catalan son:

$$\begin{array}{cc} C_0 = 1 & C_4 = 14 \\ C_1 = 1 & C_5 = 42 \\ C_2 = 2 & C_6 = 132 \\ C_3 = 5 & C_7 = 429 \end{array}$$

Generalmente se nota en la mayoria de textos $C_{m,k} = \binom{m}{k}$, asi que $C_n = \dfrac{1}{(n+1)}\ C_{2n,n}$

En resumen tenemos

$$C_n = \frac{1}{n+1}\ C_{2n,n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

2.1. Algunas formas de calcular los Números de Catalan

1. En forma directa a partir de la fórmula

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n \geq 0$$

$$C_0 = \frac{1}{0+1}\ C_{0,0} = 1\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{1+1}\,C_{2,1} = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2!}{1!\,1!}\right) = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{2+1}\,C_{4,2} = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{4!}{2!\,2!}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\times 4}{2}\right) = 2$$

$$C_3 = \frac{1}{3+1}\,C_{6,3} = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{6!}{3!\,3!}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4\times 5\times 6}{2\times 3}\right) = 5$$

$$C_4 = \frac{1}{4+1}\,C_{8,4} = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5}\left(\frac{8!}{4!\,4!}\right) = \frac{1}{5}(70) = 14$$

$$C_5 = \frac{1}{5+1}\,C_{10,5} = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{1}{6}\left(\frac{10!}{5!\,5!}\right) = \frac{1}{6}(252) = 42$$

$$C_6 = \frac{1}{6+1}\,C_{12,6} = \frac{1}{7}\binom{12}{6} = \frac{1}{7}\left(\frac{12!}{6!\,6!}\right) = \frac{1}{7}(924) = 132$$

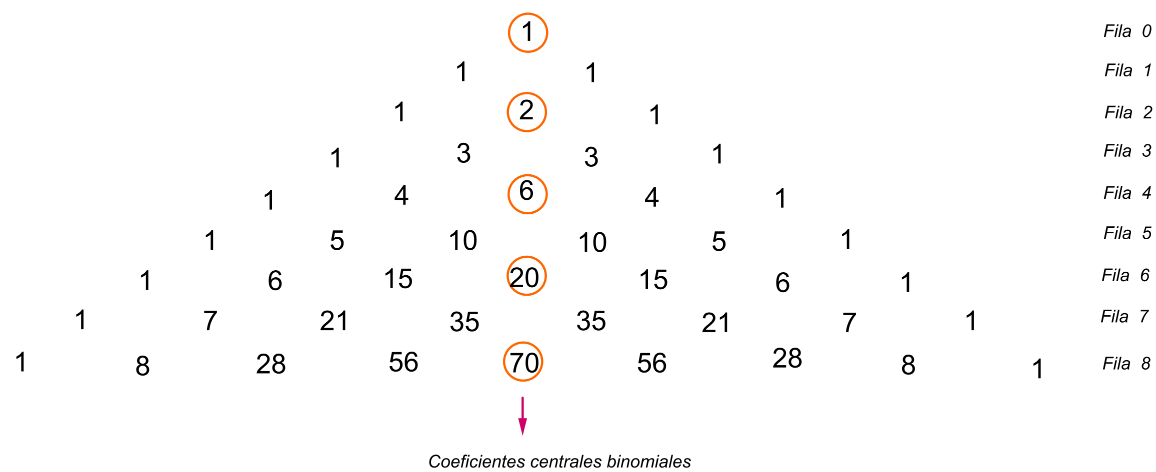


Figura 2.2: Maneras de triangular un polígono

Asumamos que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$, afirmamos que

$$\begin{aligned} C_{n+2} &= \frac{1}{n+3}\binom{2(n+2)}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+3}\binom{2n+4}{n+2} \end{aligned}$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} C_{n+2} &= \frac{(2(n+2))!}{(n+2)!\,(n+3)!} \\ &= \frac{(2n+4)!}{(n+2)!\,(n+3)\,(n+2)!} \\ &= \frac{1}{(n+3)}\,\frac{(2n+4)!}{(n+2)!\,((2n+4)-(n+2))!} \\ &= \frac{1}{(n+3)}\binom{2n+4}{n+2} \end{aligned}$$

Esto muestra por inducción matemática que el resultado es válido.

2. Vale el resultado

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \qquad \text{para } n \geq 1$$

En efecto:

$$\begin{aligned} C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} &= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(2n-(n-1))!} \\ &= \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \end{aligned}$$

asi que:

$$C_1 = \frac{1}{1}\binom{2}{0} = 1 \times 1 = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\binom{4}{1} = \frac{1}{2} \times 4 = 2 \qquad \text{etc.}$$

Lo anterior significa que cada número de Catalan C_n, puede ser calculado dividiendo el término inmediatamente a la izquierda ó a la derecha del coeficiente central binomial por la mitad del número de renglón.

Ejemplo:

$$C_1 = \frac{1}{1}\,C_{2,0} = 1\binom{2}{0} = \frac{2!}{2!\,0!} = 1$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\,C_{4,1} = \frac{1}{2}\binom{4}{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{4!}{3!\,1!}\right) = \frac{1}{2}\,(4) = 2$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\,C_{6,2} = \frac{1}{3}\binom{6}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{6!}{4!\,2!}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{2}\right) = 5$$

$$C_4 = \frac{1}{4}\,C_{8,3} = \frac{1}{4}\binom{8}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{8!}{5!\,3!}\right) = \frac{1}{4}\,(56) = 14$$

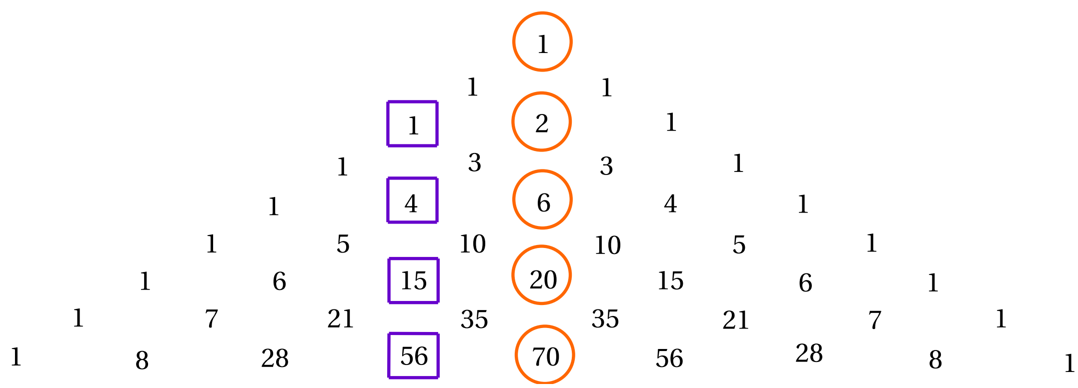


Figura 2.3: Triángulo de Pascal

3. Vale el resultado,

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Efectivamente

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(2n-n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!\,n!\,(n+1)!}\,[(n-1)!\,(n+1)! - n!\,n!] \\
&= \frac{(2n)!\,[(n-1)!\,n!\,(n+1) - (n-1)!\,n\,n!]}{(n-1)!\,n!\,n!\,(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!\,(n-1)!\,n!\,[(n+1) - n]}{(n-1)!\,n!\,n!\,(n+1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = C_n
\end{aligned}$$

Luego, C_n puede ser calculado restando al coeficiente central binomial el número inmediato a su izquierda o a su derecha.

Ejemplo:

Si $n = 1$

$$\begin{aligned} C_1 = C_{2,1} - C_{2,0} &= \binom{2}{1} - \binom{2}{0} \\ &= \frac{2!}{1!\,1!} - \frac{2!}{2!\,0!} \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si $n = 2$

$$\begin{aligned} C_2 = C_{4,2} - C_{4,1} &= \binom{4}{2} - \binom{4}{1} \\ &= \frac{4!}{2!\,2!} - \frac{4!}{3!\,1!} \\ &= 6 - 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Si $n = 3$

$$\begin{aligned} C_3 = C_{6,3} - C_{6,2} &= \binom{6}{3} - \binom{6}{2} \\ &= \frac{6!}{3!\,3!} - \frac{6!}{4!\,2!} \\ &= 20 - 15 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Si $n = 4$

$$\begin{aligned} C_4 = C_{8,4} - C_{8,3} &= \binom{8}{4} - \binom{8}{3} \\ &= \frac{8!}{4!\,4!} - \frac{8!}{5!\,3!} \\ &= 70 - 56 = 14 \end{aligned}$$

Si $n = 5$

$$\begin{aligned} C_5 = C_{10,5} - C_{10,4} &= \binom{10}{5} - \binom{10}{4} \\ &= \frac{10!}{5!\,5!} - \frac{10!}{6!\,4!} \\ &= 252 - 210 \\ &= 42 \end{aligned}$$

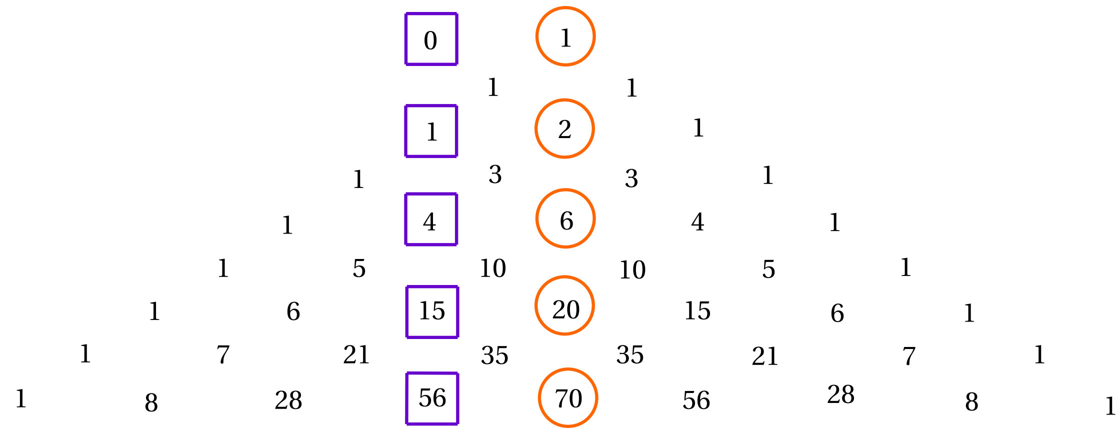


Figura 2.4: Triángulo de Pascal

2.2. Números de Catalan Generalizados

Los números de Catalan son un caso especial de una clase más grande de números $C(n,k)$ definidos por:

$$C(n,k) = \frac{1}{kn+1}\binom{(k+1)n}{n} \qquad k \geq 0$$

Se tiene que $C(n,1) = C_n$, puesto que

$$\begin{aligned} C(n,1) &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)}\frac{(2n)!}{n!\,n!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = C_n \end{aligned}$$

Como en el caso de los números de Catalan todo número de Catalan generalizado. $C(n,k)$, es un entero.

En efecto:

$$\begin{aligned} \binom{kn+n}{n} - \binom{kn+n}{n-1} &= \frac{(kn+n)!}{n!\,(kn)!} - \frac{(kn+n)!}{(n-1)!\,(kn+1)!} \\ &= \frac{(kn+n)!}{n(n-1)!\,(kn)!} - \frac{(kn+n)!}{(n-1)!\,(kn)!\,(kn+1)} \\ &= \frac{(kn+n)!}{(n-1)!\,(kn)!}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{kn+1}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(kn+n)!}{(n-1)!\,(kn)!}\left[\frac{kn+1-n}{n\,(kn+1)}\right] \\
&= \frac{(kn+n)!}{(n-1)!\,(kn)!}\,\frac{[(k-1)n+1]}{n\,(kn+1)} \\
&= \frac{(kn+n)!}{n!\,(kn+1)!}\,[(k-1)n+1] \\
&= \frac{(kn+n)!}{n!\,(kn+n-n)!}\left[\frac{(k-1)\;n+1}{(kn+1)}\right] \\
&= \frac{1}{kn+1}\binom{kn+n}{n}\,[(k-1)n+1]
\end{aligned}
$$

debido a que el lado izquierdo es un entero, el lado derecho también debe serlo. Pero $kn+1$ y $(k-1)n+1$ son primos relativos. Esto implica que $kn+1$ divide a $\binom{kn+n}{n}$ así que $C(n,k)$ es un número entero para todo n y todo $k \geq 0$.

Nótese que $C(n,k)$ puede también ser escrito como:

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{(k+1)n}{n-1}$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
C(n,k) &= \frac{1}{kn+1}\binom{(k+1)n}{n} = \frac{1}{kn+1}\left[\frac{((k+1)\;n)!}{n!\,((k+1)n-n)!}\right] \\
&= \frac{[(k+1)\;n]!}{(kn+1)\;n!\,(kn+n-n)!} \\
&= \frac{[(k+1)\;n]!}{(kn+1)\;n!\,(kn)!} \\
&= \frac{[(k+1)\;n]!}{n!\,(kn+1)!} \\
&= \frac{[(k+1)\;n]!}{n\,(n-1)!\,(kn+1)!} \\
&= \frac{[(k+1)\;n]!}{n\,(n-1)!\,(kn+n-n+1)!} \\
&= \frac{[(k+1)\;n]!}{n\,(n-1)!\;[(k+1)n-(n-1)]!} \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{((k+1)\;n)!}{(n-1)!\;[(k+1)n-(n-1)]!}\right] \\
&= \frac{1}{n}\binom{(k+1)n}{n-1}
\end{aligned}
$$

Cuando $k = 0$, $C(n,0) = \binom{n}{n}$ la correspondiente sucesión es la sucesión constante $1,1,1, \ldots$. La tabla siguiente muestra las sucesiones correspondientes a $k = 0,1,2,3$ y 4.

$$
\begin{array}{ll}
k=0: & 1,1,1,1,1, \ldots, \binom{n}{n}, \ldots \\[2ex]
k=1: & 1,1,2,5,14, \ldots, \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \ldots \\[2ex]
k=2: & 1,1,3,12,55, \ldots, \dfrac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}, \ldots \\[2ex]
k=3: & 1,1,4,22,140, \ldots, \dfrac{1}{3n+1}\binom{4n}{n}, \ldots \\[2ex]
k=4: & 1,1,5,35,285, \ldots, \dfrac{1}{4n+1}\binom{5n}{n}, \ldots
\end{array}
$$

Para $k = 0$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
C(n,0) &= \frac{1}{n}\binom{(0+1)\ n}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{n}{n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{n!}{(n-1)!\ 1!}\right] \\
&= \frac{n!}{n\ (n-1)!} \\
&= \frac{n!}{n!} = 1
\end{aligned}
$$

Para $k = 1$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
C(n,1) &= \frac{1}{n}\binom{(1+1)\ n}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{2n!}{(n-1)!\ (2n-(n-1))!}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{2n!}{(n-1)!\ (n+1)!}\right] \\
&= \frac{2n!}{n\ (n-1)!}\frac{1}{(n+1)!} \\
&= \frac{2n!}{n!\ (n+1)!} \\
&= \frac{2n!}{n!\ (n+1)\ (n+n-n)!} \\
&= \frac{2n!}{n!\ (n+1)\ (2n-n)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)} \frac{2n!}{n!\,(2n-n)!} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

Para $k = 2$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
C(n,2) &= \frac{1}{n}\binom{(2+1)\ n}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{3n}{n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{3n!}{(n-1)!\,(3n-(n-1))!}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{3n!}{(n-1)!\,(2n+1)!}\right] = \frac{3n!}{n\,(n-1)!\,(2n+1)!} \\
&= \frac{3n!}{n!\,(2n+1)!} \\
&= \frac{3n!}{n!\,(2n+1)\ (2n+n-n)!} \\
&= \frac{3n!}{n!\,(2n+1)\ (3n-n)!} \\
&= \frac{1}{(2n+1)} \frac{3n!}{n!\,(3n-n)!} \\
&= \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}
\end{aligned}
$$

Para $k = 3$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
C(n,3) &= \frac{1}{n}\binom{(3+1)\ n}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{4n}{n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{4n!}{(n-1)!\,(4n-(n-1))!}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{4n!}{(n-1)!\,(3n+1)!}\right] = \frac{4n!}{n\,(n-1)!\,(3n+1)!} \\
&= \frac{4n!}{n!\,(3n+1)!} \\
&= \frac{4n!}{n!\,(3n+1)\ (3n+n-n)!} \\
&= \frac{4n!}{n!\,(3n+1)\ (4n-n)!} \\
&= \frac{1}{(3n+1)} \frac{4n!}{n!\,(4n-n)!} \\
&= \frac{1}{3n+1}\binom{4n}{n}
\end{aligned}
$$

Para $k = 4$ se cumple que:

$$
\begin{aligned}
C(n,4) &= \frac{1}{n}\binom{(4+1)\ n}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{5n}{n-1} = \frac{1}{n}\left[\frac{5n!}{(n-1)!\ (5n-(n-1))!}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{5n!}{(n-1)!\ (4n+1)!}\right] \\
&= \frac{5n!}{n\ (n-1)!\ (4n+1)!} \\
&= \frac{5n!}{n!\ (4n+1)!} \\
&= \frac{5n!}{n!\ (4n+1)\ (4n+n-n)!} \\
&= \frac{5n!}{n!\ (4n+1)\ (5n-n)!} \\
&= \frac{1}{(4n+1)}\frac{5n!}{n!\ (5n-n)!} \\
&= \frac{1}{4n+1}\binom{5n}{n}
\end{aligned}
$$

2.3. Algunos ejemplos donde aparecen los Números de Catalan

2.3.1. Triangulación de polígonos

Ejemplo 2.3.1. *Encuentre el número de maneras T_n en que el interior de un polígono convexo de n lados, puede ser dividido en triángulos, dibujando diagonales que no se crucen, para: $n \geq 3$*

Solución:

Hay exactamente una manera de triangular un triángulo $T_3 = C_1 = 1$
Hay exactamente dos maneras de triangular un cuadrado $T_4 = C_2 = 2$
Hay cinco diferentes maneras de triangular un pentágono $T_5 = C_3 = 5$
Hay 14 diferentes maneras de triangular un hexágono $T_6 = C_4 = 14$
Hay 42 maneras de triangular un polígono de 7 lados $T_7 = C_5 = 42$
Hay 132 maneras de triangular un polígono de 8 lados $T_8 = C_6 = 132$

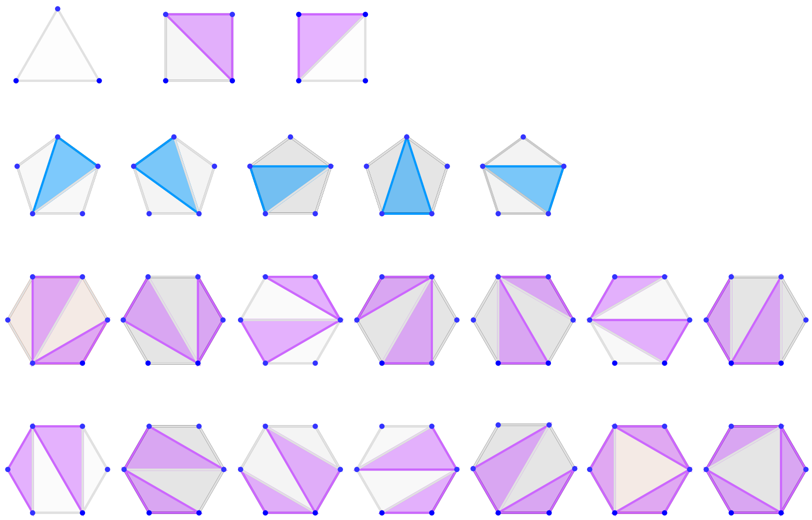


Figura 2.5: Las triangulaciones de polígonos

Una triangulación de un polígono es una forma de descomponerlo como una unión disjunta de triángulos, cuyos vértices coinciden con los del polígono. Es fácil ver que para triangular un polígono con $n+2$ vértices se necesitan exactamente n triángulos (y viceversa).

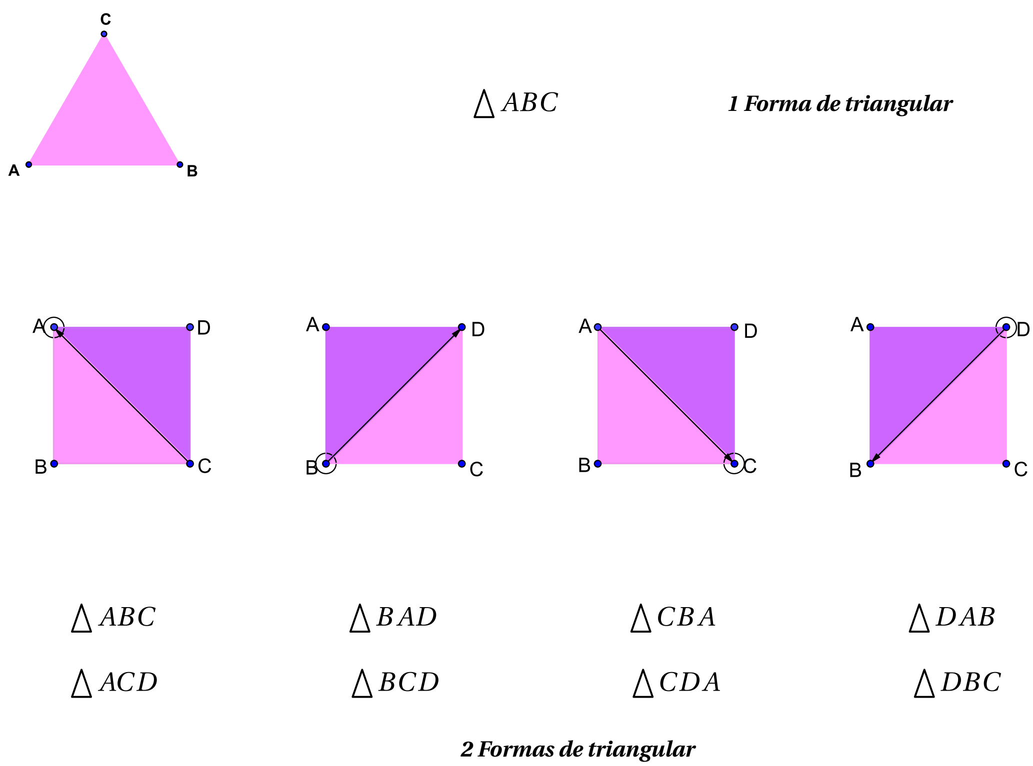


Figura 2.6: Maneras de triangular un polígono

Si en un polígono de n vértices escogemos un vértice cualquiera, encontramos 2 vértices que son contiguos, quedando $n-2$ lados.
Hay $n-2$ triángulos en un polígono de n lados desde un solo vértice.

Por ejemplo, en la Figura anterior ilustramos las dos triangulaciones para el cuadrado, las cinco triangulaciones de un pentágono y las catorce del hexágono, cada una de ellas construida utilizando exactamente dos, tres y cuatro triángulos respectivamente.
En un triángulo, él ya esta triangulado de una única manera, un cuadrado de dos, un pentágono de cinco, y un hexágono de catorce maneras diferentes. El problema se complica cada vez que aumentamos el número de lados del polígono. En esta sección presentaremos una recurrencia que nos permite calcular estos valores fácilmente.

Sea C_n el número de maneras de descomponer un polígono utilizando exactamente n triángulos. Procedemos por inducción sobre n para calcular C_n.
Supongamos que sabemos triangular todos los polígonos con un máximo de $n+2$ lados, y con esta información triangulemos un polígono con $n+3$ lados. (El problema es trivial si tenemos un sólo triángulo.)

Procedemos de la siguiente manera. Primero escogemos un lado del polígono de vértices $1,2,\ldots,n+3$. En lo que sigue, el lado escogido por el lector siempre será el que une a los vértices 1 y $n+3$. Este lado pertenece a un único triángulo en nuestra triangulación, T_i, cuyo tercer vértice i pertenece al conjunto $\{2,3,\ldots,n+2\}$. Ver Figura 2,6.

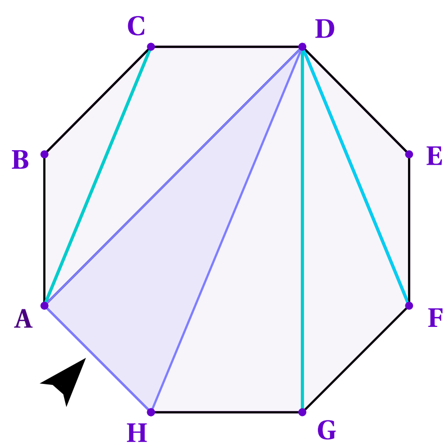


Figura 2.7: La triangulación de un polígono con un lado escogido, y cuyo tercer vértice es i.

Eliminando el triángulo T_i de nuestro polígono, obtenemos dos nuevos polígonos que se encuentran triangulados. El primero de ellos tiene como vértices a los números $1,2,\ \ldots,i$, y en consecuencia, puede ser triangulado de C_{i-2} maneras diferentes. El segundo polígono tiene como vértices a los números $i, i+1, i+2,\ \ldots, n+3$, y en consecuencia puede ser triangulado de C_{n-i+2} maneras distintas. Ambas elecciones son independientes. Así que el número de maneras de triangular el polígono (que contienen al triángulo T_i) es $C_{i-2}\, C_{n-i+2}$.

Al variar el tercer vértice del triángulo T_i sobre todos los valores posibles, $2,3,\ \ldots, n+2$, obtenemos la recurrencia de Catalan;

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \ldots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0$$

(Note que estamos suponiendo que $C_0 = 1$.)
La recurrencia de Catalan nos permite calcular rápidamente los primeros valores de la sucesión de Catalan:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, …

La estructura recursiva que acabamos de hallar nos permite generar todas las triangulaciones de un polígono. La recurrencia de Catalan también nos permite demostrar que otros conjuntos se pueden contar con los números de Catalan.

2.3.2. Orden en la multiplicación

Ejemplo 2.3.2. *Supongamos que tenemos un conjunto de $n+1$ números para multiplicarlos juntos, lo que significa que hay n multiplicaciones para realizar.*
Sin cambiar el orden de los números, se pueden multiplicar de las siguientes maneras o en los ordenes especificados en la figura.

N. Trazos	Números Multiplicados	Maneras
$n=0$	(a)	1 manera
$n=1$	$(a\cdot b)$	1 manera
$n=2$	$((a\cdot b)\cdot c)$, $(a\cdot(b\cdot c))$	2 maneras
$n=3$	$(((a\cdot b)\cdot c)\cdot d))$, $((a\cdot b)\cdot(c\cdot d))$, $((a\cdot(b\cdot c))\cdot d)$	5 maneras
	$(a\cdot((b\cdot c)\cdot d))$, $(a\cdot(b\cdot(c\cdot d)))$	
$n=4$	$((((a\cdot b)\cdot c)\cdot d)\cdot e)$, $(((a\cdot b)\cdot c)\cdot(d\cdot e))$, $(((a\cdot b)\cdot(c\cdot d))\cdot e)$	14 maneras
	$((a\cdot b)\cdot((c\cdot d)\cdot e))$, $((a\cdot b)\cdot(c\cdot(d\cdot e)))$, $(((a\cdot(b\cdot c)\cdot d)\cdot e)$	
	$((a\cdot(b\cdot c))\cdot(b\cdot e))$, $((a\cdot((b\cdot c)\cdot d))\cdot e)$, $((a\cdot(b\cdot(c\cdot d)))\cdot e)$	
	$(a\cdot(((b\cdot c)\cdot d)\cdot e))$, $(a\cdot((b\cdot c)\cdot(d\cdot e)))$, $(a\cdot((b\cdot(c\cdot d))\cdot e))$	
	$(a\cdot(b\cdot((c\cdot d)\cdot e)))$, $(a\cdot(b\cdot(c\cdot(d\cdot e))))$	

2.3.3. Paréntesis balanceados

Ejemplo 2.3.3. *Suponga que tiene n pares de paréntesis y que le gustaría formar con ellos agrupaciones válidas, donde " válido" significa que cada paréntesis abierto tiene un paréntesis cerrado que le corresponde, o que hace juego con él, o que empata con él.*

Tal vez una definición más precisa del problema sería la siguiente: Una cadena de paréntesis es válida si hay el mismo número de paréntesis de apertura y cerrado y si usted comienza a la izquierda mientras se mueve a la derecha, añadir 1 cada vez que pasas por un proceso abierto y resta 1 cada vez que pasa un cierre de paréntesis, entonces la suma es siempre no negativa.

La siguiente Tabla muestra las agrupaciones posibles para $0 \leq n \leq 5$.

N. de Trazos	Número de Paréntesis	Maneras
$n=0$	*	1 manera
$n=1$	()	1 manera
$n=2$	()(), (())	2 maneras
$n=3$	()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))	5 maneras
$n=4$	()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())) (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()) (()(())), ((())()), ((()())), (((())))	14 maneras
$n=5$	()()()()(), ()()()(()), ()()(())(), ()()(()()), ()()((())) ()(())()(), ()(())(()), ()(()())(), ()((()))(), ()(()()()) ()(()(())), ()((())()), ()((()())), ()(((()))), (())()()() (())()(()), (())(())(), (())(()()), (())((())), (()())()() (()())(()), ((()))()(), ((()))(()), (()()())(), (()(()))() ((())())(), ((()()))(), (((())))(), (()()()()), (()()(())) (()(())()), (()(()())), (()((()))), ((())()()), ((())(())) ((()())()), (((()))()), ((()()())), ((()(()))), (((())())) (((()()))), ((((()))))	42 maneras

Es útil y razonable para definir el número para $n=0$ a 1, ya que no es exactamente una forma de la organización de cero entre paréntesis: no escribimos nada. Quedará claro más adelante que esta es exactamente la correcta interpretación.

2.3.4. Sierras

Ejemplo 2.3.4. *Encontrar el número de "sierras" que se pueden formar con n trazos de manera ascendente y descendentes de tal manera que se mantengan por encima de la línea original. Si consideramos como en el caso anterior que existe una cadena montañosa única sin trazos. En la siguiente tabla se presenta una lista de las posibilidades para* $0 \le n \le 3$*:*

```
n = 0     *                                              1 manera
n = 1     /\                                             1 manera
                    /\
n = 2     /\/\     /  \                                  2 maneras
                                                /\
n = 3                      /\      /\          /  \      5 maneras
          /\/\/\    /\   /  \    /  \  /\    /    \
```

Tenga en cuenta que estos deben coincidir con los grupos de paréntesis-arriba. El "(" corresponde a "/" y el ")" a \". Las cadenas montañosas para $n=4$ y $n=5$ se han omitido para ahorrar espacio, pero son 14 y 42 de ellos, respectivamente. Es un buen ejercicio para sacar las 14 versiones con $n=4$.

En la definición formal de un conjunto válido de paréntesis, se indica que si se añade un paréntesis para abrir y un paréntesis de cierre la suma siempre será no negativa.

La interpretación es que la cordillera de las montañas nunca pasará por debajo del horizonte.

Figura 2.8: **Cordillera de montañas**

2.3.5. Ordenar monedas

Ejemplo 2.3.5. *Supongamos que tenemos una cantidad infinita de monedas y que deseamos acomodarlas en filas, sujetas a las siguientes condiciones.*

(i) *La fila de abajo consiste de n monedas, cada una en contacto con las dos más próximas a sus lados, excepto las* 2 *de los extremos,* $n > 1$.

(ii) *Una moneda que no pertenece a un renglón se sitúa entre las dos monedas debajo de ella.*

(iii) *No se hace distinción entre cara o cruz.*

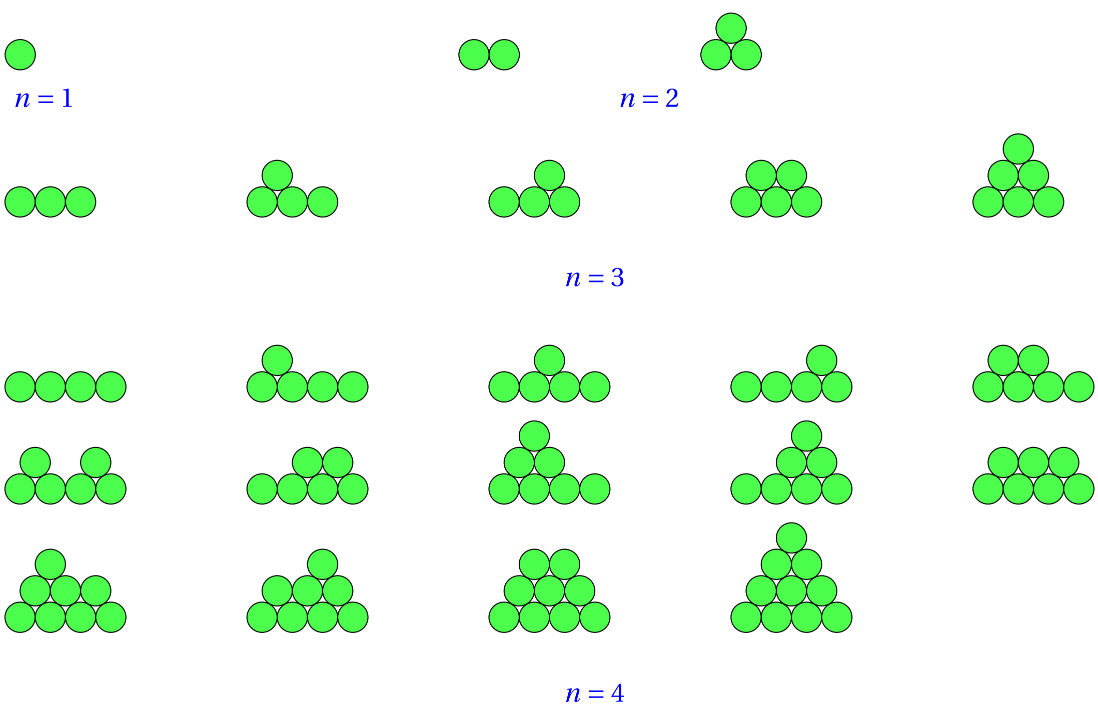


Figura 2.9: Ordenar monedas

2.3.6. Manos através de una mesa

Ejemplo 2.3.6. *Encuentre el número de maneras en que* $2n$ *personas, sentadas alrededor de una mesa redonda, pueden saludarse sin que sus manos se crucen. Para* $n \geq 0$.
Solución: La figura muestra los varios posibles saludos para $0 \leq n \leq 4$. *La respuesta en cada caso es un número de Catalan.*

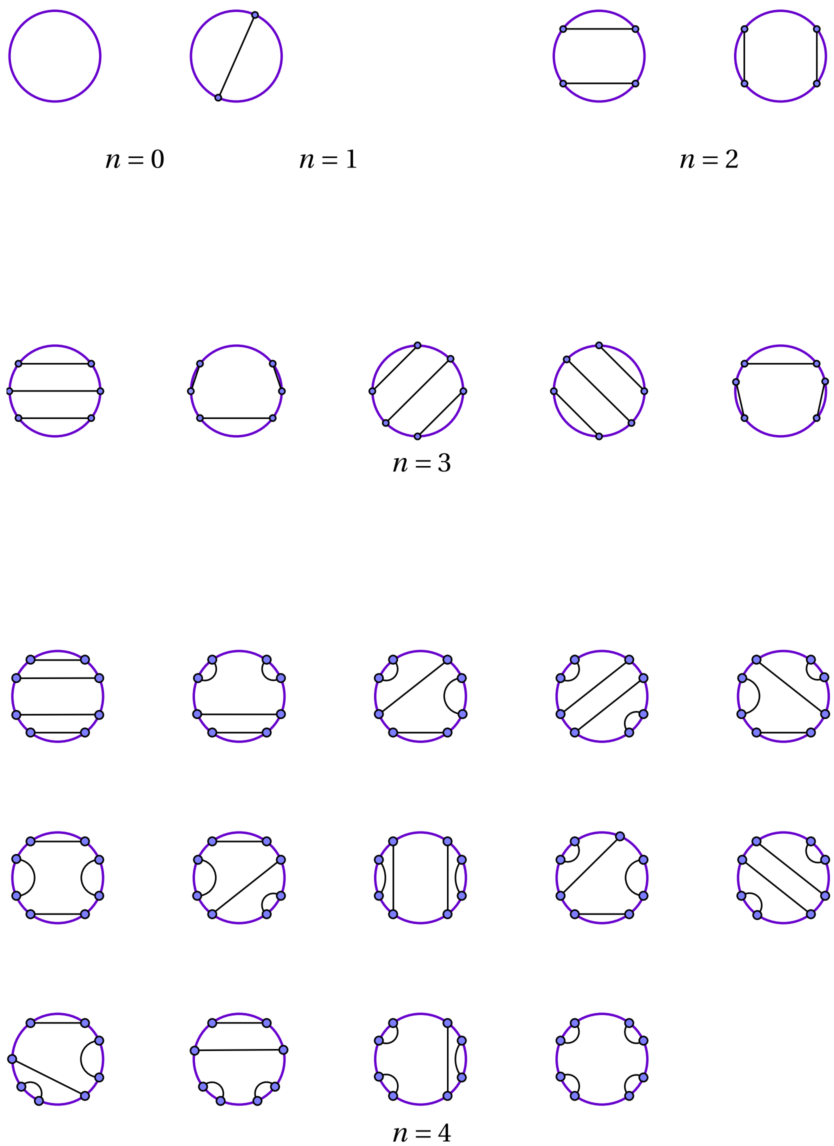


Figura 2.10: Manos sobre la mesa

2.3.7. Caminos evitando la diagonal

Ejemplo 2.3.7. *Encuentre el número de trayectorias en que una torre se puede mover desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha en un tablero de ajedrez de $n \times n$ sin cruzar la diagonal principal.*

Solución; La figura muestra las posibles trayectorias para $1 \leq n \leq 5$.

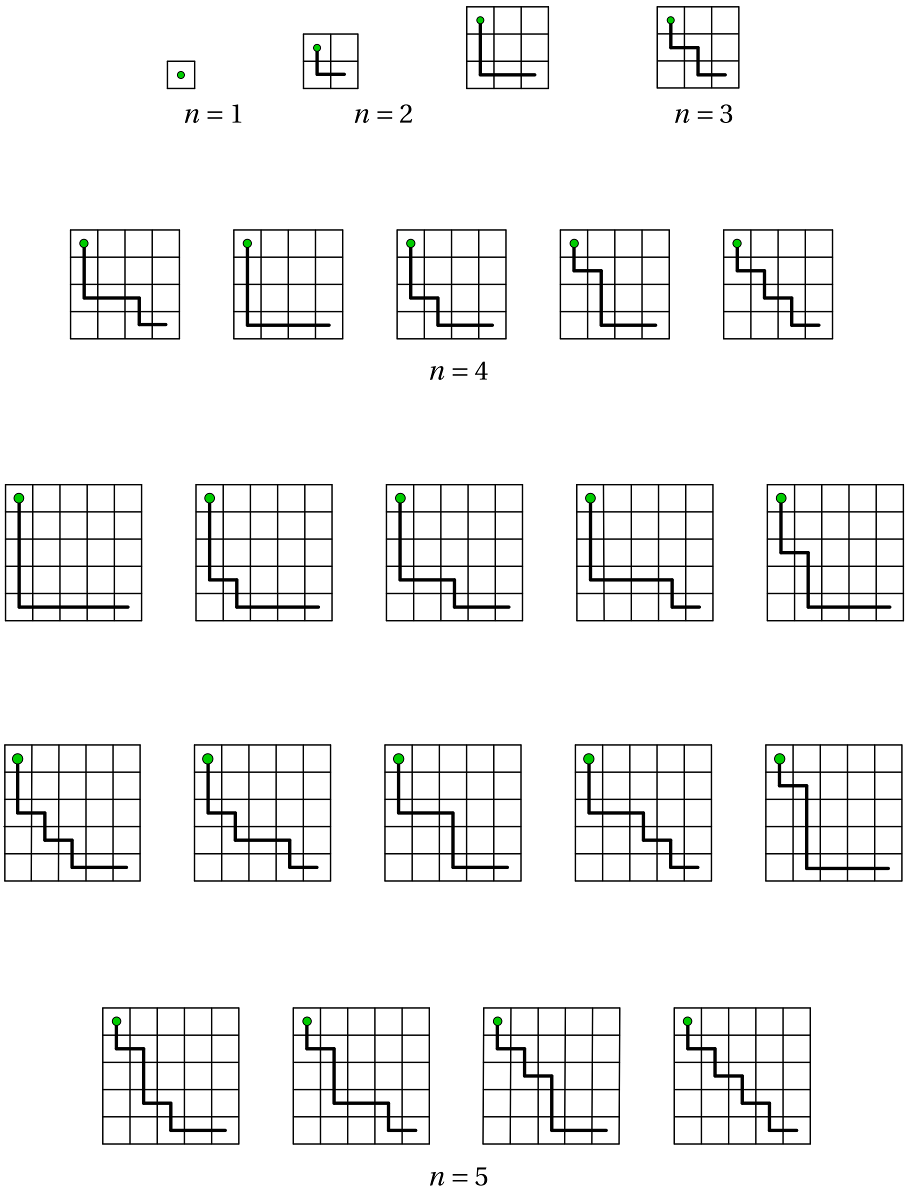


Figura 2.11: Caminos evitando la diagonal

En una red de $n \times n$ casillas, podemos establecer el número de trayectorias que deben permanecer en o por encima de la diagonal principal con las condiciones dadas anteriormente.

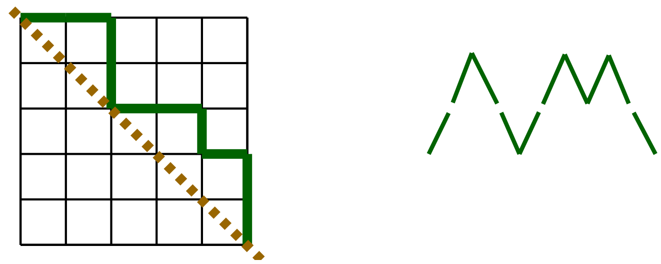


Figura 2.12: ruta de acceso correspondiente y el rango

Esto es obviamente la misma pregunta que en el ejemplo anterior, con las montañas corriendo en diagonal. En la Figura anterior podemos ver cómo uno de estos caminos corresponde a una cadena de montañas.

CONCLUSIONES

- Las precisiones sobre el trabajo al enunciar y estudiar definiciones relacionados con los números de Catalan y la formulación de ejemplos constituyen indicaciones para el futuro en la planificación y permanencia de los problemas esenciales.
- Los Números de Catalan hoy en día tienen un gran auge por sus aplicaciones al aparecer en varios problemas de conteo que habitualmente son recursivos y esenciales.
- Es importante que se conozcan las propiedades de la teoría de números porque constituyen un avance en el accionar no sólo racional sino también científico del hombre.
- Los Números de Catalan son muy importantes por sus aplicaciones en varios problemas de conteo que habitualmente son recurrentes.
- Las diferentes interpretaciones de estos números pueden ser consideradas como primarias en tanto están relacionadas con ideas básicas de teoría de grafos, computación y geometría.

BIBLIOGRAFÍA

[1] KOSHY, THOMAS. *Catalan Numbers with Applications*, Oxford university press, New York, 439, 2009.

[2] ANDRÉ, DÉSIRÉ y GLAZMAN, LEONID. *“Solution directe du probléme résolu par M. Bertrand”*, Comptes Rendus, Francia, 105, 436-437, 1887.

[3] HILTON, PETER y PEDERSEN, JEAN. *“Catalan numbers and their uses”*, John Wiley and Sons. Chichester. 1990. (93-115).

[4] HILTON, PETER y PEDERSEN, JEAN. *“Catalan numbers, their generalizations and their uses”*, Mathematical Intelligencer. California. 1991. (64-75)

[5] HILLMAN, ABRAHAM; ALEXANDERSON, GERALD y GRASSL, RICHARD. *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Dellen-Macmillan. 1987.

[6] JOHNSONBAUGH, RICHARD. *Matemáticas Discretas*, Sexta edición. Pearson Educación. México. 2005.(55-266).