Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

PAPEL DESEMPEÑADO POR LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA FUNDAMENTACIÓN DE LA LLAMADA MATEMÁTICA MODERNA

Fabian Toledo Sanchez
Jeffrey Obeymar Cerón Mora

Neiva, Huila
2014

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

PAPEL DESEMPEÑADO POR LA TEORÍA DE CONJUNTOS EN LA FUNDAMENTACIÓN DE LA LLAMADA MATEMÁTICA MODERNA

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Fabian Toledo Sanchez
2009283524
Jeffrey Obeymar Cerón Mora
2009287613

Asesor:
Esp. Hernando Gutiérrez Hoyos

Neiva, Huila
2014

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Noviembre de 2014.

AGRADECIMIENTOS

Iniciamos dando gracias a Dios por brindarnos la oportunidad de vivir, guiándonos y fortaleciéndonos durante todo este proceso de formación.

Agradecemos a nuestros padres por que a través de ellos se nos concedió la vida, a nuestros hermanos y familiares y a todas las personas que directa e indirectamente han tenido a bien ayudarnos en forma moral y económica para nuestra formación como seres humanos y profesionales.

A nuestro asesor, profesor Hernando Gutiérrez Hoyos por su confianza, colaboración y apoyo durante este proceso.

Agradecemos a todo el cuerpo docente del programa quienes compartieron sus conocimientos dentro y fuera del aula, haciendo posible que nuestra formación como profesionales fuese posible.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Para desarrollar este trabajo consideramos que era prudente hacer un recorrido histórico, desde los más tempranos momentos en el desarrollo de la humanidad, indagando acerca de los conocimientos que se tenían en torno a la noción de conjunto, luego abordamos los principales desarrollos dados, en cuanto a conceptualización, ordenación y sistematización para llegar a formar lo que finalmente se acogió como la teoría de conjuntos desarrollada por Georg Cantor, la cual se vio envuelta en contradicciones o paradojas debido a la definición de conjunto planteada por él y que gracias a la axiomatización de la teoría propuesta por Zermelo, Fraenkel y otros, se lograron superar. Finalmente como parte fundamental del trabajo, mostrar de que manera esta teoría se constituye en soporte de la denominada matemática moderna.

La teoría de conjuntos ha ocupado, desde que Cantor la estableció como una disciplina independiente a finales del siglo XIX, un lugar especial en las matemáticas. A lo largo del siglo XX se ha ido generalizando la idea de que los conjuntos son un concepto fundamental debido a que proporcionan un lenguaje al cual, en cierto sentido, pueden reducirse todas las matemáticas. Esta idea ya estaba presente en la construcción de los números reales a partir de los enteros realizada por Dedekind.

La teoría de conjuntos, desde el momento en que se formalizó con el objetivo de que pudiera servir para desarrollar las matemáticas, al amparo de las amenazas planteadas por las paradojas surgidas a principios del siglo pasado, pasó a ser considerada como parte integrante de la denominada fundamentación de la matemática. Una de las ideas básicas que justifican esta adscripción es la de que, en principio, se supone que cualquier demostración matemática se podría reducir a una deducción formal, en el sentido de la lógica, dentro de la teoría axiomática de conjuntos.

En esta teoría se considera que el conjunto es sencillamente un objeto no definido que satisface una lista de axiomas dados, donde estos axiomas no han sido elegidos arbitrariamente, sino en concordancia con nuestra noción intuitiva de lo que ha de ser un conjunto.

En la definición de conjunto dada por Cantor, al usar libremente la noción intuitiva de conjunto se puede incurrir en una contradicción. La única forma de que la teoría de conjuntos pueda proporcionar a las matemáticas una cimentación segura es recurrir a una teoría más elaborada y perfecta capaz de guiarnos por una ruta despejada lejos de las paradojas, y es por eso que a finales del siglo XIX y principios del XX algunos matemáticos plantearon problemas o paradojas que sembraron la duda sobre la validez de la teoría de conjuntos. Estas dificultades se zanjaron con la axiomatización de la teoría de conjuntos realizada por Ernst Zermelo - Abraham Fraenkel y otros.

La teoría axiomática de conjuntos elaborada por Zermelo y Fraenkel es uno de los varios sistemas axiomáticos que se propusieron a principios del siglo XX para formular una teoría de conjuntos que no conlleve a paradojas. Zermelo con esta teoría ofrecía al público su axiomatización como el método apropiado para reconstruir la teoría de Cantor sin llegar a encontrar paradojas envueltas en esta.

A pesar de las paradojas encontradas (paradoja de Russell) debido a la definición de conjunto dada por Cantor, cabe dar mérito a éste ya que fue el creador y el que desarrollo la parte más general y más abstracta de la matemática moderna: la teoría de conjunto. Cabe mencionar que esta matemática moderna es en principio la misma matemática de siempre con importantes adquisiciones nuevas: el lenguaje en que está escrita, el método con el que trabaja y las estructuras abstractas entre las cuales se mueve.

Por ultimo cabe señalar que gran parte de la teoría de conjuntos en la forma dada por Cantor aparece condicionada por la época, todavía necesariamente demasiado imprecisa y quizá incluso algo ingenua. Luego posteriores desarrollos aportaron las necesarias correcciones. No obstante, Cantor influyó, como pocos antes que él, en la evolución de las matemáticas y parece incluso justificado considerar la transformación conjuntista de los fundamentos de la matemática y la definitiva implantación del enfoque de la teoría de conjuntos como una auténtica revolución de las matemáticas a comienzos del siglo XX. Es por ello que Hilbert describió la teoría de conjuntos como "*el fruto más admirable del espíritu matemático y, sobre todo, una de las más elevadas aportaciones del entendimiento humano*".

OBJETIVOS

Objetivo General

- Hacer un seguimiento a la evolución de la teoría de conjuntos desde sus orígenes hasta su desarrollo como referente fundamental de la Matemática Moderna.

Objetivos Específicos

- Identificar los aportes fundamentales a la teoría de conjuntos presentados por Cantor.
- Analizar algunas paradojas presentes en matemáticas y en especial las surgidas a través de la teoría de conjuntos Cantoriana.
- Relacionar la axiomática de Zermelo- Fraenkel y su incidencia en la matemática moderna.

JUSTIFICACIÓN

La teoría de conjuntos desde que se creó como disciplina independiente a finales del siglo XIX, ha ocupado un lugar de vital importancia dentro de la matemática. Cantor creador de esta teoría hizo de los conjuntos infinitos objeto propio de estudio matemático. Este trataba los conjuntos infinitos como hasta entonces solo se trataban los conjuntos finitos, comparándolos respecto a su cardinalidad y mostrando como asignar un número cardinal a cada conjunto. Su primer resultado fue mostrar que el conjunto de los números naturales y el de los números reales tienen cardinalidad distinta.

También demostró que ningún conjunto finito o infinito puede ponerse en correspondencia biunívoca con su conjunto de partes. Con base en este resultado y mediante un proceso de iteración de los conjuntos de partes introdujo una jerarquía de infinitos cada vez mayores, el primero de los cuales era el de los naturales y el otro, el cual conjeturo Cantor, debía ser el de los reales (hipótesis del continuo).

De acuerdo a lo mencionado anteriormente sobre el manejo de los conjuntos infinitos, nos propusimos realizar este trabajo en el cual se presenta, además de un seguimiento de la noción de conjunto, los principales aportes Cantorianos a la teoría y la axiomática propuesta por Zermelo-Fraenkel, para contrarrestar las controversias en cuanto a aspectos de la definición de conjunto presentada por Cantor, y su incidencia en la matemática moderna.

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS: RECORRIDO HISTÓRICO

La noción de conjunto aparece en la historia del desarrollo humano asociada a la necesidad de contar, para tal propósito realizaban agrupamientos de objetos o cosas en cantidades para los cuales tuvieran un referente de asociación o correspondencia. Es muy posible que el primer referente contable que se instrumentalizó para tal fin fuesen los dedos de las manos, estos los usaban para representar conjuntos de dos, tres, cuatro o cinco objetos; además por medio de los dedos de las manos podían representar colecciones de hasta diez elementos.

El problema se complicaba cuando el uso de los dedos de las manos y de los pies resultaba insuficiente para realizar el conteo, en esté caso pudieron recurrir al uso de piedras para representar una correspondencia biunívoca con los elementos de otro conjunto, cuando se empleaba este sistema de representación a menudo amontonaban las piedras por grupos de a cinco, debido a que antes se familiarizaban con los quíntuplos de objetos por observación de sus propias manos o pies.

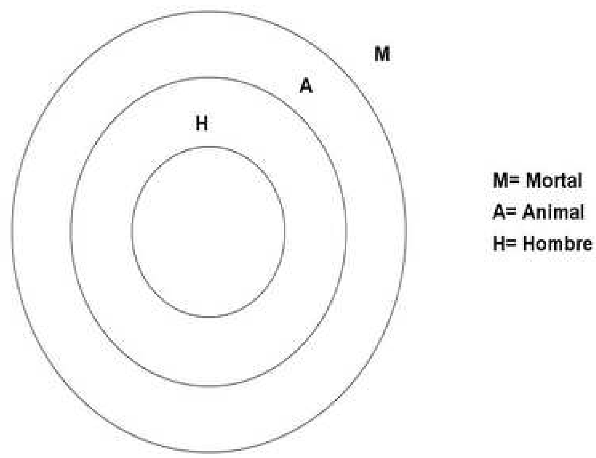
Con lo mencionado anteriormente se observa que la noción de conjunto nació debido a la necesidad de hacer un agrupamiento de objetos de acuerdo a ciertas necesidades o características.

Dentro de este recorrido histórico nos detendremos para ver los aportes fundamentales de Aristóteles a la lógica, los cuales están regidos por la teoría del silogismo, esto es, la teoría de los argumentos deductivos en los que se infiere una conclusión a partir de dos o más premisas; los escolásticos no fueron más allá de Aristóteles; de ahí el limitado desarrollo de la ciencia en la Edad Media.

La proposición aristotélica es susceptible de ser interpretada desde el punto de vista extensional y desde el punto de vista intencional. Son extensionalistas los escolásticos seguidos por Leibniz y Euler. En general la nueva lógica, a partir de Boole, se desarrolla desde la perspectiva extensional, es decir, a partir de totalidades distributivas. La representación gráfica de la extensión de los términos se divulga en los tratados de lógica a partir de Euler (XVIII) y, posteriormente, según los diagramas de Venn, que se inspira en el cálculo de Boole y representa la lógica de clases reducida a una lógica distributiva con entidades geométricas. La interpretación intencional la defienden generalmente los filósofos. Especialmente en Francia, a finales del siglo XIX, como reacción a la nueva lógica.

Cada una de estas interpretaciones se apoya en ciertos textos a los que se adapta perfectamente, pero que resulta artificial y fornida cuando se pretende proyectarla sobre todos los demás.

Desde esta perspectiva la proposición comporta una subordinación en el orden de la extensión: es una comparación de clases de individuos que poseen unas determinadas notas, y no una comparación de las notas en sí mismas. La formulación del siguiente silogismo, según esta perspectiva, sería la siguiente: “Mortal es atribuido a todo animal; animal es atribuido a todo hombre; mortal es atribuido a todo hombre”, cuya representación gráfica apelando a diagramas que representan clases es:



Los términos son clases. La proposición “Todo animal es mortal” quiere decir, interpretada de una forma extensional, que la clase de los animales “A” está incluida en la clase de los mortales “M”; esto es “$A \subset M$”.

Desde la perspectiva intencional, la proposición y el silogismo aristotélico consisten en una subordinación de conceptos. Lo que se compara y se clasifica ahora son totalidades atributivas, los conceptos y no las clases de individuos. El todo no aparece como un todo colectivo, sino atributivo. La formulación del silogismo anterior seria “Mortal está contenido en animal; animal está contenido en hombre; mortal está contenido en hombre”.

Ya con los humanistas de los siglos XV y XVI se cambia la Lógica por la Retórica. Aristóteles por Cicerón y Quintiliano. La lógica se convierte en una disciplina propedéutica al servicio de las demás artes, y la demostración es sustituida por la argumentación, técnica más útil para las polémicas religiosas. Para formar predicadores defensores de la Reforma o de la vieja fé. Pero la reforma de la Lógica propuesta por los humanistas prendió con más fuerza en los ambientes intelectuales reformados que propugnaban una nueva cultura más pragmática y activista que la vieja escolástica.

Bertrand Russell sostenía al respecto:

"Que a lo largo de toda la Edad Media, casi todos los mejores intelectos se dedicaron a la lógica formal, mientras que en el siglo XIX solo una parte infinitesimal del pensamiento de todo el mundo se dedicó a este tema".

Luego aparece una corriente más o menos unitaria de pensamiento que ejerce una enorme influencia sobre la investigación matemática y ha llegado a dominar la enseñanza universitaria. Esta corriente se conocida como "clásica", pero se llamará "conjuntista" porque coloca al centro de la matemática, en una forma u otra, la noción de conjunto y trabaja en fortalecerla. Iniciada por Dedekind (1831-1916) y Cantor (1845-1918), incorpora logros de Frege (1848-1925), Peano (1858-1932), Whitehead (1861-1947) y Russell (1872-1970). Cabe mencionar la simbología utilizada por Boole, Peano y Frege en sus aportes desde la lógica a los conjuntos.

1.1. George Boole (1815-1864)

Un matemático esencialmente autodidacta, construyó la lógica formal y un nuevo tipo de algebra que se conoce como "Algebra de Boole", que a la vez es el algebra de los conjuntos y el algebra de la lógica. Boole utilizaba las letras $x, y, z, ...$, para representar objetos de un cierto subconjunto de cosas seleccionadas de un conjunto universal cuya totalidad representaba por el símbolo o número 1. Por ejemplo, si el símbolo 1 representaba al conjunto de todos los europeos, x podría representar a todos los europeos que son ciudadanos franceses, y podría representar a todos los hombres europeos de mas de 21 años, y z podría representar a todos los europeos que miden entre $1,50$ y $1,80$ metros de estatura.

El símbolo o número 0 lo tomo Boole para representar el conjunto vacío, que no contiene ningún elemento del conjunto universal. El signo + entre dos letras o símbolos, como $x+y$, lo considero representando la unión de los subconjuntos x e y, es decir, el conjunto formado por los elementos que figuran en x o en y o en ambos. El signo de multiplicación $\times$ representaba la intersección de conjuntos, de manera que $x \times y$ representaba el conjunto de todos los elementos que están simultáneamente en el subconjunto x y en el subconjunto y.

En el ejemplo anterior $x + y$ consistiría en el conjunto de todos los europeos que o son ciudadanos franceses o son hombres y tienen más de 21 años o las dos cosas simultáneamente;

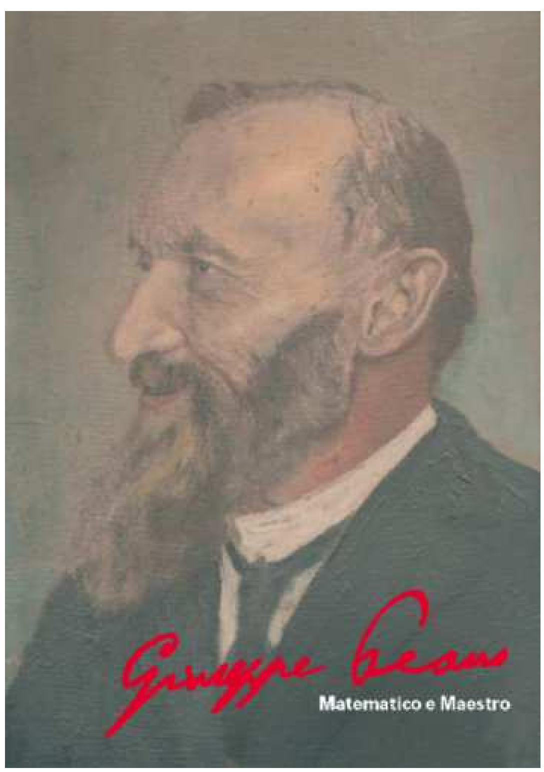
$x \times y$ (que se escribe también como $x.y$, o simplemente xy) sería el conjunto de los ciudadanos franceses que son hombres y tienen más de 21 años. (Boole, contrario que De Morgan, utilizaba la unión excluyente, no permitiendo que hubiera elementos comunes entre x e y, pero en el álgebra de Boole moderna considera más conveniente tomar la operación + como la unión usual, no excluyente, de conjuntos que pueden tener elementos comunes).

Es inmediato comprobar que las cinco leyes fundamentales del álgebra se verifican en cualquier Algebra de Boole de conjuntos, es decir, que:

- $x + y = y + x$
- $xy = yx$
- $x + (y + z) = (x + y) + z$
- $x(yz) = (xy)z$
- $x(y + z) = xy + xz$
- $x + (yz) = (x + y)(x + z)$

Sin embargo, no todas las reglas del álgebra usual siguen siendo válidas. Por ejemplo, se tiene evidentemente que $1+1 = 1$ y que $x.x = x$ (la segunda propiedad aparece en la obra de Boole, pero no la primera, por utilizar la unión excluyente).

1.2. Giuseppe Peano (1858-1932)



Dentro de la simbología utilizada en los conjuntos cabe resaltar la presentada por Peano, que es un clásico de la lógica, que fijo prácticamente toda su simbología en la obra Los Principios de la Aritmética. El proceso de constitución de la lógica formal moderna viene determinado por el desarrollo de una formalización, que consiste, no en usar símbolos de forma más o menos generalizada, sino en conseguir un lenguaje lo suficientemente sutil y completo como para regular su propio desarrollo. Cuando el simbolismo se utiliza, no sólo para anotar los modos de inferencia, sino también para fundamentar dichos modos inferenciales. Esto se consigue por primera vez con Frege y Peano.

Ambos se apoyan en Boole, pero su proyecto consiste, no en integrar la lógica en la Matemática, sino en completar el simbolismo matemático mediante un simbolismo lógico más fundamental, aplicable fuera del dominio de la matemática y totalmente autónomo de las particularidades y ambigüedades de los lenguajes ordinarios. Esta es la idea común que guía los trabajos de Frege y de Peano, aun cuando este último no tenía noticia de la simbología de Frege en 1889.

El proyecto de Peano es, a la vez, más audaz y más modesto que el de Frege. Por una parte, intenta abarcar toda la Matemática, y por otra, enumera las leyes lógicas de las que hará uso en su exposición matemática sin organizarlas en un sistema deductivo.

Peano fija prácticamente toda su simbología en la obra "Los Principios de la Aritmética". En cuanto a la elección de símbolos se inspira en el alfabeto estenográfico y, a diferencia de Boole, evita la utilización de símbolos matemáticos para uso lógico.

Para indicar objetos reales cualesquiera emplea las letras latinas itálicas minúsculas $a, b, c, ..., x, y, z$. Estos son símbolos de variables, cuyo sentido es "constante" (siempre el mismo) en la misma frase, pero generalmente diferente en distintas frases.

Para los símbolos con significación constante en todas las frases (constantes lógicas) emplea, o bien letras griegas o latinas derechas o invertidas, o bien series de letras latinas (romanas), que son abreviaciones del nombre griego o latino del objeto representado por el símbolo.

Los símbolos han sido, pues, escogidos de tal forma que no se produzcan homónimos. Su forma permite una fácil composición tipográfica, ya que todas las fórmulas resultantes son unilineales.

Entre los símbolos introducidos por Peano cabe destacar por su importancia los siguientes:

$$\supset, \varepsilon, \ni, \ni, \iota, \imath$$

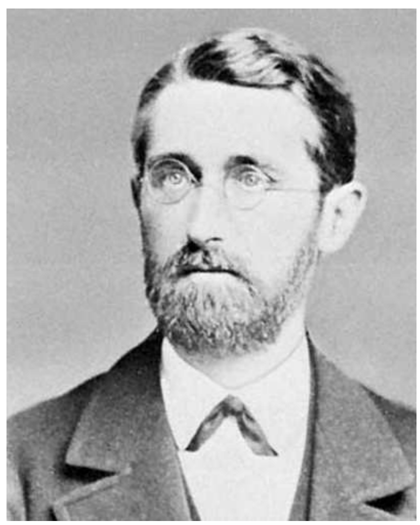
El símbolo $\supset$, es la letra inicial de la palabra *consequentia* y es interpretada como signo de deducción, "$a \supset b$" significa: "de a se deduce b". Significado éste lógicamente ambiguo, puesto que Peano no distingue aún entre implicación "material" y relación de consecuencia lógica. Por lo demás, Peano no siempre mantiene la equivalencia entre el cálculo de clases y el de proposiciones. El símbolo ε es una innovación capital que señala la especificidad del cálculo de clases sobre el de proposiciones. "$x \ \varepsilon \ a$" Se lee "x es un individuo de la clase a", señala la relación de pertenencia de un miembro a una clase.

El símbolo ι es el signo para las clases unitarias, esto es, si x es un elemento de una clase, "ι x" indica la clase que contiene exclusivamente el elemento x. El símbolo $\ni$ es el signo de la proposición existencial: si a es una clase, "$\ni$ a" significa "hay a" o "los a existen", esto es, la clase a no es vacía.

El interés de la simbología de Peano no se reduce al hecho de constituir el punto de partida para la simbología russelliana, sino que en su aplicación a las relaciones y demostraciones matemáticas exige el establecimiento de nociones y distinciones que hasta entonces habían pasado inadvertidas.

Estas simbologías fueron las que utilizaron Peano y Boole en su lógica junto con aportes de Frege los cuales fueron fundamentales en la teoría de conjuntos.

1.3. Richard Dedekind (1831-1916)



Dedekind fue una figura clave en el surgimiento de la matemática conjuntista y estructural del siglo XX. Parte introduciendo la noción de sistema que era lo que Cantor llamaba "conjunto". En aras de "la uniformidad de la dicción", admite la existencia de sistemas "que constan de un objeto único" (esto es, de conjuntos unitarios); pero descarta explícitamente "el sistema vacío, que no contiene ningún elemento".

En el siguiente enunciado se presenta la definición de conjunto adoptada por Dedekind en el influyente ensayo que dedicaba a la fundamentación conjuntista de la aritmética (aunque Dedekind dice 'sistema' en vez de "conjunto"):

"*Ocurre muy a menudo que diversas cosas $a, b, c, ...$ por algún motivo son concebidas bajo un punto de vista común y reunidas en la mente. Se dice entonces que forman un sistema S. Como objeto de nuestro pensamiento, tal sistema S (o sea una colección, o una variedad, o una totalidad) también es una cosa; está completamente determinado, cuando está determinado* *respecto de cada cosa si es o no un elemento de S*".

El anterior enunciado era presentado por Dedekind al referirse a un sistema (conjunto), que luego Cantor definió el cual presentamos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2

CANTOR Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1. Biografía de Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo. El padre de Cantor, Georg Waldemar Cantor, que había crecido en Copenhague, había abierto de joven una oficina de corredor de comercio en San Petersburgo, que le proporcionó una considerable fortuna. Pero no sólo era un comerciante afortunado, sino también un hombre de vasta cultura. Su madre Marie Bohm procedía de una familia muy inclinada hacia las Artes y las Ciencias. Sus parientes fueron unos virtuosos del violín; Cantor se confesaba “bastante inclinado a lo artístico” lamentándose a veces que su padre no le permitiera ser violinista.

Su padre era protestante, igual que Cantor, y su madre católica. El vínculo con el catolicismo pudo desarrollarse en la investigación de las ideas filosóficas de los pensadores católicos.

En San Petersburgo Cantor asistió a la escuela elemental. En el año 1856 la familia se trasladó a Frankfurt am Main debido a una enfermedad del padre.

Cantor tuvo el deseo de estudiar Matemáticas. Pero su padre le orientó para que siguiera una carrera más provechosa, la de ingeniero. Asistió al Gymnasium in Wiesbaden y más tarde entre 1860 y 1862 a la Escuela Profesional Superior de Darmstadt, cursó allí la Sección General y superó el examen de Bachillerato que le daba acceso a los estudios de Ciencias Físicas y Naturales. Sus calificaciones eran buenas, y en Matemáticas obtuvo una calificación excelente. Por este motivo Cantor manifestó de nuevo su deseo de estudiar Matemáticas, después su padre le autorizó a matricularse en Zurich como estudiante en 1862.

Poco después de la muerte de su padre, Cantor se fué en 1863 a la Universidad de Berlín, pues ella tenía fama en los estudios de Matemáticas. En ese tiempo Karl Weierstrass[1], famoso como profesor e investigador, atraía a muchos estudiantes con talento a la Universidad de Berlín. Sus lecciones daban al Análisis una firme y precisa fundamentación, de modo que muchos de sus discípulos se proclamaban con orgullo miembros de la "Escuela de Berlín" y desarrollaron las ideas de su maestro.

El propio Cantor muestra la influencia de Weierstrass con sus primeros trabajos sobre series y números reales, aunque también estudió con Kummer y Kronecker. Su tesis, *De aequationibus secundi gradus indeterminatis,* trató de un problema de Teoría de Números y fue presentada en el Departamento de Kummer. En aquellos tiempos todavía existía la costumbre de que un candidato al doctorado defendiese su tesis frente a algunos de sus compañeros estudiantes. De especial mención es la tercera tesis de Cantor para la obtención de su grado de Doctor en 1867: *In re mathematica ars proponendi pluris facienda est quam solvendi.* Su conclusión, "en las Matemáticas, el arte de plantear los problemas es más importante que su resolución", iba a ser decisiva para toda su posterior investigación y de hecho sus posteriores logros no siempre consistieron en resolver problemas. Su principal contribución a las Matemáticas fue su modo de plantear cuestiones abiertas en áreas del conocimiento. Estos problemas fueron resueltos por él y en parte por sus discípulos.

Cantor no vivió encerrado en su estrecha parcela de ciencia, así tuvo muchos amigos íntimos como H.A. Schwarz alrededor de 1880, especialmente por la índole de sus trabajos y aficiones. Durante estos años en Berlín nació esa especial amistad entre él y Schwarz, que fue su tutor durante dos años. Los dos reverenciaban a Weierstrass y los dos intentaban que Kronecker tuviese una buena opinión de los alumnos de Weierstrass, pues Kronecker los criticaba continuamente en sus conclusiones.

Estos primeros años de investigación de Cantor fueron los más felices de su vida. Sus cartas durante este periodo expresan su entusiasmo, que raramente se aprecia en los años posteriores, en los que intentaba ganar la aceptación de la Teoría de Conjuntos. En el año 1868 superó el examen oficial para profesor de Enseñanza Media y, como candidato de prueba, impartió clases en el último curso de un Instituto de Berlín. Sin embargo, desde un principio estaba decidido a seguir la carrera universitaria, aunque esto implicase sacrificios económicos. No obstante, gracias a la herencia de su padre, estas dificultades se suavizaron y pudo elegir este camino. En 1869 fue aceptado para ser profesor en la Universidad de Halle, donde fue pronto profesor y en 1869 obtuvo el grado de Full Professor con el apoyo de H.A. Schwarz.

Cantor esperaba conseguir una plaza de profesor en Berlín de más prestigio y mejor pagada, pero en Berlín estaba el casi omnipotente Kronecker que le bloqueó el camino. El estaba en desacuerdo con las opiniones de Cantor sobre números transfinitos y frustraba todos los intentos de Cantor para mejorar su situación académica volviendo a la capital.

Debido a sus resultados en la investigación y a sus éxitos docentes pronto le fueron conferidos los primeros honores. Así fue elegido miembro de la Sociedad para el estudio de la Naturaleza de Halle, y en 1873 miembro correspondiente de la Sociedad de las Ciencias de Gotinga. Finalmente, fue ascendido en un intervalo de tiempo relativamente breve a Full Professor

[1]Nació en Ostenfel el 31 de octubre de 1815, murió en Berlín, el 19 de febrero de 1897. Matemático alemán que colaboró en la fundación de la moderna teoría de las funciones.

de la Universidad de Halle. Uno de sus colegas científicos, E. Heine, sugirió a Cantor en los comienzos de su actividad en Halle que se dedicase a la teoría de series trigonométricas. Muy pronto obtuvo algunos resultados fundamentales en esta área. Además, sus investigaciones le llevaron al estudio de las propiedades de ciertos conjuntos de puntos. Con la generalización de los teoremas obtenidos consiguió los primeros resultados de la Teoría de Conjuntos. Estos resultados y los problemas que de ellos surgieron se convirtieron desde entonces en el campo principal de las investigaciones de Cantor.

Con intensísimo trabajo logró plantear y resolver muchas cuestiones que superaron concepciones que eran consideradas en Matemáticas como definitivas. Su primer trabajo sobre Teoría de Conjuntos se publicó en 1874. La acogida de sus descubrimientos en el ambiente matemático fue muy diversa, solamente muy pocos advirtieron la importancia de los resultados obtenidos. Así, su trabajo *"Una contribución a la teoría de las variedades"* sólo pudo ser publicado en 1878 mediante la intervención de Weierstrass. Otro trabajo no le fue publicado, colocándosele la acotación *"llega con cien años de anticipación"*. Pero finalmente Cantor encontró en *Mathematische Annalen* una revista que aceptaba y publicaba sus trabajos de manera sucesiva. El eco así alcanzado continuaba siendo escaso. Esto se debía a que para muchos las ideas de Cantor eran absolutamente nuevas e insólitas. Además, su teoría había encontrado adversarios.

Su maestro, Weierstrass, en seguida advirtió la fecundidad de las ideas de su discípulo y ya en 1874 utilizó algunas de las consideraciones de Cantor en la demostración de teoremas sobre funciones reales. Sin embargo, más tarde, su actitud hacia Cantor empezó a cambiar, aun cuando al final se pronunciase ardientemente en favor de la Teoría de Conjuntos de Cantor.

En los años de intensas investigaciones, la colaboración de Cantor fue especialmente estrecha con R. Dedekind, cuyos trabajos estaban íntimamente relacionados con los de él. En su frecuente correspondencia ambos intercambiaban los resultados de sus reflexiones. Así, Dedekind influyó grandemente sobre las ideas y argumentos de Cantor. De esta forma ambos consiguieron idear sendos métodos rigurosos para la construcción de los números reales.

Sin embargo, como hemos señalado, Cantor encontró en Kronecker un enconado adversario. Este aunque en las publicaciones científicas no se oponía expresamente a Cantor, ni tampoco citaba los teoremas y conceptos esenciales de Cantor que él consideraba erróneos e inadmisibles, en cambio, en presencia de otros matemáticos atacaba violentamente a Cantor con observaciones críticas, y en sus clases hacía comentarios desfavorables sobre la Teoría de Conjuntos. Kronecker incluso llegó al extremo de calificar a Cantor de *"corruptor de la juventud"*. Con esta actitud injusta Kronecker influyó sobre algunos matemáticos en contra de las nuevas e insólitas ideas de la Teoría de Conjuntos.

Durante la elaboración de su teoría, Cantor se encontró con el llamado *problema del continuo,* cuya solución creyó vislumbrar pero cuya demostración no pudo conseguir pese a sus enormes esfuerzos. Afectado por la acumulación de dificultades personales y profesionales, agotado por la intensa y sutil investigación de tantos años, en 1884 Cantor sufrió un profundo quebranto psíquico. Las causas últimas de esta enfermedad pudieran ser debidas a la propensión intelectual de Cantor, aunque seguramente los factores externos contribuyeron a que se declarase la enfermedad. Una vez restablecido se propuso ante todo abandonar totalmente la investigación matemática y dedicarse a cuestiones filosóficas. Así se ocupó, con el ardor que él ponía en todo, de estudios literarios sobre la personalidad de W. Shakespeare. Pero con crecientes interrupciones depresivas continuó tanto sus cursos de Matemáticas como sus investigaciones. En realidad, su enfermedad ya nunca le abandonaría, siempre aparecía intermitentemente.

A finales de la década 1880-90 las ideas matemáticas de Cantor comenzaron a imponerse en el mundo científico. El sueco G. Mittag-Leffler[2], amigo desde hacía tiempo de Cantor, aplicó teoremas de la Teoría de conjuntos a la demostración de teoremas de la Teoría de Funciones, poniendo así de manifiesto la utilidad de los conceptos de Cantor. Pero todavía hizo más. En la revista Acta Mathematica, que editaba, publicó trabajos originales de Cantor y traducciones al francés de anteriores trabajos de Cantor. Sin embargo, tampoco él podía seguir todos sus razonamientos. A través de estas publicaciones muchos matemáticos extranjeros fijaron su atención en los trabajos de Cantor. Especialmente, fueron primero los matemáticos franceses e ingleses quienes cada vez más reconocieron la importancia de la Teoría de Conjuntos, la difundieron y la aplicaron a los diversos campos.

Ya durante sus estudios en Berlín, Cantor había aprendido a valorar la fecundidad del intercambio de ideas científicas. Allí fue miembro de la Sociedad Matemática (de 1864 a 1865 presidente). Así, pues, cuánto no debió de lamentar la falta de tales coloquios científicos en Halle, donde sólo había unos pocos colegas de su especialidad. Con los que estaban próximos a sus ideas sólo podía comunicarse por carta. Por este motivo resulta natural que Cantor fuese partidario de intensificar la colaboración entre los matemáticos mediante la creación de una organización apropiada. Desde hacía tiempo existía entre los matemáticos alemanes el deseo de asociarse, pero los primeros intentos no habían dado ningún resultado.

Cantor continuó con su proyecto con la tenacidad que le caracterizaba. Durante 1880-90 abogó infatigablemente por escrito y verbalmente en favor de la realización de sus propósitos. En gran medida hay que agradecerle que, en el *Congreso de los científicos de la naturaleza y médicos alemanes* celebrado en Bremen en 1890, se fundase la *Asociación de Matemáticos Alemanes.* El objetivo de esta Sociedad era fomentar y desarrollar la Matemática, elevar la posición del matemático en el seno de la vida intelectual de Alemania y ofrecer a los matemáticos la oportunidad de conocerse e intensificar sus ideas, experiencias y predilecciones. Cantor fue elegido Presidente de esta Sociedad, pero al cabo de cierto tiempo se vio obligado a dimitir a causa de su enfermedad.

Además de esto Cantor también intentó formar una sociedad de matemáticos internacional. Aunque esto no se consiguió, hay que contar a Cantor entre los iniciadores de los Congresos Internacionales de Matemáticos, el primero de los cuales tuvo lugar en Zurich en 1897. En este congreso A. Hurwitz pronunció una conferencia en la que expuso cómo la Teoría de Conjuntos podía conducir a un nuevo desarrollo de la Teoría de Funciones. En los congresos posteriores la Teoría de Conjuntos ocupó también un lugar preferente. De este modo dichos congresos contribuyeron a que se reconociese y se considerase más la gran importancia de la Teoría de Conjuntos para muchas ramas de las Matemáticas. Sociedades científicas inglesas, rusas e italianas eligieron a Cantor miembro honorario.

[2]Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (16 de marzo de 1846 ? 7 de julio de 1927) fue un matemático sueco, miembro de la Real Academia de las Ciencias de Suecia desde 1883 y fundó el diario matemático Acta Mathematica (1882).

También fue nombrado Doctor Honoris Causa por las Universidades de Cristianía (Noruega, 1902) y St. Andrews (Escocia, 1911). Alentado por tales acontecimientos, Cantor volvió a publicar trabajos de Matemáticas, si bien éstos trataban principalmente de la exposición y defensa de los resultados obtenidos anteriormente. De este modo fueron apareciendo entre 1895 y 1897 sus *Contribuciones a la Teoría de Conjuntos* que de manera sistemática presentaban los resultados de su teoría general. Al proseguir sus investigaciones se encontró en la construcción de conjuntos con ciertas antinomias, y aunque logró reconocerlas y también describirlas, no pudo en cambio evitarlas. Tal vez sea ésta una de las razones por las que a partir de 1897 ya no publicase ningún trabajo, aunque se ocupaba de diversas cuestiones de matemáticas y pensaba en ambiciosas publicaciones. Indudablemente otra causa residía en sus enfermedades nerviosas que siempre volvían a declararse y que paralizaban su actividad investigadora y también le impedían de manera creciente cumplir con sus deberes docentes.

Ya en 1902 presentó una solicitud de jubilación, que fue desestimada. Pero durante los años siguientes tuvo a menudo que suspender sus clases por enfermedad, por lo que en 1913 quedó definitivamente dispensado de tales obligaciones. Con motivo de su 70 aniversario se había organizado en 1915 una magna celebración internacional, pero se frustró debido a la I Guerra Mundial. Pese a todo, muchos matemáticos alemanes se reunieron ese día en Halle para honrar a Cantor. Manifestación de este respeto fue la donación de un busto de Cantor en mármol, que hoy día se encuentra en el edificio principal de la Universidad de Halle. De este modo Cantor, al final de su vida, supo que su obra había sido considerada y reconocida también en Alemania.

En lo sucesivo su salud fue empeorando cada vez más. Así Cantor falleció el 6 de enero de 1918 en la Clínica Psiquiátrica de la Universidad de Halle.

Cantor poseía una vasta cultura, especialmente en Filosofía. Tanto en las conversaciones como en su correspondencia manifestaba sus ideas en forma original y vehemente, que le llevaban a arrebatos coléricos. Aparte de su formidable imaginación creadora era particularmente característico de él la seguridad que tenía en sus ideas que él intuía y que sostenía frente a toda oposición. Desde un principio fue consciente de la gran trascendencia de la Teoría de Conjuntos por él creada. Pero su gran convencimiento de la veracidad e importancia de sus ideas no lo volvieron arrogante ni vanidoso.

En sus más de treinta años como profesor en la Universidad de Halle explicó muchas asignaturas de Matemáticas. Sin embargo sobre sus investigaciones en Teoría de Conjuntos sólo muy raramente explicaba alguna cosa en el Seminario Matemático.

Como hemos dicho, Cantor se vio inducido a las primeras consideraciones sobre la Teoría de Conjuntos por determinadas cuestiones del Análisis. Con ello hizo suyo el problema que desde hacía ya mucho tiempo preocupaba igualmente tanto a filósofos como a matemáticos: *el problema del infinito.* Aunque gracias a la contribución de A.L. Cauchy, K. Weierstras y otros matemáticos se había logrado una cierta clarificación del concepto de límite hacia mediados del siglo XIX, en cambio con ello se confirmaba una vez más la idea (dominante desde Aristóteles) según la cual el infinito solamente existe en la forma de *infinito potencial.* Esto significa que aunque para toda magnitud dada puede pensarse en una mayor, estas magnitudes siempre permanecen finitas y el proceso de crecimiento nunca finaliza de manera que no existe ninguna magnitud infinitamente grande.

En una carta C.F. Gauss había expresado esta idea de la siguiente forma:

"... por lo que protesto contra el uso de una magnitud infinita como si se tratase de una magnitud realizada, lo cual nunca es lícito en Matemáticas. Lo infinito es sólo una forma de hablar, en el fondo se habla de límites a los que ciertas situaciones se aproximan tanto como se quiera, mientras que a otras les es permitido crecer sin restricciones".

Seguramente esto no lo habría dicho Leibniz porque tenía una idea de infinitesimo actual a través del concepto de diferencial.

Estos puntos de vista sobre el infinito eran comunes a todos los matemáticos de la época. Por eso con mayor razón debe admirarnos la genialidad y la audacia intelectual de Cantor, quien con sus resultados superó con creces sus ideas. El pudo demostrar que se podían superar estas ideas concibiendo el conjunto de todos los números naturales y también otros conjuntos con una infinidad de elementos. El mismo afirmó en la introducción a uno de sus trabajos:

"*La exposición de mis investigaciones en la Teoría de Variedades (Teoría de Conjuntos), realizada hasta la fecha, ha alcanzado un punto en el que su continuación depende de una generalización del concepto de número real entero que vaya mucho más allá de los límites actuales, y a decir verdad esta generalización se orienta en una dirección en la que, por lo que se ve, hasta el momento no ha sido investigada por nadie*".

Que esta generalización no le fue fácil se lee en otra parte:

"*A la idea de considerar... lo infinitamente grande no solamente en la forma de indefinidamente creciente, sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números bajo la forma característica del infinito actual ha sido casi contra mi voluntad, en oposición de mis más preciadas tradiciones, obligado de manera lógica por el sentido del esfuerzo científico y de las tentativas de muchos años, y por eso tampoco creo que puedan aducirse argumentos en contra que yo no haya sabido encontrar*".

A partir de esta intuición, y firmemente convencido de ella, Cantor construyó su Teoría de Conjuntos. En realidad, Cantor no formuló lo que entendía por conjunto hasta relativamente tarde. En su trabajo *Contribuciones a la fundamentación de la Teoría transfinita de Conjuntos,* publicado en 1895, escribió:

"COMO CONJUNTO NOSOTROS ENTENDEREMOS TODA COLECCIÓN EN UN TODO M DE CIERTOS Y BIEN DIFERENCIADOS OBJETOS m DE NUESTRA PERCEPCIÓN O DE NUESTRO PENSAMIENTO QUE SERÁN LLAMADOS LOS ELEMENTOS DE M".

Cantor ha pasado a la historia como el fundador de la Teoría de Conjuntos, pero las Ciencias Matemáticas están en deuda con él también por sus importantes contribuciones al Análisis Clásico. Hemos mencionado antes su trabajo sobre números reales y sobre su representación mediante sistemas numéricos. En su tratado sobre series trigonométricas que apareció en 1872, introdujo los números reales con la ayuda de las series fundamentales. (Hoy las llamamos sucesiones fundamentales o sucesiones de Cauchy).

Más tarde Cantor demostró que cualquier número real positivo r se puede representar mediante series del tipo

$$r = c_1 + \frac{c_2}{2!} + \frac{c_3}{3!} + \frac{c_4}{4!} + ...$$

con los coeficientes $c_n \leq (n-1)!$ para $n \geq 1$. Estas series se conocen actualmente con el nombre de series de Cantor. En el mismo trabajo hay una generalización de dicha representación y una expresión de los números reales mediante productos infinitos. Con estos artículos y con algunos estudios notables sobre las series trigonométricas, Cantor se consolidó como discípulo aventajado de Weierstrass. Sus resultados extendieron los trabajos él y de otros con técnicas "convencionales".

En noviembre de 1873 y por el intercambio de cartas con su colega Dedekind en Brunswick abordó una cuestión que canalizaría la labor científica de Cantor hacia una nueva dirección. Sabía que era posible "contar" el conjunto de los números racionales poniéndolos en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. Pero se preguntaba si dicha correspondencia era posible para el conjunto de los números reales. Pensaba que no, pero no conseguía encontrar una demostración. Poco tiempo después, el 2 de diciembre confesó que "*nunca se había tomado en serio el problema por no tener un valor práctico*" añadiendo "*estoy de acuerdo con ustedes que no merece la pena dedicarle mucho tiempo*". No obstante, profundizó en las correspondencias entre conjuntos y el 7 de diciembre de 1873 escribía a Dedekind indicándole que el conjunto de los números reales no es contable.

Ese día se puede considerar como ***el día en que la Teoría de Conjuntos había nacido.*** Dedekind felicitó a Cantor por lograrlo. Mientras tanto Cantor y probablemente Dedekind habían logrado probar que el conjunto de los números algebraicos es contable. Así apareció entonces una nueva prueba del teorema de Liouville de existencia de números transcendentes. Es de señalar que, en el mismo año 1873, el matemático francés Ch. Hermite logró demostrar que el número **e** es transcendente.

El primer artículo publicado sobre Teoría de Conjuntos se encuentra en *Crelle's Journal* (1874). Este trabajo, *Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes alter reellen Algebraischen Zahlen,* contenía más que el título indicado, incluía no sólo el teorema sobre números algebraicos sino además el de los números reales en la versión simplificada de Dedekind, que difiere de la versión actual en que hoy usamos el "método de la diagonal", entonces desconocido.

Siguiendo su marcha Cantor atacó nuevos problemas. En una carta a Dedekind del 5 de enero de 1874 planteó la siguiente cuestión:

"*¿Puede una superficie (por ejemplo, un cuadrado con su borde) ponerse en correspondencia biunívoca con una línea (por ejemplo, un segmento con sus extremos) de tal forma que para todo punto de la superficie exista un punto correspondiente en la línea, e inversamente, para cada punto de la línea exista un punto correspondiente en la superficie?*".

La demostración que Cantor tenía pensada era una justificación del no. Fue tres años más tarde, el 20 de junio de 1877, cuando en su correspondencia con Dedekind se encuentra una alusión a esta cuestión, pero esta vez da a su amigo razones para contestar sí. Confiesa que aunque durante muchos años pensó lo contrario en ese momento le presenta un argumento probando que dos conjuntos continuos de dimensiones diferentes tienen igual potencia, cuestión más general que la antes citada. (Esto consta en la correspondencia entre Cantor y Dedekind, publicada por Noether y Cavaillés).

Dedekind reconoció inmediatamente que la aplicación de Cantor de un cuadrado sobre un segmento es discontinua, sospechando que una correspondencia biunívoca continua entre conjuntos de diferentes dimensiones no es posible.

Cantor intentó probarlo, pero su demostración no tenía rigor. Fue Brouwer [3] quien, en 1910, dio finalmente una demostración completa de la conjetura de Dedekind.

Los siguientes trabajos de Cantor sobre la Teoría de Conjuntos de puntos contienen numerosos conceptos, teoremas. La obra básica en esta materia de Kuratowski contiene a pie de página numerosas referencias históricas y es interesante observar cuántos de los conceptos básicos en topología fueron dados por Cantor. Mencionamos sólo "derivación de un conjunto de puntos", la idea de "clausura", y los conceptos de "denso" y "denso en sí". Cantor llamaba "perfecto" a un conjunto que fuera cerrado y denso en sí mismo y dio un ejemplo notable de un conjunto perfecto y discontinuo. Este "conjunto de Cantor" es el conjunto de todos los puntos x del intervalo unidad $[0,1]$ que se pueden expresar en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

con los números $a_n = 0$ ó $a_n = 2$.

El conjunto de Cantor tiene la misma potencia que el de los números reales. A propósito de esto hacemos notar que del conocido teorema de Baire se deduce que todo espacio métrico completo, no vacío y sin puntos aislados, es no contable. Justamente la demostración de dicho teorema tiene un precedente en la prueba clásica de que el conjunto de los números reales es no contable, ya que ambas demostraciones son similares. Modificando ligeramente esta demostración se puede llegar más lejos probando que todo espacio métrico completo, no vacío y sin puntos aislados, contiene un subconjunto homeomorfo al conjunto ternario de Cantor. Estas conclusiones, evidentemente, no son válidas para el conjunto de los números naturales que es un espacio metrizable completo infinito con todos sus puntos aislados.

Fue Cantor quien también dio la primera definición satisfactoria del término "continuo", que apareció en los primeros escritos de los Escolásticos. Llamó "continuo" a un conjunto perfecto continuo, de esta forma consiguió que este concepto tan sutil se convirtiese en una herramienta matemática útil. Hacemos notar que actualmente un "continuo" se introduce de manera usual como un conjunto compacto continuo, definición que no coincide con la de Cantor. El caso es

[3]Luitzen Egbertus Jan Brouwer fue un matemático holandés (1881-1966), graduado en la Universidad de Amsterdam. Sus trabajos lograron grandes avances en temas como Lógica, Topología, Teoría de la Medida y Análisis Complejo. Formuló el Teorema de Brouwer. Demostró la importancia de los espacios cartesianos y fue uno de los fundadores del movimiento matemático llamado intuicionismo, caracterizado por considerar a la intuición como base de la Matemática.

que Cantor dio la primera definición operativa de dicho término.

En su trabajo fundamental de 1874, Cantor demostró que con el uso de correspondencias biunívocas se podían distinguir diferentes infinitos: Existen conjuntos *contables* y conjuntos que tienen la potencia del *continuo*. De fundamental importancia para el desarrollo de la Teoría General de Conjuntos fue la demostración de que para todo conjunto existe un conjunto de mayor potencia. Cantor sostuvo esto, inicialmente, mediante su teoría de números ordinales. Pero en una carta a Dedekind con fecha del 31 de agosto de 1899 se halla una alusión de que el "método de la diagonal", que Cantor había estado usando, podía ser aplicado para demostrar el Teorema general de los subconjuntos.

De acuerdo con el Teorema de los subconjuntos, para cada conjunto L existe un conjunto de mayor potencia: el conjunto M de los subconjuntos de L, también llamado potencia de L y que se suele denotar por 2^L o $\wp(L)$. La cuestión sobre una "Teoría de Conjuntos" se agudiza. Cantor contempló su teoría como una extensión natural de la teoría clásica de números. Introdujo los números "transfinitos" (cardinales y ordinales) y desarrolló una aritmética para ellos. Con estos números transfinitos, Cantor abrió una "nueva provincia" para las Matemáticas, según hizo notar Gutzmer con motivo del 70 aniversario de Cantor en 1915.

Lógicamente los primeros pasos en esta nueva teoría fueron titubeantes. Así los primeros conceptos sufrieron continuas modificaciones. En el trabajo sinóptico de Cantor en Mathematische Annalen de 1895 podemos leer:

"*Nosotros llamamos potencia o número cardinal al concepto general que con la ayuda de nuestra activa inteligencia se obtiene de un conjunto M por abstracción de la naturaleza de sus diferentes elementos m y del orden en que éstos están dados. Por tanto, cada elemento individual m, si ignoramos su naturaleza, se convierte en un* 1 *y el número cardinal M es un conjunto definido simplemente de unos*".

La Matemática Moderna hace ya tiempo que desechó esta definición por buenas razones. Hoy dos conjuntos se dicen "iguales" si contienen los mismos elementos, de forma que son nombrados o distinguidos en la descripción del conjunto. Por tanto, si ponemos en lugar de cada elemento del conjunto el 1, tenemos el conjunto unitario $\{1\}$.

Cantor mismo notó lo inadecuado de esta primera definición. En una discusión en su libro de 1884 y posteriormente en 1899 en una carta a Dedekind, llamó potencia "*aquel concepto general que se refiere al conjunto y a todos sus conjuntos equivalentes*". Hoy nosotros diríamos, más simplemente, que "un número cardinal es un conjunto de conjuntos equivalentes". Pero esta definición todavía es inadecuada. De hecho sabemos que el concepto de "conjunto de todos los conjuntos" implica contradicciones. Por tanto, el concepto de "conjunto de todos los conjuntos equivalentes a un conjunto M" es también inconsistente. En efecto, sea M un conjunto infinito y

$$M^* = M \cup \{L\}$$

donde L es un elemento del conjunto de todos los conjuntos. El conjunto $\{L\}$ tiene, evidentemente, potencia 1, y todo conjunto M^* (que contiene sólo un elemento más que M) es equivalente a M. Consistentemente, el sistema de todos los conjuntos M^* es un subconjunto del "conjunto de todos los conjuntos equivalentes a M ". Pero como nosotros podemos aplicar este sistema en los elementos del "conjunto de todos los conjuntos", resulta un concepto que lleva inexorablemente a antinomias.

Resumiendo, en todos los trabajos de Cantor no encontramos ninguna definición rigurosa de número cardinal y ordinal.

Pero la historia no termina aquí. Una tercera definición de Cantor aparece en un informe de G. Kowalewski[4] incluída en su biografía, *Bestand und Wandel,* de encuentros que tuvo con G. Cantor. Kowalewski escribió un libro antes de su muerte cuando tenía ochenta años, alrededor de 1950. Esto incluía sus estudios sobre las "clases de números", el conjunto de números ordinales que pertenecen a conjuntos equivalentes. Los números de la segunda clase de números eran, por ejemplo, los números ordinales de los conjuntos contables infinitos. Kowalewski entonces discute las potencias (que eran llamadas "alephs"). Así dice: Esta "potencia" se puede también representar, como solía hacer Cantor, como el número menor inicial de esa clase de números, y los alephs se pueden identificar con estos números iniciales de tal forma que podrían ser utilizados para representar los términos iniciales de la segunda y tercera clase de números del informe de Schoenfliess sobre la Teoría de Conjuntos.

En un libro actual de Teoría de Conjuntos se halla la siguiente definición de número cardinal: Un número cardinal es un número ordinal que no es similar (o coordinable) a ningún otro número ordinal menor. Vemos así que la Matemática Moderna ha adoptado la definición de Cantor, que no se encuentra en ninguno de sus artículos publicados. Es bastante improbable que Stoll, autor del libro citado anteriormente, leyese la biografía de Kowalewski. La moderna visión del concepto estuvo dormida durante cierto tiempo para luego ser acogida por generaciones más jóvenes. Debemos decir que Cantor finalmente llegó a la definición de número cardinal que hoy se considera válida. Esta moderna versión del concepto presupone la validez de un concepto de número ordinal. Para éste tampoco podemos aceptar la definición clásica de Cantor, por las mismas razones que nos previenen de aceptar las primeras versiones del concepto de número cardinal.

En resumen, no sólo debemos a Cantor su iniciativa en el desarrollo de la teoría de conjuntos transfinitos. El demostró los teoremas más importantes de la nueva teoría, y aportó un campo de trabajo para las definiciones actuales del concepto. Sería absurdo criticarle por el hecho de que sus formulaciones iniciales no tuvieran la precisión moderna actual. Cualquiera que abre nuevos campos en las Matemáticas requiere una imaginación muy creativa y sus definiciones iniciales no pueden estar vigentes indefinidamente. Cuando Newton y Leibniz fundaron el Cálculo infinitesimal, sus definiciones eran rudimentarias comparadas con las versiones elegantes que se desarrollaron años después refinadas por Weierstrass y sus discípulos. Lo mismo es aplicable para los conceptos de la teoría de conjuntos y debemos hacer notar que Cantor estaba mucho más cerca de las definiciones actuales.

Por el gran avance sobre el conocimiento del infinito, Cantor potenció la investigación de los

[4]Gerhard Kowalewski (marzo 27, 1876 a febrero 21, 1950) fue un alemán matemático y miembro del partido nazi que introdujo la notación de matrices.

fundamentos. Hilbert rehusó entrar en el "paraíso" que Cantor había creado. Pero Cantor tampoco era un axiomático. Su modo de pensar pertenecía más a la época clásica. En las anotaciones de su artículo *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (1883), él expresa su apoyo incondicional a los "principios del sistema platónico", aunque también él habla de Spinoza, Leibniz y Tomás de Aquino.

La teoría de conjuntos de Cantor no fue sólo una disciplina matemática. El la integró en la Metafísica que consideraba como una ciencia e intentó conectarla con la Teología que utilizaba la Metafísica como herramienta científica. Cantor estaba convencido de que el infinito existía realmente tanto de una forma concreta como abstracta. A propósito de esto escribió:

"*Esta visión, que yo considero la correcta, es apoyada por muy pocos. Posiblemente sea yo el primero en la historia que adopta explícitamente esta posición, con todas sus consecuencias lógicas, pero estoy seguro que no seré el último*".

Filósofos y matemáticos que siguen el pensamiento de Platón aceptan actualmente el infinito de forma abstracta, pero no concreta. En una carta a Mittag-Leffler, Cantor escribe que cree que los átomos del Universo pueden ser contados, y que los átomos del éter podrían servir como un ejemplo del conjunto con la potencia del continuo. Los físicos actuales no están de acuerdo con ello, pero para estudiar el Universo utilizan variedades continuas. Cuando nos preguntamos qué queda del trabajo de Cantor podemos contestar: todo lo que es formalizable queda. Todas sus opiniones puramente matemáticas han sido confirmadas y generalizadas por las siguientes generaciones, pero sus conceptos e ideas físicas no son aceptadas por ellas.

Al final de sus días Cantor creía que las bases de las matemáticas eran metafísicas, incluso en los años en que los formalismos de Hilbert empezaban a imponerse. Después de su muerte se encontraron en sus escritos una nota escrita a lápiz, probablemente de 1913, en la cual reafirma su punto de vista de que "sin un grano de metafísica" las matemáticas son inexplicables. Por Metafísica él entendía "la Teoría del Ser".

Los objetos matemáticos son "seres" desde el momento que existen intelectualmente. Por eso ante las consecuencias de un teorema de indecidibilidad, como la consistencia de una recta real con conjuntos no medibles Lebesgue o con todos sus conjuntos medibles Lebesgue, no cabe atribuir la verdad o falsedad a cualquiera de ellas. Si son consistentes, desde su perspectiva, ambas son verdaderas. Lo que ocurre es que, en realidad, existen infinitas rectas reales que tienen ciertas propiedades comunes, de modo que existen infinitas de ellas que según Solovay tienen todos sus conjuntos medibles Lebesgue. El teorema de Godel prueba que el concepto de un conjunto infinito no es lo ordinario, lo ordinario es que manejamos conjuntos infinitos que consideramos iguales por tener ciertas propiedades comunes, pero que en realidad no lo son.

En la Teoría de Conjuntos hay varios teoremas importantes que fueron mencionados por Cantor y probados por otros. Entre ellos está el Teorema de equivalencia de Cantor-Schroder-Bernstein: "Si un conjunto A es equivalente a un subconjunto $B' \subset B$ y B es equivalente a un subconjunto $A' \subset A$, entonces A y B son equivalentes". Este teorema fue demostrado independientemente por Schroder en 1896, y por F. Bernstein en 1898. La sencilla demostración de Bernstein, alumno de Cantor, se encuentra en una carta de Dedekind a Cantor. Que todo conjunto puede ser bien ordenado fue probado por Zermelo con el auxilio del Axioma de Elección. Esta prueba provocó gran desacuerdo porque ciertos constructivistas rechazaban los teoremas de existencia puros y criticaban las consecuencias paradójicas del Axioma de Elección.

Más importantes fueron las discusiones sobre las antinomias de la Teoría de Conjuntos. De acuerdo con un teorema demostrado por Cantor, para todo conjunto de números ordinales existe un número ordinal mayor que todos ellos. Lo que es una contradicción cuando se considera el conjunto de todos los números ordinales. Cantor mencionó esta antinomia en carta a Hilbert de 1895. Mucho más impacto causó la posterior antinomia de B. Russell sobre "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos". Fue Hilbert quien, buscando salir del atasco, propuso una estricta formalización de la Teoría de Conjuntos y de todas las Matemáticas. El anhelaba salvar el "paraíso" que Cantor había creado. El formalismo de Hilbert exigía una enorme cantidad de tiempo para ser expuesto. No obstante, la estructura de las Matemáticas actuales se formalizan en el sentido de Hilbert. En este formalismo el concepto de conjunto es subyacente a todo él. La admiración de Hilbert por Cantor queda condensada en las siguientes palabras:

"*los números transfinitos es el más admirable florecimiento del espíritu matemático y, en resumidas cuentas, una de las obras cumbre de la actividad puramente intelectual del ser humano*".

Cuando leemos un libro actual de Matemáticas encontramos siempre los conjuntos en el sentido de Cantor. El autor puede comenzar con un capítulo de lógica formal, pero luego es muy corriente que siga una sección dedicada a la Teoría de Conjuntos. Toda disciplina especializada se describe como la teoría sobre ciertas clases de conjuntos. Por ejemplo, una estructura algebraica es un conjunto el cual se definen ciertas relaciones y operaciones. Los espacios topológicos son ciertos conjuntos definidos por axiomas de entornos u otros axiomas. La Teoría de Probabilidades se refiere a conjuntos de sucesos y la Teoría de la Medida trata sobre la medida de conjuntos.

En la obra de Klaua, *Allgemeine Mengenlehre,* hay una definición de las matemáticas muy simple: *La Matemática es la Teoría de Conjuntos.*

Actualmente, podemos describir todas las disciplinas matemáticas como especializaciones de la Teoría de Conjuntos. Ciertamente, un alto precio (a los ojos de Cantor) fue pagado por este desarrollo. Las modernas matemáticas trabajan con sistemas formales y Cantor que fue probablemente el último gran platonista entre los matemáticos, seguramente nunca aceptó el naciente formalismo. Para él, el Problema del Continuo era una cuestión metafísica. Durante muchos años intentó demostrar que no había potencias intermedias entre las del conjunto de los números naturales y reales. Godel y Cohen demostraron que la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel, Esta solución del problema no hubiese gustado a Cantor. ¿Podría haber defendido contra Kronecker la tesis de que la esencia de las Matemáticas consiste en la libertad? ¿No incluiría esta libertad la posibilidad de que la teoría creada por Cantor fuese interpretada en disconformidad con sus ideas originales? El hecho de que su teoría de conjuntos fuese influenciada por el pensamiento del siglo XX, de alguna manera no en armonía con su visión, es una prueba del profundo significado de su obra.

Sin duda alguna, Cantor es el creador de la Matemática Moderna. En efecto, las mismas antinomias de la teoría de conjuntos llevaron a una revisión de los fundamentos y a un enriquecimiento de las Matemáticas. Así llegó la formalización, al parecer no deseada por Cantor. En este momento no olvidamos tampoco a Hilbert por su importante contribución en esta fundamentación.

2.2. Aportes a la Teoría Conjuntos

A continuación presentaremos algunas definiciones básicas para la estructuración de la teoría de conjuntos, introducidas por Cantor con el fin de dar un soporte a su desarrollo. En primera instancia Cantor analiza el sentido que tiene hablar de la cantidad de elementos de un conjunto, que para la época no era algo nuevo, haciendo énfasis en los conjuntos infinitos; con tal fin introdujo los números cardinales transfinitos o potencias transfinitas que analizaremos al finalizar el capitulo, además manifestó que tiene sentido decir que dos conjuntos infinitos tengan el mismo número de elementos siempre y cuando cada elemento de uno de los conjuntos se relacione con exactamente un elemento del otro conjunto y recíprocamente, de una manera mas formal se puede definir o establecer una biyección de un conjunto en otro, en este caso decimos que los conjuntos son coordinables o equipotentes o simplemente que tiene igual tamaño.

Cabe mencionar que el nacimiento de los números transfinitos llegó a los estudios de Cantor donde se atrevió a enumerar y contar lo infinito a pesar de que esto representaba un paso muy arriesgado y somete lo infinito a un tratamiento numérico.

A partir de la interpretación que Cantor le da al infinito plantea dos grandes conceptos: las nociones de cardinal y ordinal para conjuntos infinitos. De estas dos nociones Cantor hace extensivo el concepto de cardinal a conjuntos infinitos y monta su teoría de conjuntos transfinitos con lo cual las operaciones usuales de la aritmética, desbordan el escenario de las cantidades finitas. En relación a las cardinalidades de conjuntos infinitos Cantor introduce una simbologia especial para notar a estos mismos a los cuales llama cardinales transfinitos.

Iniciaremos presentando la definición de función biyectiva la cual es soporte fundamental para el trabajo de la teoría de conjuntos y que de cierta forma habría sido introducida por Cantor para luego definir conjuntos coordinables o equipotentes.

2.2.1. Función biyectiva

Una función $f : A \to B$ entre dos conjuntos cualesquiera A y B es ***inyectiva*** cuando dados dos elementos cualesquiera $x_1, x_2 \in A$, se verifica que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Equivalente a la implicación anterior es la contrarrecíproca, es decir f es inyectiva cuando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

La función f es ***sobreyectiva*** cuando $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$, es decir cada elemento de B es imagen de al menos un elemento de A.

Si una función es a la vez ***inyectiva*** y ***sobreyectiva***, se dice que es ***biyectiva***.

Cuando una función $f : A \to B$ es ***biyectiva***, existe, y también es biyectiva, la función inversa $f^{-1} : B \to A$ definida por $f^{-1}(y) = x$ cuando $f(x) = y$, para todo $y \in B$.

2.2.2. Conjuntos Coordinables o Equipotentes

Dos conjuntos A y B se dice que son Coordinables o equipotentes si se puede definir una función biyectíva, $f : A \to B$. En este caso se dice que los dos conjuntos se encuentran biunívocamente emparejados o que tienen el mismo número de elementos, esto es: $car(A) = car(B)$.

2.2.3. Conjuntos Finitos

Un conjunto A se dice que es finito si, y solo si, es coordinable con un conjunto de la forma $\{1, 2, 3, 4, 5, ...n\}$ donde n es un número natural. En tal caso decimos que el conjunto A tiene n elementos.

Cabe resaltar que cuando un conjunto es finito, éste se relaciona con su cardinalidad, esto es:

Como A es finito y no vacío, entonces existe $n \in \mathbb{N}$, con $card(A) = car\{1, 2, ..., n\}$. Se dice que la **cardinalidad** de A es n (A tiene n elementos) y se escribe $car(A) = n$. Por otra parte, se define $car(\emptyset) = 0$

Ejemplo El conjunto $\{l, m, n, o\}$ tiene cardinalidad 4 pues, por ejemplo, la funcion $f : \{l, m, n, o\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $f(l) = 1$, $f(m) = 2$, $f(n) = 3$ y $f(o) = 4$, es biyectiva.

Observe que si $carA = n$, entonces existe una función biyectiva $f : A \to \{1, 2, ..., n\}$. Esto nos permite "contar" los elementos de A: el elemento asignado a 1 es el primer elemento, el asignado a 2 es el segundo elemento y así sucesivamente,el elemento asignado a n es el $n-esimo$ elemento. Así, los elementos de un conjunto A de cardinalidad n pueden ser arreglados en una secuencia:

$$x_1, x_2, ...x_n$$

donde x_i es el elemento asignado a i para $i = 1, 2, ..., n$

2.2.4. Conjunto Infinito

Un conjunto A se dice que es infinito si y solo si no es finito.

Otra manera de caracterizar a los conjuntos infinitos es la siguiente: decimos que un conjunto es infinito si, y solo si, es coordinable con alguno de sus subconjuntos propios.(Observemos lo ocurrido en el cuadro 2.1, la correspondencia presentada entre el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y el conjunto de los números pares ($\mathbb{P}$).)

2.2.5. Cardinal de un conjunto Finito

El cardinal de un conjunto finito es el número de elementos que posee.

Ejemplo:

Si $A = \{a, b, c\}$, (siendo a, b y c elementos diferentes dos a dos) entonces $Car(A) = 3$ ya que tiene 3 elementos.

Este conjunto se puede poner en correspondencia biunívoca con el subconjunto $\{1, 2, 3\}$ de enteros positivos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccc} A = & \{a, & b, & c\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ & \{1, & 2, & 3\} \end{array} \qquad Car(A) = 3$$

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y el conjunto de los números pares ($\mathbb{P}$) se pueden poner en correspondencia bionivoca, de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccccccccc} \mathbb{N}= & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & ..., & n, & n+1, & ...\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbb{P} = & \{0, & 2, & 4, & 6, & 8, & 10 & ... & 2n, & 2(n+1), & ...\} \end{array}$$

Cuadro 2.1:

Observemos que $\mathbb{P}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$ ($\mathbb{P} \subset \mathbb{N}, \wedge, \mathbb{P} \neq \mathbb{N}$), sin embargo se puede establecer una correspondencia biunívoca en el sentido de que a cada elemento de $\mathbb{N}$ le corresponde uno y sólo un elemento de $\mathbb{P}$ y recíprocamente a cada elemento de $\mathbb{P}$ le corresponde uno y sólo un elemento de $\mathbb{N}$. Es decir, a pesar de que el conjunto de los pares $\mathbb{P}$ es un subconjunto propio de los números naturales, esta correspondencia biyectiva nos garantiza que en "cierto sentido" estos dos conjuntos, a pesar de tener infinitos elementos cada uno, tienen el mismo número de elementos, es decir,hay tantos elementos en $\mathbb{P}$ como en $\mathbb{N}$: $car(\mathbb{P}) = car(\mathbb{N})$; esta idea seguramente llevo a Cantor a trabajar en los cardinales transfinitos.

2.2.6. Conjunto de Partes o Conjunto Potencia

Si A es un conjunto cualquiera, llamamos conjunto potencia de A o conjunto de partes de A al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Nota:
Recordemos que $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto y A es subconjunto de A.

El conjunto potencia de A o partes de A lo notamos así: $\wp(A)$.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces

$\wp(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

El cardinal del conjunto potencia de A, siendo A finito, será la suma del número de combinaciones posibles de cardinalidad 1, más el número de combinaciones de cardinalidad 2, y así sucesivamente hasta el número de combinaciones de cardinalidad n. Así nos quedará:

$$Car(\wp(A)) = \sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Donde $m = Car(A)$ y n la cardinalidad del grupo de combinaciones.

Por ejemplo, el cardinal del conjunto potencia del ejemplo anterior donde $car(A) = 3$, seria:

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{3!}{n!(3-n)!}$$

el cual es equivalente a:

$$car(\wp(A)) = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$
$$car(\wp(A)) = \frac{3!}{0!(3-0)!} + \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{3!}{2!(3-2)!} + \frac{3!}{3!(3-3)!}$$
$$car(\wp(A)) = \frac{3!}{0! \cdot 3!} + \frac{3!}{1! \cdot 2!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{3!}{3! \cdot 0!}$$
$$car(\wp(A)) = 1 + 3 + 3 + 1$$
$$car(\wp(A)) = 8$$

Ahora miremos cual es $Car(\wp(A))$ para un conjunto donde $Car(A) = n$

$$car(\wp(A)) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$$
$$Car(\wp(A)) = \binom{n}{0} 1^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1} 1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2} 1^2 \cdot 1^{n-2} + ... + \binom{n}{n} 1^n \cdot 1^0$$

El binomio de Newton establece que:
$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0.b^n + \binom{n}{1} a^1.b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2.b^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^n.b^0$$

en este caso $a = b = 1$, por tanto:

$$Car(\wp(A)) = \binom{n}{0}1^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1}1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2}1^2 \cdot 1^{n-2} + ... + \binom{n}{n}1^n \cdot 1^0 = (1+1)^n = 2^n$$

La primera demostración soportada en argumentos intuitivos hace referencia a las posibles formas de combinar los n elementos de A para formar conjuntos de un elemento, dos, tres, n elementos.

La argumentación anterior nos sirve como soporte intuitivo para justificar uno de los resultados mas importantes en relación con los conjuntos potencia o partes de un conjunto finito.

Teorema: Si el conjunto A tiene n elementos, entonces $\wp(A)$ tiene 2^n elementos.

Demostración:

Sabemos que el $car(A) = n$ y vamos a probar que $car(\wp(A)) = 2^n$

Razonemos por inducción.

Si consideramos que $0 \in \mathbb{N}$, entonces para $n = 0$ tenemos que el $car(A) = 0$, se cumple que $A = \emptyset$ en este caso $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$ y por tanto $car(\wp(\emptyset)) = 1 = 2^0$.

Si $n = 1$ entonces, $A = \{\bigstar\}$, tenemos $\wp(A) = \{\emptyset, \{\bigstar\}\} = \{\emptyset, A\}$ donde $car(\wp(A)) = 2 = 2^1$.

Si $n = 2$, entonces, $A = \{\clubsuit, \spadesuit\}$, tenemos $\wp(A) = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}, A\}$ donde $car(\wp(A)) = 4 = 2^2$.

Ahora suponemos que es valido para $n = k$, es decir, si $car(A) = k$ entonces $car(\wp(A)) = 2^k$. Probemos que es valido para $n = k+1$, es decir, si $car(A) = k+1$ entonces $car(\wp(A)) = 2^{k+1}$.

En efecto, si $car(A) = k + 1$ sea $x \in A$ veamos que $car(A - \{x\}) = k$ luego, tenemos que $car(\wp(A - \{x\})) = 2^k$, por hipótesis de inducción.

Lo cual quiere decir que si consideremos el conjunto A con $n = k + 1$ elementos y le quitamos uno, el cual hemos llamado x, el conjunto restante, $A - \{x\}$ tiene k elementos y su conjunto de partes 2^k. Ahora, consideremos dos colecciones, una formada (llamado W) por todos los subconjuntos de A a los cuales pertenece x, y la otra (llamado Y) formada por todos los subconjuntos de A que no contienen a x, es decir, $Y = \wp(A - \{x\})$ tiene 2^k elementos por hipótesis de inducción; W se obtiene añadiendo x a cada uno de los conjuntos de Y y recíprocamente, Y se obtiene quitando x de cada uno de los conjuntos de W, lo cual significa que W tiene tantos elementos como Y (2^k elementos), por tanto $\wp(A)$ estará formado por la unión de Y y W ya que estos dos conjuntos son disyuntos, y así el número de elementos de $\wp(A)$ es igual al número de elementos de Y sumado con el número de elementos de W, es decir:

$$\wp(A) = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Por tanto queda demostrado que $car(\wp(A)) = 2^n$ para un conjunto de n elementos.

Teorema: Ningún conjunto es equipotente al conjunto de sus partes.

Demostración:

Vamos a mostrar que entre A y $\wp(A)$ no se puede definir una biyección, por que no hay forma de conseguir una función que sea sobreyectiva entre A y $\wp(A)$.

Supongamos que f es sobreyectiva , es decir, que si $S \subset \wp(A)$ existe $x \in A$ talque $f(x) = S$.

Con base en esto, puede suceder que $x \in f(x)$, ó, $x \notin f(x)$. Por tanto tiene sentido considerar el siguiente conjunto:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

No obstante, veamos que el conjunto B genera una contradicción. En efecto, como $B \in \wp(A)$ entonces existe $b \in A$ tal que $f(b) = B$. (sucede que $b \in f(b)$, ó, $b \notin f(b)$.)

- Si $b \in f(b)$ entonces, $b \in B$ es decir $b \notin f(b)$.
- Si $b \notin f(b)$ entonces, $b \in B$ es decir $b \in f(b)$.

En conclusión $b \in f(b) \leftrightarrow b \notin f(b)$, lo cual es una contradicción; como esta proviene de suponer que f es sobreyecyiva, se concluye que no existen sobreyecciones de A en $\wp(A)$. En consecuencia A y $\wp(A)$ no son equipotentes.

2.2.7. Conjuntos Contables o Enumerables

Un conjunto A es contable o enumerable si, y solo si, es finito o en caso de ser infinito se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$).

Teorema: Todo subconjunto de un conjunto contable es contable.

Demostración:

Sea X un conjunto contable y supongamos que $A \subseteq X$.

Si A es finito, no hay nada que demostrar, por tanto podemos suponer que A es infinito(lo cual significa que X también lo es).

Como X es contable, podemos “listar” sus elementos así:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, ...\}$$

La correspondencia nos permite utilizar el conjunto de los enteros positivos como "etiquetas" de los elementos de X.
Ahora definamos una función en el conjunto de los enteros positivos como sigue:

Sea k_1 el menor entero positivo m tal que $x_m \in A$.

Sea k_2 el menor entero positivo $m > k_1$ tal que $x_m \in A$.

Sea k_3 el menor entero positivo $m > k_2$ tal que $x_m \in A$.

Suponiendo que $k_1, k_2, k_3, ..., k_{n-1}$ han sido definidos, sea k_n el menor entero positivo $m > k_{n-1}$ tal que $x_m \in A$.

Luego, k conserva el orden, esto es $m > n \rightarrow k(m) > k(n)$.

Teniendo en cuenta lo anterior se forma entonces la función compuesta $x \circ k$, el dominio de $x \circ k$ es el conjunto de los enteros positivos y el recorrido de $x \circ k$ es A. Ademas $x \circ k$ es inyectiva ya que:

$$x[k(n)] = x[k(m)] \rightarrow x_{k(n)} = x_{k(m)}$$

que significa $k(n) = k(m) \rightarrow n = m$, lo cual prueba el teorema.

Teorema: El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) es numerable.

Demostración:

Veamos que existe una función biyectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

Sea la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \dfrac{-(n+1)}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probemos que f es biyectiva, para ello observemos que f es inyectiva y sobreyectiva:

Veamos que $f(n)$ es inyectiva.

Para ello tomemos la función $f(n) = \dfrac{n}{2}$, n es par $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dado $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y n_1, n_2 pares; veamos que:

Si $f(n_1) = f(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$

En efecto,

$$f(n_1) = f(n_2)$$

$$\frac{n_1}{\cancel{2}} = \frac{n_2}{\cancel{2}}$$

$$n_1 = n_2$$

Ahora veamos que $f(n) = \dfrac{-(n+1)}{2}$ es inyectiva.

Dado $n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ y n_3, n_4 impares.

Veamos que si $f(n_3) = f(n_4) \rightarrow n_3 = n_4$

En efecto,

$$f(n_3) = f(n_4)$$

$$\frac{-(n_3+1)}{\cancel{2}} = \frac{-(n_4+1)}{\cancel{2}}$$

$$-(n_3+1) = -(n_4+1)$$

$$-n_3 - \cancel{1} = -n_4 - \cancel{1}$$

$$-n_3 = -n_4$$

$$n_3 = n_4$$

Por tanto, f es inyectiva.

Veamos que f es sobreyectiva.

Para que sea sobreyectiva tenemos que; $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = n$, es decir cada elemento de $\mathbb{Z}$ es imagen de al menos un elemento de $\mathbb{N}$.

Como $n \in \mathbb{Z}$, tenemos las siguientes opciones: $n \geq 0$ ó $n < 0$.

- Si $n \geq 0$ debemos hallar $x_1 \in \mathbb{N}$, x_1 par tal que $f(x_1) = n$

  $f(x_1) = \dfrac{x_1}{2} \to \dfrac{x_1}{2} = n \to x_1 = 2n$ y $2n \in \mathbb{N}$ y es par.

  $f(2n) = \dfrac{2n}{2} = n$. es decir que haciendo $x_1 = 2n$ tenemos que $f(x_1) = n$

- Si $n < 0$ entonces $-n > 0$, $-n \in \mathbb{N}$ debemos hallar $x_2 \in \mathbb{N}$, x_2 impar, tal que $f(x_2) = n$

  $f(x_2) = -\dfrac{x_2+1}{2} = n \to x_2 = -2n-1$ y $-2n-1$ es natural impar.

  $f(-2n-1) = -\dfrac{-2n-1+1}{2} = -\dfrac{-2n}{2} = n$

por lo tanto esta funcion es biyectiva y podemos afirmar que $\mathbb{Z}$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.

Como f es biyectiva, tenemos que $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f^{-1} = \begin{cases} 2z & \text{si } z \geq 0 \\ -(2z+1) & \text{si } z < 0 \end{cases} \qquad \forall z \in \mathbb{Z}$$

Veamos lo que ocurrido con las funciones en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \{\ ..., & -z, & ..., & -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & ..., & z, & ...\} & = \mathbb{Z} \\ & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ \{\ ..., & -(2n+1), & ..., & 7, & 5, & 3, & 1, & 0, & 2, & 4, & 6, & 8, & ..., & 2n, & ...\} & = \mathbb{N} \end{array}$$

Observamos que:

- Enteros Negativos $(-z) \longrightarrow$ Naturales Impares, $(2n+1)$
- Enteros Positivos $(z) \longrightarrow$ Naturales Pares, $(2n)$

Teorema: El conjunto de los números Racionales ($\mathbb{Q}$) es numerable.

Cantor demostró con su método diagonal que los racionales ($\mathbb{Q}$) son numerables. Esto significa que se puede poner en correspondencia biunívoca con los números naturales, si lo conseguimos, como cada racional se corresponde con un único natural entonces el tamaño de los dos conjuntos son iguales.

La demostración consiste en colocar todas las fracciones posibles en una tabla, eliminar las fracciones equivalentes y recorrer la tabla en diagonal, como se indica en el siguiente diagrama. De esta forma no dejamos ninguna fracción por enumerar y a cada número racional le corresponde un único número natural.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
1 & \longrightarrow & 2 & & 3 & \longrightarrow & 4 & & 5 & \longrightarrow & 6 & & 7 & \longrightarrow & 8 & & 9 & \cdots & n \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{2} & & \cancel{\frac{2}{2}} & & \frac{3}{2} & & \cancel{\frac{4}{2}} & & \frac{5}{2} & & \cancel{\frac{6}{2}} & & \frac{7}{2} & & \cancel{\frac{8}{2}} & & \frac{9}{2} & \cdots & \frac{n}{2} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \cancel{\frac{3}{3}} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \cancel{\frac{6}{3}} & & \frac{7}{3} & & \frac{8}{3} & & \frac{9}{3} & \cdots & \frac{n}{3} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \cancel{\frac{2}{4}} & & \frac{3}{4} & & \cancel{\frac{4}{4}} & & \frac{5}{4} & & \cancel{\frac{6}{4}} & & \frac{7}{4} & & \frac{8}{4} & & \frac{9}{4} & \cdots & \frac{n}{4} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \cancel{\frac{5}{5}} & & \frac{6}{5} & & \frac{7}{5} & & \frac{8}{5} & & \frac{9}{5} & \cdots & \frac{n}{5} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{6} & & \cancel{\frac{2}{6}} & & \cancel{\frac{3}{6}} & & \cancel{\frac{4}{6}} & & \frac{5}{6} & & \frac{6}{6} & & \frac{7}{6} & & \frac{8}{6} & & \frac{9}{6} & \cdots & \frac{n}{6} \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{7} & & \frac{2}{7} & & \frac{3}{7} & & \frac{4}{7} & & \frac{5}{7} & & \frac{6}{7} & & \frac{7}{7} & & \frac{8}{7} & & \frac{9}{7} & \cdots & \frac{n}{7} \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{8} & & \cancel{\frac{2}{8}} & & \frac{3}{8} & & \frac{4}{8} & & \frac{5}{8} & & \frac{6}{8} & & \frac{7}{8} & & \frac{8}{8} & & \frac{9}{8} & \cdots & \frac{n}{8} \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{9} & & \frac{2}{9} & & \frac{3}{9} & & \frac{4}{9} & & \frac{5}{9} & & \frac{6}{9} & & \frac{7}{9} & & \frac{8}{9} & & \frac{9}{9} & \cdots & \frac{n}{9} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{n} & & \frac{2}{n} & & \frac{3}{n} & & \frac{4}{n} & & \frac{5}{n} & & \frac{6}{n} & & \frac{7}{n} & & \frac{8}{n} & & \frac{9}{n} & \cdots & \frac{n}{n}
\end{array}
$$

Vemos que hay tantos números racionales $\mathbb{Q}$ como números naturales $\mathbb{N}$.

Teorema: El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) no es numerable.

Demostración:

Para ello vamos a considerar únicamente los números reales entre 0 y 1 y vamos a ver que ellos ya forman un conjunto no numerable, por lo que el conjunto total de los reales será ciertamente no numerable ya que contiene un subconjunto no numerable.

El conjunto de todos los números reales entre 0 y 1 está formado por todas las expresiones decimales que tienen 0 como parte entera. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que sí pueden numerarse dichas expresiones decimales.

Supongamos que los números reales en el intervalo $(0,1)$ tienen la misma potencia que los números naturales. Eso significa que existe una función biyectiva entre los naturales y los reales; lo que quiere decir que la totalidad de los reales del intervalo en cuestión se pueden listar en una sucesión de la forma:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_n, ...$$

Dado que cada uno de estos números está ubicados en el intervalo $(0,1)$ quiere decir que su expansión decimal consta de la parte entera igual a cero, y los podemos representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} x_1 = 0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}...\ a_{1n}... \\ x_2 = 0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}...\ a_{2n}... \\ x_3 = 0.a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}...\ a_{3n}... \\ . \\ . \\ . \\ x_n = 0.a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ a_{n4}\ a_{n5}...\ a_{nn}... \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

Suponemos que en la lista se encuentran la totalidad de los reales del intervalo $(0,1)$. Formemos el número real,

$$b = 0.d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5...\ d_n...$$

Tal que, $d_i \neq a_{ii}$, para todo i. Observemos que,

$$\begin{array}{c} b \neq x_1, \text{ porque } d_1 \neq a_{11} \\ b \neq x_2, \text{ porque } d_2 \neq a_{22} \\ b \neq x_3, \text{ porque } d_3 \neq a_{33} \\ . \\ . \\ . \\ b \neq x_n, \text{ porque } d_n \neq a_{nn} \end{array}$$

Entonces b es diferente a todos los elementos de la lista $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_n, ...$, lo cual contradice el hecho de que en la lista se encontraban "todos" los reales del intervalo $(0,1)$.

Los aspectos anteriores nos describen las dos siguientes propiedades de los conjuntos infinitos:

a. Hay infinitos más grandes que otros. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ son dos conjuntos infinitos pero de diferente tamaño. El tamaño de $\mathbb{R}$ es mayor que el tamaño de $\mathbb{N}$.

b. Hay subconjuntos de los conjuntos infinitos que son de igual tamaño que el todo. Por ejemplo, los pares y los naturales tienen igual tamaño a pesar de que los pares son una parte de los naturales.

Esos dos aspectos dan al traste con dos opiniones del sentido común: la creencia de que hay un solo infinito y la idea de que el todo es mayor que la parte.

El segundo de los aspectos anteriores fue establecido por Euclides como axioma. Para los conjuntos infinitos este axioma es reemplazado por una nueva noción que relaciona los subconjuntos del conjunto con el conjunto mismo.Si designamos como $\wp(A)$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, denominado partes de A, se tiene que:

$$car(\wp(A)) > car(A)$$

Si partimos del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, se puede construir un conjunto mayor tomando el conjunto de sus partes:

$$car(\wp(\mathbb{N})) > car(\mathbb{N})$$

Luego se toma como partida $\wp(\mathbb{N})$ y se construye otro mayor tomando $\wp(\wp(\mathbb{N}))$; y así, sucesivamente.

Para designar la cantidad de elementos de un conjunto infinito, Cantor utilizó la primera letra del alfabeto hebreo; la lengua sagrada por antonomasia, llamada *aleph* y representada por el signo $\aleph$. $\aleph_0$ representa la totalidad de los números naturales:

$$car(\mathbb{N}) = \aleph_0$$

Cantor entendió muy bien que la cardinalidad era un concepto que dejaba por fuera algunas cuestiones que tienen que ver con cambios cualitativos. En este sentido diferenció el *orden* de la *cantidad*. Si bien los cardinales transfinitos daban cuenta de la cantidad, faltaba otro tipo de números que dieran cuenta del orden.

2.2.8. Números Ordinales y Cardinales Transfinitos

Para establecer una definición formal de los números ordinales, Cantor se basó en dos principios básicos: la operación de adición de unidades y la adopción de sucesiones divergentes. Por el primer principio se obtiene la secuencia: $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ de nuestros números naturales.

Cantor explica cómo la sucesión de los números naturales $1, 2, 3, 4, ...$ tuvo su origen en las operación de añadir repetidamente unidades. A este proceso de definición de números ordinales finitos añadiendo sucesivamente unidades, lo denomino el *"primer principio de generación."* La clase de todos los números enteros finitos (I-primer principio de generación) no tenia elemento máximo; sin embargo, y a pesar de que fuera incorrecto hablar de elemento máximo de (I), Cantor creía que no había nada impropio en imaginarse un nuevo número ω que viniese a expresar el orden natural y regular del *conjunto completo* (I).Este nuevo número ω, el primer número transfinito, era pues el *primer número* que seguía a la sucesión completa de números naturales n. Entonces era posible aplicar de nuevo el primer principio de generación de ω, y producir más números ordinales transfinitos de la forma:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, ..., \omega + n, ...$$

y de nuevo, dado que no hay aquí ningún elemento máximo, uno podría imaginar otro número que representase el orden de la colección de todos los números n y $\omega + n$. Representado este número por 2ω, es claro que podemos continuar indefinidamente:

$$2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 2, .., 2\omega + n$$

(Posteriormente Cantor invirtió el orden de los términos en la multiplicación de ordinales, con lo que por ejemplo, “2ω” pasó a ser “$\omega 2$”, y esta última es la notación moderna.)

0, 1, 2, 3, 4, ..., ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., 2ω, $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, $2\omega + 3$, ...,

luego vienen 3ω, 4ω, 5ω,, ... después de todos estos seguirá ω^2, donde se inicia nuevamente el proceso:

ω^2, $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, ..., $\omega^2 + \omega$, $\omega^2 + \omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, ..., $\omega^2 + 2\omega$, ...,

$\omega^2 + 3\omega$, ..., $\omega^2 + 4\omega$, ..., $\omega^2 2$, ..., $\omega^2 3$, ..., ω^3, ..., ω^4, ..., ω^ω, ..., ω^{ω^ω}, ..., $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$

Si definimos como: $\emptyset = 0, 1 = 0, 2 = 0, 1, ..., \omega = \mathbb{N} = 0, 1, 2, ..., \omega + 1 = 0, 1, 2, ..., \omega ...$ observemos que tanto el cardinal de ω como el de $\omega + 1$, son iguales al cardinal de los números naturales.

Tratando de caracterizar este segundo modo de generación,admite Cantor que ω puede ser considerado como el limite al que tienden los números naturales $\mathbb{N}$ creciendo monótonamente, limite que no alcanzan nunca. Por miedo a que la analogía utilizada aquí pueda parecer completamente inadecuada por Cantor añade que con esto sólo intenta subrayar el carácter de ω considerado como el primer número entero que sigue después de **“todos”** los números $n \in \mathbb{N}$ la idea de ω como limite servia para satisfacer su papel como ordinal, el mínimo entero mayor que cualquier entero $n \in \mathbb{N}$.

Este era entonces el *segundo principio de generación*: Siempre que se tenga una sucesión de números considerada como ilimitada en su crecimiento, podrán generarse nuevos números transfinitos, aceptando como un hecho la existencia del mínimo número mayor que cualquiera de la sucesión dada. Cantor expresaba la característica esencial de este segundo principio de generación en términos de su función lógica.

*Lo denomino el **segundo principio de generación** de los números enteros reales,y puede ser definido de una manera más precisa: Si existe una sucesión concreta cualquiera de números enteros reales, que no admite máximo, entonces se crea un nuevo número por medio de este segundo principio de generación, que se considera como el **límite** de aquellos números, es decir, que está definido como el número siguiente inmediatamente a todos ellos en el orden.*

Por medio de sucesivas aplicaciones de estos dos principios siempre es posible producir nuevos números, y siempre en una sucesión completamente determinada. En su formulación más general, tales números podrían venir dados en la forma siguiente:

$$n_0\omega^{\mu} + n_1\omega^{\mu-1} + ... + n_{\mu}$$

Pero procediendo de esta manera, sin ninguna limitación aparente, los números de esta segunda clase de números parecerían no tener fin, si éste fuera el caso, ¿qué diferencias podrían establecerse entre la primera y la segunda clase? Cantor introduce, ante esta situación, un tercer principio denominado principio de limitación, que tenía como objetivo el de producir ciertos cortes en la sucesión de los números transfinitos. Como consecuencia de este principio era posible ponerle cotas definidas a los números de la segunda clase (II), y distinguirla así de la tercera y sucesivas clases de números más elevados, mediante esta definición:

Definimos por tanto la segunda clase de números (II) como La colección de todos los números α (en una sucesión creciente determinada) que pueden formarse por medio de los dos principios, de generación:

$$\omega, \omega + 1, ..., n_0\omega^{\mu} + n_1\omega^{\mu-1} + ... + n_{\mu}, ..., \omega^{\omega}, ..., \alpha, ...,$$

con la condición de que todos los números que preceden a α (del 1 en adelante) constituyen un conjunto de potencia equivalente a la primera clase de números (I).

Un progreso importante que hicieron posible los nuevos números fue el de la distinción que hace Cantor entre el número de objetos en un conjunto, en el sentido de cardinal sin tener en cuenta el orden en que están situados estos elementos; y numeración, que toma en consideración el orden de los elementos en cambio.

La diferencia entre estos dos conceptos es fundamental: por ejemplo, todos los conjuntos siguientes tienen el mismo número cardinal o la misma potencia, todos ellos son numerables; sin embargo, sus numeraciones, sus números ordinales, son diferentes:

$$\left.\begin{array}{c}(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...) = \omega \\ (a_2, a_3, ..., a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_1) = \omega + 1 \\ (a_3, a_4, ..., a_n, ..., a_1, a_2) = \omega + 2 \\ (a_1, a_3, a_5, ..., a_2, a_4, a_6, ...) = \omega + \omega = 2\omega\end{array}\right\}$$

Una vez definidos sus números transfinitos, Cantor pasa a exponer su aritmética y otras propiedades.

Se define que dos conjuntos tienen la misma enumeración (es decir, sus correspondientes números ordinales son iguales) si pueden ponerse en correspondencia biunívoca tal que el orden de los elementos se conserve en ambos sentidos. De manera análoga se define que las potencias de dos conjuntos M y N son equivalentes si los elementos de uno de ellos pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los del otro.

La distinción recién introducida entre número y numeración trajo consigo algunos elementos nuevos para entender la diferencia entre conjuntos finitos e infinitos. Para los conjuntos finitos las posibles numeraciones de sus elementos eran siempre la misma, independientemente de la ordenación establecida. Los conjuntos infinitos eran mucho más interesantes desde este punto de vista, por que era posible obtener numeraciones diferentes para conjuntos de la misma potencia, y por lo tanto las distintas numeraciones de un conjunto resultaban depender totalmente del orden en la que estaban situados los elementos del conjunto, existía además una cierta correlación entre el número (cardinal) de un conjunto y las posibles numeraciones que sus elementos pudieran dar lugar según su ordenación "*Todo conjunto de la potencia de la primera clase de números es numerable por medio de números de la segunda clase y sólo por tales números.*"

Aunque para conjuntos finitos la diferencia entre número y numeración es irrelevante, nos ayuda sin embargo a explicar por qué el concepto de número funcionó de hecho en un doble sentido, y por qué ha habido una cierta confusión a lo largo de siglos entre el infinito potencial y el actual. **Para los conjuntos finitos coinciden los números cardinal y ordinal**, pero dado que estos dos tipos de números eran fundamentalmente distintos, pudo demostrar Cantor lo ilegítimo del proceso de traspasar propiedades de los números finitos a los números infinitos. Una vez reconocida la diferencia ordinal-cardinal para números transfinitos, pudo Cantor volver a aplicar los mismos conceptos a los conjuntos finitos, y descubrir en este proceso que no hay otra manera de caracterizar las diferencias entre los conjuntos finitos e infinitos: Si un conjunto es finito entonces sus números cardinal y ordinal son el mismo.

En cuanto a cardinalidad transfinita, cabe resaltar que Cantor toma el conjunto W, formado por todos los ordinales transfinitos de la clase (II), y demuestra que tiene una cardinalidad mayor que $\aleph_0$; además demuestra que no hay ningún otro cardinal entre $\aleph_0$ y el cardinal del conjunto formado por los ordinales de la clase (II). A este ordinal Cantor lo designó como $\aleph_1$ corresponde a un cardinal mayor que $\aleph_0$; es decir:

$$car(\mathbb{N}) = \aleph_0 < \aleph_1$$

Utilizando el mismo método de generación, Cantor fue construyendo una escalera de infinitos cada vez más grandes:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2, ...$$

A los *alephs* se les llama cardinales transfinitos o números infinitos.

$car(\mathbb{R}) = car(\wp(\mathbb{N}))$ y por lo tanto $car(\wp(\mathbb{N})) = car(\mathbb{R}) \geqslant \aleph_1$. Los esfuerzos de Cantor se centraron en adelante en responder la pregunta: *¿cuál es el cardinal del continuo?* Supuso que la potencia del continuo era $\aleph_1$; pero jamás lo pudo demostrar, dejándolo como hipótesis. Es lo que se denomina: ***hipótesis del continuo***.

Atendiendo al hecho que,

$car(\mathbb{R}) > car(\mathbb{N})$, $car(\wp(\mathbb{N})) > car(\mathbb{N})$ y $car((\mathbb{R})) > car(\wp(\mathbb{N}))$

Entonces,

$$c = car(\wp(\mathbb{N})) = car(\mathbb{R}) \geqslant \aleph_1$$

De esta forma la hipótesis del continuo establece que no hay un conjunto de cardinalidad intermedia entre $\aleph_0$ y c. En otras palabras, un subconjunto infinito A de $\mathbb{R}$ tienen dos posibilidades:

$$car(A) = \aleph_0 \text{ ó } car(A) = \aleph_1$$

¿Se puede demostrar que efectivamente no hay un subconjunto de $\mathbb{R}$, de cardinalidad intermedia entre la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y la cardinalidad de $\mathbb{R}$? Esta pregunta encabezaba la lista de 23 problemas que David Hilbert consideraba los dilemas más importantes que debían enfrentar los matemáticos del siglo XX, como lo expuso en el primer congreso mundial de matemáticas de 1900.

Muchos matemáticos buscaron respuesta a la *hipótesis del continuo*. Sin embargo, fueron Kurt Gódel, en 1938, y Paul Cohen, en 1963, quienes de forma complementaria, demostraron que la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel la cual presentaremos en el capitulo 4 no era suficiente para demostrar ni la hipótesis del continuo ni su negación. Eso significa que se puede adoptar $c = \aleph_1$, o a cualquier otro cardinal mayor sin caer en contradicciones.

CAPÍTULO 3

PARADOJAS EN MATEMÁTICAS

En este capítulo se presentan y analizan algunas de las paradojas que más han influido en el desarrollo de las matemáticas. Estas se clasifican en dos grandes grupos: semánticas o lingüísticas y lógicas o matemáticas. Entre las paradojas lógicas o matemáticas analizaremos una en especial, presentada como preámbulo a la teoría axiomática de conjuntos, surgida a partir de la definición de conjunto dada por Cantor en la cual Bertrand Russell encontró contradicciones. Se trata de la denominada paradoja de Russell la cual tiene antecedentes en las formulaciones populares como la paradoja del barbero y desarrollos mas elaborados en las paradojas semánticas.

Cabe resaltar que gran parte del interés por retomar y profundizar el estudio de las paradojas nace a partir del "llamado de atención"hecho por Russell sobre la generalidad que aparece en algunas definiciones, particularmente la de conjuntos dada por Cantor.

Una ***Paradoja*** es una afirmación que a primera vista no pudiera darse, pero que en ciertas condiciones (distintas a las usuales) puede darse; o que parece darse pero que rigurosamente no se da; o sencillamente, que encierra en si mismo contradicciones. Recordemos, por ejemplo, la famosa y antiquísima paradoja de Aquiles y la Tortuga en la cual nos parece absurdo, de entrada, que el hombre más veloz, Aquiles no pueda alcanzar al animal mas lento y torpe (la Tortuga).

A menudo se llega a paradojas cuando se contradice el denominado principio de no contradicción que afirma que un enunciado proposicional no puede ser falso y verdadero al mismo tiempo.

Muchas de las situaciones paradójicas que se dan en matemáticas estan asociadas al manejo del infinito. Por ejemplo, cabe resaltar que al tratar de aplicar a conjuntos infinitos el hecho de que: Si es posible emparejar todos los elementos de un conjunto con todos los pertenecientes a otro, entonces, ambos conjuntos (en cierto sentido) tienen el mismo número de elementos, puso a los matemáticos ante algunos hechos que eran inexplicables en su época y que fueron considerados como paradojas. Algunos de ellos, son:

1) Es posible emparejar todos los puntos de dos segmentos de recta que tengan diferente

medida.

(Hacer referencia a la figura 3.1 que ilustra el proceso.)

Dados dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$, que podemos suponer paralelos, unamos los puntos E con A y C con D para obtener el punto O. Sea $F \in \overline{AC}$, la recta que pasa por O y F, corta al segmento $\overline{DE}$ en el punto G, en forma similar, si $G \in \overline{DE}$, la recta que pasa por O y G, corta al segmento $\overline{AC}$ en el punto F.

De esta forma quedan emparejados todos los puntos de $\overline{AC}$ con los del segmento $\overline{DE}$.

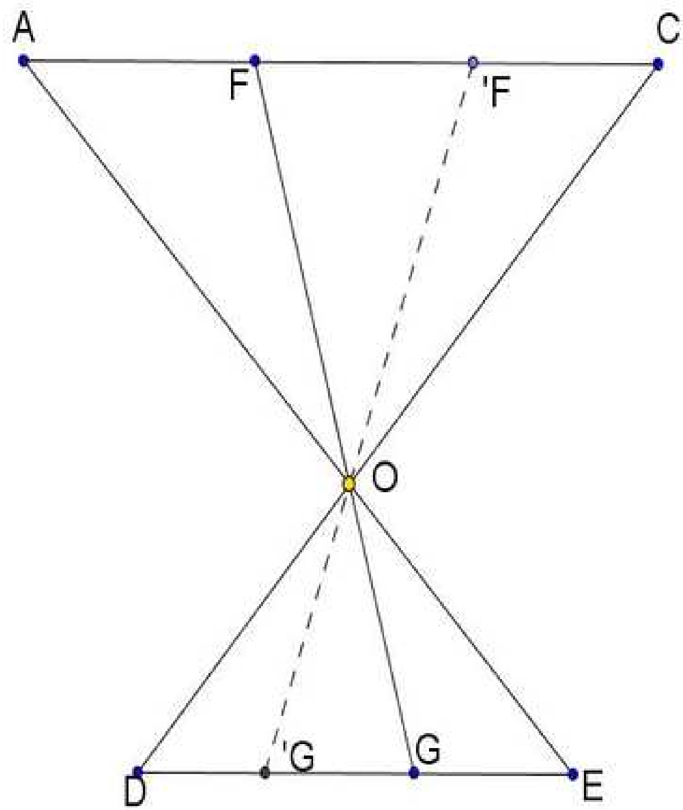


Figura 3.1:

Observemos que cuando el punto G el cual pertenece a el segmento $\overline{DE}$ tiende al punto E, el punto F tiende a A y la recta GOF tiende a la recta EOA. De igual forma, cuando el punto G tiende a el punto D el punto F tiende a el punto C y por tanto la recta GOF tiende a la recta DOC. Con ello vemos que habrá tantos puntos en el segmento $\overline{AC}$ como en el segmento $\overline{DE}$.

Lo paradójico de esta situación aparece cuando se confunden dos cualidades distintas de los segmentos: una es la magnitud de los segmentos, en este caso su longitud y la otra su numerosidad. La longitud del segmento $\overline{DE}$ es finita y estrictamente menor que la longitud del segmento $\overline{AC}$ que también es finita, esto conduce a creer que el segmento $\overline{DE}$ es estrictamente menor que el segmento $\overline{AC}$ teniendo en cuenta sus cualidades.

Cabe mencionar que un paso importante en la comprensión del infinito como numerosidad consiste en entender que los dos segmentos son numerosamente iguales aunque la longitud del uno sea mayor que la longitud del otro.

2) Es posible emparejar todos los puntos de una semirrecta con los de un segmento de recta.

(Hacer referencia a la figura 3.2 que ilustra el proceso.)

Sean $\overrightarrow{OW}$ la semirrecta de origen O que pasa por el punto W y $\overline{OR}$ el segmento; por el punto O se traza un segmento $OP \perp OR$, construyamos el rectángulo $\square OPNR$ y la diagonal $\overline{ON}$.

Tomemos un punto $M \in \overline{OR}$, y tracemos el segmento perpendicular $\overline{MH}$ donde $H \in \overline{ON}$. A continuación prolonguemos el segmento de recta $\overline{PH}$ hasta el punto W de la semirrecta , de esta forma se asigna a cada punto de $\overline{OR}$ uno y sólo uno de $\overrightarrow{OW}$; similarmente, si W es un punto cualquiera de $\overrightarrow{OW}$, devolviendonos puede verse que, existe una y sólo una imagen de W en $\overline{OR}$.

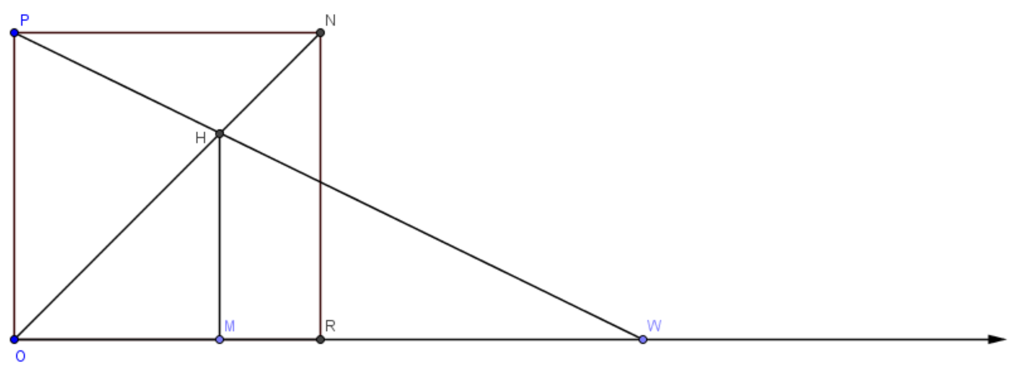


Figura 3.2:

3) En el siglo XVI, observando Galileo Galilei que todo entero positivo tiene un cuadrado y que todo cuadrado proviene de un entero positivo, es decir, que es posible emparejar todos los elementos del conjunto de los enteros positivos con todos los elementos del conjunto de los cuadrados de números enteros positivos, llego a la conclusión de que las

relaciones de igualdad y de desigualdad no son validas en el infinito.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & ... & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & ... & n^2 \end{array}$$

Así, por ejemplo, para él no tendría sentido decir que hay tantos enteros positivos como cuadrados de enteros positivos.

En su obra Discursos y Demostraciones Matemáticas presenta el siguiente diálogo entre Salviati y Simplicius:

"***Salviati****: Si pregunto cuántos son los cuadrados de los números, puedes responderme correctamente que son tantos como sus propias raíces; dado que cada cuadrado tiene su raíz, y cada raíz su cuadrado, ni cada cuadrado tiene más de una sola raíz, ni cada raíz tiene más de un solo cuadrado.*

Simplicius*: Qué es lo que hay que resolver esta vez?*

Salviati*: No veo que se pueda admitir otra conclusión, si no es la de decir que la cantidad de números en general es una cantidad infinita: los cuadrados son infinitos y además ni la cantidad de cuadrados es menor que la de los números en general, ni esta es mayor que aquella: en conclusión los atributos igual, mayor y menor no tienen sentido cuando se habla de infinitos, sino cuando se trata de cantidades finitas.*"

En este caso la paradoja aparece porque Aristóteles había inducido a pensar que "*un todo es estrictamente mayor que cualquiera de sus partes.*"

Los ejemplos anteriores muestran claramente que los conceptos clásicos sobre el infinito, la longitud, el área, la relación entre una totalidad y sus partes, y el uso de procedimientos finitos pero potencialmente infinitos, no eran suficientes para dar una interpretación racional a ciertos hechos geométricos.

3.1. Paradojas de Zenón

Uno de los temas de mayor controversia entre los griegos fue el relativo a la relación que existe entre lo discreto y lo continuo. Los números enteros representan objetos discretos y una razón conmensurable representa una relación entre dos colecciones de longitudes que admiten una unidad de medida común, de manera que cada una de ellas es una colección discreta de unidades; sin embargo, las longitudes en general no son colecciones discretas de unidades y este es el motivo por el que aparecen las razones de longitudes inconmensurables. En otras palabras, longitudes, áreas, volúmenes, tiempo y otras cantidades son continuas.

Este problema de la relación entre lo discreto y lo continuo fue puesto en evidencia por el más destacado discípulo de Parménides, Zenón de Elea, quien alrededor del año 445 a.c., propuso un cierto número de paradojas para refutar los planteamientos de los pitagóricos sobre su concepción del universo como totalidad discreta.

En la época en que vivió Zenón, había dos concepciones opuestas del espacio y del tiempo. Una, que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo, y la otra, que el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos espasmódicos.

Por los problemas planteados a través de sus paradojas, Zenón es considerado como uno de los precursores de las matemáticas del infinito, pues con ellas afloran varios problemas cruciales para la matemática, a saber el de lo infinitesimal, el del infinito, el de la continuidad, el del movimiento y otros más, los cuales han sido tratados posteriormente por destacados matemáticos del siglo XIX como: Bolzano, Cauchy, Dedekind, Cantor, Peano y Weierstrass. Los planteamientos de Zenón tuvieron grandes consecuencias en el desarrollo del pensamiento matemático, entre ellos el evitar utilizar representaciones matemáticas para interpretar el mundo físico, especialmente el movimiento. Esta separación se mantuvo hasta la obra fundamental de Galileo que fue precedida 18 siglos por Arquímedes. Tal alejamiento entre matemáticas y mundo real fue uno de los principales factores que condujeron al estancamiento de la matemática en la Edad Media.

A continuación presentaremos la paradoja de Aquiles y la tortuga como ejemplo de tiempo y espacio infinitamente divisibles.

3.1.1. Paradoja de Aquiles y la Tortuga

Aquiles, llamado "el de los pies ligeros" y el más hábil guerrero de los aqueos, decide salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corre mucho más rápido que ella, y seguro de sus posibilidades, le da una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorre en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubre que la tortuga ya no está, sino que ha avanzado, más lentamente, un pequeño trecho. Aquiles, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta ha avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganará la carrera, ya que la tortuga estará siempre por delante de él.

Cualquier distancia que deba ser recorrida entre Aquiles y la tortuga, puede ir dividíendose en dos partes y hay tiempo suficiente para recorrer la primera parte; como las dos magnitudes son infinitamente divisibles Aquiles nunca alcanzará a la tortuga. En otras palabras, Zenón establece que sobre la hipótesis de que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles el movimiento sería imposible.

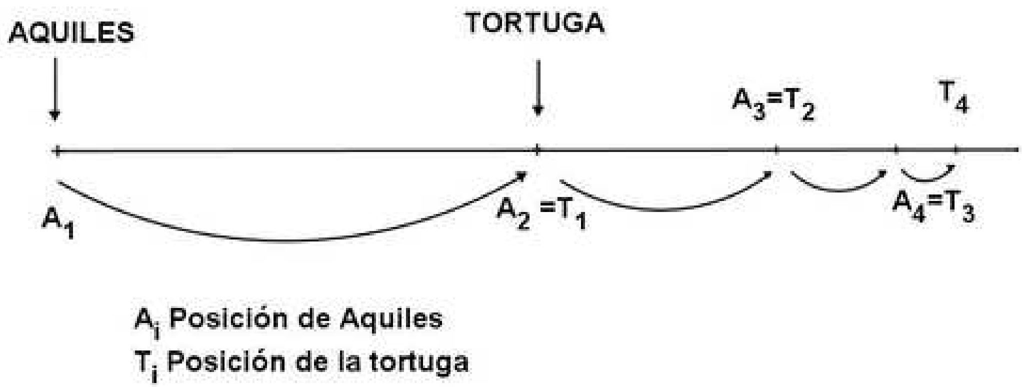


Figura 3.3: Aquiles y la Tortuga

3.2. Las paradojas Lingüísticas o Semánticas

Cabe mencionar que en 1926 F.P. Ramsey[5] puso en evidencia que existen dos tipos de paradojas: las lógicas o matemáticas, y *las lingüísticas o semánticas*. Las primeras surgen de construcciones puramente matemáticas y las segundas de la consideración del lenguaje(en relación con el idioma) que empleamos para hablar de matemáticas y lógica. Entre las paradojas lingüísticas o semánticas mostraremos tres ejemplos de paradojas:

3.2.1. Paradoja del Abogado

Un abogado concertó con sus alumnos que deberían pagarle por sus enseñanzas, si y sólo si, ganaban su primer caso ante los tribunales; y no debían abonar nada si lo perdían. Uno de sus discípulos que había terminado sus estudios, resolvió evitar aceptar ningún caso para de esta forma eludir el pago. El abogado lo demandó para que le pagara.

¿Pagará o no el alumno?

Si el alumno paga es porque perdió el caso y por lo tanto no ha ganado su primer caso lo cual lo exonera del pago. Si el alumno no paga es porque el resultado lo favoreció y por lo tanto ganó su primer caso, lo cual lo obliga a pagar.

3.2.2. Paradoja de los Alcaldes

Supongamos que en un país se crea una ciudad que es habitada solo por alcaldes de municipios del país, mediante ley aprobada por el congreso se establece que todo alcalde sólo puede vivir en su propia ciudad o en la ciudad de los alcaldes. Como todo municipio debe tener un alcalde,

[5] Nació el 22 de febrero de 1903 y murió el 19 de enero de 1930; fue un matemático y filósofo inglés cuyos estudios y actividad docente tuvieron lugar en la Universidad de Cambridge. Hizo importantes contribuciones teóricas a la matemática, la estadística y la economía. Sus preocupaciones intelectuales principales eran, sin embargo, de orden filosófico. En este sentido, buscó continuar el programa logicista de Russell y Whitehead tal como fue planteado en los Principia Matemática.

la pregunta es:

¿En dónde vive el alcalde de la ciudad de los alcaldes?.

Hay dos posibilidades:

1. Que el alcalde viva en su propia ciudad, en este caso vivirá en la ciudad de los alcaldes, pero esto implica que el alcalde no vive en su propia ciudad.

2. Que el alcalde no viva en su propia ciudad, en este caso vivirá en la ciudad de los alcaldes que es precisamente su propia ciudad.

Como podemos ver ambas soluciones nos conducen a contradicciones.

3.2.3. Paradoja del Barbero

A partir del llamado de atención hecho por Bertran Russell sobre la antinomia presentada en cuanto a la definición de conjunto dada por Cantor, fueron retomadas antiguas paradojas, como la paradoja del barbero, su argumento es el siguiente:

El barbero de un pueblo, presumiendo de no tener competencia se anuncia diciendo que el no afeita a aquellos que se afeitan a si mismos, pero sí afeita a todos aquellos que no se afeiten a si mismos.

¿Quién afeita al barbero?

- ♦ Si se afeita a sí mismo entonces por la primera parte de su afirmación, no debería afeitarse a sí mismo

- ♦ Pero si no se afeita a sí mismo, entonces por la segunda parte debería afeitarse a sí mismo.

3.3. Las Paradojas Lógicas o Matemáticas

Entre las paradojas lógicas o matemáticas, están las debidas a los denominados conjuntos paradójicos. Un conjunto paradójico, es aquel que el admitir su existencia conduce a paradojas.

3.3.1. Paradoja de Burali-Forti

"Conjunto de todos los números ordinales"

La paradoja de Burali-Forti, la cual ha sido considerada por mucho tiempo coma la primera de las paradojas de la teoría de conjuntos en haber sido descubierta, no fue creada ni por Burali-Forti ni por Cantor. Esta surgió gradualmente y empezó a tomar forma reconocible en los principios matemáticos de Russell de 1903. La predisposición de Russell por buscar paradojas fue un vestigio de las tradiciones filosóficas kantianas y hegelianas en las que fue educado. Entre 1904 y 1906, la forma de la paradoja maduró a través del trabajo de Jourdain y Poincare, quienes la consideraron mucho más fundamental de lo que la había considerado Russell. Burali-Forti y Cantor siempre pensaron que no existía tal paradoja.

La paradoja de Burali-Forti esta enunciada de la siguiente manera: Sea D el conjunto de todos los números ordinales. Si D es un conjunto bien ordenado; sea $A = ord(D)$. Considérese ahora $S(A)$ el conjunto de todos los números ordinales menores que A. Obsérvese que $S(A)$ consiste en todos los elementos de D que son anteriores a A, $S(A)$ es una sección inicial de D. Luego, $A = ord(S(A))$; por tanto, $ord(s(a)) = A = ord(D)$. Por consiguiente D es isomorfo a una de sus secciones iniciales. Así pues el concepto de conjunto de todos los números ordinales lleva a una contradicción.

3.3.2. Paradoja de Cantor

"El conjunto de todos los conjuntos"

Otro ejemplo de un conjunto paradójico es la denominada paradoja de Cantor. En 1899, en una carta que envió Cantor a Dedekind, observa que no puede hablarse del "conjunto de todos los conjuntos", ya que si Ω fuese este conjunto entonces el conjunto $\wp(\Omega)$ de todos los subconjuntos de Ω sería un elemento de Ω, es decir:

$\wp(\Omega) \in \Omega$

y

$\wp(\Omega)$ es un subconjunto de Ω

entonces existe m tal que $2^m \leqslant m$, lo cual contradice el teorema de Cantor(la cardinalidad de Ω debe ser menor a la cardinalidad del conjunto potencia), es decir, que $m < 2^m$.

Otra forma de enunciar la paradoja de Cantor es de la siguiente manera:

Sea Ω el conjunto de todos los conjuntos. Entonces todo subconjunto de Ω es así mismo un elemento de Ω ; luego, el conjunto potencia de Ω es un subconjunto de Ω; pero esto implica que la cardinalidad del conjunto potencia es menor o igual a la cardinalidad de Ω. Así pues, el concepto de conjunto de todos los conjuntos lleva a una contradicción.

3.3.3. Paradoja de Russell

Analizaremos la paradoja de Russell motivada por la definición de conjunto presentada por Cantor. Este desarrolló la teoría de conjuntos con base en la siguiente definición de 1895:

"SE ENTIENDE POR CONJUNTO LA AGRUPACIÓN, EN UN TODO, DE OBJETOS BIEN DIFERENCIADOS DE NUESTRA PERCEPCIÓN O DE NUESTRO PENSAMIENTO".

Esta noción tan amplia de conjunto lleva a paradojas, como lo demostró el lógico inglés Bertrand Russell a principios del siglo XX. La definición Cantoriana permite concebir conjuntos que sean elementos de sí mismos: por ejemplo, el conjunto de todas las ideas abstractas es una idea abstracta.

Russell preguntaba (en carta escrita a Frege en 1902), si el conjunto de los conjuntos que no forman parte de sí mismos (es decir, aquel conjunto que contiene a todos aquellos conjuntos que no están incluidos en sí mismos) forma parte de sí mismo. La paradoja consiste en que si no forma parte de sí mismo, pertenece al tipo de conjuntos que no forman parte de sí mismo y por lo tanto forma parte de sí mismo. Es decir, formará parte de sí mismo sólo si no forma parte de sí mismo.

Si llamamos P al "conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros". Es decir:

$P = \{x : x \notin x\}$

$P = \{x : x \notin x\}$ se puede representar por:

$\forall x, x \in P \Longleftrightarrow x \notin x$

es decir "Cada conjunto es elemento de P si y sólo si no es elemento de sí mismo".

Ahora, en vista de que P es un conjunto, tenemos:

$P \in P \Longleftrightarrow P \notin P$

Es decir que P es un elemento de P si y sólo si P no es un elemento de P, lo cual es una contradicción.
Esta paradoja presentada por Russell, convertía en contradictoria las bases mismas de la obra científica de Frege sobre los fundamentos de la aritmética. A proposito, éste escribió una nota a pie de página al final del segundo volumen que comenzaba diciendo:

"Dificilmente puede encontrarse un científico con algo más indeseable que notar que ceden los fundamentos de una obra que acaba de terminar. En esa situación me encuentro al recibir una carta del señor Bertrand Russell cuando el trabajo estaba casi en imprenta"

En 1908, en su trabajo sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos, el matemático alemán Ernest Zermelo señala que la paradoja de Russell muestra que no es admisible asignarle a cualquier propiedad lógicamente bien definida un conjunto como su extensión. Por lo tanto la definición original de Cantor debe restringirse, y como esta definición no ha podido ser reemplazada por otra que sea igualmente simple y que no de lugar a paradojas, Zermelo concluye que:

Bajo estas circunstancias no nos queda en este punto más que proceder en la dirección opuesta y, partiendo del desarrollo histórico de la teoría de conjuntos, buscar los principios requeridos para fundamentar esta disciplina matemática. Para resolver este problema debemos, por un lado, restringir estos principios suficientemente para excluir contradicciones y, por el otro, *elegirlos suficientemente amplios para retener todo lo de valor que tenga la teoría.*

En otras palabras, para eliminar la paradoja, Zermelo propone considerar como conjuntos sólo aquellos objetos que satisfagan las condiciones impuestas por ciertos axiomas.

La causa de muchas de estas paradojas, como señalaban Russell y Whitehead, radica en la definición de un objeto en términos de una clase que contiene como elemento al objeto que se está definiendo. Las paradojas siempre han estado presentes en su quehacer, ellas se han convertido en un verdadero reto, fuente de inspiración y creación, que le ha permitido adquirir no sólo un alto grado de desarrollo, sino también la ha obligado a cambiar sus conceptos de rigor y precisión.

CAPÍTULO 4

TEORÍA AXIOMÁTICA DE CONJUNTOS

En este capítulo presentaremos la teoría axiomática construida por Zermelo[6], la cual se centra en la tarea de fundamentar la Teoría de Conjuntos y opta por la vía axiomática con el fin de eliminar las paradojas y superar los riesgos evidenciados en el trabajo de Cantor. En palabras del propio Zermelo:

"*A partir de la Teoría de Conjuntos hay que buscar los principios que permitan fundamentar esta disciplina; por ello, por una parte hay que restringir estos principios para evitar contradicciones y, por otra, hay que considerarlos lo suficientemente amplio con el fin de conservar lo más valioso de la Teoría.*"

En 1908 Zermelo proporciona la primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos (como aseguraba en su trabajo: toda la Teoría creada por Cantor y Dedekind se reduce a unas pocas definiciones y a siete principios o axiomas). Cabe mencionar que el método axiomático-deductivo fue utilizado por primera vez por los griegos en el siglo V a.C. Recordemos, asímismo, que Peano y Dedekind habían proporcionado axiomatizaciones de la Aritmética y Hilbert, en 1899, proporcionó una axiomatización de la Geometría Euclídea.

Ese mismo año, Zermelo presentó una nueva prueba del Teorema del Buen Orden en la que clarificó el concepto de clase, y aprovechó la ocasión para poner de manifiesto, con ejemplos concretos, que muchos matemáticos que habían criticado con dureza el axioma de elección, habían hecho uso del mismo, quizás al considerar intuitivamente evidente el proceso de selección que proporciona una función de elección sobre un conjunto arbitrario.

En la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo, los conceptos de conjunto y pertenencia eran elementos primitivos o indefinibles en la teoría. Bajo esta perspectiva, todos los objetos de la teoría son conjuntos y, por tanto, dados x e y, la cuestión acerca de si la relación $x \in y$ es verdadera o no, sólo tiene sentido plantearla en el caso en que x e y sean conjuntos.

[6]Ernst Zermelo, Nació en Berlín el 27 de julio de 1871 y murió el 21 de mayo de 1953; fue un lógico y matemático alemán. Sus trabajos matemáticos se desarrollaron sobre todo en el ámbito de la teoría de conjuntos. Su más importantes contribuciones fue la axiomatización de la teoría de conjuntos (la primera de todas las que se han propuesto a lo largo de la historia), para la cual propuso siete axiomas.

En dicho sistema axiomático se trataba de construir conjuntos a partir de otros más simples, tales como el conjunto vacío o el conjunto de los números naturales, a través de unas operaciones bien formadas, de tal manera que se evitara la formación de colecciones "demasiado grandes" que pudieran dar lugar a paradojas.

En 1922, Fraenkel[7] advierte que hay algunos resultados interesantes de la teoría Cantoriana que no se obtienen a partir de la axiomática de Zermelo (por ejemplo, la existencia de conjuntos tales como $\{\omega + n : n \in \omega\}$). Como alternativa para resolver esta dificultad, Fraenkel formula con más precisión el esquema de axiomas de separación de Zermelo y propone añadir un nuevo (el de reemplazamiento).

4.1. Axiomas de la teoría Zermelo-Fraenkel

La axiomatización conocida como Z está constituida por los axiomas $A1-A7$ que presentamos en seguida y se debe a Ernst Zermelo en 1908. Es importante precisar que Zermelo incluyó el axioma de Elección ($A10$) en su formulación original (en la versión de un conjunto de elección), ya que su objetivo era aclarar los supuestos de su demostración del Teorema del Buen Orden: "Para todo conjunto existe un buen orden", que es uno de los muchos equivalentes del Axioma de Elección. Sin embargo, actualmente es algo aceptado que ese axioma se considera aparte de Z y de ZF.

Abraham Fraenkel propuso en 1922 el esquema de Reemplazo ($A8$) y Dimitry Mirimanoff propuso en 1917 el axioma de Buena Fundación ($A9$). La axiomatización conocida actualmente como ZF (Zermelo-Fraenkel) está constituida por los axiomas $A1 - A9$ y fue presentada en su formulación actual por Van Neuman. A la axiomática ZF junto con el axioma de Elección ($A10$), se le conoce como como ZFE (por Axioma de Elección).

4.1.1. A1. Axioma de Extensionalidad

"Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces X es igual a Y".

Dicho de otro modo, si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales. Este axioma nos dice que lo que caracteriza a un conjunto son sus elementos.

$$(\forall X)(\forall Y)((\forall z)z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$$

[7] Adolf Fraenkel (Munich, 1891-Jerusalén, 1965) lógico y matemático israelí de origen alemán. Los primeros trabajos de Fraenkel fueron sobre la teoría de anillos. Sin embargo, es más conocido por sus trabajos en teoría axiomática de conjuntos, publicando la mayor parte de sus trabajos sobre el tema en 1919. Intentó en dos ocasiones, en 1922 y 1925, axiomatizar la teoría de conjuntos, eliminando las paradojas y mejorando el sistema axiomático de Zermelo y creando los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), y demostrando formalmente la independencia del axioma de elección (ZFC).

Definición: Decimos que X es subconjunto de Y, en símbolos, $X \subseteq Y$, si y solo si todo elemento de X es un elemento de Y. O sea, $X \subseteq Y \longleftrightarrow \forall x(x \in X \to x \in Y)$.

Con esta definición $A1$ puede escribirse más abreviadamente como:

$$(\forall X)(\forall Y)(X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \to X = Y).$$

4.1.2. A2. Axioma del conjunto vacío.

"Existe un conjunto que no contiene ningún elemento".

$$(\exists X)(\forall x\ x \notin X)$$

Observemos que, en particular, este axioma garantiza que existe al menos un conjunto.

Lema: Existe un único conjunto que no contiene ningún elemento.

Demostración:

Supongamos que existen dos conjuntos distintos a y b ambos sin elementos.

Por $A1$ $\exists x((x \in a \wedge x \notin b) \vee (x \in b \wedge x \notin a))$, lo cual es una contradicción. Luego hay un único conjunto vacío.

Definición: El (único) conjunto que no tiene elementos se llama el conjunto vacío y se le denota $\emptyset$.

4.1.3. A3. Axioma de separación.

"Si $\varphi(x)$ es una aplicación, X es un conjunto no vacio, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son aquellos elementos de X que verifican $\varphi(x)$".

$$(\forall X)(\exists Y)\ (\forall z(z \in Y \longleftrightarrow (z \in X \wedge \varphi(x)))$$

Este axioma nos dice que para cualquier propiedad (expresada por $\varphi(x)$) y cualquier conjunto A existe el subconjunto de A formado por los elementos que verifican esa propiedad.

Definición 1.3: Si $\varphi(x)$ es una aplicación y A un conjunto, el conjunto cuya existencia está garantizada por A3 se denotará con el símbolo

$$\{x \in A : \varphi(x)\}$$

y se lee "el conjunto de los elementos de A tales que $\varphi(x)$".

Recordemos que la paradoja de Russell se produce al tratar de construir el conjunto de todos los conjuntos que verifican una propiedad cualquiera $\varphi(x)$. Este axioma limita nuestra capacidad de formar conjuntos de objetos que verifican una cierta propiedad, sólo podemos referirnos a aquellos elementos que perteneciendo a un cierto conjunto dado, verifican la propiedad en cuestión. Veamos que esta restricción evita que se produzca la paradoja.

Para ello tratemos de formar la clase de Russell. Dado un conjunto A , el axioma de separación nos permite formar el conjunto

$$R = \{x \in A : x \notin x\}$$

En este caso tenemos que si $R \in R$, entonces

$$R \in A \text{ y } R \notin R$$

lo cual es una contradicción, luego $R \notin R$, lo que, a diferencia de antes, no es contradictorio, sólo implica que $R \notin A$.

Teorema 1.2. *No existe el conjunto de todos los conjuntos.*

Demostración. Supongamos que sí existe y llamemoslo V . Entonces en virtud de $A3$ podemos construir el conjunto de Russell $R = \{x \in V : x \notin x\}$, la cual nos conduce a una contradicción.

4.1.4. A4. Axioma del par.

"Dados dos conjuntos X e Y, existe un conjunto Z cuyos únicos elementos son X e Y".

$$(\forall X)(\forall Y)(\exists Z)\ (\forall x(x \in Z \longleftrightarrow (x = X \vee x = Y)))$$

Resulta claro por $A1$ que este conjunto es único. Lo denotamos

$$\{X, Y\}$$

y lo llamamos el *par no-ordenado* X, Y.

El axioma $A1$ también garantiza la existencia del conjunto cuyo único elemento es el conjunto X.

$$\{X, X\} = \{X\}$$

el que a menudo recibe el nombre de *singleton* X.

4.1.5. A5. Axioma de la Unión.

"Si X es un conjunto, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son los elementos de los elementos de X".

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z(z \in Y \longleftrightarrow \exists u(z \in u \wedge u \in X)))$$

Por $A1$, este conjunto es único, se llama la *unión* de X y se le denota $\bigcup X$; es decir:

$$\bigcup X = \{z | \exists w(w \in x \wedge z \in w)\}$$

Teorema: Dados dos conjuntos a y b, existe un único conjunto, cuyos elementos son, precisamente, los elementos que pertenecen a a o a b. Tal conjunto se denomina la *unión* de a con b y lo notamos con a $\cup b$.

Demostración:

Si a y b son dos conjuntos dados, entonces por el axioma del Par se tiene que existe el conjunto $X = \{a, b\}$ y, además por el axioma de la unión podemos asegurar que existe $\bigcup X$. Pero,

$$\begin{aligned}
\bigcup X \quad &= \{z | \exists w((w = a \vee w = b) \wedge z \in w)\} \\
&= \{z | \exists w((w = a \wedge z \in w) \vee (w = b \wedge z \in w)\} \\
&= \{z | (z \in a \vee z \in b)\} \\
&= a \cup b
\end{aligned}$$

Presentamos a continuación el concepto de intersección de un conjunto.

Teorema: Si X es un conjunto no vacío, entonces existe un único conjunto cuyos elementos son los conjuntos que pertenecen a todos los elementos de X. A tal conjunto lo denominamos la intersección de x y lo notamos con $\bigcap X$, es decir,

$$\bigcap X = \{z | \forall w(w \in x \to z \in w)\}$$

Demostración:

Sean x un conjunto no vacío y $y \in x$, cualquiera, fijo. Entonces, por el axioma de separación podemos formar el conjunto:

$$\{z|z \in y \wedge \forall w(w \in x \Longrightarrow z \in w)\}$$

Este conjunto es precisamente $\bigcap X$.

Teorema. Dados los conjuntos a y b, entonces existe un único conjunto cuyos elementos son precisamente los conjuntos que pertenecen tanto a a como a b. A este conjunto lo llamamos la ***intersección*** de a con b y lo notamos con $a \cap b$.

Demostración:

El axioma de pares garantiza la existencia del conjunto $\{a, b\}$ y por el teorema anterior tenemos el conjunto $a \cap b$. Por lo tanto,

$$a \cap b = \{z|(z \in a \wedge z \in b)\}$$

Dos conjuntos que no tienen elementos comunes se denominan disyuntos. Esto es, los conjuntos x y y son disyuntos si y solo si:

$$x \cap y = \emptyset$$

4.1.6. A6. Axioma de las partes.

"Si X es un conjunto, entonces existe el conjunto de todos los subconjuntos de X".

Esto es

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z(z \in Y \longleftrightarrow z \subseteq X))$$

O equivalentemente

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall z(z \in Y \longleftrightarrow \forall u(u \in z \to u \in X)))$$

Teorema: Si x es un conjunto, entonces existe un único conjunto y cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de x. Este conjunto se nota con $\wp(x)$ y se denomina el ***conjunto potencia*** de x. Es decir,

$$\wp(x) = \{z | z \subseteq x\}$$

La existencia de este conjunto está garantizada por el axioma del conjunto potencia y la unicidad se asegura como siempre con el axioma de extensionalidad.

4.1.7. A7. Axioma del conjunto infinito

"Existe un conjunto que tiene infinitos elementos".

$$\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall y(y \in X \rightarrow y \cup \{y\} \in X))$$

Es claro que el conjunto así formado es intuitivamente infinito, basta verificar que contiene a los siguientes conjuntos:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

4.1.8. A8. Axioma de reemplazo o de sustitución.

"Si $\varphi(x, y)$ es una función proposicional y A es un conjunto, entonces existe el conjunto de los elementos b que verifican $\varphi(a, b)$ para algún $a \in A$".

$$(\forall X)(\exists Y)(\forall y(y \in Y \leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge \varphi(x, y)))).$$

Si tenemos un conjunto A y una función f cuyo dominio es A, $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$, es también un conjunto. El problema se suscita cuando vemos que en nuestra teoría la "función"

$$x \longmapsto p(x)$$

no es, como veremos formalmente más adelante, un objeto de nuestra teoría, es decir, no es un conjunto, sino que corresponde a lo que llamamos una clase propia. Como ya hemos dicho antes, nuestro lenguaje nos permite referirnos a dichos objetos mediante la fórmula que los define, lo que para los efectos prácticos es casi lo mismo. Así, $\varphi(x, y)$ no es una función dentro de nuestra teoría sino más bien una regla que nos permite asociar a cada elemento de un conjunto A un único elemento.

4.1.9. A9. Axioma de regularidad.

"Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento."

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

Este axioma impide la existencia de un conjunto a tal que $a \in a$ o incluso $a \in b \in a$, o $a \in c \in b \in a$, etc. Este axioma dice que $\in$, considerada como una relación entre conjuntos,verifica una condición análoga a la del orden de los números naturales, ésta es, que todo conjunto no vacío tiene un menor elemento.

4.1.10. A10. Axioma de Elección

A lo largo del siglo XIX, el Axioma de Elección era utilizado implícitamente por la mayoría de los matemáticos. Posiblemente, no hicieron especial cuidado en el mismo por considerar "intuitivamente evidente" el proceso que permite seleccionar un elemento de cada subconjunto no vacío de un conjunto dado.

Las primeras referencias explícitas al Axioma de Elección las proporcionan G. Peano en 1890. No obstante, sería E. Zermelo quien, por primera vez, formulara explícitamente dicho axioma debido a que necesitaba ese resultado para probar su teorema del buen orden (todo conjunto admite, al menos, una buena ordenación) y no lo consideraba "matemáticamente evidente".

En 1938, K. Godel probó que el Axioma de Elección era compatible con los restantes axiomas de la Teoría de Conjuntos (es decir, que no daba lugar a contradicciones cuando se le añadía a la Teoría). En 1963, P. Cohen demostró que el Axioma de Elección era independiente de los restantes axiomas de la Teoría (es decir, que no se podía deducir a partir de los mismos).

"Para cada conjunto x, existe una función de elección sobre x."

$\forall x \exists f(f \text{ una aplicación} \wedge dom(f) = x \wedge \forall y(y \in x \wedge y \neq \emptyset \to f(y) \in y))$

Definición: Sea x un conjunto. Una *función de elección*, f , sobre x es una aplicación tal que $dom(f) = x \wedge \forall y \in x(y \neq \emptyset \to f(y) \in y))$.

Una forma de presentar el Axioma de Elección es la siguiente:

Sea α una colección cualquiera de conjuntos $\{A, B, C, ...\}$, ninguno de los cuales es vacío, existe entonces un conjunto X formado precisamente por un elemento tomado de cada uno de los conjuntos $A, B, ...$, de que consta la colección α.

Por ejemplo, si la colección α consta de dos conjuntos, el conjunto de todos los triángulos y el conjunto de todos los cuadrados, está claro que α verifica el Axioma de Elección. No tenemos más que elegir un triangulo particular y un cuadrado particular, y formar con estos dos elementos el conjunto X.

La dificultad que suscita este Axioma de Elección proviene de la amplitud y libertad que se le concede a α, puede ser "cualquier" colección de conjuntos no vacíos. Como hemos visto, hay un sinfín de cadenas de conjuntos infinitos siempre más grandes. Con una colección de conjuntos infinitamente grande no hay forma de elegir real y verdaderamente uno por uno en cada uno de los conjuntos miembros de la colección.

El Axioma de Elección ha desempeñado un papel muy especial en la teoría de conjuntos. Fueron muchos los matemáticos que consideraron peligroso su uso, que se debía evitar utilizarlo, siempre que fuera posible. Tal forma de teoría axiomática de conjuntos, en la cual *no* se supone que el Axioma de Elección sea verdadero ni falso, sería la axiomática que prácticamente todos los matemáticos estarían dispuestos a confiar. Algunos matemáticos se refieren a tal sistema de axiomas con la locución "teoría restringida" de conjuntos. La "*teoría estándar*",a la basada en el conjunto completo de axiomas propuestos por Zermelo y Fraenkel, esto es, la teoría restringida mas el Axioma de Elección.

Toda esta materia quedó profundamente iluminada como ya habíamos mencionado por Kurt Godel en 1938. Este es conocido sobre todo por sus grandes teoremas de "incompletitud" de 1930-1931. En 1938, Godel demostró el siguiente resultado de importancia fundamental: Si la teoría restringida es consistente, también lo es la teoría estándar. Dicho de otro modo, el Axioma de Elección no es más peligroso que los restantes axiomas; si se pudiera hallar una contradicción en la teoría de conjuntos estándar, es que ha de existir previamente una contradicción oculta en la teoría restringida.

Esta lista de axiomas conforman la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Estos axiomas son suficientes para desarrollar gran parte de la matemática. Algunos de estos axiomas son independientes, es decir, se pueden obtener unos de otros; por ejemplo, el axioma de pares puede obtenerse a partir de los axiomas de reemplazo y del conjunto de partes. Por su parte el axioma del conjunto vacío puede obtenerse a partir del axioma de especificación y del axioma del conjunto infinito.

CAPÍTULO 5

TEORÍA DE CONJUNTOS: FUNDAMENTACIÓN DE LA MATEMÁTICA MODERNA

En este capítulo presentaremos algunos antecedentes históricos de la denominada Matemática Moderna, para luego ver como la teoría de conjuntos creada por Cantor sirvió de fundamento para su formación.

Las matemáticas modernas que tuvieron origen a mediados del siglo XIX y se consolidaron a mediados del siglo XX; presentan como característica especial el uso sofisticado de propiedades estructurales y cualitativas introducidas en primera instancia por matematicos como: Gauss, Dedekind, Dirichlet, Galois, Riemann, Cantor, Hilbert, entre otros.

El origen de la matemática moderna es difícil de situar con precisión en el tiempo, quizá en los trabajos de Gauss (1777-1855) ya aparece la marca del método estructural. Siguiendo una linea cronológica luego situaríamos a Galois (1811-1832) inmediatamente después de Gauss, pues sus contribuciones a la resolución de las ecuaciones fueron fundamentales. Galois se dio cuenta del alcance del concepto de grupo y del nuevo horizonte de aplicabilidad que se abría con él. Muy a menudo se hace de Galois, el primer algebrista moderno, pues es el primero que ha conocido la potencia organizadora de los conceptos algebraicos generales, obtenidos por abstracción a partir de situaciones a menudo familiares.

Después de Galois, el gran nombre del álgebra moderna del siglo XIX es, cronológicamente, sin ninguna duda Dedekind (1831-1916). Fue de los últimos alumnos de Gauss. Sus primeros trabajos estuvieron dedicados al Análisis, y de hecho, fue la preparación de un curso de análisis lo que motivó a su famosa reelaboración de la teoría de los irracionales en torno a la noción de cortadura (la construcción de Dedekind sabemos que reposa sobre la observación de que todo número real “corta” el conjunto de los números racionales en dos subconjuntos disjuntos). El pensamiento de Dedekind y su aproximación muy algebraica, tanto de los problemas aritméticos como de los problemas de fundamentos, fueron decisivos en la constitución de las matemáticas modernas.

Pero lo esencial de la contribución de Dedekind al nacimiento de las matemáticas modernas está en sus resultados sobre teoría algebraica de números (aunque las cuestiones de fundamentos sabemos que fueron también de primera magnitud). La formulación de Dedekind le lleva a una teoría conjuntista; el propio Dedekind señaló la estrecha analogía entre su definición de los ideales y su definición de los números reales por las cortaduras. De hecho la teoría de los ideales que data de 1871 se puede considerar como la primera aproximación al punto de vista conjuntista.

Mas adelante cuando la noción de conjunto comenzó a resultar útil en matemática, muchos acudieron a esas conocidas ideas de la lógica para clarificarla. Después de todo, siempre se había considerado que la matemática tiene una relación especial con el pensamiento puro, y la lógica se concebía como ciencia de las leyes del pensamiento. El propio Leibniz había defendido que las verdades matemáticas no eran sino verdades de razón, que se pueden reducir a principios lógicos elementales a través de simples definiciones. Esta perspectiva pareció quedar defendida cuando la noción (lógica, se pensaba entonces) de conjunto pasó a ocupar un papel fundamental en matemática.

Desde Riemann el cual propuso la noción ingenua de conjunto, bajo el nombre de variedad, cuando sugirió que esa noción es el concepto clave en que se basa la matemática; llegamos a Cantor, quien designó la teoría de conjuntos, de 1878 a 1892, como teoría de variedades. Con lo que llevamos dicho, no parece casual que emplease el mismo término que Riemann. Esta idea se confirma al considerar el primer artículo en que Cantor lo usó: se trata del trabajo en el que demuestra que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son equipotentes, es decir, tienen la misma cardinalidad.

Cantor presenta la cuestión como motivo para dudar de la definición de dimensión que había dado Riemann en su lección sobre geometría. La teoría de Cantor trata de elaborar y refinar las ideas seminales de Riemann, considerando los distintos conjuntos que aparecen en matemática. Para ello introduce ideas muy novedosas, como la de conjunto derivado, la de cardinalidad de un conjunto infinito, o la de número transfinito. Pero entre sus objetivos básicos sigue estando, como en Riemann, analizar conceptualmente las nociones claves de continuo y dimensión. No es casualidad que el problema clave que acabará centrando la atención de Cantor fuera el problema del continuo.

Común a los esfuerzos de Riemann, Dedekind y Cantor es no sólo el empleo de la noción de conjunto y la noción abstracta de función, sino también una cierta orientación metodológica: la preferencia por un tratamiento abstracto de las teorías matemáticas. Se ha dicho que esa tendencia surgió con Gauss, Jacobi y Dirichlet (a los que deberíamos sumar a Cauchy), ya que iniciaron un estilo nuevo de argumentación en matemática. Evitando emplear largos y complicados cálculos, pusieron en práctica una brillante idea: la de abarcar toda un área de verdades matemáticas mediante una sola noción principal, y presentar los resultados clave directamente a partir de esa noción, de manera que uno puede captar la verdadera naturaleza de la teoría, la maquinaria esencial que pone todo en marcha. De todas formas, el modo en que Riemann puso en práctica ese principio fue mucho más radical, dando un ejemplo que continuaron Dedekind y Cantor.

Polémicas y dificultades aparte, el enfoque conjuntista continuó dando muy buenos frutos en las distintas ramas de la matemática. Ya la noción Cantoriana de conjunto derivado había sido utilizada por varios analistas. Las nuevas nociones sobre topología de conjuntos de puntos fueron empleadas por Poincaré a mediados de los años 1880, en sus famosos trabajos sobre funciones automorfas, y sirvieron para la elaboración gradual de la teoría de la medida. Más aún, en 1884 Mittag-Leffer empleó nociones Cantorianas, incluyendo los números transfinitos, para demostrar su teorema sobre representación de funciones.

Para entonces, la teoría de conjuntos de puntos recibía el espaldarazo definitivo: Peano, Jordan y Borel la empleaban en sus textos de análisis, mientras dos matemáticos de primera fila, Hadamard y Hurwitz, la ensalzaban en sus conferencias estelares del I Congreso Internacional (1897). Y también en el campo de la geometría se hacían sentir los nuevos tiempos: las ideas de Klein, publicado de nuevo en 1893, y las axiomatizaciones propuestas por miembros de la escuela de Peano y por Hilbert, se basaban todas ellas en una aproximación conjuntista. Los dos primeros problemas de Hilbert en su famosa conferencia guardaban relación con la teoría de conjuntos: el primero era el problema del continuo, a propósito del cual Hilbert recordaba la necesidad de demostrar el teorema de buen orden; y el segundo era la consistencia de los axiomas de los números reales, es decir, demostrar que uno puede postular sin contradicción la existencia del conjunto $\mathbb{R}$ (Hilbert indicaba que se debían dar demostraciones similares para los distintos cardinales transfinitos).

Hay que resaltar que la crisis fundacional no supuso en modo alguno una crisis de la matemática. Más bien al contrario, sucedió durante un periodo de expansión sin precedentes de teorías, métodos y resultados. Durante todo ese tiempo, Hilbert desempeñó un papel central como líder del enfoque conjuntista abstracto, llegando a comprometer en la empresa toda su autoridad como investigador y líder de la comunidad matemática. Afortunadamente para él, ese enfoque siguió apuntándose triunfos como los del álgebra estructural (que tuvo una de sus focos en el Gottingen de Hilbert) y los de la topología. La noción de estructura surgió a lomos de todos esos avances en lógica y matemática pura, acabando por ser formulada por autores como Birkhoff, Tarski y los Bourbaki[8] en los años 30. Con Bourbaki, la nueva sistematización de la matemática recibió una forma muy acabada.

Luego Cantor se convierte en representante simbólico de la matemática abstracta. Esto explica, en parte, cómo surgió la costumbre de asociar la noción de conjunto exclusivamente con Cantor. Estando en juego una nueva orientación científica, que se enfrentaba a poderosas críticas en una etapa de conflicto, no era el momento de entrar en disquisiciones sobre las complejidades de la historia. Mucho más útil era recurrir a un símbolo poderoso, un mito si queremos.

Siendo importante el nombre de Dedekind, la figura que destaca más al menos de forma oficial entre los fundadores de la matemática moderna es Hilbert. Sus ideas han modificado el curso y la naturaleza misma de la epistemología matemática Durante el Segundo congreso internacional de matemáticos, en París, en 1900, Hilbert enuncia su famosa lista de 23 problemas abiertos, dándoles el título que guiaría los esfuerzos de los matemáticos durante todo el siglo XX. Pero además, el hecho de que se utilizaran los métodos conjuntistas en teorías matemáticas muy dispares le confirió a la matemática una unidad de la que carecía hasta finales del siglo XIX y que adquirió con el uso progresivo de la teoría de conjuntos.

Hilbert fue el auténtico creador de la escuela formalista. Trató de defender las matemáticas y ponerlas a salvo de la crítica de matemáticos dando una demostración matemática de la consistencia de las matemáticas clásicas. Además se propuso hacerlo con argumentos de tipo

[8]Grupo de matemáticos de diversas nacionalidades, principalmente francesa. El grupo nació en la década de 1930 por iniciativa de una docena de matemáticos, interesados en ofrecer una visión moderna de la matemática que, al propio tiempo, enfatizara el componente axiomático de la misma.

combinatorio y puramente finitista; o sea, que el programa o proyecto de Hilbert consistía en resolver el problema de la consistencia; es decir, demostrar que la matemática no era contradictoria.

Este programa de Hilbert constaba de tres pasos:

- Introducir un lenguaje formal y reglas formales de inferencia suficientes, de modo que cada demostración correcta de un teorema clásico pudiera ser representada por una derivación formal a partir de los axiomas. Esta tarea estaba realizada ya, en gran medida, por los trabajos de Frege, Russell y Whitehead, Zermelo, etc.
- Desarrollar una teoría de las propiedades combinatorias de este lenguaje formal. Esta teoría fue denominada metamatemática o teoría de la demostración formal.
- Demostrar, mediante dicha teoría (mediante razonamientos puramente finitos), que de los sistemas axiomáticos de la matemática clásica no se puede deducir una contradicción. Pues bien, procediendo así, creía Hilbert que se darían a las matemáticas cimientos seguros; entendidos como garantía de consistencia.

El programa de Hilbert, tendrá en realidad una influencia enorme en el desarrollo de las matemáticas gracias sobre todo al ordenar en forma general y abstracta las secuencias deductivas y asociar los procesos deductivos de una región matemática a otra, pues se empezarán así a explorar sistemáticamente las nociones de generalización y de transferencia que serán cruciales para poder entender estructuralmente los ámbitos matemáticos. Las transformaciones y las regulaciones en esos procesos de control se conseguirán gracias a la emergencia de la lógica clásica de primer orden presentada en el periodo de tiempo de 1850 a 1925 por Boole, De Morgan, Peirce, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Lowenheim, Skolem, largo y lento proceso finalmente codificado con rigor por Hilbert y Ackermann en Grundzuge der theoretischen Logik, 1928) y gracias a la progresiva axiomatización de la teoría de conjuntos (1904-1922: Zermelo,Skolem, Fraenkel).

La nueva mirada propuesta por Hilbert y su escuela muestra cómo, por un lado, la matemática puede edificarse sobre la relación de pertenencia conjuntista y sobre axiomas apropiados, controlados por la lógica de primer orden, salvando así el paraíso Cantoriano, y, por otro lado, cómo las distintas regiones de la matemática deben compararse con respecto a su consistencia lógica relativa. Aunque Hilbert contaba en que existirá un suelo lo suficientemente firme para asegurar la consistencia absoluta del edificio, ciertas obstrucciones y singularizaciones ocurrirán posteriormente en la determinación de ese teorema de incompletitud de Godel.

Cabe destacar que dentro de estas matemáticas se acumulan una enorme cantidad de saberes que evolucionan y que conforman el cuerpo actual de las matemáticas, entre ellas se encuentran: la teoría de conjuntos y la lógica matemática, teorías analítica y algebraica de números, álgebras abstractas, geometría algebraica, funciones de variable compleja, medida e integración, topología general y algebraica, análisis funcional, variedades diferenciales, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, etc. Aunque una serie de notables teoremas matemáticos, han logrado demostrar que cualquier construcción matemática puede representarse dentro de una adecuada teoría de conjuntos (y que la enorme mayoría de las matemáticas puede representarse dentro de la teoría Zermelo-Fraenkel con lógica clásica de primer orden subyacente).

La riqueza de la matemática moderna radica, en buena medida, en la enorme diversidad de estructuras y modelos que en el último siglo y medio se han venido construyendo. Todo tipo de estructuras surcan permanentemente el panorama actual de las matemáticas, y un claro rasgo distintivo de estas consiste en tener que considerar simultáneamente múltiples estructuras en cualquier indicio de comprensión de un fenómeno matemático. El fenómeno requiere considerarse a menudo desde puntos de vista complementarios, donde se entrecruzan muy diversas herramientas, aritméticas, algebraicas, topológicas, geométricas. Una característica fundamental de las matemáticas modernas es su capacidad de recorrer una multiplicidad de estructuras aprovechando notables instrumentos que consiguen armonizar la diversidad.

Complementariamente con los conjuntos, las funciones constituyen los otros objetos fundamentales de la teoría; se constituyen en relatores de información que permiten elevar una red de comparabilidades de tamaño (cardinales) y orden (ordinales), y que dan lugar a un control analítico entre números extendidos (transfinitos). Los problemas asociados tienen que ver con las condiciones que permiten comparar (positivamente) un par de conjuntos dados (tamaño, orden), o, más generalmente, colecciones arbitrarias de conjuntos. Como en los casos de Galois y de Riemann, al encontrar Cantor obstrucciones de comparación, el problema diverge hacia encontrar condiciones que puedan asegurar la independencia de órdenes y tamaños, iniciándose así el estudio del control estructural del crecimiento y ordenamiento de los conjuntos. Las transformaciones biyectivas, con sus invariantes cardinales, y los isomorfismos, con sus invariantes ordinales, regulan la escala transfinita. Surgen así todo tipo de mediaciones en lo no finito, y la jerarquía de invariantes asociados explica de manera profunda la metafísica del infinito.

En realidad, algunos desarrollos posteriores a Hilbert (teoría de modelos, teoría de categorías) mostrarán que los objetos conjuntistas, vistos en forma descarnada y singular desde un intento de fundamentación absoluta (teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel), esconden complejas especificidades de regiones matemáticas plurales. La unidad de la matemática se obtendrá entonces, no por un reduccionismo imposible (y matemáticamente falso) a la teoría clásica de conjuntos, sino por formas universales de entrelazamiento relativo de lo plural. La fuerza aún viva del programa de Hilbert reside en contemplar esas relaciones correlativas, independientemente de que haya fallado el sostén absoluto.

Cabe resaltar que la teoría de conjuntos personificaba o encarnaba algunos de los rasgos más característicos de la moderna aproximación a las matemáticas que estaba asociada a los nombres de Riemann, Dedekind, Cantor y Hilbert. Estos rasgos se podían concretar en los siguientes:

- La aceptación de la noción “abstracta” de función propuesta por Dirichlet.
- Total aceptación de los conjuntos infinitos y los grandes infinitos.
- Confianza en los depurados métodos de demostración existenciales.
- Caracterización axiomática de los sistemas matemáticos(estructuras).

Luego Bourbaki propone, en definitiva, una organización piramidal de las matemáticas, dominada por la teoría de conjuntos y sus extensiones: álgebra y topología. No deja de ser curioso el hecho de que mencionando los conjuntos, el álgebra y la topología se cubren todas las estructuras madre (que los bourbakistas consideran fundamentales porque aparecen en todas las teorías); con lo cual nos viene a la memoria la magnífica cita de Weyl: En estos días el ángel de la topología y el demonio del álgebra abstracta luchan por el alma de cada disciplina individual de la matemática.

A continuación presentaremos una tabla cronológica con los sucesos mas relevantes dentro de la denominada matemática moderna.

Tabla Cronológica

1854	Riemann escribe sobre geometría, presentando la noción de variedad, y sobre series trigonométricas (noción de integral).
1858	Dedekind da clases sobre teoría de Galois en términos de grupos abstractos y cuerpos de números, y establece su definición de los reales mediante cortaduras.
1868	Se publican los dos trabajos de Riemann, inéditos antes, que inmediatamente generan actividad en ambos campos.
1871	Dedekind publica su teoría de ideales, en la que aparece la teoría de números algebraicos moderna, y las nociones de cuerpo, anillo, módulo, ideal, homomorfismo, isomorfismo.
1872	Se publican las definiciones de los reales propuestas por Weierstrass (desde 1863), Dedekind (desde 1858) y Cantor (desde 1870). En un artículo sobre representación de funciones discontinuas mediante series trigonométricas, Cantor establece condiciones muy amplias gracias a la noción de conjunto derivado, clave para su trabajo sobre conjuntos de puntos.
1874	Cantor publica su demostración de la no numerabilidad de $\mathbb{R}$, abriendo camino a la noción de cardinalidad que presentaría en 1878.
1882	Dedekind y Weber extienden la teoría de ideales a cuerpos de funciones algebraicas.
1883	Cantor introduce la noción de conjunto bien ordenado y los ordinales transfinitos; nace así la teoría de conjuntos Cantoriana. En esta época establece también resultados sobre conjuntos de puntos, incluyendo las nociones de conjunto perfecto, cerrado, aislado, denso en sí.
1884	Mittag-Leffer demuestra su teorema empleando ideas de Cantor. Poincaré las utiliza en su monumental obra sobre funciones automorfas. Varios matemáticos formulan la noción de contenido exterior de un conjunto, abordando sobre su base la teoría de integración.

1888	Dedekind presenta una teoría rigurosa de los naturales sobre la base de las nociones de conjunto y aplicación. Esta teoría guarda relación con la de Frege (1884) y con los conocidos axiomas de Peano (1889). A partir de ahora, se hace posible ver toda la matemática pura como el estudio de conjuntos con diversas estructuras.
1893	Se publica en forma accesible el Erlanger Programm de Klein, donde se presentan las geometrías como estudio de invariantes bajo grupos de transformaciones. Weber escribe sobre las nociones abstractas de grupo y cuerpo y su interrelación. En 1895, Weber difunde el enfoque conjuntista del álgebra en su célebre manual.
1897	Primer Congreso Internacional de Matemática: Hadamard y Hurwitz defienden la teoría de conjuntos en conexión con el análisis. Hilbert publica su célebre Zahlbericht sobre teoría de números algebraicos, donde emplea las nociones de cuerpo, anillo e ideal.
1898	Hilbert axiomatiza la geometría sobre una base conjuntista, siguiendo el ejemplo de la escuela de Peano; es el primer gran ejemplo para la corriente axiomatizadora moderna. Borel publica su manual de teoría de funciones, donde avanza hacia la moderna teoría de la medida, de carácter conjuntista.
1900	Segundo Congreso Internacional de Matemática: los dos primeros problemas de Hilbert tienen relación con la teoría de conjuntos. Se publica también su axiomatización de los reales.
1903	Russell y Frege dan a conocer las antinomias o contradicciones de la teoría ingenua o lógica de conjuntos, con lo que el tema adquiere notoriedad pública por primera vez. Por esta época, Lebesgue elabora su teoría de la integración, refinando la definición de medida de Borel.
1904	Zermelo publica su demostración del teorema de buen orden, basada en el axioma de elección. Se abre una fuerte polémica sobre la matemática abstracta y los postulados puramente existenciales, en la que intervienen autores de todas las naciones.
1908	Zermelo publica su axiomatización de la teoría de conjuntos, y Russell presenta también su teoría de tipos, más débil pero con similar intención (seguirán los célebres Principia Mathematica en 1910-13). Brouwer comienza su dura crítica a la matemática moderna y su elaboración del intuicionismo.
1910	Steinitz publica sus cruciales investigaciones sobre teoría abstracta de cuerpos, en las que utiliza el axioma de elección. En los años 1900 se ha trabajado también sobre espacios funcionales, etc.

1914	Hausdorff publica su manual de teoría de conjuntos y da la definición moderna, basada en la teoría de conjuntos, de espacio topológico (relacionada con trabajos previos de Brouwer y Weyl).
Años 1920	Se desarrollan la axiomatización de la teoría de conjuntos, la topología abstracta y el álgebra estructural. La mayoría de los matemáticos consideran la noción de conjunto como fundamento de la matemática, pero surgen también fuertes críticas (Brouwer, Weyl, Skolem); es la polémica sobre fundamentos.
Años 1930	La polémica se diluye, en parte gracias a los sorprendentes resultados de Godel (incompletitud e indemostrabilidad de la consistencia para la aritmética de Peano, consistencia relativa de la aritmética clásica respecto a la aritmética intuicionista formalizada). Se consolida la alternativa entre matemática constructiva y abstracta, pero la inmensa mayoría de los matemáticos se decantan por la segunda. Se consolida también la axiomatización moderna de la teoría de conjuntos, basada en la lógica de primer orden, y surge la concepción iterativa. Godel demuestra la consistencia relativa del axioma de elección y la hipótesis del continuo. Diversos autores avanzan hacia la formulación de la noción abstracta de estructura, que se convierte en la base de la sistematización ofrecida por Bourbaki a partir de 1938.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BANBINI, JOSÉ, *Historia de las ideas modernas en Matemática*. O.E.A. Serie de Matemática No 4.

[2] BOLZANO, BERNARD, *Las paradojas del infinito*, Traducción del alemán de Luis Felipe Segura, MATHEMA, Facultad de ciencias UNAM, México, 1991.

[3] BOURBAKI, NICOLÁS., *Elementos de Historia de las Matemáticas*. Alianza Editorial, Madrid, 1969.

[4] BUNCH, BRYAN H., *Matemática insólita, paradojas y paradojismos*, editorial reverté, s.a., Barcelona, 1987.

[5] CANTOR, GEORG., *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, 1955.

[6] CASTRO CHADID, IVÁN., PÉREZ ALCÁZAR, JESÚS H., *Un paseo finito por lo infinito: el infinito en Matemáticas*, Editorial Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá. 2007.

[7] FERREIRÓS, JOSÉ., *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1992.

[8] HALMOS, PAUL R., *Teoría intuitiva de los conjuntos*. Compañía editorial continental.

[9] SÁNCHEZ BOTERO, CLARA H., *El Surgimiento de la teoría de conjuntos*, XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, diciembre de 1996.

[10] SUPPES, PATRICK., *Teoría axiomática de conjuntos*. Editorial norma, Cali, 1968.

[11] WUSSING, HANS, *Lecciones de historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores, S.A.

[12] ZALAMEA, FERNANDO, *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Editorial Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, 2009.

[13] ZALAMEA, FERNANDO, *Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. La matemática de los fundamentos 1900-1930*, Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.