Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

La Circunferencia

Erika Jasbleidi Muñoz Zúñiga

Neiva, Huila
2014

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

La Circunferencia

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de licenciado en matemática

Erika Jasbleidy Muñoz Zúñiga
2009288627

Asesores:
Ricardo Cedeño Tovar (Q.E.P.D)
Telvia Rosa Castilla Peñate

Neiva, Huila
2014

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Diciembre de 2014

AGRADECIMIENTOS

Finalizando Esta etapa tan importante y crucial de nuestras vidas queremos expresar un profundo y sincero agradecimiento a todos aquellos que con su ayuda, apoyo y compresión nos alentaron, inspiraron y motivaron a lograr esta hermosa realidad. En primer lugar agradecemos a Dios por darnos el privilegio de crecer como profesional y aun más como persona. A nuestros padres, porque no existe forma alguna de retribuirles todos sus sacrificios, esfuerzos, confianza y amor brindado a lo largo de nuestra carrera, queremos que sientan que este triunfo alcanzado también es de ellos y que la fuerza que siempre nos impulso a alcanzarlos fue su gran apoyo, de igual manera manifestar nuestros mas sinceros agradecimientos a los docentes de la Universidad Surcolombiana por todos los conocimientos compartidos y enseñados para nuestro desarrollo personal y profesional, en especial al profesor Ricardo Cedeño Tovar (Q.E.P.D) y a la profesora Telvia Rosa Castilla Peñate por su especial disposición, comprensión y ayuda brindada.

A todos ellos infinitas gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La geometría analítica es una de las ramas de la matemática más antigua y de mucha importancia en varios campos de aplicación de la misma. Sin duda desde los inicios de sus estudios ha experimentado un crecimiento vertiginoso planteando nuevos retos para la enseñanza y el aprendizaje. Es admirable y de gran interés la formación de conceptos, la aplicación de herramientas a la informática, el desarrollo del pensamientos en sus múltiples facetas, la solución de problemas y muchos otros aspectos que han aportado al avance en el estudio de la circunferencia y la geometría analítica en general para el beneficio de la humanidad, aunque no siempre se ha utilizado de la manera correcta y mas adecuada.

A lo largo de la historia, desde los principios del estudio de la geometría, la circunferencia ha sido una de las secciones cónicas más importantes y representativas ya que de ella se desprende y se construyen las otras secciones cónicas como la parábola, la elipse y la hipérbola.

En este documento se recopilan definiciones, teoremas con sus respectivas demostraciones, corolarios, ejercicios resueltos y problemas propuestos basados en [1], [2], [3][4], [5], [6], [7] de la bibliografía. En la primera parte se presentarán las definiciones sobre la circunferencia y sus elementos, para dar las herramientas para el desarrollo del aprendizaje y entendimiento del capitulo; muchas de estas definiciones vendrán acompañadas de gráficas que servirán de ayuda e ilustración para lograr un verdadero aprendizaje y aprensión del conocimiento.

Posteriormente se enunciarán los teoremas y corolarios que darán paso al estudio de la ecuación general y canoníca de la circunferencia de donde se desprenden los conceptos de la familia de circunferencias, eje radical, tangente a una curva y tangente a una circunferencia, todo esto se lleva a la practica mediante una seria de ejemplos donde el lector podrá observar y despejar cualquier duda sobre la teoría expuesta.

Siendo uno de los objetivos de este trabajo, la profundización en el estudio de la circunferencia, contará con ejercicios resueltos donde se apliquen definiciones, teoremas, corolarios y demas conceptos depositados en este documento y finalmente mostrar la importancia de la circunferencia y su relación en muchas situaciones de nuestra vida, mediante aplicaciones y algunos ejercicios que teniendo claros los conceptos de circunferencia y cada uno de sus elementos le facilitará al lector el planteamiento del problema para hallar posibles soluciones.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Organizar y producir de manera formal un documento sobre la circunferencia a nivel intermedio y superior en la cual se recopile las definiciones, propiedades fundamentales, teoremas, demostraciones, aplicaciones, problemas resueltos y propuestos de la misma.

Objetivos Específicos

- Recopilar y seleccionar bibliografía relacionada con la circunferencia.
- Enunciar las principales definiciones, teoremas, colorarios, y postulados de la circunferencia.
- Solucionar diferentes problemas relacionados con la circunferencia de tal manera que el lector interesado observe soluciones a diferentes planteamientos o situaciones.

JUSTIFICACIÓN

La circunferencia al ser una de las secciones cónicas más representativas de la geometría analítica, y al ser uno de los pilares en el estudio de la misma, proporciona instrumentos que le permiten al estudiante analizar diversas situaciones que ocurren en el mundo real. Al encontrar un documento con los conceptos, definiciones, teoremas con sus respectivas demostraciones, aplicaciones y problemas abiertos le brindará las herramientas para la interiorización del concepto y adopte una postura critica, argumentativa y propositiva sobre el mismo, como también el alimentar el interés sobre el estudio no tan solo de la circunferencia sino también el de las demás secciones cónicas y la geometría en general.

Una de las grandes dificultades a la hora del estudio de la circunferencia es la poca documentación existente y la que hay se encuentra es incompleta y en algunos casos incorrecta, logrando con esto que el estudiante pierda interés en el tema y no profundice en el mismo y con ello no alcance un verdadero conocimiento y aprendizaje significativo.

El facilitar este tipo de documentos al estudiante se le incentiva al estudio de la circunferencia y sus elementos, al despertar una interés por la misma que le permita analizar, modelar y conjetar problemas y aplicaciones de la vida real y plantear posibles soluciones.

CAPÍTULO 1

DEFINICIONES PRELIMINARES

En este capítulo estarán depositadas las principales definiciones relacionadas con la circunferencia, cada uno de sus elementos, como también la relación que tiene cada uno de ellos con la misma y algunas gráficas que servirán de ilustración. La información que se encontrará a continuación está ampliada en [1], [2], [3], [4] de la bibliografía.

A continuación estarán algunas definiciones con respecto a los elementos de la circunferencia e indicaremos su notación:

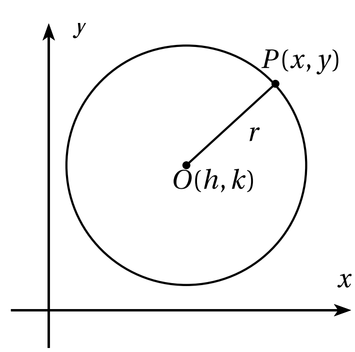
- La distancia de A a B la notaremos como AB
- El segmento de recta con extremos A y B lo escribiremos $\overline{AB}$
- La recta que pasa por A y B la anotaremos como $\overleftrightarrow{AB}$
- La semirecta que empieza en A y pasa por B se nota por $\overrightarrow{AB}$

Definición 1.1. ***Coplanar:*** *Los puntos o líneas se dice que son coplanares si están en el mismo plano. Al plano lo notaremos por* π.

Definición 1.2. ***La circunferencia:*** *Es el conjunto de puntos (o lugar geométrico de los puntos) del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro y lo notaremos como O y a la distancia de cada punto de la circunferencia al centro de esta se le llama radio de la circunferencia y se nota como* r. *La circunferencia en el plano se puede mirar como un anillo o aro y se nota* $C(O,r)$ *o simplemente* C *cuando no halla lugar a confusión*

Notación: La circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r es:

$$C(O,r) = \{P \in \pi / OP = r;\ O \in \pi\}$$



Definición 1.3. ***Interior de la circunferencia:*** *Al conjunto de puntos del plano, tales que su distancia al centro es menor que el radio de la circunferencia dada , se le llama el interior de la circunferencia.*

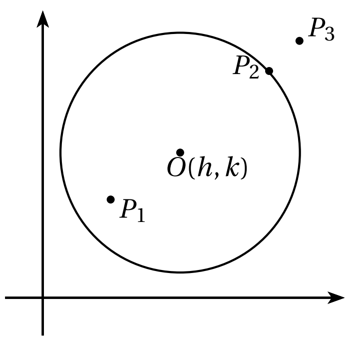
Notación: El interior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\mathring{C}$ o $\overset{\circ}{\widehat{C(O,r)}}$ o $\text{int}(C)$ por lo tanto:

$$\mathring{C} = \overset{\circ}{\widehat{C(O,r)}} = \text{int}C(O,r) = \{P \in \pi / OP < r;\ O \in \pi\}$$

Definición 1.4. ***Exterior de la circunferencia:*** *Al conjunto de puntos del plano tales que su distancia al centro sea mayor que el radio de la circunferencia, se le llama el exterior de la circunferencia.*

Notación: El exterior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\text{ext}C(O,r)$ por lo tanto:

$$\text{ext}C(O,r) = (C(O,r) \cup \text{int}C(O,r))^c = \{P \in \pi / OP > r;\ O \in \pi\}$$



Los puntos P_1, P_2, P_3 estan en el mismo plano de la circunferencia $C(O,r)$:

Como $OP_1 < r$ entonces $P_1 \in \text{int}C(O,r)$

Como $OP_2 = r$ entonces $P_2 \in C(O,r)$

Como $OP_3 > r$ entonces $P_3 \in \text{ext}C(O,r)$

Definición 1.5. ***Círculo:*** *La unión de la circunferencia y su interior la llamamos círculo.*

Notación: El círculo de centro O y radio r se denota por $\overline{C}(O,r)$, por lo tanto:

$$\overline{C}(O,r) = C(O,r) \cup \text{int}C(O,r) = \{P \in \pi : OP \leq r,\ O \in \pi\}$$

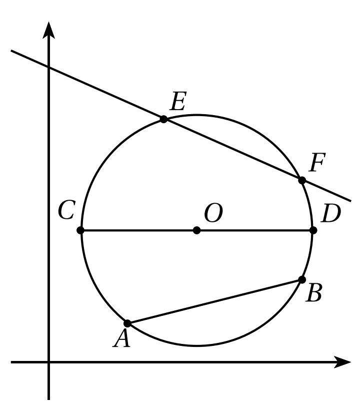
Definición 1.6. ***Cuerda:*** *Es un segmento que conecta dos puntos sobre la circunferencia. Si los dos puntos son A y B denotamos la cuerda de extremos Ay B por $\overline{AB}$*

Definición 1.7. ***Diámetro:*** *Es la longitud de toda cuerda que pasa por el centro y este es igual a dos radios. Si d es el diámetro de un círculo de radio r, entonces $d = 2r$*

Definición 1.8. ***Secante:*** *es la recta que contiene a una cuerda de la circunferencia.*

En la figura podemos observar:

- El segmento $\overline{AB}$ es cuerda a la circunferencia $C(O,r)$, lo mismo $\overline{EF}$
- El número CD es díametro de la circunferencia $C(O,r)$
- La recta $\overleftrightarrow{EF}$ es secante de la circunferencia $C(O,r)$ por que contiene a la cuerda $\overline{EF}$.

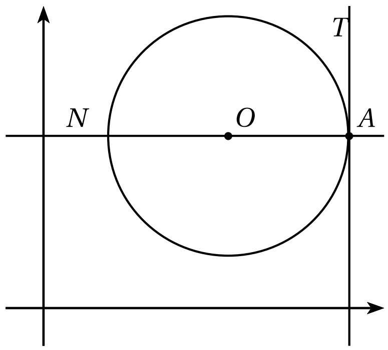


Definición 1.9. ***Tangente:*** *Es la recta en el plano donde esta la circunferencia que la intercepta en un único punto, llamado punto de contacto o punto de tangencia. Es una especie de secante que contiene a una cuerda con un único punto.*

Notación: La recta tangente a la circunferencia se denota por T

Definición 1.10. ***Normal:*** *Es la recta perpendicular a una recta tangente en el punto de contacto.*

Notación: La recta normal a la circunferencia se denota por N



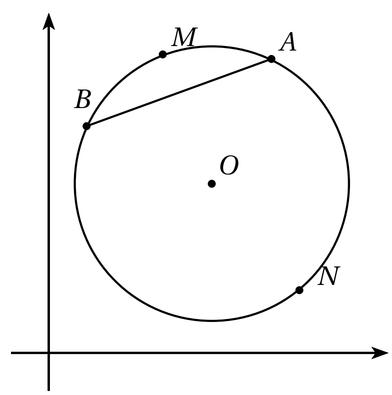
En la figura podemos observar:

- La recta T es tangente a la circunferencia $C(O,r)$ en en el punto A
- La recta N es n a la tangente T de la circunferencia $C(O,r)$ en el punto A

Definición 1.11. ***Arco:*** *Es el conjunto de todos los puntos que estan en una circunferencia que se encuentra entre los puntos a A y B a la misma distancia del centro.*

Notación: Si los puntos de la circunferencia son A y B sus arcos son AMB y ANB los cuales denotamos por $\widehat{AMB}$ y $\widehat{ANB}$ respectivamente. Diremos que estos dos arcos son mutuamente complementarios.

El segmento que une los extremos de un arco se llaman cuerdas del arco. Dos arcos complementarios comparten la misma cuerda.



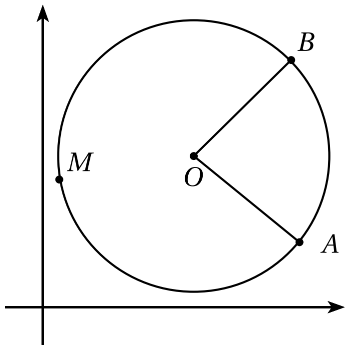
Si al arco le quitamos los extremos a este nuevo conjunto lo llamamos el interior del arco y lo denotamos por:

$$\mathrm{int}(\widehat{AMB})$$

Definición 1.12. ***Arco principal :*** *Si el centro de la circunferencia y el interior del arco están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco principal.*

Definición 1.13. ***Arco no principal:*** *Si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en el mismo semiplano con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco no principal.*

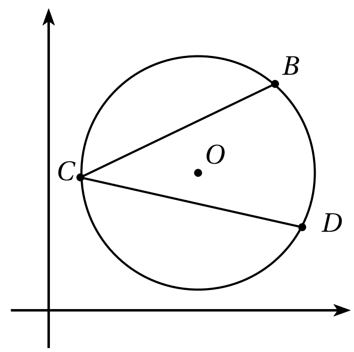
Definición 1.14. ***Ángulo Central::*** *Es un ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia y es coplanar con la circunferencia*



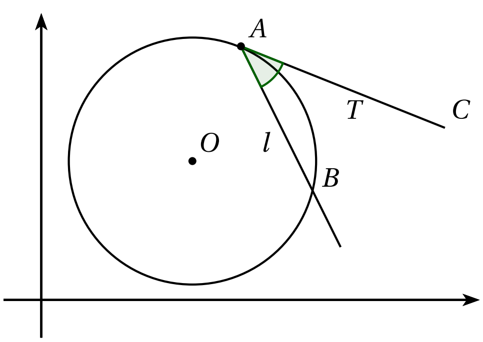
En la Figura podemos observar que el ángulo $\measuredangle AOB$ es un ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro; Se puede observar que al arco no principal $\widehat{AMB}$ no se le asocia un ángulo central, ya que los ángulos están definidos entre 0^o y 180^o.

Definición 1.15. ***Ángulo inscrito en un arco:*** *Diremos que un ángulo está inscrito en una circunferencia $C(O,r)$ si su vértice está en $C(O,r)$ y sus lados cortan a $C(O,r)$ (en otros puntos distintos de su vértice).*

Cuando digamos que un ángulo $\widehat{BCD}$ está inscrito en una circunferencia $C(O;r)$ se entenderá que B, C y D están en $C(O,r)$



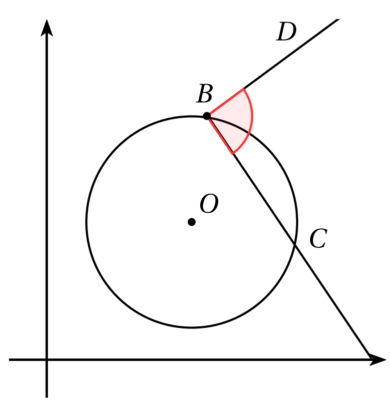
Definición 1.16. ***Ángulo semi-inscrito:*** *Diremos que un ángulo está semi-inscrito en una circunferencia $C(O,r)$ cuando su vértice está sobre la circunferencia, uno de los lados es tangente y el otro es secante a la circunferencia, se le llama ángulo semi-inscrito*



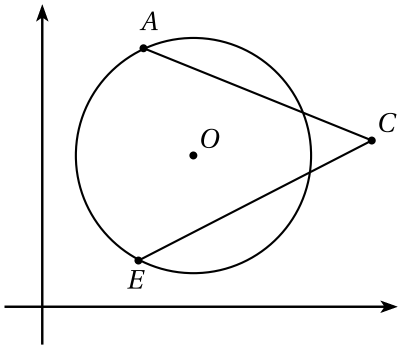
Si el ángulo formado por las semi-rectas l y T está semi-inscrito a $C(O,r)$ entonces l es la semi-recta que empieza en A y pasa por B siendo A y B puntos de $C(O,r)$ y T es tangente a $C(O,r)$ en A, el arco $\widehat{AB}$ esta contenido en la intersección del ángulo con $C(O,r)$ formado por las semi-rectas l y T.

Definición 1.17. ***Ángulo ex-inscrito:*** *Un ángulo ex-inscrito es aquel que tiene su vértice sobre la circunferencia, un lado es secante y el otro es exterior a la circunferencia $C(O,r)$*

El $\widehat{CBD}$ es un ángulo ex-inscrito a la circunferencia $C(O,r)$

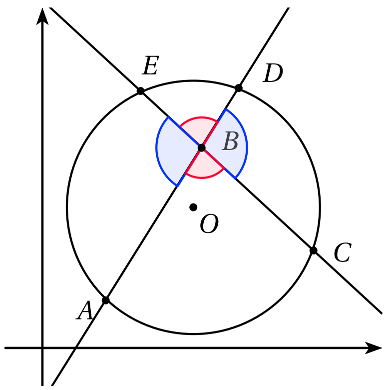


Definición 1.18. ***Ángulo exterior:*** *Es el ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia.*



El $\measuredangle ACE$ es un ángulo exterior

Definición 1.19. ***Ángulo interior:*** *Es el ángulo cuyo vértice es un punto interior a la circunferencia.*

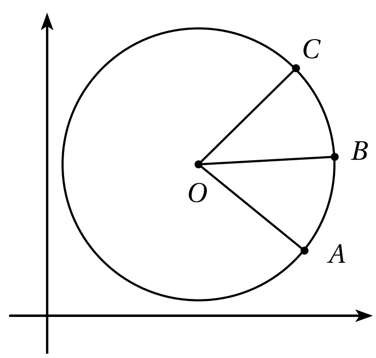


$$\measuredangle ABC, \measuredangle EBD, \measuredangle ABE, \measuredangle CBD$$

Son ángulos interiores a la circunferencia $C(O,r)$

Definición 1.20. ***Arcos consecutivos:*** *Dos arcos son consecutivos cuando lo son sus ángulos centrales.*

Como $\measuredangle AOB$ Y $\measuredangle BOC$ son consecutivos, $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ tambien son consecutivos.



Definición 1.21. ***Subtender:*** *Es unir con una línea recta los extremos de un arco de curva o de una línea quebrada. También puede hacer referencia al arco de circunferencia comprendido entre los lados de un ángulo.*

Definición 1.22. ***Arcos desiguales:*** *Dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias congruentes son desiguales si subtienden ángulos centrales desiguales y será mayor el que subtienda mayor ángulo central.*

Definición 1.23. ***Arcos principales congruentes:*** *Decimos que dos arcos principales en una circunferencia o en circunferencias congruentes, son congruentes si sus ángulos centrales son congruentes.*

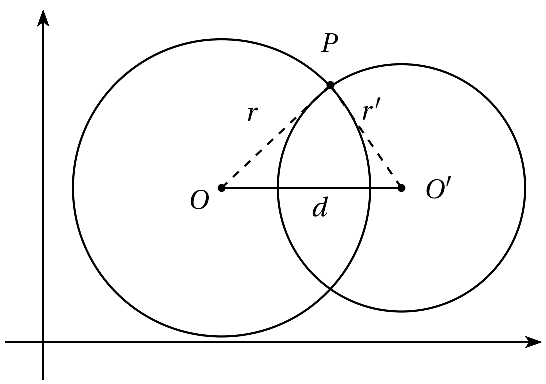
Definición 1.24. ***Arcos no principales congruentes:*** *Decimos que dos arcos no principales en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, son congruentes si sus respectivos arcos principales asociados son congruentes*

Definición 1.25. ***Suma de arcos:*** *En una circunferencia se llama suma de arcos consecutivos, al arco cuyo ángulo central es la suma de los ángulos correspondientes a los dos arcos*

Definición 1.26. ***Diferencia de arcos:*** *Dados dos arcos desiguales de una circunferencia se llama diferencia de ambos al arco sumado al menor me da el mayor.*

1.1. Posición entre dos circunferencias

1. **Secantes:** Dos circunferencias son secantes cuando se intersectan en dos puntos distintos. si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia.



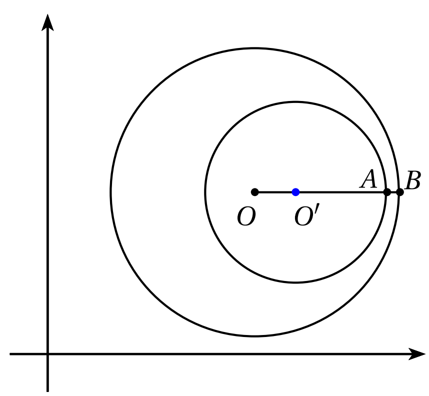
En el $\triangle OPO'$:

$$\overline{OO'} = d < r + r'$$

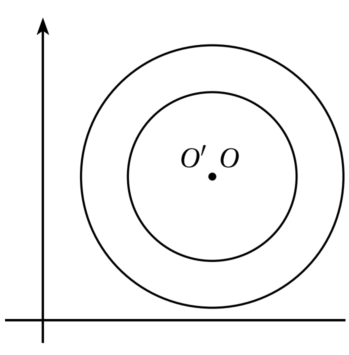
2. **Interiores:** Dos circunferencias son interiores cuando su intersección es vacia y el interior de una de ellas esta en el interior de la otra. Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios

$$\overline{OO'} = d < r - r'$$

$$\therefore d < r - r'$$



3. **Concentricas:**Dos circunferencias son concéntricas cuando sus centros coinciden, es decir, si y solo si

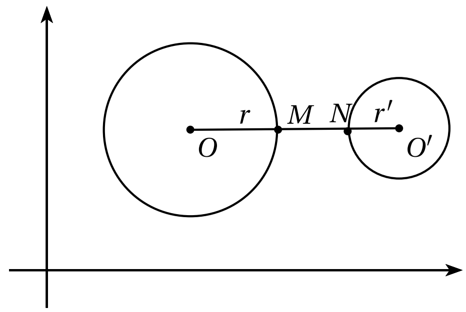


$$d = \overline{OO'} = 0$$

4. **Exteriores:** Dos circunferencias son exteriores cuando su intersección es vacia y el interior de una de ellas esta en el exterior de la otra. Si la distancias de los centros es mayor que la suma de los radios

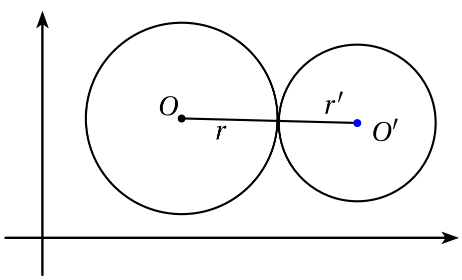
$$\overline{OO'} = d = r + r' + \overline{MN}$$

$$\therefore d > r + r'$$



5. **Tangentes:** Dos circunferencias son tangentes cuando su intersección es en un único punto. Estudiaremos los siguientes casos:

   - **Tangentes Exteriores:** Dos circunferencias son tangentes exteriores cuando el interior de una de ellas esta en el exterior de la otra. Si la distancia entre los centro es igual a la suma de los radios.



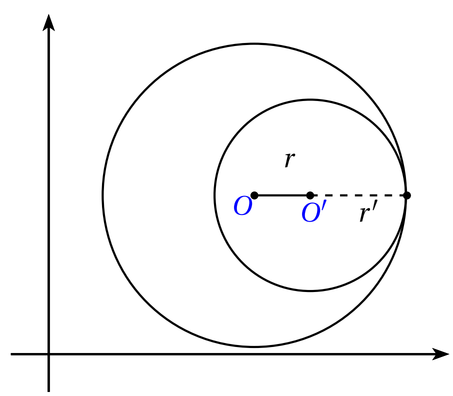
$$d = \overline{OO'} = r + r'$$

$$\therefore d = r + r'$$

   - **Tangentes Interiores:** Dos circunferencias son tangentes interiores cuando el interior de una de ellas esta en el interior de la otra. Si la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios.

$$\overline{OO'} = d = r - r'$$

$$\therefore d = r - r'$$



CAPÍTULO 2

TEOREMAS

En este capítulo encontraremos teoremas con sus respectivas demostraciones, corolarios, donde se aplican las definiciones enunciadas en el capítulo 1. La información que se encontrará a continuación está ampliada en [2], [3] de la bibliografía.

A continuación enunciaremos algunas definiciones y teoremas fundamentales para el desarrollo de este capítulo.

Postulado 1. ***Separación del plano*** *Sea π un plano y l una recta en π. Los puntos del plano que no esten sobre l forman dos semiplanos de manera que:*

- *Cada semiplano es un conjunto convexo.*
- *Si P está sobre un semiplano y Q está en el otro entonces $\overline{PQ}$ intersecta l*

Teorema 1. *Si dos rectas diferentes se intersectan, su intersección es un solo punto*

Teorema 2. *Si dos rectas distintas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas lo es a la otra.*

Corolario 1. *Las rectas perpendiculares a dos rectas que se cortan también se cortan.*

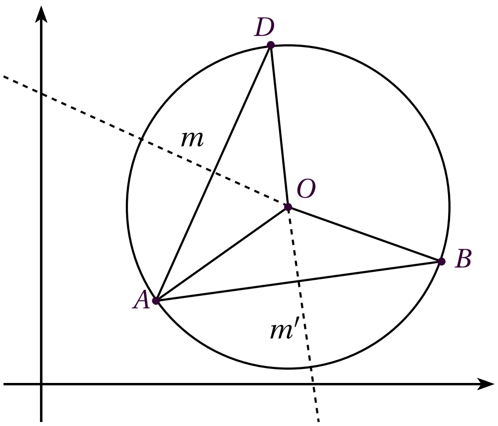
Teorema 3. ***Teorema de las oblicuas:*** *Si desde un punto exterior a una recta se trazan un segmento perpendicular y dos segmentos oblicuos, entonces:*

- *El segmento perpendicular es el de menor longitud.*
- *De los segmentos oblicuos es mayor el que se aparta más del pie de la perpendicular.*
- *Si los dos segmentos oblicuos no tienen la misma longitud, el de mayor longitud se aparta más del pie de la perpendicular.*

Teorema 4. ***Desigualdad Triangular:*** *La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.*

Teorema 2.1. ***Existencia y unicicidad de la circunferencia:*** *Por tres Puntos distintos, no colineales, pasa una y solo una circunferencia.*

Demostración:



1. **EXISTENCIA:** Sean A, B, D tres (3) puntos distintos y no colineales, sean m y m' las mediatrices de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y por el corolario 1 (enunciado anteriormente) tenemos que las mediatrices se cortan y por el teorema 1 tenemos que existe un único punto de intersección entre las mediatrices m y m' y por las propiedades de la mediatriz se tiene que $O \in m$ y $O \in m'$, luego, construyendo los $\triangle\ DOA$ y $\triangle\ AOB$ los cuales son isósceles, podemos decir que las distancias $OA = OD$ y similarmente $OA = OB$ por lo tanto

$$OA = OB = OD$$

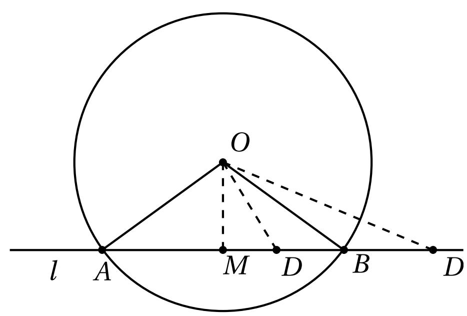
De esta manera podemos decir que O es el centro de una circunferencia que pasa por A, B, D y lo llamaremos $C(O, r)$

2. **UNICIDAD:** Supongamos que por los puntos A, B, D pasa otra circunferencia $C(O', r')$; como $O'A = O'B$ entonces por las propiedades de la mediatriz $O' \in m'$ y como $O'A = O'D$ entonces $O' \in m$, luego $O' = m \cap m'$ y como $O = m \cap m'$ entonces por el **teorema 1**. $O' \equiv O$ y por tanto $r' = r$. De esta manera hemos concluido que

$$C(O, r) \equiv C(O', r')$$

Teorema 2.2. *Si una recta $l(\overleftrightarrow{AB})$ y una circunferencia son coplanares la recta intersecta la circunferencia a lo sumo en dos puntos.*

Demostración:
Por contradicción, supongamos que existen tres puntos distintos A, B, D, que pertenecen a $C(O, r) \cap l$, con el tercer punto D pueden suceder dos casos:



1. Que esté en int$\overline{AB}$

2. Que esté en el ext$\overline{AB}$

1. Que esté en int$\overline{AB}$

   Sea $D \in$ int$\overline{AB}$ y sea $\overline{OM} \perp l$ como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ entonces $\overleftrightarrow{OM}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y por tanto $A - M - B$, con el punto D puede suceder tres casos:

a) $M - D - B$. En este caso $\overline{MD} < \overline{MB}$ y por el teorema de las oblicuas, $\overline{OD} < \overline{OB}$ y como OB es radio, entonces $OD < r$, luego $D \in \text{int}C(O,r)$. Absurdo!

b) $D \equiv M$. Por el teorema de las oblicuas, $\overline{OM} < \overline{OB}$, luego $OM = OD < r$, es decir, $D \in \text{int}C(O,r)$. Absurdo!

c) $A - M - D$ Aquí tendríamos $\overline{AM} < \overline{AD}$ y por el teorema de las oblicuas, $\overline{OD} < \overline{OA}$ y como OA es radio, entonces $OD < r$, luego $D \in \text{int}C(O,r)$. Absurdo!

2. Que esté en el ext$\overline{AB}$

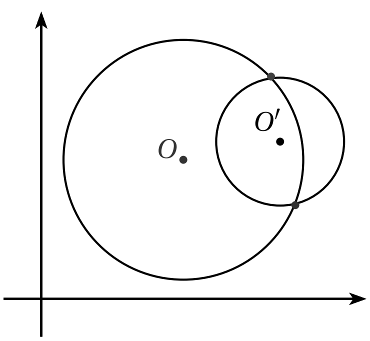
   Sea $D \in \text{ext}AB$, por lo tanto, $\overline{MB} < \overline{MD}$ y por el teorema de las oblicuas $\overline{OB} < \overline{OD}$ y por tanto $r < OD$, es decir que, $D \in \text{ext}C(O,r)$.Absurdo!

   Se afirma la tésis: existen a lo sumo dos puntos distintos A, B tales que

$$\{A,B\} = C(O,r) \cap l$$

Teorema 2.3. *"Si dos circunferencias distintas y cooplanares se interceptan entonces su intersección tiene a lo sumo dos puntos distintos."*

Demostración:



Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos circunferencias distintas. Veamos que

$$C(O,r) \cap C(O',r')$$

Tiene a lo sumo dos puntos distintos.

Neguemos lo anterior, es decir, supongamos que

$$C(O,r) \cap C(O',r') = \{A,B,D\}$$

donde A, B, D Son tres puntos distintos. Con los puntos A, B, D, se pueden suceder dos casos

a) Los puntos A, B, D son colineales, por tanto la recta que pasa por A, B, D intercepta la cicunferencia en tres puntos distintos Absurdo! (contradice el **teorema 2.2**)

b) Los puntos A, B, D no son colineales y como son distintos, entonces por el **teorema 2.1** se deduce que por A, B, D pasa una única circunferencia pero

$$C(O,r) \cap C(O',r') = \{A,B,D\}$$

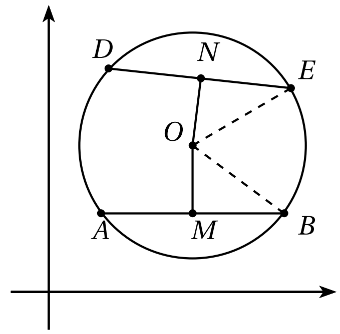
   Entonces, nuevamente $C(O,r) \equiv C(O',r')$ Absurdo!

Teorema 2.4. *En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:*

a. Las cuerdas congruentes son equidistantes del centro.

b. Dadas dos cuerdas, la mayor está a menor distancia del centro.

a. Las cuerdas congruentes son equidistantes del centro



Hipótesis: Sean $\overline{AB} = \overline{DE}$; $\overline{OM} \perp \overline{AB}$; $\overline{ON} \perp \overline{DE}$

Tesis: $\overline{OM} = \overline{ON}$

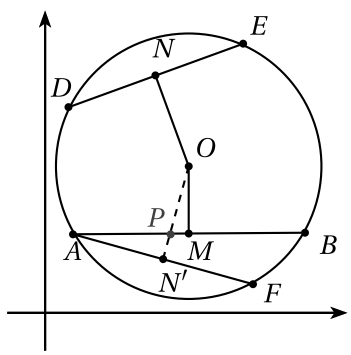
Construcción auxiliar: Unamos B y D con O, formandose los triángulos rectángulos $\triangle\ OMB$ y $\triangle\ OND$

Demostración:

En los $\triangle\ OMB$ y $\triangle\ OND$,

	$\overline{OB} = \overline{OD}$	radios
	$\overline{MB} = \overline{ND}$	por ser $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ cuerdas iguales
$\therefore$	$\triangle\ OMB = \triangle\ OND$	rectángulos que tienen iguales hipotenusa y un cateto
	$\overline{MB} = \overline{ON}$	lados homólogos de triángulos iguales

b. Dadas dos cuerdas, la mayor está a menor distancia del centro.



Hipótesis: $\overline{AB} > \overline{DE}$; $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ $\overline{ON} \perp \overline{DE}$

Tesis: $\overline{OM} < \overline{ON}$

Demostración:

	$\widehat{AF} = \widehat{DE}$	cuerdas iguales corresponde a arcos iguales
	$\widehat{AB} > \widehat{DE}$	$\overline{AB} > \overline{DE}$ por hipótesis
$\therefore$	$\widehat{AB} > \widehat{AF}$	caracter transitivo

$\therefore$ el punto F es un punto interior del $\widehat{AB}$

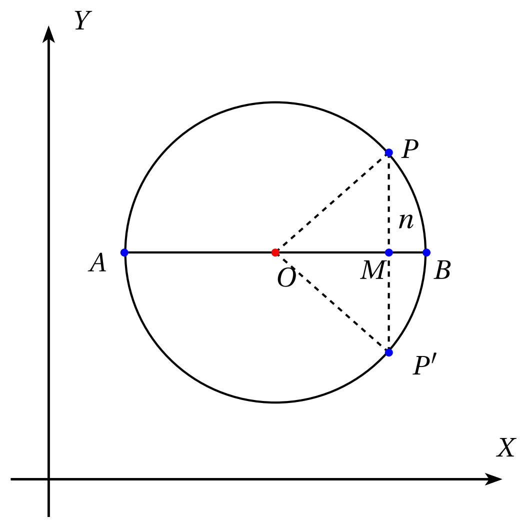
N' es el punto medio de $\overline{AF}$; todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a esta y al arco subtendido en partes iguales.

$\therefore$ El segmento $\overline{ON'}$ corta a $\overline{AB}$ por postulado de la separacion del plano; estar O y N' en semiplanos diferentes respecto $\overline{AB}$; sea P el punto de interseccion de $\overline{ON'}$ y $\overline{AB}$

	$\overline{OM} < \overline{OP}$	$\overline{OM}$ es perpendicular y $\overline{OP}$ es oblicua.
	$\overline{OP} < \overline{ON'}$	(1) caracter transitivo
Y como	$\overline{ON'} = \overline{ON}$	(2) punto a
	$\overline{OM} < \overline{ON}$	como queriamos demostrar.

Teorema 2.5. *“Un diámetro divide a la circunferencia y al círculo en dos partes iguales” que se llaman semicircunferencias.*

Hipótesis: $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia $C(O,k)$.



Tesis: $\widehat{APB} = \widehat{AP'B}$

Construcción auxiliar: Tomemos un punto cualquiera P, en uno de los arcos en que $\overline{AB}$ divide a la circunferencia; tracemos por P la perpendicular n al diámetro, que cortará a este. Luego unamos a P y P' con O, se formara los triángulos $\triangle\ OMP$ y $\triangle\ OMP'$.

Demostración:

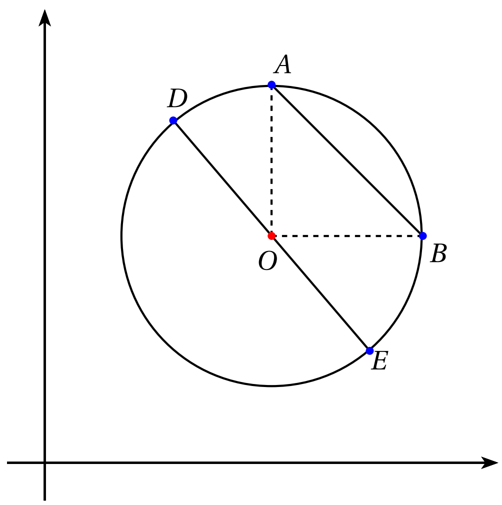
En $\triangle\ OMP$ y $\triangle\ OMP'$:

	$\overline{OM} = \overline{OM}$	segmentos comunes
	$\overline{OP} = \overline{OP'}$	por ser radios de la circunferencia
	$\angle OMP = \angle OMP' = 90^o$	por construcción
$\therefore$	$\triangle\ OMP = \triangle\ OMP'$	por tener iguales la hipotenusa y un cateto
$\therefore$	$\overline{MP} = \overline{MP'}$	

Si doblamos la circunferencia por $\overline{AB}$ hasta que P y P' coincidan, tendremos: $\overline{MP}$ coincidiran con $\overline{MP'}$. Como este se verifica para todos los puntos de $\widehat{APB}$, resulta $\widehat{APB} = \widehat{AP'B}$, a la vez las proporciones del plano comprendidas entre los arcos y el diámetro, coinciden.

En efecto superponiendo las figuras PBA y $P'BA$ de modo que $\overline{AB}$ sea común, $\widehat{APB}$ coincidira con $\widehat{AP'B}$ por ser los radios iguales de no serlo no seria una circunferencia.

Teorema 2.6. *"El diámetro es la mayor cuerda de la circunferencia"*



Hipótesis:
$\overline{DE}$ es un diámetro de la circunferencia $C(O,r)$ y $\overline{AB}$ es una cuerda

Tesis:
$\overline{DE} > \overline{AB}$

Construcción auxiliar:
Usamos A y B con O, formando el $\triangle\ AOB$

Demostración:

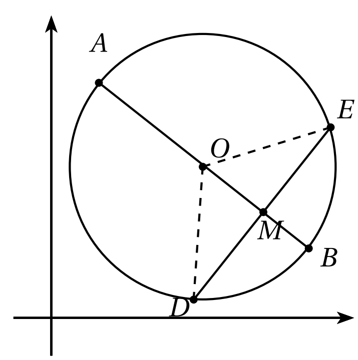
Sea $\overline{AB}$ una cuerda que no contiene al centro O y sea $\overline{DE}$ un diametro. Por el teorema de la desigualdad triangular en el $\triangle\ AOB$ se tiene que $\overline{AB} < \overline{OA} + \overline{OB}$ pero como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OE}$, $\overline{OD}$ son radios, entonces, $\overline{OA} = \overline{OD}$ y $\overline{OB} = \overline{OE}$, luego, $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{DE}$,por tanto, $\overline{AB} < \overline{DE}$

Teorema 2.7. *"Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a esta y a los subtendidos en partes iguales"*

Hipótesis:
$\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia $C(O,r)$ y $\overline{DE}$ es una cuerda y $\overline{AB} \perp \overline{DE}$.

Tesis:
$\overline{DM} > \overline{EM}$,

Construcción auxiliar: Usamos D y E con O, formando los triángulos rectángulos $\triangle\ DOM$ $\triangle\ EOM$.



Demostración:
En $\triangle\ DOM$ y $\triangle\ EOM$

	$\overline{OM} = \overline{OM}$	son comunes
	$\overline{OD} = \overline{OE}$	por ser radios de la circunferencia
ademas	$\overline{AB} \perp \overline{DE}$	hipótesis
$\therefore$	$\triangle\ DOM = \triangle\ EOM$	triángulos rectángulos que tienen iguales las hipotenusa y un cateto.
$\therefore$	$\overline{DM} = \overline{ME}$	lados homólogos de triángulos iguales
	$\angle 1 = \angle 2$	por oponerse a los lados iguales en triángulos iguales
	$\widehat{DB} = \widehat{BE}$	**(1)** por arcos correspondientes a ángulos centrales iguales.

Por otra parte:

$\widehat{ADB} = \widehat{AEB}$; **(2)** por semicircunferencias.

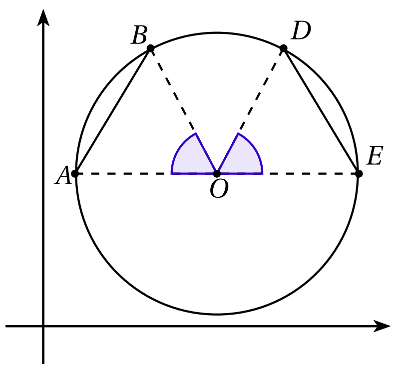
Restando **(1)** y **(2)** tenemos:

$$\widehat{ADB} - \widehat{DB} = \widehat{AEB} - \widehat{BE}$$

$\widehat{AD} = \widehat{AE}$ como queriamos demostrar.

Teorema 2.8. *Relaciones entre cuerdas y los arcos correspondientes.*
"En una misma circunferencia, o en circunferencias iguales a arcos iguales corresponden cuerdas iguales, y si dos arcos son desiguales (menores que una circunferencia) a mayor arco corresponde mayor cuerda".

1^a Parte



Hipótesis: En la circunferencia $C(O,r)$ $\widehat{AB} = \widehat{DE}$.

Tesis: $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$.

Construcción auxiliar: Se unen $A, B, D y E$ con O, formando los triángulos $\triangle\ AOB$ y $\triangle\ DOE$

Demostración:

En $\angle AOB$ y $\angle DOE$:

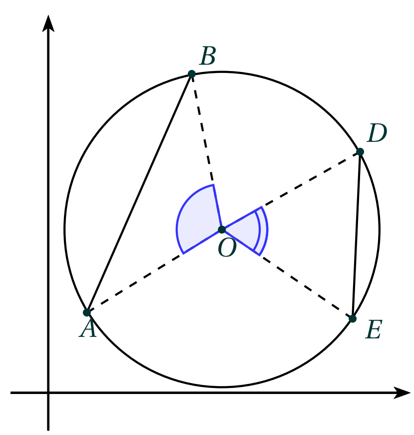
	$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OE}$	radios
	$\angle AOB = \angle DOE$	ángulos centrales cuyos arcos correspondientes son iguales por hipótesis;
$\therefore$	$\triangle\ AOB\ \triangle\ DOE$	por tener iguales dos lados con su ángulo
$\therefore$	$\overline{AB} = \overline{DE}$	lados homólogos de triángulos iguales

2^a Parte

Hipótesis: En la circunferencia $C(O,r)$: $\widehat{AB} > \widehat{DE}$ y ambos menores que una semicircunferencia. $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ cuerdas correspondientes.

Tesis: $\overline{AB} > \overline{DE}$

Construcción auxiliar: Se unen A, B y D, E con O, formando los triángulos $\triangle\ AOB$ $\triangle\ DOE$

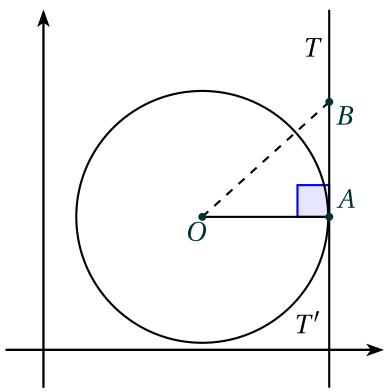


Demostración:

En $\triangle\ AOB\ \triangle\ DOE$:

	$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OE}$	radios
	$\triangle\ AOB > \triangle\ DOE$	$\widehat{AB} > \widehat{DE}$ hipótesis
$\therefore$	$\overline{AB} > \overline{DE}$	en dos triángulos que tienen dos lados iguales y desiguales el ángulo comprendido, a mayor ángulo se opone al mayor lado.

Teorema 2.9. *Propiedad de la tangente en el punto de contacto.*
"La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto."



Hipótesis:

- $\overleftrightarrow{TT'}$ es tangente en A a la circunferencia.
- $\overline{OA}$ es el radio en el punto de contacto.

Tesis: $\overleftrightarrow{TT'} \perp \overline{OA}$.

Demostración: Si $\overline{OA}$ no fuese perpendicular a $\overleftrightarrow{TT'}$ seria oblicua y, en este caso, habría otra oblicua $\overline{OB}$ que sería igual a $\overline{OA}$. Si $\overline{OB} = \overline{OA}$ entonces B sería un punto de la circunferencia y la recta $\overleftrightarrow{TT'}$ no sería tangente porque tendría dos puntos comunes con la circunferencia.

Teorema 2.10. *Distancia de un punto a una circunferencia*

"La distancia mínima de un punto a una circunferencia, es el menor de los dos segmentos de normal comprendidos entre el punto y la circunferencia"

Se consideran los siguientes casos:

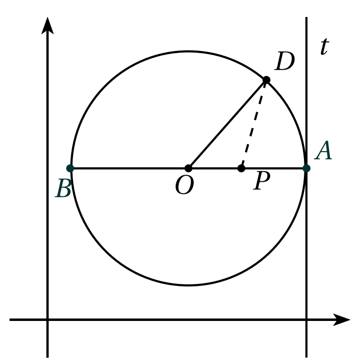
1. **Punto Interior**

   Hipótesis:

   - P es un punto interior de la circunferencia O.
   - $\overleftrightarrow{AB}$ es la normal que pasa por P.

   Tesis:

   - $\overline{PA} < \overline{PD}$



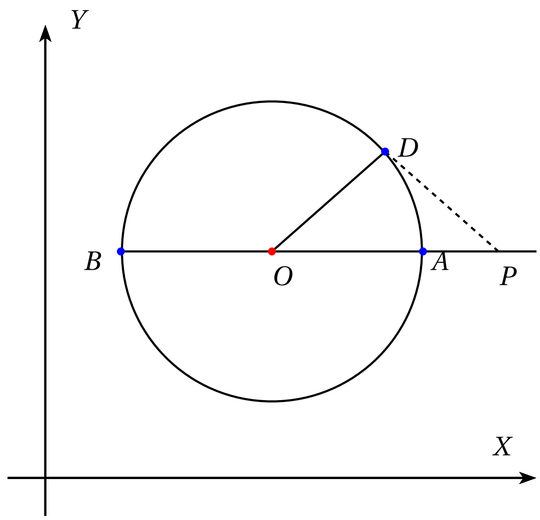
Demostración:
En el $\triangle\, ODP$:

$$\begin{array}{lll} & \overline{OD} < \overline{PD} & \text{(1) Postulado de la distancia mínima} \\ \text{pero} & \overline{OD} = \overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PA} & \text{(2) Radios, suma de segmentos} \end{array}$$

Sustituyendo (2) en (1), tenemos:

$$\overline{OP} + \overline{PA} < \overline{OP} + \overline{PD} \therefore \overline{PA} < \overline{PD}$$

2. **El punto es exterior**



Hipótesis:

- P es un punto exterior de la circunferencia O.
- $\overleftrightarrow{AB}$ es la normal que pasa por P.

Tesis:

- $\overline{PA} < \overline{PD}$

Demostración:

En el $\triangle\, ODP$:

$$\begin{array}{lll} & \overline{PA} + \overline{OA} < \overline{PD} + \overline{OD} & \text{(1) Un lado es menor que la suma de los otros dos} \\ \text{pero:} & \overline{OA} = \overline{OD} & \text{(2) Radios} \end{array}$$

Sustituyendo (2)en (1), tenemos: $\overline{PA} + \overline{OA} < \overline{PD} + \overline{OA} \therefore \overline{PA} < \overline{PD}$

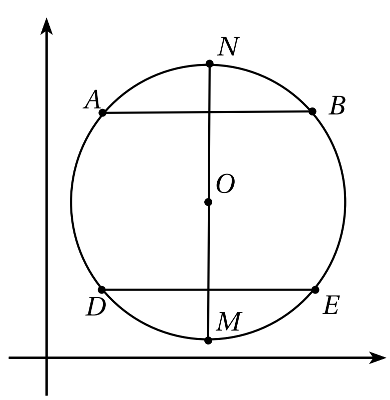
Teorema 2.11. *"Los arcos de una circunferencia comprendidos entre paralelas, son iguales".*

1^a Parte. Las paralelas son secantes.

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$.

Tesis: $\widehat{AD} = \widehat{BE}$.

Contrucción auxiliar: Tracemos el diámetro $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$ que también será perpendicular a $\overleftrightarrow{DE}$ ya que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$.



Demostración:

$$\begin{array}{lll} & \widehat{DM}=\widehat{EM} & (1) \\ \text{y} & \widehat{AM}=\widehat{BM} & \text{(2) Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y al arco subtendido} \\ & & \text{en partes iguales.} \end{array}$$

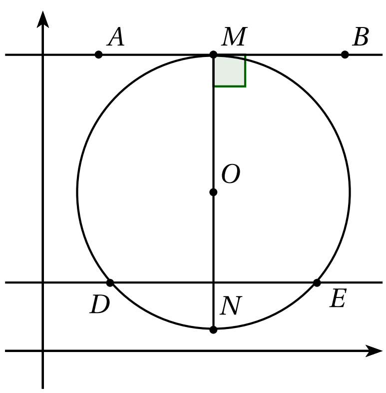
Restando (2) de (1):

$$\begin{array}{lll} \widehat{DM}-\widehat{AM}=\widehat{EM}-\widehat{BM} & (3) & \\ \text{pero:}\widehat{DM}-\widehat{AM}=\widehat{AD} & (4) & \text{Resta de arcos;} \\ \text{y } \widehat{EM}-\widehat{BM}=\widehat{BE} & (5) & \end{array}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3), tenemos:

$$\widehat{AD}=\widehat{BE}$$

2^a Parte. Una de las paralelas es secante y la otra es tangente.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente, $\overleftrightarrow{DE}$ secante y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$.

Tesis: $\widehat{DM}=\widehat{EM}$

Construcción auxiliar: Tracemos el diámetro $\overline{MN}$, en el punto de contacto M.

Demostración:

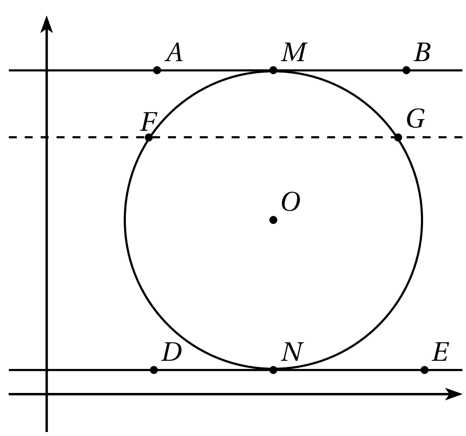
$$\begin{array}{lll} & \overline{MN}\perp\overline{AB} & \text{eL diámetro es } \perp \text{ a la tangente en el punto de contacto.} \\ \therefore & \overline{MN}\perp\overline{DE} & \text{porque } \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB} \text{ hipótesis.} \\ \therefore & \widehat{DM}=\widehat{EM} & \text{todo diámetro } \perp \text{ a una cuerda, divide a ésta y a los arcos} \\ & & \text{subtendidos,en partes iguales.} \end{array}$$

3^a Parte. Las dos paralelas son tangentes.

Hipótesis: $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente en M, $\overleftrightarrow{DE}$ es tangente en N y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DE}$.

Tesis: $\widehat{MFN}=\widehat{MGN}$.

Construcción auxiliar: Tracemos la secante $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ que será también $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{DE}$



Demostración:

Por el segundo caso: $\begin{cases} \widehat{FM} = \widehat{GM}(1) \\ \widehat{FN} = \widehat{GN}(2) \end{cases}$

Sumando (1) y (2), tenemos:

$$\begin{array}{lcl} & \widehat{FM} + \widehat{FN} = \widehat{GM} + \widehat{GN} & (3) \\ \text{Pero:} & \widehat{FM} + \widehat{FN} = \widehat{MFN} & (4) \text{ Suma de arcos} \\ \text{y} & \widehat{GM} + \widehat{GN} = \widehat{MGN} & (5) \end{array}$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3):

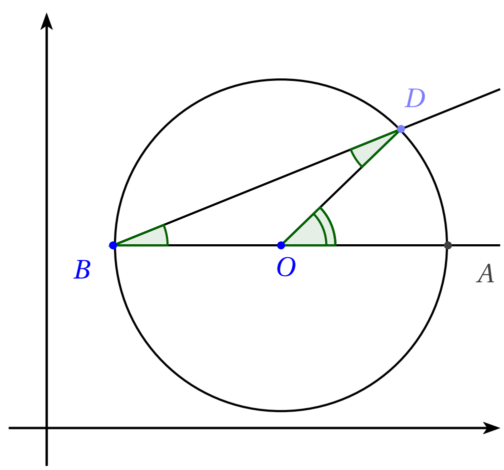
$\widehat{MFN} = \widehat{MGN}$

Teorema 2.12. *Medida del ángulo inscrito: " La medida de todo ángulo inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados"*

Se considera los siguientes casos:

1. El centro está en uno de los lados del ángulo.

Hipótesis: El $\angle ABD$ es inscrito y O es el centro de la circunferencia.



Tesis: Medida del $\angle B = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$.

Construcción auxiliar: tracemos el radio $\overline{OD}$, formando el $\triangle BOD$ que es isóceles.

Demostración:

$$\begin{array}{lcl} \text{En el } \triangle BOD: & \angle B = \angle D & (1) \text{ Se oponen a radios iguales} \\ \text{Pero:} & \angle B + \angle D = \angle AOD & (2) \text{ Por ser el } \angle AOD \text{ un angúlo exterior.} \end{array}$$

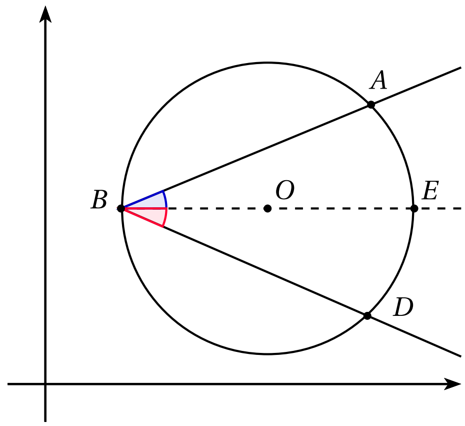
Sustituyendo (1) en (2), tenemos:

$$\angle B + \angle B = \angle AOD$$

$$\begin{array}{lcl} \therefore & 2\angle B = \angle AOD & \text{Sumando;} \\ \therefore & \angle B = \dfrac{\angle AOD}{2} & (3) \text{ Despejando;} \\ & \text{pero } \widehat{AD} \text{ es medida del } \angle AOD. & (4) \text{ Central.} \end{array}$$

Sustituyendo (4) en (3), tenemos: medida del $\angle B = \dfrac{\angle AOD}{2}$

2. El centro está en el interior del angúlo.



Hipótesis: El $\angle ABD$ es inscrito y O es interior del $\angle ABD$.

Tesis: Medida del $\angle B = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$.

Construcción auxiliar: tracemos el diámetro $\overline{BE}$, de manera que se formen los ángulos inscritos $\angle ABE$ y $\angle DBE$.

Demostración:

$\angle B = \angle ABE + \angle DBE$ (1) Suma de ángulos.

Pero: $\angle ABE = \dfrac{\widehat{AE}}{2}$ (2) Por el primer caso.

y $\angle CBE = \dfrac{\widehat{ED}}{2}$ (3) Por el primer caso.

Sustituyendo (2) y (3), en (1), tenemos:

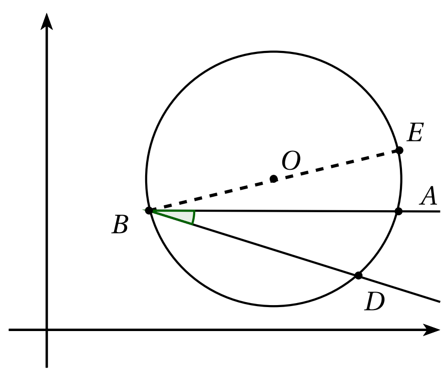
medida del $\angle B = \dfrac{\widehat{AE}}{2} + \dfrac{\widehat{ED}}{2} = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$, suma de arcos.

3. El centro está en el exterior del angúlo.

Hipótesis: El $\angle ABD$ es inscrito y O es exterior al $\angle ABD$.

Tesis: Medida del $\angle ABD = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$.

Construcción auxiliar: tracemos el diámetro $\overline{BE}$, Formadosé $\angle ABE$ y $\angle DBE$, ambos inscritos.



Demostración

$\angle ABE = \angle DBE - \angle ABE$ (1) Diferencia de ángulos.

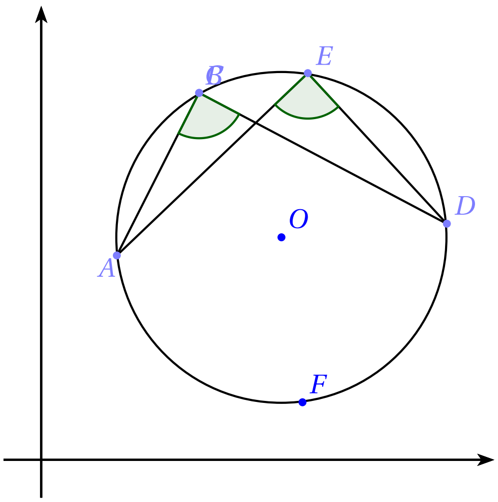
Pero: $\angle DBE = \dfrac{\widehat{DE}}{2}$ (2) Por el primer caso.

y $\angle ABE = \dfrac{\widehat{AE}}{2}$ (3) Por el primer caso.

Sustituyendo (2) y (3), en (1), tenemos:

medida del $\angle ABD = \dfrac{\widehat{DE}}{2} + \dfrac{\widehat{AE}}{2} = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$, Diferencia de arcos.

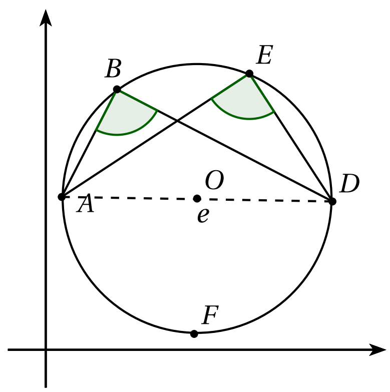
Corolario 2.1. *Todos los ángulos inscritos en el mismo arco, son iguales. Así tenemos:*



$$\angle ABD = \angle AED = \frac{\widehat{AFD}}{2}$$

Corolario 2.2. *Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*

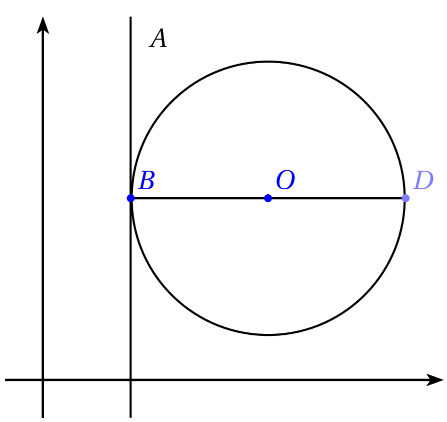
$$\angle ABD = \angle AED = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{180}{2}$$



Teorema 2.13. *Medida del Ángulo semi-inscrito: "La medida del ángulo semi-inscrcrito es igual a la mitad sel arco comprendido entre sus lados"*

Se consideran los siguientes casos:

1. **El centro está en uno de los lados del ángulo**



Hipótesis: El $\measuredangle ABD$ Es semi-insscrito y O es el centro de la circunferencia.

Tesis: Medida de $\measuredangle ABD = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$

Demostración:

$\measuredangle ABD = 90^o$ (1) La tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.

$\widehat{BD} = 180^o$ (2) Por ser $\widehat{BD}$ una semicircunferencia

Comparando (1) y (2) tenemos la Medida $\sphericalangle ABD = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$

2. **El centro está en el interior del ángulo**

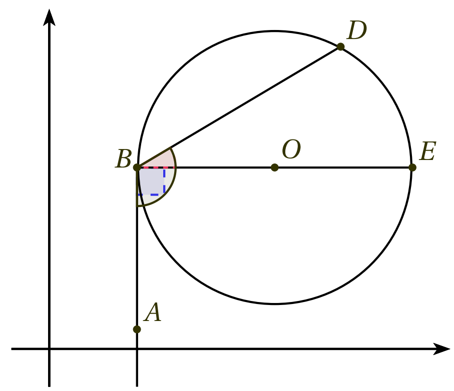
Hipótesis:

- El $\measuredangle ABD$ está semi-inscrito y O es interior del $\measuredangle ABD$

Tesis:

- Medida del $\measuredangle ABD = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$

Construcción auxiliar: Tracemos por B el diámetro $\overline{BE}$, quedando el $\measuredangle ABD$ dividido en $\measuredangle ABE$ y $\measuredangle EBD$ de manera que $\measuredangle ABD = \measuredangle ABE + \measuredangle EBD$.



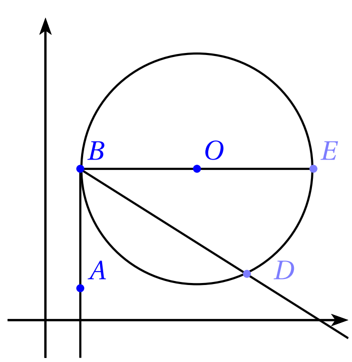
Demostración:

Por el caso 1^{er} *caso* $\begin{cases} Medida \quad del \quad \measuredangle ABE = \dfrac{\widehat{BE}}{2} & (1) \\ Medida \quad del \quad \measuredangle EBD = \dfrac{\widehat{BD}}{2} & (2) \end{cases}$

Sumando (1) y (2) tenemos: medida del $\measuredangle ABE + \measuredangle EBD = \dfrac{\widehat{BE}}{2} + \dfrac{\widehat{ED}}{2}$

Resolviendo las operaciones, tenemos: medida del $\measuredangle ABD = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$

3. **El centro es exterior al ángulo**



Hipótesis:

- El $\measuredangle ABD$ es semi-inscrito y O es exterior al ángulo

Tesis:

- Medida del $\measuredangle ABD = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$

Construcción auxiliar: Tracemos el diámetro $\overline{BE}$ formando el $\measuredangle DBE$ semi-inscrito

Demostración:

$$\measuredangle ABD = \measuredangle ABE - \measuredangle DBE \quad \text{(1) Regla de ángulos}$$

$$\text{Pero:} \quad \text{Medida del } \measuredangle ABE = \frac{\widehat{BE}}{2} \quad \text{Por el } 1^{e}r \text{ Caso}$$

$$\text{y} \quad \text{Medida del } \measuredangle DBE = \frac{\widehat{DE}}{2} \quad \text{Por el } 1^{e}r \text{ Caso}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$\text{medida del } \measuredangle ABD = \frac{\widehat{BE} - \widehat{DE}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

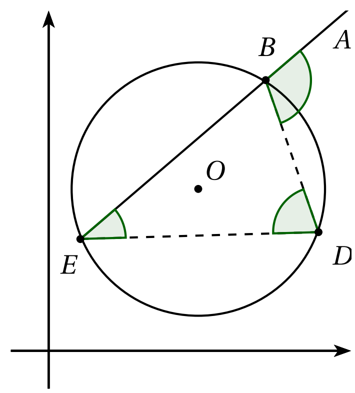
Teorema 2.14. *Teorema de la medida del ángulo ex-inscrito: "La medida del ángulo ex-inscrito es igual a la semisuma de los arcos que tienen su origen en el vertice y sus extremos en uno de los lados y en la prolongación del otro".*

Hipótesis:
El $\measuredangle ABD$ Es ex-inscrito

Tesis:

Medida del $\measuredangle ABD = \dfrac{\widehat{BD} + \widehat{BE}}{2}$

Construcción auxiliar:
Unimos D con E formando el $\triangle\ BDE$



Demostración:

$$\angle ABD = \angle D + \angle E \quad \text{(1) Ángulo externo}$$

$$\text{pero:} \quad \text{medida del } \angle D = \frac{\widehat{BE}}{2} \quad \text{(2) Ángulo inscrito}$$

$$\text{medidadel } \angle E = \frac{\widehat{BD}}{2} \quad \text{(3) Ángulo inscrito}$$

sustituyendo (2)y (3) en (1) tenemos: $\angle ABD = \dfrac{\widehat{BD}}{2} + \dfrac{\widehat{BE}}{2} = \dfrac{\widehat{BD} + \widehat{BE}}{2}$

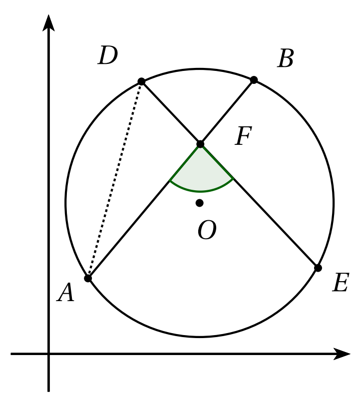
Teorema 2.15. *Medida del Ángulo Interior: " la medida del ángulo interior es igual a la semisuma se las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones "*

Hipotesis:

- El $\angle AFE$ es un ángulo interior
- $\widehat{AE}$ y $\widehat{BD}$ son los arcos comprendidos por los lados y las prolongaciones.

Tesis: Medida del $\angle F = \dfrac{\widehat{BD} + \widehat{AE}}{2}$.

Cosntrucción auxiliar: Unamos A y D, formando el $\triangle AFD$.



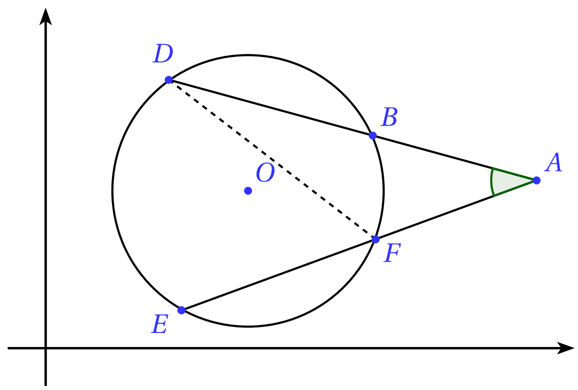
Demostración:

En el $\triangle AFD$ tenemos	$\angle F = \angle A + \angle D$	(1) Por ser $\angle F$ un ángulo exterior del $\triangle ABD$
pero:	$\angle A = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$	(2) Inscrito
	$\angle D = \dfrac{\widehat{AE}}{2}$	(3) Inscrito

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos: $\angle F = \dfrac{\widehat{BD}}{2} + \dfrac{\widehat{AE}}{2} = \dfrac{\widehat{BD} + \widehat{AE}}{2}$

Teorema 2.16. *Medida del ángulo exterior:"La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados"*

Hipótesis: EL $\angle A$ es exterior.



Tesis: Medida del $\angle A = \dfrac{\widehat{DE} - \widehat{BF}}{2}$.

Construcción auxiliar: Unimos D con F, formándose el $\triangle AFD$.

Demostración:

En el $\triangle ADF$ tenemos: $\angle F = \angle A + \angle D$; ángulo exterior del $\triangle ADF$.

Despejando A:

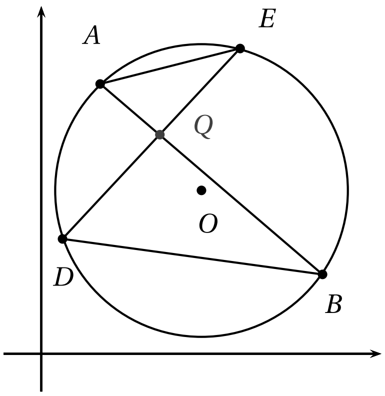
	$\angle A = \angle F - \angle D$	(1)
Pero:	medida del $\angle F = \dfrac{\widehat{DE}}{2}$	(2) Inscrito;
y	medida del $\angle D = \dfrac{\widehat{BF}}{2}$	(3) Inscrito.

Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos:

$$\text{medida del } \angle A = \frac{\widehat{DE}}{2} - \frac{\widehat{BF}}{2} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BF}}{2}$$

Caso particular Un caso particular del ángulo exterior es el ángulo circunscrito que es formado por dos tangentes a la circinferencia. Su medida es también la semidiferencia de los arcos lmitados por los puntos de contacto.

Teorema 2.17. *Relaciones entre las cuerdas: " Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los dos segmentos determinaos en una cuerda es igualal producto de los segmentos determinados en la otra "*



Hipótesis:

- $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son cuerdas que se cortan en Q;
- $\overline{QA}$ y $\overline{QB}$ son los segmentos determinados en $\overline{AB}$;
- $\overline{QD}$ y $\overline{QE}$ son los segmentos determinados en $\overline{DE}$

Tesis:

$$\overline{QA} * \overline{QB} = \overline{QD} * \overline{QE}$$

Construcción auxiliar: Unimos A con E y B con D, formándose los triangulos $\triangle BDQ$ y $\triangle AEQ$.

Demostración:

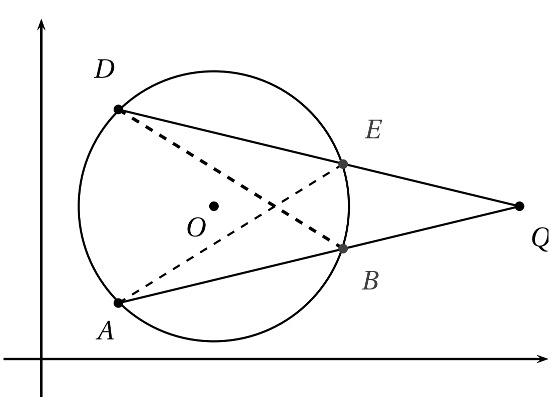
En los $\triangle BDQ$ y $\triangle AEQ$:	$\angle A = \angle D$	inscritos en el mismo arco $\widehat{BE}$.
	$\angle B = \angle E$	inscritos en el mismo arco $\widehat{AD}$. Estableciendo la
	$\triangle BDQ \sim \triangle AEQ$	por tener dos ángulos iguales.

proporcionalidad entre los lados homólogos, tenemos:

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{QE}}{\overline{QB}}$$

$\therefore \overline{QA} * \overline{QB} = \overline{QD} * \overline{QE}$ por ser el producto de los medios igual al producto de los extremos.

Teorema 2.18. *Relaciones entre secantes: "Si por un punto exterior de una circunferencia se traza dos secantes, el producto de una secante por su segmento exterior, es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior"*



Hipótesis: $\overline{QA}$ y $\overline{QD}$ secantes; $\overline{QB}$ y $\overline{QE}$ segmentos exteriores.

Tesis: $\overline{QA} * \overline{QB} = \overline{QD} * \overline{QE}$.

Construcción auxiliar:: Unimos A con E y B con D, formándose los triángulos $\triangle QEA$ y $\triangle QBD$

Demostración: En los $\triangle QEA$ y $\triangle QBD$:

$$\begin{array}{lll} & \angle Q = \angle Q & \text{común;} \\ & \angle A = \angle D & \text{Inscritos en } \widehat{BE}; \\ \therefore & \triangle QEA \sim \triangle QBD & \text{por tener dos ángulos iguales.} \end{array}$$

Entre los lados homólogos estableciendo la proporcionalidad:

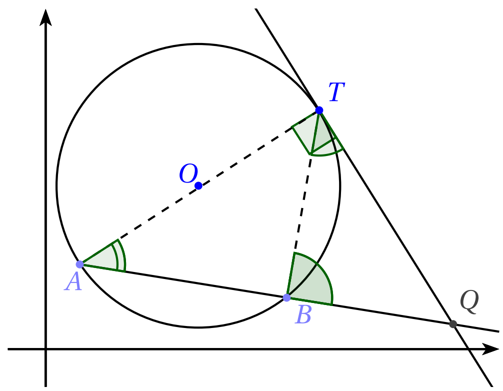
$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{QE}}{\overline{QB}}$$

$\therefore \overline{QA} * \overline{QB} = \overline{QD} * \overline{QE}$; por ser el producto de los medios iguales al producto de los extremos.

Teorema 2.19. *Propiedad de la tangente y la secante trazadas desde un punto exterior de una circunferencia: "Si por un punto exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento exterior".*

Hipótesis: $\overline{QT}$ y $\overline{QA}$ son tangentes y secantes de la circunferencia O.

Tesis: $\frac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$.



Construcción auxiliar: Unimos T con A y B, formándose los triángulos $\triangle QTA$ y $\triangle QTB$.

Demostración: En los $\triangle QTA$ y $\triangle QTB$:

$$\begin{array}{lll} & \angle Q = \angle Q & \text{común;} \\ & \angle A = \angle T & \text{inscritos y semi-inscrito en } \widehat{BT}; \\ \therefore & \triangle QTA \sim \triangle QTB & \text{por tener dos ángulos iguales.} \end{array}$$

Entre los lados homólogos estableciendo la proporcionalidad:

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{QB}}$$

CAPÍTULO 3

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Teniendo las definiciones, teoremas y demás herramientas expuestas en el capítulo 1 y en el capítulo 2, se dará paso al estudio de la ecuación general y canoníca de la circunferencia y demás conceptos que se desprenden de estas, en este capítulo tambien podrán encontrar ejemplos con el fin de explicar los conceptos y aclarar de alguna forma las dudas que se puedan generar de dichos conceptos, la información presentada a continuación se encuentra ampliada en [1] de la bibliografía.

Después de la recta, la línea mas familiar al estudiante es la circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de geometría elemental. Consideramos la circunferencia como un ejemplo de lugar geométrico.

3.1. Ecuación de la circunferencia

3.1.1. Forma ordinaria.

La ecuación de la circunferencia se obtendra a partir de su respectiva definición.

Teorema 3.1. *La circunferencia cuyo centro es el punto $O(h,k)$ y cuyo radio es la constante r y tiene por ecuación*

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Demostración 1. *Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de centro $O(h,k)$ y radio r. Entonces, por definición de circunferencia , el punto P debe satisfacer la condición geométrica*

$$\left|\overline{OP}\right|=r, \tag{3.1}$$

la cual equivale a la ecuación

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

de donde,

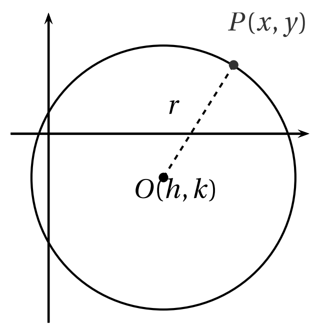
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Reciprocamente, sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera cuyas coordenadas satisfacen la ecuación enunciada al inicio, de manera que se verifica la igualdad

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2. \tag{3.2}$$

De aquí se deduce, que

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$



que es la expresión analitíca de la condición geométrica (3.1) aplicada al punto P_1. Por tanto. resulta que (3.2) es la ecuación buscada.

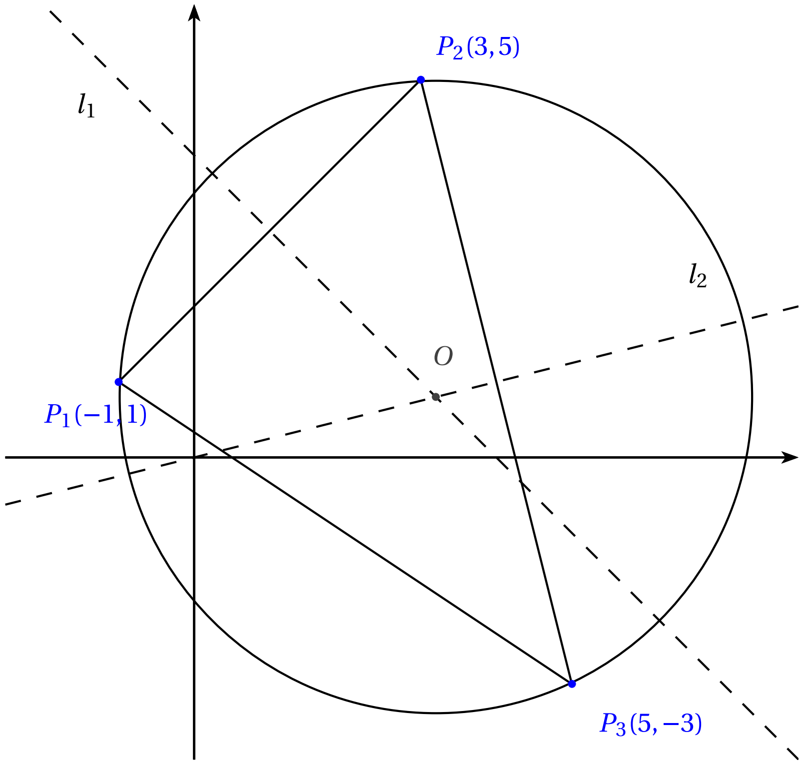
Para el caso particular en el que el centro O está en el origen, $h = k = 0$, y tenemos:

Corolario 3.1. *La circunferencia de centro en el origen y de radio r tiene por ecuación*

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3.3}$$

Por el *teorema 3.1* observamos que, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación puede escribirse inmediatamente. Esto sugiere un método para obtener la ecuación de una circunferencia en cualquier problema dado; todo lo que se necesita saber son las coordenadas del centro y la longitud del radio a partir de la condiciones dadas. La construcción de una circunferencia, en Geometría elemental, implica la determinación del centro y el radio; el método allí empleado, aunque no siempre es el más corto, puede usarse para obtener dicha ecuación en geometría analítica la ecuación.

Ejemplo 3.1. *Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son* $P_1(-1,1)$, $P_2(3,5)$, $P_3(5,-3)$.



Solución

La construcción a que pasa por los tres puntos dados es un problema conocido de la Geometría elemental. El método consiste en construir las mediatrices l_1 y l_2, respectivamente, de dos cualesquiera de los lados, digamos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$. La intersección O de l_1 y l_2 es el centro y la distancia de O a cualquiera de los puntos P_1, P_2, P_3 es el radio. Ahora determinaremos la ecuación de la circunferencia siguiendo este método.

Calculando los puntos medios de los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$ y $\overline{P_1P_3}$ obtenemos de igual manera las pendientes de los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$.

Vamos a encontrar los puntos medios de los lados de los triángulos:

$$
\begin{aligned}
P_{m1}(x,y) &= \left(l_{1x}, l_{1y}\right) = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (1,3)\\
P_{m2}(x,y) &= \left(l_{2x}, l_{2y}\right) = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (4,1)\\
P_{m3}(x,y) &= \left(l_{3x}, l_{3y}\right) = \left(\frac{5-1}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = (2,-1)
\end{aligned}
$$

Ahora hallaremos las respectivas pendientes de los lados l_1 y l_2

$$m_1 = \frac{1-5}{-1-3} = 1 \qquad\qquad m_2 = \frac{-3-5}{5-3} = -4$$

La ecuación de l_1 esta dado por:

$y-3 = -\frac{1}{\frac{5-1}{3+1}}(x-1) = -(x-1)$, luego $y = -x+4$

La ecuación de l_2 esta dado por:

$y-1=-\frac{1}{\frac{5+3}{3-5}}(x-4)=-\frac{1}{4}(x-4)$, luego $y=\frac{1}{4}x$
Igualando se obtiene $\frac{1}{4}x{=}{-}x+4$ implica que $\frac{5}{4}x=4$, de donde $x=\frac{16}{5}$
Puesto que $y=-x+4$ entonces $y=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$, lo que significa que el centro de la circunferencia buscada es $\left(\frac{16}{5},\frac{4}{5}\right)$, y el radio esta dado por:

$$r=\sqrt{\left(3-\frac{16}{5}\right)^2+\left(5-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{21}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+441}{25}}=\sqrt{\frac{442}{5}}$$

así que la ecuación de la circunferencia con estas caracteristicas es:

$$\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25}$$

o equivalentemente a:

$$5x^2-32^x+5y^2-8y=44$$

3.1.2. Forma general.

Si desarrollamos la ecuación ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{3.4}$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

Equivalentemente

$$x^2+y^2-(2h)x-(2k)y+[h^2+k^2-r^2]=0$$

Esta es una ecuación de la forma:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Donde al carecer de término xy, resulta $B=0$, ademas comparando terminos semejantes tenemos que:

$$A=1,\ B=0,\ C=1,\ D=-2h,\ E=-2k,\ F=h^2+k^2-r^2$$

Reemplazando en la ecuación anterior tenemos:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{3.5}$$

El problema que se presenta ahora es averiguar si, reciprocamente, toda ecuación de la forma general representa una circunferencia . Para contestar esta pregunta, pasaremos de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia.

La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ equivale a: $\left(x^2 + Dx\right) + \left(y^2 + Ey\right) = -F$, y este a su vez a $\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \left(\frac{D^2}{4}\right) + \left(\frac{E^2}{4}\right) - F$,es decir, $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 + 4f}{4}$,

Luego, el centro esta dado por $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$, y el radio por $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{2} > 0}$

Hay tres casos posibles por considerar:

1. Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación anterior representa una circunferencia de centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio igual a $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.
2. $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación 3.6 es una circunferencia de radio 0; es decir, la ecuación 3.6 representa un solo punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.
3. Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la ecuación anterior se dice que representa un círculo imaginario. En nuestra Geometría real, sin embargo, la ecuación 3.6 *no representa*, en este caso, un *lugar geométrico*.

Aunque el caso (2) puede considerarse como un caso de limite del caso (1), en adelante consideraremos que una ecuación representa una circunferencia solamente en el caso (1). por tanto tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.2. *La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia de radio diferente de cero solamente si*

$$D^2 + E^2 - 4F > 0.$$

Las coordenadas del centro son, entonces, $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Demostración 2. *En efecto la ecuación de la circunferencia en su forma general es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, Agrupando términos semejantes se obtiene $(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) + F = 0$, luego Completando cuadrados se tiene $\left(x^2 + Dx + \frac{D^2}{4}\right) + \left(y^2 + Ey + \frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$, de donde $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}\right)$*

Esta ecuación se encuentra en la forma centro-radio y tendra una gráfica, la cual es una circunferencia, si:

- $D^2 + E^2 - 4F > 0$
- $(D^2 + E^2 - 4F = 0$

Así podemos decir que las coordenadas del centro son $O\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y el radio esta dado por $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Ejemplo 3.2. *Reducir la siguiente ecuación a la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia. Si la ecuación representa una circunferencia halla su centro y su radio*

$$2x^2+2y^2-10x+6y-15=0$$

Solución
Primero divideremos la ecuación por 2, coeficiente de x^2, y pasamos el término independiente al segundo miembro. Esto nos lleva al resultado, después de ordenar los términos

$$(x^2-5x)+(y^2+3y)=\frac{15}{2}$$

Para completar los cuadrados, sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y ambos mienbros. Esto nos da

$$\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+\left(y^2+3y+\frac{9}{4}\right)=\frac{15}{2}+\frac{25}{4}+\frac{9}{4}$$

que puede escribirse de la forma

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=16$$

Por lo tanto, la ecuación dada representa una circunferencia de centro $\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y cuyo radio es 4.

3.2. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas

La ecuación de una circunferencia en su forma general es:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{3.6}$$

Observamos que hay tres constantes arbitrarias, D, E, F. De manera semejante en la forma ordinaria

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{3.7}$$

Tenemos tres constantes arbitrarias independientes, h, k, r. Necesitamos tres condiciones para determinar los valores de las constantes. Como toda ecuación de una circunferencia se puede expresar en cualquiera de sus dos formas, la ecuación de la circunferencia se puede obtener determinando los valores de las tres constantes. Para hallar los valores de las constantes se requiere tres ecuaciones independientes, las cuales se pueden obtener de tres condiciones independientes.

En conclusión analitícamente la ecuación de una circunferencia se determina completamente por tres condiciones independientes.

Una circunferencia también queda perfectamente determinada geométricamente por tres condiciones independientes; Hay innumerables condiciones geometricas que determinan una circunferencia, por ejemplo, una circunferencia que pasa por tres puntos que no se encuentren sobre una recta.

Ejemplo 3.3. *Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos* $O(-1,1)$*,* $P(3,5)$ *y* $Q(5,-3)$*.*

Solución
La ecuación buscada es de la forma general

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Debemos hallar el valor de las constantes D, E, F.

Los tres puntos dados estan sobre la circunferencia, por lo tanto deben satisfacer la ecuación (3.7). De esta manera obtenemos

Por pasar por el punto $O(-1,1)$, $1+1-D+E+F=0$, es decir $D-E-F=2$
Por pasar por el punto $P(3,5)$, $9+25+3D+5E+F=0$, es decir $3D+5E+F=-34$
Por pasar por el punto $Q(5,-3)$, $25+9+5D-3E+F=0$, es decir $5D-3E+F=-34$

Resolviendo este sistema de 3x3 tenemos $4D+4F=-32$ y $6D-4F=-32$ lo cual equivale a tener $2D+2F=-16$ y $3D-2F=-16$, luego $5D=-32$, de donde $D=\dfrac{-32}{5}$, $F=-8-D=-8+\dfrac{32}{5}=-\dfrac{8}{5}$ y $E=D-F-2=-\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{5}-2=-\dfrac{24}{5}-2=-\dfrac{34}{5}$
Los valores de las constantes son:

$$D=\frac{-32}{5},\ E=\frac{-8}{5},\ F=\frac{-34}{5}$$

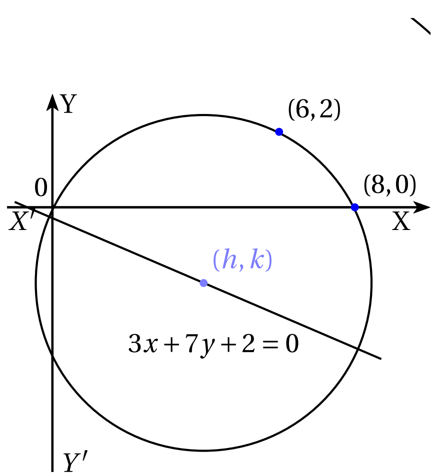
Luego la ecuación buscada es:

$$x^2+y^2-\frac{32}{5}x-\frac{34}{5}y-\frac{8}{5}=0$$

Ejemplo 3.4. *Hallar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos* $A(6,2)$*,* $B(8,0)$ *y cuyo centro esta sobre la recta* $3x+7x+2=0$

Solución
Supongamos que la ecuación buscada en la forma ordinaria, es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



1. Como el centro (h,k) esta sobre la recta $3x+7y+2=0$, sus cooordenadas satisfacen la ecuación de la recta, y tenemos

$$3h+7k+2=0 \tag{3.8}$$

2. Como los puntos estan sobre la circunferencia, estos deben satisfacer las ecuaciones de la circunferencia:

$$(6-h)^2+(2-k)^2=r^2 \quad (3.9) \qquad (8-h)^2+k^2=r^2 \quad (3.10)$$

De aquí:

$$(6-h)^2+(2-k)^2=(8-h)^2+k^2$$

así que:

$$(6-h)^2-(8-h)^2=k^2-(2-k)^2$$

de donde,

$$[(6-h)+(8-h)][(6-h)-(8-h)]=[k-(2-k)][k+(2-k)]$$
$$(14-2h)(-2)=(2k-2)(2)$$
$$(2h-14)=(2k-2)$$

de aquí $h-7=k-1$ es decir $h-k-6=0$

En este momento tenemos dos ecuaciones con dos variables:

$3h+7k=-2$ y $h-k=6$, las cuales son equivalentes a

$3h+7k=-2$ y $7h-7k=42$, y esto a su vez lleva a que $10h=40$, lo cual significa que $h=4$. Con este valor tenemos que $k=h-6=4-6=-2$. Por lo tanto el centro de la circunferencia es $(4,-2)$.

El radio de la circunferencia es:$r=\sqrt{(6-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia planteada es: $(x-4)^2+(y+2)^2=20$

Teorema 3.3. *La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no colineales P_1,P_2 y P_3 es:*

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Demostración 3. *Como es una ecuación de una circunferencia debe cumplir*

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Ahora como $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ y $P_3(x_3,y_3)$ estan en la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, se debe satisfacer que

$$\begin{array}{ll} x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0 & ; \\ x_2^2+y_2^2+Dx_2+Ey_2+F=0 & \text{y} \\ x_3^2+y_3^2+Dx_3+Ey_3+F=0 & \text{, por lo tanto} \end{array}$$

Despejando a D, E, F tenemos

$$\begin{array}{l} Dx_1+Ey_1+F=-(x_1^2+y_1^2) \\ Dx_2+Ey_2+F=-(x_2^2+y_2^2) \\ Dx_3+Ey_3+F=-(x_3^2+y_3^2) \end{array}$$

$$D=\begin{vmatrix} -(x_1^2+y_1^2) & y_1 & 1 \\ -(x_2^2+y_2^2) & y_2 & 1 \\ -(x_3^2+y_3^2) & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad E=\begin{vmatrix} x_1 & -(x_1^2+y_1^2) & 1 \\ x_2 & -(x_2^2+y_2^2) & 1 \\ x_3 & -(x_3^2+y_3^2) & 1 \end{vmatrix} \qquad F=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & y_2 & -(x_2^2+y_2^2) \\ x_3 & y_3 & -(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}$$

Identifiquemos

$$s=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Reemplazando en la ecuación general obtenemos:

$x^2+y^2+\dfrac{D}{S}x+\dfrac{E}{S}y+\dfrac{F}{S}=0$, lo cual equivale a

$S(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=0$, así que

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} -(x_1^2+y_1^2) & y_1 & 1 \\ -(x_2^2+y_2^2) & y_2 & 1 \\ -(x_3^2+y_3^2) & y_3 & 1 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} x_1 & -(x_1^2+y_1^2) & 1 \\ x_2 & -(x_2^2+y_2^2) & 1 \\ x_3 & -(x_3^2+y_3^2) & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & y_2 & -(x_2^2+y_2^2) \\ x_3 & y_3 & -(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}=0$$

$$(-1)^2(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^3x\begin{vmatrix} -(x_1^2+y_1^2) & y_1 & 1 \\ -(x_2^2+y_2^2) & y_2 & 1 \\ -(x_3^2+y_3^2) & y_3 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^4y\begin{vmatrix} x_1 & -(x_1^2+y_1^2) & 1 \\ x_2 & -(x_2^2+y_2^2) & 1 \\ x_3 & -(x_3^2+y_3^2) & 1 \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^5\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & y_2 & -(x_2^2+y_2^2) \\ x_3 & y_3 & -(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}=0$$

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} -(x_1^2+y_1^2) & y_1 & 1 \\ -(x_2^2+y_2^2) & y_2 & 1 \\ -(x_3^2+y_3^2) & y_3 & 1 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} x_1 & -(x_1^2+y_1^2) & 1 \\ x_2 & -(x_2^2+y_2^2) & 1 \\ x_3 & -(x_3^2+y_3^2) & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -(x_1^2+y_1^2) \\ x_2 & y_2 & -(x_2^2+y_2^2) \\ x_3 & y_3 & -(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}=0$$

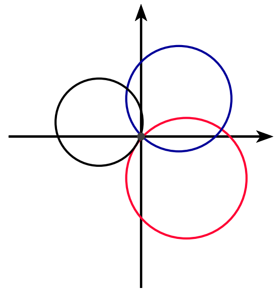
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

3.3. Familias de circunferencias.

Ahora consideremos familias o haces de circunferencias; en el capítulo anterior demostramos que una circunferencia y su ecuación se detreminan por tres condiciones independientes. Una circunferencia que satisface menos de tres condiciones indpendientes no es, por tanto, única. La ecuación de una circunferencia que satisface a dos condiciones, contiene una constante arbitraria llamada *parámetro*.

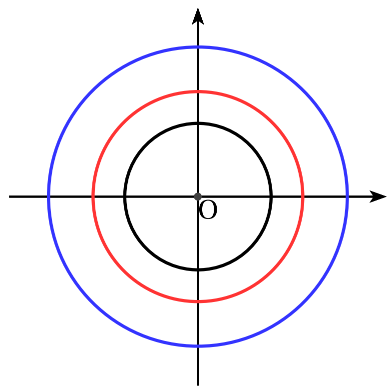
Estudiamos los siguientes casos:

1. **La ecuación contiene dos parámetros:** En la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ tenemos las constantes D, E las cuales pueden tomar cualquier valor real y representan la familia formada por todas las circunferencias que pasan por el origen de las coordenadas.

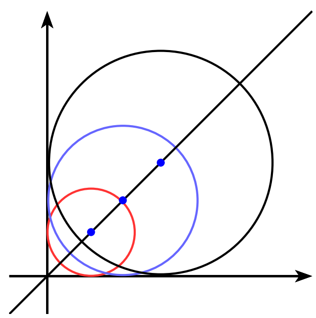


2. **La ecuación contiene un parametro:** Esta a su vez tiene los siguientes casos particulares:

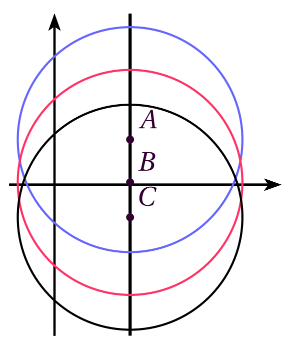
   a) La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$: Esta contiene el parametro $r > 0$ y representa una fila de circunferencias concéntricas.(con el mismo centro) que es el origen de coordenadas $O(0,0)$ y con todos los radios posibles.



   b) la ecuación $(x-h)^2+(y-h)^2 = h^2$ contiene el parametro $h > 0$ y representa una familia de circunferencias que son tangentes a los ejes coordenados y que todos sus centros estan sobre la recta $y = x$ estas circunferencias toman el nombre de coaxiales.



   c) La ecuación $(x-2)^2+(y-k)^2 = 9$ contiene el parametro $k \in R$ y representa la familia de circunferencias cuyos centros se localizan sobre la recta $x = 2$ y todas tienen un radio $r = 3$



en donde el parámetro k es cualquier número positivo.

Consideremos ahora el caso importante de la familia de curvas que pasan por la intersecciones de dos circunferencias dadas. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias dadas cualesquiera, cuyas ecuaciones son:

$$C_1 : x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \qquad (1)$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0 \qquad (2)$$

Multiplicamos la ecuación (2) por un parámetro k

$$C_2 : (x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2).k = 0.k \qquad (3)$$

y sumando las ecuaciones (1) y (3) se obtiene la ecuación:

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0 \ (4)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales. Supongamos que los circulos C_1 y C_2 se cortan en dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Como las coordenadas (x_1, y_1) de P_1 satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2), también satisfacen la ecuación (4), y esta reduce a la forma $0 + k(0) = 0$, que es verdadera para todos los valores de k. Análogamente, las coordenadas (x_2, y_2) de P_2 que satisfacen de igual maneras las ecuaciones (1) y (2) y también la ecuación (4) representa las familia de curvas que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias C_1 y C_2. Para determinar la naturaleza de las curvas de esta familia, escribiremos (4) en la forma

$$(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + (D_1 + kD_2)x + (E_1 + kE_2)y + F_1 + kF_2 = 0 \ (5),$$

Si $k = -1$, la ecuación (5) se reduce a una de primer grado y, por lo tanto, representa una linea recta. Pero, para cualquier otro valor de k, la ecuación (5) representa una circunferencia de acuerdo con el teorema 2 del capítulo 2. En particular, para $k = 0$, la ecuación (5) se reduce a C_1.

La ecuación (4) es particularmente útil para obtener la ecuación de una curva que pasa por las intersecciones de las circunferencias dadas, ya que entonces no es necesario determinar las coordenadas, de los puntos de intersección.

Ejemplo 1. *Las ecuaciones de dos circunferencias son:*

$$C_1 : x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 = 0$$
$$C_2 : x^2 + y^2 - x + 6y + 3 = 0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia C_3 que pasa por la intersecciones de C_1 y C_2 y tiene su centro sobre la recta $l : x - y - 2 = 0$.

Solución
La circunferencia buscada C_3 es un elemento de la familia

$$x^2 + y^2 + 7x - 10y + 31 + k(x^2 + y^2 - x - 6y + 3) = 0 \qquad (6)$$

en donde el parámetro k debe determinarse por la ecuación de que el centro de C_3 sobre la recta l. EL centro de cualquier circunferencia de la familia (6) se halla así:

$$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (7-k)x - (10+6k)y + 31 + 3k$$

$$\left[x^2+\frac{(7-k)}{1+k}x+\frac{(7-k)^2}{4(1+k)^2}\right]+\left[y^2-\frac{(10+6k)}{1+k}y+\frac{(10+6k)^2}{4(1+k)^2}\right]=-31-3k+\frac{(7-k)^2}{4(1+k)^2}+\frac{(10+6k)^2}{4(1+k)^2}$$

$$\left(x^2+\frac{(7-k)}{2(1+k)}\right)\left(y^2-\frac{(10+6k)}{2(1+k)}\right)=-31-3k+\frac{(7-k)^2}{4(1+k)^2}+\frac{(10+6k)^2}{4(1+k)^2}$$

De aqui sus coordenadas son $\left(\frac{k-7}{2(k+1)},\frac{3k+5}{k+1}\right)$. como estas coordenadas deben satisfacer la ecuación de l, tenemos

$$\frac{k-7}{2(k+1)}-\frac{3k+5}{k+1}-2=\frac{(k-7)-2(3k+5)-4(k+1)}{2(k+1)}=k-7-6k-10-4k-4=-9k-21=0$$

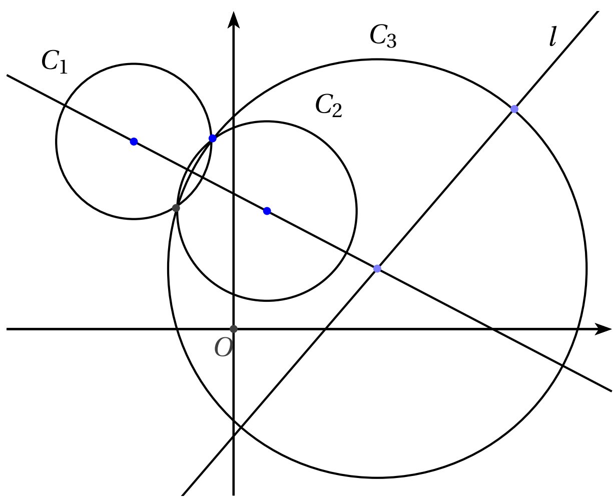
$$k=-\frac{21}{9}=-\frac{7}{3}$$

de donde $k=-\frac{7}{3}$. Sustituyendo este valor de k en (6) obtenemos la ecuación de C_3:
$x^2+y^2+7x-10y+31-\frac{7}{3}\left(x^2+y^2-x-6y+3\right)=-4x^2-4y^2+28x+12y+72=0$

Luego, la ecuacion buscada es:

$$x^2+y^2-7x-3y-18=0$$

En la siguiente figura se han trazado las tres circunferencias C_1, C_2, C_3 y la recta l.



Consideremos ahora el caso de dos circunferencias C_1 y C_2 tangente entre sí, en el punto $P_3(x_3, y_3)$. Por un razonamiento análogo al anterior, en el caso de intersección en dos puntos diferentes, podemos demostrar que, para cada valor de k diferente de -1, la ecuación (3) representa una circunferencia tangente a C_1 y C_2 en P_3. Finalmente, consideremos el caso de que C_1 y C_2 no tenga ningun punto común. Entonces, las coordenadas de un punto que satisfacen la ecuación (2) no pueden satisfacer la ecuación (1) y, por lo tanto no puede satisface la ecuación (3) para ningún valor de k. Análogamente, las coordenadas de un punto que satisfacen (1) no pueden satisfacer (2), y, por lo tanto,tampoco (3), para ningún valor de k excepto para $k=0$, en cuyo caso, (3) se reduce a (1).

En resumen, ninguna circunferencia de la familia (3), excepto C_1, tiene un punto en común con C_1 o C_2. Aun más, sea P_4 un punto cualquiera que esté sobre cualquier elemento de la familia

(3), excepto sobre C_1. Acabamos de demostrar que P_4 en las ecuaciones (1) y (2), los primeros miembros no se reducirán a cero sino que tendrán valores diferentes a cero, digamos k_1 y k_2 respectivamente. Por lo tanto, si se sustituye en (3) las coordenadas de P_4 la ecuación toma la forma:

$$k_1 + kk_2 = 0,$$

de donde k tiene el único valor $-\dfrac{k_1}{k_2}$ esto significa que solamente una circunferencia de la familia (3) que pasa por el punto P_4. Como P_4 se eligió como *cualquier* punto sobre *cualquier* elemento de (3), excepto C_1, deduce que ningún par de circunferencias de la familia (3) tienen un punto en común.

En los primeros casos considerados anteriormente , es decir, cuando C_1 y C_2 tienen uno o dos puntos comunes, la ecuación (3) representa una circunferencia real para todo valor de k, ya que por lo menos existe un punto del lugar geométrico. Pero esto no ocurre cuando C_1 y C_2 no tiene ningún punto común. Entonces no se puede asegurar que la ecuación (3) representa una circunfrencia real para todo valor de k. Si C_1 y C_2 no tiene ningún punto en común es facíl encontrar ejemplo, en los que, para valores especificos de k, la ecuación (3) no representa ninguna circunferencia real.

La recta que pasa por los centros de dos circunferencias no concéntricas se llaman *recta de los centros*. Es muy sencillo demostrar que todas las circunferencias de la familia (3) tiene un centro en la recta de centros C_1 y C_2. En efecto lso centros de C_1 y C_2 son: $\left(-\frac{D_1}{2}, -\frac{E_1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{D_2}{2}, -\frac{E_2}{2}\right)$, respectivamente, y la ecuación de la recta que contiene a estos dos puntos es:

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2E_1 - D_1E_2 = 0,$$

la cual satisface por las coordenadas $\left(-\dfrac{D_1 + kD_2}{2(k+1)}, -\dfrac{E_1 + kE_2}{2(k+1)}\right)$ del centro de cualquier circunferencia definida por (3).
Todos los resultados precedentes en resumen en el siguiente

Teorema 3.4. *Si las ecuaciones de dos circunferencias dadas cualesquiera C_1 y C_2 son:*

$$C_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$C_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

representa una familia de circunferencias todas las cuales tienen sus centros en la recta de los centros C_1 y C_2.

- *Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes la ecuación representa, para todos los valores de k diferentes de -1, todas las circunferencias que pasan por los dos puntos de interseccion C_1 y C_2, con la única exepción de C_2 misma.*

- *Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, la ecuación representa para todos los valores de k diferentes de -1, todas las circunferencias que son tangentes a C_1 y C_2 en su punto común, con la única excepción de C_2 misma.*

- *Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto común la ecuación representa una circunferencia para cada valor de k diferente de -1, siempre q ue la ecuación resultante tenga coeficientes que satisfagan las condiciones especificas del teorema 2 del Capítulo 2. Ningún par de circunferencias de la familia tienen un punto común con ninguna de las dos circunferencias C_1 y C_2.*

3.4. Eje Radical

En el artículo anterior hemos considerado dos circunferencias diferentes, C_1 y C_2, de ecuaciones

$$C_1 : x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \tag{3.11}$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0 \tag{3.12}$$

A partir de estas ecuaciones formamos la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) \tag{3.13}$$

y la discutimos como ecuación de una familia de circunferencias para todos los valores de k, excepto -1. Si $k = -1$ la ecuación, (3.13) toma la forma

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0 \tag{3.14}$$

Si C_1 y C_2, no son concéntricas, se verificará $D_1 \neq D_2$o $E_1 \neq E_2$, o ambas, de manera que por lo menos uno de los coeficientes de x y y en (3.14) será diferente de cero, y la ecuación (3.14) representa entonces una linea recta llamada *eje radical* de C_1 y C_2.

Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes. El eje radical pasa por estos puntos y, por tanto, coinciden con su cuerda común. Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, su eje radical es la tangente comun y no son concentricas, su eje radical no tiene ningun punto común con ninguna de las dos circunferencias.

Ahora demostraremos que el eje radical de dos circunferencias cualesquiera es perpendicular a su recta de los centros. La ecuación de la recta de los centros C_1 y C_2 es

$$2(E_1 - E_2)x - 2(D_1 - D_2)y + D_2 E_1 - D_1 E_2 = 0$$

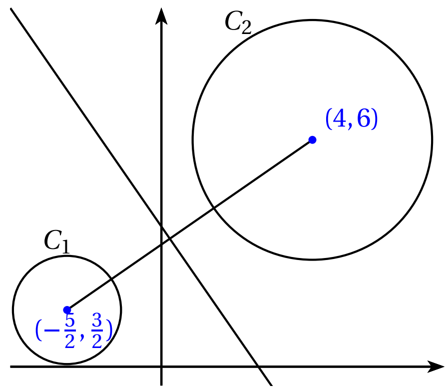
y la pendiente de esta recta es $\dfrac{E_1 - E_2}{D_1 - D_2}$, si $E_1 \neq E_2$. Como estas pendientes son negativamente reciprocas, se sigue que el eje radical es perpendicular a la recta de los centros si $D_1 = D_2$, entonces, por la ecuación (3.14), resulta que el eje radical es paralelo al eje X, y por la ecuación anterior, la recta de los centros es paralela al eje Y; por tanto, en este caso, el eje radical y la linea de los centros también son perpendiculares entre sí. Análogamente, si $E_1 = E_2$, el eje radical esparalelo al eje Y y la recta de los centros es paralela al eje Y y la recta de los centros es paralela al eje X; por lo tanto, son perpendiculares entre sí.

Ejemplo 3.5. *Hallará la ecuación del eje radical de las circunferencias*

$$C_1 : 2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0 \tag{3.15}$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0 \tag{3.16}$$

y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.



Solución
Vamos a multiplicar la ecuación (3,7) por 2 y luego la restamos de la ecuación (3,6) así:

$$\begin{array}{c} 2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 9 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 16x - 24y + 86 = 0 \\ \hline l : 0x^2 + 0y^2 + 26x + 18y - 77 = 0 \end{array}$$

$l : 26x + 18y - 77 = 0$ Es la ecuación del eje radical.
Su pendiente es $-\dfrac{13}{9}$
Las coordenadas de los centros C_1 y C_2 se encuentran facilmente y son $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ y $(4,6)$, respectivamente, de manera que la pendiente de la recta de los centros es $\dfrac{6-(3/2)}{4+(5/2)} = \dfrac{9}{13}$, que es negativamente recíproca de la pendiente del eje radical. por tanto, el eje radical es perpendicular a la recta de los centros.

3.5. Tangente a una curva

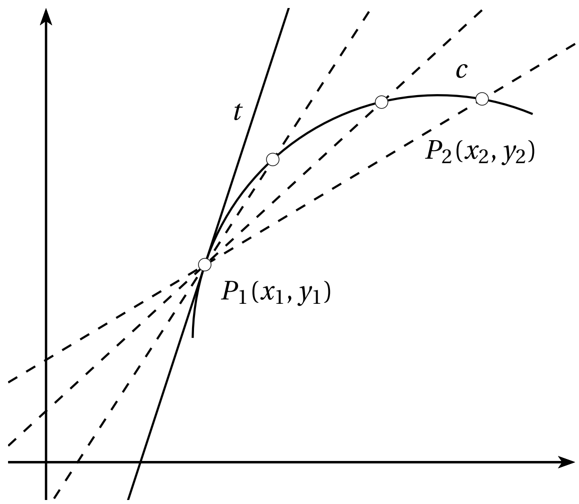
La tangente se define como una recta que tiene un solo punto común con la circunferencia. Esta definición, sufieciente para la circunferencia, es inadecuada para las curvas planas en general, pues hay curvas planas en las cuales una tangente en un punto corta a la curva en uno o más puntos diferentes. Por esto, vamos a dar una definición de tangente que se aplique a todas las curvas planas en general.

Sea la ecuación de una curva plana cualquiera C

$$f(x, y) = 0 \tag{3.17}$$

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos diferentes cualesquiera de C tales que el arco de curva que los une sea continuo; es decir, P_2 puede moverse hacia P_1 permaneciendo siempre sobre la curva.

La recta que pasa por P_1 y P_2 se llama *secante*. Consideraremos que P_1 es un punto fijo mientras que P_2 se mueve a lo largo



de C hacia P_1. Entonces, a medida que P_2 se aproxima a P_1, la secante gira en el sentdo contrario al de las manecillas de un reloj en torno a P_1 y, en general tiende a una posición límite representada por la recta P_1T que se define como *la tangente a la curva C* en el punto P_1. El punto P_1 se llama *punto de tangencia o punto contacto*de la tangente. *La pendiente de la curva C en el punto P_1se define como la pendiente a C en P_1*

Para determinar la ecuación de la tangentes a una curva dad en un punto particular de la curva, se conoce un punto, el punto de contacto; por lo tanto, queda por hallar la pendiente de la tangente. La pendiente se la secante P_1P_2 es:

$$m_s = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \qquad x_1 \neq x_2 \tag{3.18}$$

Si c es una curva cualquiera diferente de una línea recta, el valor de m_s varia a medida que P_2 se aproxima a P_1. Definiéndose la tangente P_1T como la posición del límite de la secante P_1P_2 a medida que P_2 tiende a P_1, se sigue que la pendiente m de la tangente es el valor del límite de la pendiente m_s de la secante dado por 3.19 , y escribimos

$$m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \tag{3.19}$$

siempre que, por supuesto, ese límite exista. La determinación, signicado y propiedades de este límite son problemas del *càlculo infinitesimal.*

Tomamos por lo tanto, (3.18) como tipo de tales ecuaciones y consideramos el sistema formado por esta ecuación y la ecuación de la recta,

$$y = mx + k \tag{3.20}$$

Las soluciones comunes de (3.18) y (3.21) son dos y pueden obtenerse sustituyendo primero y por $mx + k$ en (3.18), y resolviendo la ecuación cuadrática en una variable que resulta, de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \tag{3.21}$$

Las raíces de (3.22) pueden ser reales y desiguales, reales e iguales o complejas correspondiendo, respectivamente a la interpretación geométrica de que la recta (3.21) y la curva (3.18) se corten en dos puntos diferentes, tengan un punto común o no se corten. Para el caso de intersección en dos puntos diferentes, la recta (3.21) es una secante de la curva (3.18). Si ahora, imaginamos que varian los coeficientes reales de (3.22) se aproximan a la otra, esto equivale, geométricamente, a que la secante va variando hasta ocupar la posición límite de la tangente, como en la definición anterior. De este razonamiento se deduce , por lo tanto, que la *igualdad de las raices de la ecuación (5) es una condición para la tangencia de la recta (3.21) a la curva (3.18).*

Haremos uso de esta condición al determinar las ecuaciones de las tangentes a las curvas planas algebraicas del segundo grado.

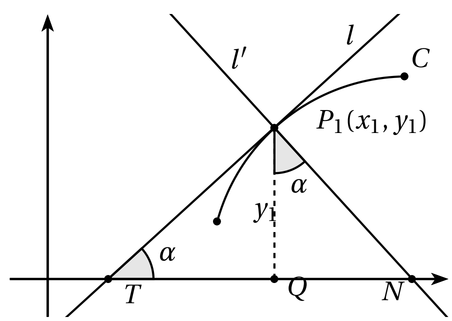
Sea $P_1(x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la curva continua C. Sea l la tangente a C en P_1. Si m es la pendiente de l, la ecuación de la tangente l es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sea l' la recta trazada por P_1 perpendicular a la tangente l; la recta l' se llama *normal* a la curva C en el punto P_1. La ecuación de la normal l' es

$$y - y_1 = \frac{1}{m}(x - x_1), \quad m \neq 0$$

Supongamos que la tangente y la normal cortan a X en los puntos T y N, respectivamente. La longitud $\overline{P_1 T}$ del segmento de la tangente l comprendido entre el punto de contacto y el eje X se llama *longitud de la tangente*. La longitud $P_1 N$ del segmento de la normal l' comprendido entre el punto de contacto y el eje X se llama *longitud de la normal*. Por P_1 tracemos la ordenada $P_1 Q$.

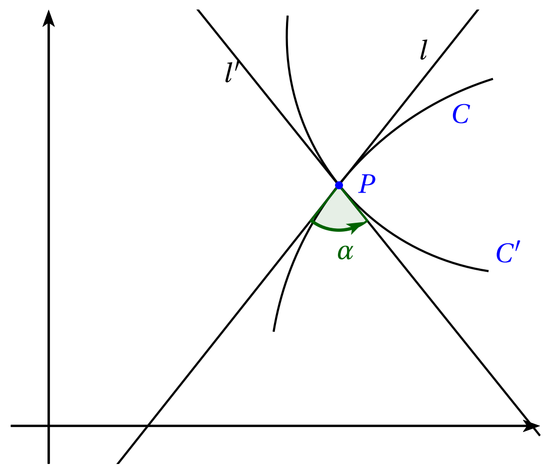


La proyección QT de la longitud de la tangente sobre el eje X se llama *subtangente*, y la proyección QN de la longitud de la normal sobre el eje X se llama *subnormal*. Sea α el ángulo de inclinación de l, de manera que $m = \tan\alpha$. Observando que el ángulo $QP_1N = \alpha$.

Teorema 3.5. *Si m es la pendiente de una curva plana continua C en el punto $P_1(x_1, y_1)$, entonces para el punto P_1 tenemos las siguientes ecuaciones y formulas:*

Ecuación de la tangente a	$C: y - y_1 = m(x - x_1)$	
Ecuación de la normal a	$C: y - y_1 = \frac{1}{m}(x - x_1),$	$m \neq 0$
Longitud de la tangente	$= \frac{y_1}{m}\sqrt{1 + m^2},$	$m \neq 0$
Longitud de la normal	$= y_1\sqrt{1 + m^2}$	
Longitud de la subtangente	$= \frac{y_1}{m}$	$m \neq 0$
Longitud de la subnormal	$= my_1$	

Sean C y $C^{'}$ dos curvas planas que se cortan en el plano P. Sean l y $l^{'}$ la tangentes a C y $C^{'}$, respectivamente, en P.



Se llama *ángulo de dos curvas en uno de sus puntos de intersección, a cualquiera de los ángulos suplementarios formados por las dos tangentes a las curvas en dicho punto*. Para las curvas C y $C^{'}$ si las pendientes de l y $l^{'}$ son m y $m^{'}$, respectivamente el ángulo que forman las curvas en P es uno de los dos ángulos θ dados, por la expresión:

$$\tan\theta = \pm\frac{m-m^{'}}{1+mm^{'}} \qquad mm^{'} \neq -1$$

Si se verifica que $mm^{'} \neq -1$, de tal manera que ambos ángulos sean rectos, se dice que las curvas son ortogonales entre sí. También, si cada elemento de una familia de curvas es ortogonal a cada uno de los elementos de una familia de una segunda familia, las curvas de uiera de las dos familias se llaman las *trayectorias ortogonales* de las curvas de la otra familia.

3.6. Tangente a una circunferencia

La determinación de la ecuación de una tangente a una circunferencia se simplifica considerablemente por la propiedad de la circunferencia, que dice: la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.

Es evidente, por el teorema 3.5, que la ecuación de la tangente a una circunferencia dada por está perfectamente determinada cuando se conocen su pendiente y el punto de contacto. Si se tiene uno de estos casos, el otro debe determinarse apartir de las condiciones del problema; según esto, tenemos los elementos necesarios para la solución de cualquier problema particular. Vamos a considerar tres problemas a saber:

- Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada en punto dado de contacto;

- Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que tiene pendiente dada;

- Hallar la ecuación de la tangente a una circunferencia dada y que pasa por un punto exterior dado.

El procedimiento para resolver cada uno de estos problemas es esencialmente el mismo. En cada caso una condición; de acuerdo con esto escribiremos primero la ecuación de la familia de rectas que satisfacen esta condición. Esta ecuacion contiene un parámetro que se determina aplicando la condición de tangencia dada anteriormente.

Ejemplo 3.6. *hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia* $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ *en el punto* $(3,5)$

Solución
La ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto $(3,5)$ es

$$y - 5 = m(x - 3) \tag{3.22}$$

en donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación $y = mx - 3m + 5$, y sustiyuendo este valor en la ecuación de la circunferencia, resulta:

$$x^2 + (mx - 3m + 5)^2 - 8x - 6(mx - 3m + 5) + 20 = 0$$

que se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (6m^2 - 4m + 8)x + (9m^2 - 12m + 15) = 0$$

Según esto la recta (3.23) será tangente a la circunferencia dad siempre que la raíces de esta última ecuación sean iguales, es decir, siempre que el discriminante se anule. Deberá, pues, verificarse la condición:

$$(6m^2 - 4m + 8)^2 - 4(m^2 + 1)(9m^2 - 12m + 15) = 0$$

La solución de esta ecuación es $m = \frac{1}{2}$, de manera que, de (3.23) la ecuación de la tangente buscada es

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

o sea,

$$x - 2y + 7 = 0$$

Ejemplo 3.7. *hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia* $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$ *que tiene de pendiente 1.*

Solución

La ecuación de la familia de rectas de pendientes 1 es

$$y = x + k \tag{3.23}$$

siendo k un parámetro cuyo valor debe determinarse. Si el valor de y dado por (3.24) se sustituye en la ecuación de la circunferencia, se obtiene

$$x^2 + (x + k)^2 - 10x + 2(x + k) + 18 = 0$$

o sea $2x^2 + (2k - 8)x + (k^2 + 2k + 18) = 0$

La condición e tangencia es $(2k-8)^2 - 8(k^2+2k+18) = 0$

Las raíces de esta ecuación son $K = -2, -10$. Por tanto, de (2), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y = x - 2 \quad \text{y} \quad y = x - 10$$

Las cuales están trazadas en la gráfica anterior.

Ejemplo 3.8. *hallar la ecuación de la tangente trazada del punto (8,6) a la circunferencia*

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$$

Solución
La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (8,6) es

$$y - 6 = m(x-8) \tag{3.24}$$

en donde el parámetro m es la perpendicular de la tangente buscada. De la ecuación (3.25), $y = mx - 8m + 6$, valor que sustituído en la ecuación de la circunferencia, da

$$x^2 + (mx - 8m + 6)^2 + 2x + 2(mx - 8m + 6) - 24 = 0$$

la cual se reduce a

$$(m^2+1)x^2 - (16m^2 - 14m - 2)x + (64m^2 - 112m + 24) = 0$$

La condición para tangencia es

$$(16m^2 - 14m - 2)^2 - 4(m^2+1)(64m^2 - 112m + 24) = 0$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que sus soluciones son

$$m = \frac{1}{5}, \frac{23}{11}$$

Por tanto, de (3.25), las ecuaciones de la tangentes que cumplen las condiciones dadas, son

$$y - 6 = \frac{1}{5}(x-8) \quad \text{y} \quad y - 6 = \frac{23}{11}(x-8)$$

es decir,

$$x - 5y + 22 = 0 \quad \text{y} \quad 23x - 11y - 118 = 0$$

CAPÍTULO 4

EJERCICIOS

Al principio de este capitulo se presentarán algunos ejercicios los cuales están propuestos en [1] de la bibliografía. Finalizando este capítulo mostraremos algunas aplicaciones y ejercicios en los cuales para su desarrollo es muy importante el concepto de circunferencia, donde sus elementos definiciones y teoremas son utilizados como herramientas para el estudio y desarrollo de fórmulas para encontrar una ecuación donde se pueda plasmar una situación y posteriormente hallar a una solución a la misma. Muchas de estas aplicaciones hacen parte de nuestro diario vivir.

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $O(-3,-5)$ y radio 7.

   Solución

   Las coordenadas del $O(-3,5)$ las cuales podemos reemplazar en la ecuación general siendo $h=-3$, $k=5$, y $r=7$; entonces tenemos

$$(x-(-3))^2+(y-5)^2=(7)^2(x+3)^2+(y-5)^2=49 \tag{4.1}$$

2. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,3)$ y $B(-4,5)$. Hallar la ecuación de la curva.

   Solución

   Sabemos que las coordenadas de los extremos del diámetro son $A(2,3)$, $B(-4,5)$ y que el centro de la circunferencia se encuentra en la mitad del segmento $\overline{AB}$ y procedemos a calcularlo.

   La coordenada del centro la hallamos, encontrando el punto medio del diámetro

   $h=\dfrac{2+(-4)}{2}=-1$; $k=\dfrac{3+5}{2}=4$

   entonces la circunferencia tiene $O(-1,4)$ procedemos a calcular la longitud del diámetro para posteriormente hallar el radio

   $|AB|=\sqrt{(2-(-4))^2+(3+5)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Luego, $r = 2\sqrt{10}$

Ahora teniendo $O(-1,4)$ y $r = 2\sqrt{10}$ podemos hallar la ecuación de la circunferencia

$$(x-(-1))^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{10})^2$$
$$(x+1)^2 + (y+4)^2 = 10$$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-4,-1)$ y que es tangente a la recta $3x + 2y - 12 = 0$

   Solución

   Teniendo las coordenadas del centro y la ecuaciones de la recta y la circunferencia y ya que esta es tangente a la circunferencia dada podemos hallar la distancia entre el centro y el dicha recta la cual es igual a radio de la circunferencia.

$$r = d(C, l_1) = \frac{|3(-4) + 2(-1) - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}$$

   La ecuación buscada esta dada por

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = (2\sqrt{13})^2$$
$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 52$$

4. La ecuación de una circunferencia es $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$. Demostrar que el punto $A(2,-5)$ es interior a la circunferencia y que el punto $B(-4,1)$ es exterior.

   Solución

   La ecuación de la circunferencia dada es $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36$

   - Tenemos que comprobar que $A(2,-5)$ es interior a esta.

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 < 36$$
$$(2-3)^2 + (-5+4)^2 < 36$$
$$(-1)^2 + 1^2 < 36$$
$$2 < 36$$

     $A(2,-5)$ es interior a la circunferencia dada
   - Ahora vamos a demostrar que $B(-4,1)$ es exterior

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 > 36$$
$$(-4-3)^2 + (1+4)^2 > 36$$
$$(-7)^2 + (5)^2 > 36$$
$$74 > 36$$

     El punto B es exterior a la circunferencia

5. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - 2y - 24 = 0$, $2x + 7y + 9 = 0$.

Solución

Como el centro es la intersección entre las dos rectas entonces la hallaremos la solución por medio de metódo de eliminación.

empezaremos multiplicando cada ecuación por el valor adecuado $(3x-2y-24=0)\times(2)$ y $(2x+7y+9=0)\times(3)$

Obtenemos la nuevas ecuaciones $6x-4y-48=0$ y $6x+21y+27=0$ luego restamos para eliminar la variable x y obtenemos la ecuación $-25y-75=0$ de donde $y=-3$

reemplazamos en la ecuación (1) para hallar el valor de x: $3x-2(-3)-24=0$ de aquí $3x+6-24=0$ luego $3x=18$ de donde $x=6$

Las coordenadas del centro son $h=6$ y $k=-3$. Luego la ecuación de la circunferencia

$$(x-6)^2+(y+3)^2=25$$

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7,-5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x-9y-10=0$ y $2x-5y+2=0$.

Solución

Para hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7,-5)$ debemos hallar primero la intersección entre las dos rectas dadas.

En este caso hallaremos dicha intersección por el método de sustitución.

Despejamos x de la ecuación (1) : $7x-9y-10=0 \to x=\dfrac{10+9y}{7}$

y la reemplazamos en la ecuación (2)

$2\left(\dfrac{10+9y}{7}\right)-5y+2=0 \to -\dfrac{17}{7}y+\dfrac{34}{7}=0$ de donde $y=2$ y tenemos que tambien que $x=4$

Las coordenadas del centro son $h=4$ y $k=2$; la ecuación de la circunferencia es

$$(x-4)^2+(y-2)^2=r^2$$

Como la circunferencia pasa por el punto $A(7,-5)$ podemos encontrar la magnitud del radio; entonces

$$r=|CA|=\sqrt{(7-4)^2+(-5-2)^2}\ r=4\sqrt{3}$$

Ahora la ecuación buscada es

$$(x-4)^2+(y-2)^2=58$$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el vértice A y que es tangente al lado BC.

Solución

Para la solución de este ejercicio debemos hallar como primer paso la ecuación del segmento de recta $\overline{BD}$. Entonces

$$m_1 = \frac{\frac{9}{4} - 0}{2 - 5} = -\frac{3}{4}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 5)$$
$$3x + 4y - 15 = 0$$

Y el radio es igual a la distancia entre el punto A y la recta l

$$d(A, l) = r = \frac{|3(-1) + 4(0) - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{25}} = \frac{18}{5}$$

ya teniendo el radio y el centro la ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2 + y^2 = \frac{324}{25}$$

8. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Solución

Como la circunferencia pasa por los tres puntos entonces la distancia de cada punto al centro debe ser igual por que es el radio de la circunferencia

Sea $O(h, k)$ el centro de la circunferencia

$$|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$$
$$\sqrt{(h+1)^2 + (k+0)^2} = \sqrt{(h-2)^2 + \left(k - \frac{9}{4}\right)^2}$$
$$(h+1)^2 + (k+0)^2 = (h-2)^2 + \left(k - \frac{9}{4}\right)^2$$
$$96h + 72k = 129$$

y de igual manera con

$$|\overline{AC}| = |\overline{DC}|$$
$$\sqrt{(h+1)^2 + (k+0)^2} = \sqrt{(h-5)^2 + (k-0}^2$$
$$(h+1)^2 + (k+0)^2 = (h-5)^2 + k^2$$
$$12h = 24$$
$$h = 2$$

Reemplazamos en la ecuación anteriormente obtenida para halla el valor de k:
$96(2) + 72k = 129 \to k = -\frac{7}{8}$
Ahora teniendo las coordenadas del centro hallamos el radio

$$r = |\overline{AC}| = \sqrt{(2+1)^2 + \left(-\frac{7}{8}\right)} = \frac{25}{8}$$

y obtenemos la ecuación buscada

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje X y que pasa por los dos puntos $A(1,3)$ y $B(4,6)$.

Solución

Centro en el eje x y pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(4,6)$ el centro tiene coordenadas $(h,0)$, ahora

$$\begin{aligned} |\overline{CA}| &= |\overline{CB}| \\ \sqrt{(1-h)^2+(3-0)^2} &= \sqrt{(h-4)^2+(6-0}^2 \\ (1-h)^2+9 &= (h-4)^2+36 \\ 6h &= 42 \\ h &= 7 \end{aligned}$$

reemplazamos para hallar el valor del radio

$$r = |\overline{CA}| = \sqrt{(1-7)^2+(3-0)^2} = 3\sqrt{5}$$

La ecuación buscada es

$$(x-7)^2 + y^2 = 45$$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7,-5)$ y es tangente a la recta $x-y-4=0$ en el punto $B(3,-1)$.

Solución

La distancia del $|\overline{CA}| = |\overline{CB}|$ esta dada por: $\sqrt{(h-7)^2+(k+5)^2} = \sqrt{(h-3)^2+(k+1)^2}$ luego elevando al cudrado tenemos $(h-7)^2+(k+5)^2 = (h-3)^2+(k+1)^2$ de aquí $-8h+74 = -8k+10 \rightarrow 0 = h-k-8$

Como $\overline{CB} \perp l$ tenemos que $m=-1$ por lo tanto $-1 = \dfrac{k+1}{h-3}$ luego $3-h = k+1 \rightarrow 0 = h+k-2$

igualamos las dos ecuaciones obtenidas $h-k-8 = h+k-2$ de donde $k=-3$ y $h=5$

Ahora calculamos el radio

$r = |\overline{CA}| = \sqrt{(5-7)^2+(-3+5)^2} = 2\sqrt{2}$

la ecuación de la circunferencia es

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 8$$

11. Hallar el área del círculo cuya ecuación es:

$$9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$$

Solución:

Pasando de la ecuación general a la ecuación ordinaria tenemos:

$9x^2+9y^2+72x-12y+103=0 \rightarrow x^2+8x+y^2-\dfrac{4}{3}y = -\dfrac{103}{9}$ completando cuadrados tenemos

$(x+4)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2 = 5$

De aquí decimos que el $O\left(-4, \dfrac{2}{3}\right)$ y $r = \sqrt{5}$

Área del círculo

$A = \pi r^2 \to A = \pi\left(\sqrt{5}\right)^2 \to A = 15,108$

12. Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es

$$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0$$

Solución

Pasando de la ecuación general a la ecuación ordinaria tenemos:

$25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0 \to x^2 + \dfrac{30}{25}x + y^2 - \dfrac{20}{25}y = \dfrac{62}{25}$ completando cuadrados obtenemos $\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{75}{25}$ Luego $\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2}{5}\right)^2 = 3$

Luego, $O\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ y $r = \sqrt{3}$

Longitud de la circunferencia
$l = 2\pi r \to l = 2\pi(\sqrt{3}) \to l = 9,06$

13. Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$ son tangentes.

Solución

Transformando a la ecuación ordinaria de la circunferencia

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 6y - 23 &= 0 \\ (x+2)^2 + \left(y+3\right)^2 &= 23 + 4 + 9 \\ (x+2)^2 + \left(y+3\right)^2 &= 36 \end{aligned}$$

Luego $O_1(-2, -3)$ y $r_1 = \sqrt{36} = 6$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 &= 0 \\ (x-4)^2 + \left(y-5\right)^2 &= -25 + 16 + 25 \\ (x-4)^2 + \left(y-5\right)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Luego $O_2(-2, -3)$ y $r_2 = \sqrt{16} = 4$

$$\begin{aligned} d[O_1, O_2] &= d[(-2, -3) : (4, 5)] \\ &= \sqrt{(-2-4)^2 + (-3-5)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 = r_1 + r_2 \end{aligned}$$

Como $d[O_1, O_2] = r_1 + r_2$, las circunferencias son tangentes.

14. Demostrar que las circunferencia $4x^2+4y^2-16x+12y+13=0$ y $12x^2+12y^2-48x+36y+55=0$ son concéntricas

Solución

La ecuación ordinaria de cada una de las circunferencias es:

$$\begin{aligned}4x^2+4y^2-16x+12y+13&=0\\ x^2-4x+y^2+3y&=-\frac{13}{4}\\ (x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2&=-\frac{13}{4}+4+\frac{9}{4}\\ (x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2&=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12x^2+12y^2-48x+36y+55&=0\\ x^2-4x+y^2+3y&=-\frac{55}{12}\\ (x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2&=-\frac{55}{12}+4+\frac{9}{4}\\ (x-2)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Luego, $O_1\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ y $r=\sqrt{3}$

Luego, $O_2\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ y $r=\sqrt{\frac{5}{3}}$

Como $O_1=O_2=\left(2,-\frac{3}{2}\right)$, las circunferencias son concéntricas.

15. Demostrar que las circunferencias $x^2+y^2+2x-8x+13=0$ y $4x^2+4y^2-40x+8y+79=0$ no se cortan.

Solución:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+2x-8y&=-13\\ x^2+2x+y^2-8y&=-13\\ (x+1)^2+(y-4)^2&=-13+1+16\\ (x+1)^2+(y-4)^2&=4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x^2+4y^2-40x+8y&=-79\\ x^2+y^2-10x+2y&=-\frac{79}{4}\\ (x-5)^2+(y+1)^2&=-\frac{79}{4}+25+1\\ (x-5)^2+(y+1)^2&=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

luego, $O_1(-1,4)$ y $r_1=2$

Luego, $O_2(5,-1)$ y $r_2=\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}d\left[(-1,4);(5,-1)\right]&=\sqrt{(-1-5)^2+(4+1)^2}\\ &=\sqrt{36+25}\\ &=\sqrt{61}>2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Como $d(C_1,C_2)>r_1+r_2$ decimos que las circunfeencias no se cortan.

16. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(0,0)$, $P_2(3,6)$, $P_3(7,0)$

Solución

La ecuación buscada es de la forma general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ debemos hallar las constantes D, E, F.
Los tres puntos dados estan sobre la circunferencia, por lo tanto deben satisfacer la ecuación de la forma general. De esta manera obtenemos:

Por pasar por el $P_1(0,0) \to 0+0+0+0+F=0$, es decir $F=0$

Por pasar por el $P_2(3,6) \to 9+36+3D+6E+F=0$, es decir $3D+6E+F=-45$

Por pasar por el $P_3(7,0) \to 49+0+7D+0+F=0$, es decir $7D+F=-49$

Resolviendo este sistema de 3x3 tenemos $7D+F=-49$ y $F=0$ lo cual equivale a tener $7D=-49$, de donde $D=-\dfrac{49}{7}=-7$, luego $E=\dfrac{-45-3D-F}{6}=\dfrac{-45+21-0}{6}=-4$
La ecuación general de la circunferencia que pasa por los tres puntos es $x^2+y^2-7x-4y=0$ equivale a $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{4}+4$, es decir, $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{25}{4}$, luego $O\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ y $r=\dfrac{5}{2}$

17. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(4,-1)$, $P_2(0,-7)$, $P_3(-2,-3)$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 17 & 4 & -1 & 1 \\ 49 & 0 & -7 & 1 \\ 13 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Restando la primera, segunda y tercera fila de la cuarta fila obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 36 & 2 & -4 & 0 \\ 13 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Dearrollamos por los elementos de la cuarta fila

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 36 & 2 & -4 \end{vmatrix}=(2)(2)\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 18 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

Multiplicamos por dos la segunda fila y sumamos el resultado a la tercera fila

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 & y+3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 22 & 7 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Desarrollamos por los elementos de la tercera fila columna

$$(y+3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 22 & 7 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} x^2+y^2-13 & x+2 \\ 22 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
(y+3)(14-66)-1(7x^2+7y^2-91-22x-44) &= 0 \\
14y-66y+42-198-7x^2-7y^2+91+22x+44 &= 0 \\
-7x^2-7y^2+22x-52y-21 &= 0 \\
x^2+y^2-\frac{22}{7}x+\frac{52}{7}y &= -3 \\
\left(x-\frac{11}{7}\right)^2+\left(y+\frac{26}{7}\right)^2 &= -3+\frac{121}{49}+\frac{676}{49} \\
\left(x-\frac{11}{7}\right)^2+\left(y+\frac{26}{7}\right)^2 &= \frac{650}{49}
\end{aligned}$$

Luego, $O\left(\frac{11}{7},\frac{26}{7}\right)$ y $r=\sqrt{\frac{650}{49}}$

18. Por medio del teorema 3.3 del capítulo 3 demostrar que los cuatro puntos $P_1(-1,-1)$, $P_2(2,8)$, $P_3(5,7)$, $P_4(7,3)$ con concíclicos.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 68 & 2 & 8 & 1 \\ 74 & 5 & 7 & 1 \\ 58 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Restando de la primera fila, la segunda, tercera y cuarta fila, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 66 & 3 & 9 & 0 \\ 72 & 6 & 8 & 0 \\ 56 & 8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por los elementos de la cuarta columna, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 66 & 3 & 9 \\ 72 & 6 & 8 \\ 56 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (3)(2)(4)\begin{vmatrix} 22 & 1 & 3 \\ 36 & 3 & 4 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Restando la segunda fila de la tercera fila queda

$$\Delta = 24\begin{vmatrix} 22 & 1 & 3 \\ 22 & 1 & 3 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

El determinante tiene dos filas iguales por lo que tenemos:

$\Delta = 24|0| = 0$

Luego, los cuatro puntos dados estan sobre una circunferencia y por lo tanto son concíclicos.

19. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(11,4)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

Solución:

$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ completando cuadrados tenemos $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) = 25 \rightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

Luego, $O(4,3)$ y $r = 5$

La ecuación de la recta q pasa por el punto (11,4) es:

$y - 4 = m(x - 11) \rightarrow L : mx - y - 11m + 4 = 0$

La distancia de un punto a una recta esta dada por:

$r = d(C,L) \rightarrow 5 = \dfrac{4m - 3 + 4 - 11m}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{-7m+1}{\sqrt{m^2+1}}$ luego
$25m^2 + 25 = 49m^2 - 14m + 1 \rightarrow 0 = 24m^2 - 14m - 24$ simplificando tenemos: $12m^2 - 7m - 12 = 0$ de donde $m_1 = \dfrac{4}{3}$ ó $m_2 = -\dfrac{3}{4}$ sustituyendo en L tenemos:

$$y_1 = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3} \qquad\qquad y_2 = -\frac{3}{4}x + \frac{55}{4}$$

20. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $p_1(-1,-4)$, $(2,-1)$ y cuyo centro está sobre la recta $4x + 7y + 5 = 0$

Solución:

Forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
como el $O(h,k)$ está sobre $3x + 7y + 2 = 0$ sus coordenadas satisfacen la ecuación de la recta $4h + 7k + 5 = 0$

Los dos puntos dados estan sobre la circunferencia, por lo tanto deben satisfacer la ecuación de la forma ordinaria. De esta manera obtenemos: Por pasar por pasar por el punto $p_1(-1,-4) \rightarrow (-1 - h)^2 + (-4 - k)^2 = r^2$, es decir $h^2 + 2h + k^2 + 8k + 17 = r^2$
Por pasar por pasar por el punto $p_2(2,-1) \rightarrow (2 - h)^2 + (-1 - k)^2 = r^2$, es decir $h^2 - 4h + k^2 + 2k + 5 = r^2$

Resolviendo este sistema de $3x3$ tenemos: $h^2 + 2h + k^2 + 8k + 17 = r^2$ y $-h^2 + 4h - k^2 - 2k - 5 = -r^2$ lo cual equivale $6h + 6k + 12 = 0$, Ahora $24h + 42k + 30 = 0$ y $-24h - 24k - 12 = 0$ equivale a $18k + 18 = 0$ de donde $k = -1$, $h = \dfrac{-7k-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ y $r = \sqrt{(-1-h)^2 + (-4-k)^2} =$

$$\sqrt{\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+(-4+1)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Los valores constantes son: $h=\frac{1}{2}$, $k=-1$, $r=\frac{3}{2}\sqrt{5}$

Luego la ecuación buscada es: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+1\right)^2=\frac{45}{4}$

De donde, $O\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $r=\frac{3}{2}\sqrt{5}$

21. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(-8,5)$ y por las intersecciones de las circunferencias $x^2+y^2-8x-6y+17=0$ y $x^2+y^2-18x-4y+67=0$.

Solución:

tenemos las ecuaciones de las circunferencias

$$\begin{array}{ll} C_1: & x^2+y^2-8x-6y+17=0 \\ C_2: & x^2+y^2-18x-4y+67=0 \end{array}$$

obetenemos la ecuación:

$$C: x^2+y^2-8x-6y+17+k(x^2+y^2-18x-4y+67)=0(1)$$

Reemplazamos $A(-8{,}5)$

$$\begin{gathered} C:(-8)^2+(5)^2-8(-8)-6(5)+17+k((5)^2-18(-8)-4(5)+64)=0 \\ 64+25+64-30+17+k(64+25+144-20+67)=0 \\ 140+280k=0 \\ k=-\frac{1}{2} \end{gathered}$$

Ahora reemplazamos en (1) para encontrar la ecuación

$$\begin{gathered} C: x^2+y^2-8x-6y+17-\frac{1}{2}(x^2+y^2-18x-4y+67)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+x-4y-\frac{33}{2}=0 \\ x^2+y^2+2x-8y-33=0 \end{gathered}$$

22. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre el eje X y pasa por las intersecciones de las dos circunferencias dadas en el **ejercicio 21**.

Solución:

Como la ecuación de la circunferencia esta dada por

$$C: x^2+y^2-8x-6y+17+k(x^2+y^2-18x-4y+67)=0(1)$$

y factorizamos

$$C:(1+k)x^2+(1+k)y^2+2(4+9k)x-2(3+2k)y+17+67k=0$$
$$C:x^2+y^2-\frac{2(4+9k)}{1+k}x-\frac{2(3+2k)}{1+k}y+\frac{17+67k}{1+k}=0$$

Ahora $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ entonces el centro de la familia esta dada por

$$O\left(-\frac{-\frac{2(4+9k)}{1+k}}{2},-\frac{-\frac{2(3+2k)}{1+k}}{2}\right)=O\left(\frac{4+9k}{1+k},\frac{3+2k}{1+k}\right)$$

y como la circunferencia tiene si su centro en sobre el eje X entonces

$$\frac{3+2k}{1+k}=0 \text{ entonces } k=-\frac{3}{2}$$

reemplazamos en (1) y obtenemos la ecuación buscada

$$C:x^2+y^2-8x-6y+17-\frac{3}{2}(x^2+y^2-18x-4y+67)=0$$
$$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-19x-\frac{167}{2}=0$$
$$x^2+y^2+38x+167=0$$

23. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias $x^2+y^2+2x-6y-16=0$ y $x^2+y^2-6x+2y=0$. **(DOS soluciones)**.

Solución:
tenemos $r=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ y como ecuaciones

$$C_1:x^2+y^2+2x-6y-16=0$$
$$C_2:x^2+y^2-6x+2y=0$$

ahora la ecuación que se busca esta dado por

$$C:x^2+y^2+2x-6y-16+k(x^2+y^2-6x+2y)=0$$
$$C:x^2+y^2+\frac{2(1-3k)}{1+k}x-\frac{2(3-k)}{1+k}y+\frac{16}{1+k}=0$$

Teniendo el radio y la ecuación podremos hallar el parametro k de la siguiente manera

$$r=\frac{5}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$$
$$25(1+k)^2=2[(1-3k)^2+(3-k)^2-16(1+k)]$$
$$25+50k+25k^2=2[10k^2+4k+26]$$
$$5k^2+42k-27=0$$

encontramos las soluciones por medio de la ecuación general para ecuaciones cuadraticas

$$k = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4(5)(-27)}}{2(5)} = \frac{-42 \pm 48}{10}$$

$$k_1 = \frac{-42+48}{10} = \frac{3}{5} \text{ ,y } k_2 = \frac{-42-48}{10} = -9$$

24. Demostrar que las circunferencias $C_1 = x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 = 0$ y $C_2 = x^2 + y^2 - 5 = 0$, son tangentes. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 en su punto común y que pasa por el punto $A(7,2)$. Demostrar que el centro de esta circunferencia esta sobre la recta de los centros C_1 y C_2.

Demostración:

Bastará probar que $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$.

Procederemos a hallar la ecuación ordinaria de cada una de las circunferencias para posteriormente hallar su centro y radio.

En efecto:

- $C_1 : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{4}; C_1\left(\frac{3}{2}, 3\right); r_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $C_2 : x^2 + y^2 = 5; C_2(0,0); r_2 = \sqrt{5}$

Ahora podemos hallar la distancia entre los centros

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + (3-0)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

$$r_1 + r_2 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

Como $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$, las circunferencias C_1 y C_2, son tangentes.

sea la familia de circunferencias:

$$C : x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 + k(x^2 + y^2 - 5) = 0$$

Si $A(7,2)$ pertenece a la circunferencia debe satisfacer

$$(7)^2 + (2)^2 - 3(7) - 6(2) + 10 + k((7)^2 + (2)^2 - 5) = 49 + 4 - 21 - 12 + 10 + k(49 + 4 - 5) = 0 \to k = -\frac{5}{8}$$

Reemplazamos en la ecuación inicial y obtenemos la ecuación

$$C : x^2 + y^2 - 8x - 16y + 35 = 0 \text{ cuyo centro } O(4,8)$$

la ecuación de la recta que pasa por los puntos C_1 y C_2

$$y - 0 = \frac{3}{\frac{3}{2}}(x - 0)$$

de donde, $L : 2x - y = 0$

Si $O(4,8)$ es uno de los puntos de la recta L

$$2(4) - 8 = 0\ 0 = 0$$

Por tanto, C está, sobre la recta de los centros de C_1 y C_2.

25. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a C_1 y C_2 del ejercicio 24 en su punto común y cuyo centro esta sobre la recta $3x + y + 5 = 0$

Solución:

Tenemos $C : x^2 + y^2 - 3x - 6y + 10 + k(x^2 + y^2 - 5) = 0$ de donde :

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{1+k}x - \frac{6}{1+k}y + \frac{10-5k}{1+k} = 0$$

centro de la circunferencia $O\left(\frac{3}{2(1+k)}, \frac{3}{1+k}\right)$

Si $O \in L$; $\frac{9}{2(1+k)} + \frac{3}{1+k} + 5 = 0$, de donde: $k = -\frac{5}{2}$; sustituyendo en (1), obtenemos, $C : x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$.

26. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el $A(-10,-2)$ y por las lntersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$ y la recta $x - y + 4 = 0$.

Solución:

Sea la ecuación de familia:

$$C : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 + k(x - y + 4) = 0$$

y como el punto A pertenece a la recta entonces

$$(10)^2+(-4)^2+2(10)-2(-2)-32+k(-10+2+4)=100+4-20+4-32-4k=0\rightarrow k=14$$

Ahora sustituyendo en la ecuación inicial tenemos

$$C: x^2+y^2+16x-16y+24=0$$

27. Hallar la ecuación del eje radical de las circunferencias $x^2+y^2-2x-10y+10=0$, $4x^2+4y^2-32x-12y+37=0$ y demostrar que es perpendicular a su recta de los centros.

Solución:

Multiplicando por 4 la ecuación C_1 se tiene

$$C_1: 4x^2+4y^2-8x-40y+40=0\ ;\ C_2: 4x^2+4y^2-32x-12y+37=0$$

y restando C_1-C_2, obtenemos la ecuación del eje radical:

$$L: 24x-28y+3=0$$

- Pendiente del eje radical: $m=\dfrac{6}{7}$
- Centro de las circunferencias: $C_1(1,5)$ y $C_2\left(4,\dfrac{3}{2}\right)$

Ahora la pendiente de C_1C_2:

$$m_1=\frac{5-\dfrac{3}{2}}{1-4}=-\frac{7}{6}$$

Y como $m.m_1=\left(\dfrac{6}{7}\right)*\left(-\dfrac{7}{6}\right)=-1$ entonces $L\perp\overline{C_1C_2}$.

28. Hallar la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias $x^2+y^2-8y+6=0$ y $x^2+y^2-14x-6y+38=0$.

Solución:

Restando C_1-C_2 obtenemos la ecuación de la cuerda común, $L: 7x-y-16=0$ entonces $y=7x+16$.

Reemplazado (1) en C_1, se tiene: $x^2+(7x-16)^2-8(7x-16)+6=0$ de donde:

$$3x^2-28x+39=0,\ x_1=3 \text{ ó } x_2=\frac{13}{5}$$
$$y_1=5 \text{ ó } y_2=\frac{11}{5}$$

Luego, los extremos de la cuerda son: $A(3,5)$ y $B\left(\frac{13}{5},\frac{11}{5}\right)$

De la cual la longitud esta dada por:

$|\overline{AB}| = \sqrt{\left(3-\frac{13}{5}\right)^2+\left(5-\frac{11}{5}\right)^2} = 2\sqrt{2}$

29. Hallar la longitud de la tangente trazada del punco $P(3,4)$ a la circunferencia $3x^2+3y^2+12x+4y-35=0$.

Solución:

Como primer paso debemos pasar la ecuación a su forma ordinaria y entonces obtenemos $C:(x+2)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{145}{9}$
de donde:

$$C\left(-2,\frac{2}{3}\right) \text{ y } r=\frac{\sqrt{145}}{3}$$
$$|\overline{PC}| = \sqrt{(3+2)^2+\left(4+\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{421}}{3}$$

En el $\triangle PTC$:

$$|\overline{PC}|^2 = |\overline{CT}|^2+|\overline{PT}|^2$$
$$\frac{421}{9} = \frac{145}{9}+|\overline{PT}|^2$$
$$|\overline{PT}| = \frac{2}{3}\sqrt{69}$$

30. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x-6y-3=0$ en el punto $(-1,6)$

Solución:

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto $(-1,6)$ es: $y-6=m(x+1)$ de donde: $y=mx+m+6$. Al sustituir en la ecuación dada se obtiene:
$x^2+(mx+m+6)^2-2x-6(mx+m+6)-3=0$ de donde, $(1+m)^2x^2-2(1+3m)x+(m^2-6m-3)=0$
La condición de tangencia es: $4(1+3m)^2-4(1+m^2)+(m^2+6m-3)=0$ luego, $9m^2-12m+4=0 \leftrightarrow m=\frac{2}{3}$.
La ecuación de la es tangente $y=\frac{2}{3}x+\frac{20}{3}$.

31. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $4x^2+4y^2+8x+4y-47=0$ que tengan de pendiente $-\frac{3}{2}$

Solución:

La ecuación de la familia de rectas es: $t: y=k-\frac{3}{2}x$, al sustituir en la ecuación dada se obtiene:
$4x^2+4(k-\frac{3}{2}x)^2+8x+4(k-\frac{3}{2}x)-47=0$ luego, $13x^2+2(1-6k)x+(4k^2+4k-47)$.

La condición de tangencia es: $2(1-6k)^2-4(13)(4k^2+4k-47)=0$ de donde, $4k^2+16k-153=0 \leftrightarrow k_1=\frac{9}{2}$ ó $k_2=\frac{17}{2}$.
Laas ecuaciones de las tangentes son :

$t_1: 3x+2y-9=0$ ó $t_2: 3x+2y+17=0$

32. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(-2,7)$ a la circunferencia $x^2+y^2+2x-8y+12=0$

Solución:

La familia de rectas que pasan por $p(-2,7)$ es $y-7=m(x+2)$ de donde, $t: y=mx+2m+7$. Al sustituir en la ecuación dada se tiene: $x^2+(mx+2m+7)^2+2x-8(mx+2m+7)+12=0$ luego, $(1+m^2)x^2+(4m^2+6m+2)x+(4m^2+12m+5)=0$.
La condición de tangencia es: $4(2m^2+3m+1)^2-4(1+m^2)(4m^2+12m+5)=0$ de donde, $2m^2-3m-2=0 \leftrightarrow m_1=2$ ó $m_2=-\frac{1}{2}$.

Las ecuaciones de las tangentes son:

$t_1: 2x-y+11=0$ ó $t_2: x+2y-12=0$

33. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2-8x+3=0$ en el punto (6,3).

Solución:

La familia de rectas que pasan por el $p(6,3)$ es: $y-3=m(x-6)$ de donde $t: y=mx-6m+3$. Al sustituir en la ecuación dada se tiene: $x^2+(mx-6m+3)^2-8x+3=0$ luego, $(1+m^2)x^2+2(-6m^2+3m-4)x+12(3m^2-3m+1)=0$. La condición de tangencia es: $4(-6m^2+3m-4)^2-48(1+m^2)(3m^2-3m+1)$ de donde, $9m^2+12m+4=0 \leftrightarrow m=-\frac{2}{3}$.
La ecuación de la tangente es:
$t: 2x+3y-21=0$

34. hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+4x-10y+21=0$ que son paralelas a la recta $5x-5y+31=0$.

Solución:

La ecuación de la familia de rectas paralelas a $l: 5x-5y+31=0$ es: $y=x+k$. Al sustituir en la ecuación dada se tiene: $x^2+(x+k)^2+4x-10(x+k)+21=0$ de donde, $2x^2+2(k-3)x+(k^2-10k+21)=0$. La concición de tangencia es: $4(k-3)^2-8(k^2-10k+21)=0$ luego, $k^2-14k+33=0 \leftrightarrow k_1=11$ ó $k_2=3$.
Las ecuaciones de las tangentes son:
$t_1: x-y+11=0$ ó $t_2: x-y+3=0$

35. Hallar las ecuaciones de las tangentes de la circunferencia $x^2+y^2+6x-8=0$ que son perpendiculares a la recta $4x-y+31=0$

Solución:

La ecuación de la familia de rectas perpendiculares a $4x-y+31=0$ es: $y=-\dfrac{1}{4}x+k$. Al sustituir en la ecuación dada se tiene: $x^2+(-\dfrac{1}{4}x+k)^2+6x-8=0$ de donde, $17x^2-8(k-12)x+16(k^2-8)=0$. La condición de tangencia es: $64(k-12)^2-4(17)(16(k^2-8))$ luego, $2k^2+3k-35=0 \leftrightarrow k_1=\dfrac{7}{2}$ ó $k_2=-5$.
Las ecuaciones de las tangentes son:
$t_1: x+4y+14=0$ ó $t_2: x+4y+20=0$

36. Por el punto $(-5,4)$ se trazan tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-10x+7=0$ Hallar el ángulo agudo que forman estas tangentes.

Solución:

Pasando la ecuación general de la circunferencia a la ecuación ordinaria tenemos: $(x-5)^2+(y-0)^2=18$, luego el centro $O(5,0)$ y $r=\sqrt{18}$.

Ademas la familia de rectas que pasan por $(-5,4)$ es: $y-4=m(x+5)$ de donde, $t: mx-y+4+5m=0$.

Como $r=d(O,t) \rightarrow \sqrt{18}=\dfrac{|5m-0+4+5m|}{\sqrt{m^2+1}}$ luego, $\sqrt{18(m^2+1)}=|10m+4|$ de donde: $41m^2+40m-1=0 \leftrightarrow m_1=-1$ ó $m_2=\dfrac{1}{41}$

si $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right| \rightarrow \tan\theta=\left|\dfrac{-1-\dfrac{1}{41}}{1-\dfrac{1}{41}}\right|=\dfrac{21}{20}=1{,}05$ luego, $\theta=\tan^{-1}1{,}05=46{,}39$

37. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia $x^2+y^2=r^2$ son $y=mx+r\sqrt{1+m^2}$

Solución

La familia de rectas de pendiente m es: $y=mx+k$ osea $t: mx-y+k=0$.
Luego como $r=d(O,L) \rightarrow r=\dfrac{|0+0+k|}{\sqrt{m^2+1}}$, de donde $|k|=r\sqrt{m^2+1} \leftrightarrow k=\sqrt{m^2+1}$, sustituyendo en la ecuación de la tangente tenemos: $t: y=mx\pm\sqrt{m^2+1}$

38. Hallar la ecuación de la normal a la circunferencia $x^2+y^2-6x+10y+21=0$ en el punto (6,-3). y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

Solución

Pasando a la forma ordinaria la ecuación dada tenemos: $C:(x-3)^2+(y+5)^2=13 \rightarrow O(3,-5)$ $r=\sqrt{13}$.
Como el punto $P(6,-3)\in C$, Ademas $t\perp r$.
Entonces $\left(\dfrac{-3+5}{6-3}\right)m=-1$ de donde $m=-\dfrac{3}{2}$ de aquí la pendiente de la normal es $m=\dfrac{2}{3}$ y su ecuación $y+3=\dfrac{2}{3}(x-6)$ luego $N: 2x-3y-21=0$

Si $O(3,-5) \in N \to 2(3) - 3(-5) - 21 = 0 \longleftrightarrow 0 = 0$
Por lo tanto decimos que la normal N pasa por el centro $O(3,-5)$ de la circunferencia.

39. Hallar el ángulo agudo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 = 17$ y $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 11 = 0$ en su intersección.

Solución

Tenemos un sistema de ecuaciones 2x2 $C_1 : x^2 + y^2 - 12x - 4y = -11$ y $C_2 : x^2 + y^2 = 17$ de donde $x = \sqrt{17 - y^2}$ Luego reemplazando tenemos:

$17 - y^2 - y^2 - 12(\sqrt{17 - y^2}) - 4y + 11 = 0$ simplificando tenemos $5y^2 - 7y - 52 = 0$ de donde, $y_1 = 4$, $y_2 = -\dfrac{13}{5}$ luego $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{16}{5}$.

Los puntos de intercepción de las circunferencias son $P_1 = (1,4)$, $P_2 = \left(\dfrac{16}{5}, -\dfrac{13}{5}\right)$ y sus centros son $O_1(6,2)$, $O_2(0,0)$.

Vamos hallar la pendiente de los radios para así obtener las pendientes de las tangentes:
La pendiente de $m_{r_1} = \dfrac{4-2}{1-6} = -\dfrac{2}{5}$, luego $m_{t_1} = \dfrac{5}{2}$
La pendiente de $m_{r_2} = \dfrac{4-0}{1-0} = 4$, luego $m_{t_2} = -\dfrac{1}{4}$

Ahora,$\tan\theta = \dfrac{m_{t_1} - m_{t_2}}{1 + m_{t_1} * m_{t_2}} \to \tan\theta \dfrac{\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{4}}{1 + \left(\dfrac{5}{2}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{22}{3} = 7{,}333$

Por lo tanto $\theta = 82^o 14'$

40. Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en el punto de contacto $P_1(x_1, y_1)$ es $x_1 x + y_1 y = r_2$. sugerencia: Usese el hecho de que $x_l^2 + y_1^2 = r^2$.

Solución

La ecuación de la tangente que pasa por P_1 es:

$$t : y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1)$$

La pendiente de $\overline{OP_1} = r : m = \dfrac{y_1}{x_1}$ luego como $r \perp t \to m_t = -\dfrac{x_1}{y_1}$.

Reemplazando en (1) tenemos:

$$t : y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \leftrightarrow yy_1 - xx_1 = y_1^2 - x_1^2 \qquad (2)$$

Pero como $P_1 \in C \to y_1^2 - x_1^2 = r^2$

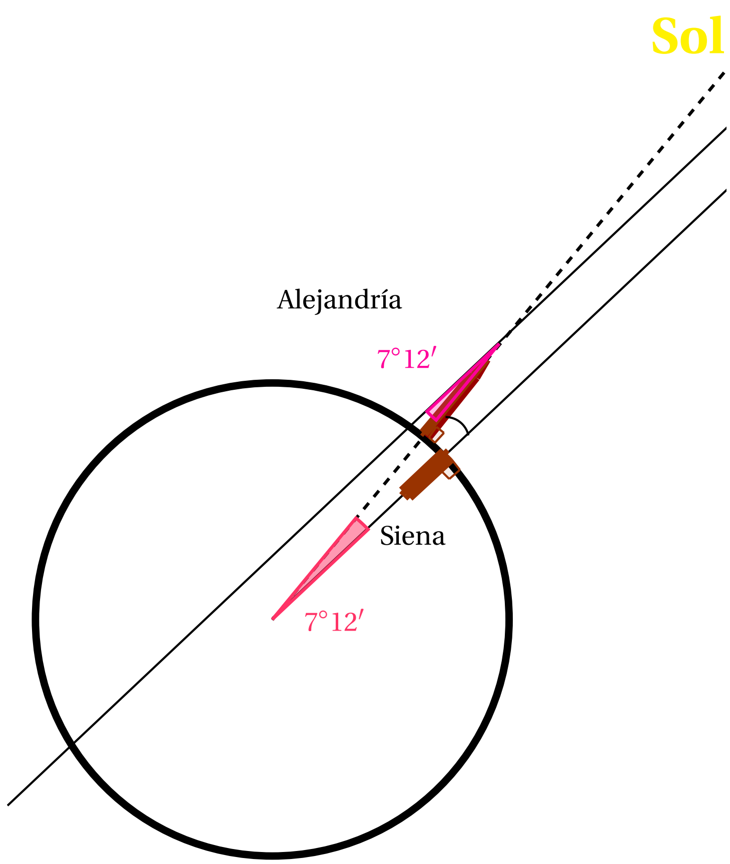
Por tanto, reemplazando en (2) la ecuación de la tangente es:

$$yy_1 - xx_1 = r^2$$

4.1. Aplicaciones

En muchas ocasiones los estudiantes y los profesores se preguntan, ¿para que me sirve el tema que se está trabajando?. las siguientes aplicaciones serán de gran apoyo para dar solución a esa pregunta, en ellas encontraremos que la circunferencia se puede observar en la vida cotidiana sin buscar con mucho esfuerzo lo cual será de gran ayuda en el momento de dar a conocer el tema.

Una buena introdución a la circunferencia podría ser una de las primeras aplicaciones que se conocen de la circunferencia fue la utilizada por Eratóstenes para medir el diamétro de la tierra lo cual servirá para que se tenga una visión mas real de lo que se va ha profundizar. A continuación se presentará el procedimiento que utilizó Eratostenes para medir la circunferencia de la tierra.



Los elementos de la circunferencia fueron de gran utilidad en la primera medición del perímetro de a tierra. Una de las herramientas utilizadas para encontrar el perímetro de la tierra por primera vez fue la de Eratóstenes quien utilizó para esto ángulos, arcos y cuerda, elementos de la circunferencia Eratóstenes estando en la Biblioteca de Alejandría, encontró un informe de observaciones sobre Siena, ciudad situada a unos 800 Km al sur de Alejandría, en el que se decía que un día de verano a medio día, los objetos no producían sombra y en el fondo de los pozos podía verse la luz del sol. Eratóstenes realizó la observación que, en Alejandría, el mismo día y a la misma hora no se producía este mismo hecho. Asumía de manera correcta que el Sol se encontraba a gran distancia y que sus rayos, al alcanzar la tierra, lo hacían en forma (prácticamente) paralela. Esto ratificaba su idea de que la superficie de la Tierra era curva pues, de haber sido plana, no se hubiese producido esta diferencia entre las dos ciudades. El siguiente paso fue medir en Alejandría el ángulo que formaban los rayos del sol con la vertical que por construcción es igual al ángulo cuyo vértice está en el centro de la Tierra (Ver el gráfico superior). Este ángulo resulto ser de $7^o 12' = 7'12^o$ que unido al hecho conocido de que la distancia entre las dos ciudades era de 5000 estadios, dieron como conclusión que la circunferencia de la Tierra medía $\frac{360*5000}{/7'12}$; es decir, 250000 estadios. Aunque no se tienen datos exactos, se sabe que el estadio equivale a unos $160m$ (actualmente se suele tomar $158m$). Por tanto, 250.000 estadios son aproximadamente $\frac{250000*160}{1000} = 40{,}000$ Km Esto equivale a un radio de 6366 Km o 6286 si tomamos los $158m$, contra los 6371 Km. que son los admitidos hoy en día.

La circunferencia en el aforo diagonal

La explicación de la siguiente aplicación se propone en [12]. Esta es el "Aforo Diagonal" es un procedimiento práctico para calcular la capacidad de toneles y barriles de menor dificultad en su implementación práctica, pero que abarca el mayor contenido matemático. Es una técnica antigua, que interesó notablemente a los matemáticos medievales y renacentistas. Este procedimiento de Aforo Diagonal consiste en medir la distancia L que se extiende entre la boca del barril perforada en su vientre hasta el extremo más alejado de uno de los fondos; se eleva el valor calculado al cubo y se multiplica el resultado por el factor corrector $0{,}625$, obteniéndose de esta forma el volumen:

$$V_8 = 0{,}625 L^3$$

Esta fórmula, recogida por numerosos textos de geometría elemental (J. Estévez, Morroyo y Gago, Bruño, etc.), es la que se utilizaba en Canarias, en ejercicio de maestros de tonelería y viticultores expertos. La explicación de la exactitud de este método nos la propone P. Gianni en su obra "PrÃ¡ctica de Geometría y Trigonometría", de 1784, quien identifica el prototipo de tonel con un esferoide, del cual se conoce su volumen ("solides" según la terminología dieciochesca) igual a $\frac{2}{3}$ del área de la máxima latitud circular por la longitud total de la figura.

Así, en un esferoide formado por dos esferas tangentes de radio R y una que las envuelve, tangente a ambas, el volumen se calcula por la fórmula:

$$V = 2 * 3{,}141516 * (VV')2 * \frac{AB}{12}$$

La distancia VV' coincide con la longitud L que se usa en la medición diagonal, pues la circunferencia envolvente es tangente a las dos en S y S'. Entonces quedará:

$$V = 2 * 3{,}141516 * L^2 * \frac{AB}{12}$$

La circunferencia superior, de ecuación:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

es tangente a la envolvente:

$$(x - \frac{L}{2})^2 + y^2 = L^2$$

con lo cual deberá existir un Ãºnico punto de intersección entre ambas. Éste será:

$$y_0 = \frac{64 * R}{40}$$

Además, por ser tangentes, existe una relación entre los valores de L y R, dada por:

$$R = \frac{3L}{8}$$

entonces, el volumen del tonel, que tan sólo se extiende hasta el valor de y_0, vendrá dado por:

$$V = 2 * 3,141516 * L^2 * 2y_0$$

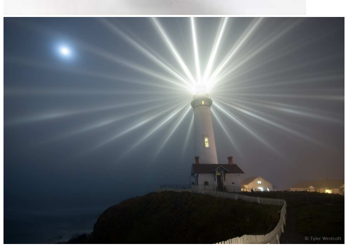
$$V = \frac{3,141516 * L^3}{5}$$

que de forma aproximada equivale a:

$$V = 0,625 * L^3$$

Estos ejemplos de aplicaciones de conocimientos y saberes, sin ser simples, han otorgado carácter de sabiduría a las prácticas de agricultores y campesinos.

La cirunferencia en el movimiento rotativo

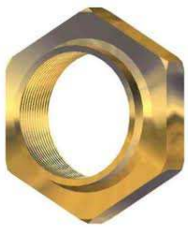


La circunferencia también se aplica en todo aquello relacionado con el movimiento rotativo, como lo es el movimiento circular ya que en la trayectoria de uno de sus puntos siempre posee la misma distancia de su centro lo cual podemos deducir que el radio de la circunferencia trazada por dicho movimiento. Este tipo de movimientos lo podemos observar en el funcionamiento de un reproductor de DVD, el plato de un horno microondas, los generadores,etc. El movimiento circular puede ser uniforme si su velocidad angular es constante o bien si la aceleración angular es diferente de cero, un ejemplo de este tipo de movimiento es el comportamiento de los neumáticos de un automovil o de una bicicleta, también podemos mencionar a todos aquellos mecanismo de procesos continuos, como en la fabricación de papel ya que sus maquinarias describen trayectorias circulares. En la trayectoria que describen algunos satélites ya que sus orbitas son circulares, también el comportamiento de la luz de un faro.

La circunferencia en la ingenieria civil y la arquitectura

También podemos analizar la relación entre la arquitectura y la ingeniera civil ya que tanto en el diseño como en la construcción de estos se utiliza su concepto y muchos de sus elementos, la observamos en puertas, cúpulas y columnas.

La circunferencia en la mecánica



En el campo de la fabricación de piezas mecánicas la circunferencia juegan un papel importantes ya que en su gran mayoria estas piezas presentan en sus estructuras formas circulares, tales como los tuercas, arandelas,cabezas de tornillo de igual manera el filo de un orificio creado por una broca de un taladro y en general, todo aquello que gira por medio de un motor.

La circunferencia en la naturaleza

Algunos fenomenos de la naturaleza estan determinados por circunferencias como un arco iris o la sombra de la luna en la tierra en un eclipse total del sol, al cortar un árbol podemos determinar su edad todo gracias a los anillos que se van formando con los años.

La circunferencia en las armas

El calibre de un arma se da apartir del díametro, es decir, que un arma 9mm tiene su su diametro igual a 8mm y asi sucesivamente

La ecuación de la circunferencia también se puede utilizar para desarrollar ejercicios de calculo diferencial por ejemplo:

- Halle las dimensiones del máximo cilindro recto circular que se puede inscribir en una esfera de radio 12cm.

  Solución

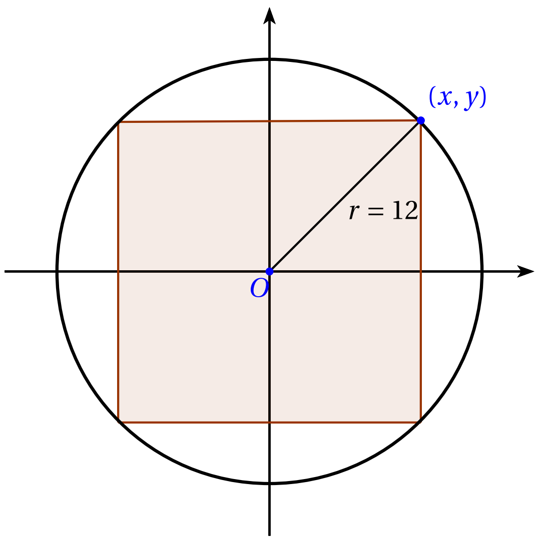
  Sea x = radio del cilindro, $2y$ su altura y V su volumen. Tenemos

$$V = 2\pi x^2 y;\ x^2 + y^2 = 144\ V^{'} = 2\pi x^2 y^{'} + 4\pi x y = 0;\ 2x + 2yy^{'} = 0 \Rightarrow y^{'} = -\frac{x}{y}$$

Reemplazando este último valor en $V^{'}$ se obtiene:

$$2\pi x^2 2\left(-\frac{x}{y}\right) + 4\pi x y = 0 \Longleftrightarrow -\frac{x^2}{y} + 2y = 0 \qquad x \neq 0$$

Entonces $\sqrt{2}y = x$. Este valor da evidentemente un volumen V máximo, porque $x = 0$ o $y = 0$ darían volumenes mínimos.



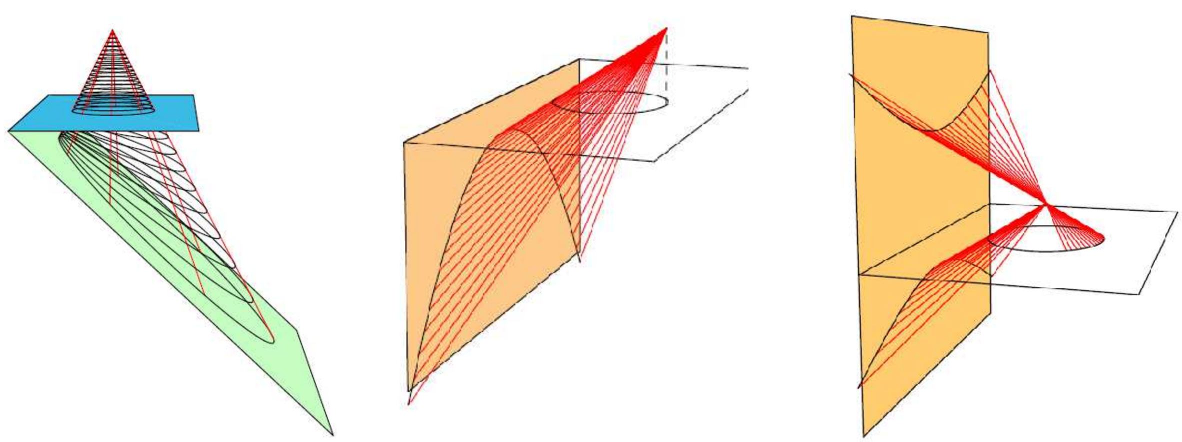
De $x^2 + y^2 = 144$ y $\sqrt{2}y = x$ se obtiene $2y^2 + y^2 = 144 \Rightarrow y = 4\sqrt{3}$ y $x = 4\sqrt{6}$

CAPÍTULO 5

CONCLUSIÓN

Al llegar a la culminación de este documento cabe resaltar la importancia de la geometría analítica y aun más el de la circunferencia en nuestros estudios y vida diaria. Ya que teniendo sus conceptos claros y llegando a un aprendizaje significativo podemos utilizar cada uno de sus elementos como herramientas que nos permitirá entender, argumentar y tener una postura mas crítica a la hora de analizar ejercicios y modelarlos a una ecuación con el fin de resolverlas, ya que el entender su relación con el arte, la arquitectura e ingeniera civil, en la matemáticas y todas las ciencias del saber nos abrirá caminos ha adquirir nuevos conocimientos y profundizar de manera reveladora en ellos. La circunferencia como una de las secciones cónicas mas representativas de la geometría analítica genera un basto campo de acción donde un documento de estos no alcanza para profundizar en un sin fín de problemas que se han planteado a lo largo de la historia; pero abre también las puertas a la investigación y profundización sobre todo aquello donde la circunferencia esta inmersa y que muchas veces pasamos por desapercibido sin notar su importancia en nuestras historia.

Con el contenido de este documento se puede profundizar en el punto de vista proyectivo de una circunferencia para proporcionar una definición de las cónicas



Desde un punto exterior al plano de una circunferencia, la proyección de la misma sobre un plano inclinado es una elipse.

Si proyectamos desde un punto situado en una recta perpendicular al plano de la circunferencia y que pase por un vértice de la misma sobre un plano perpendicular al de la circunferencia y diametralmente opuesto al vértice dado, se obtiene una parábola.

En las mismas condiciones anteriores, si el pie de la perpendicular desde el punto hasta el plano de la circunferencia cae en el interior del círculo, la figura proyectada es una hipérbola.

5.1. Recomendaciones

Algunos puntos a tenerse en cuenta serian los siguientes:

- El profesor debe salir de la rutina y realizar un trabajo de campo con sus estudiantes de tal forma que el estudiante sea capaz de observar el medio que lo rodea y su relación con la circunferencia.
- En algunos casos el profesor debe propiciar la deducción de fórmulas, la verificación de propiedades y algunas demostraciones sencillas con el fin de favorecer el desarrollo del pensamiento por parte de los estudiantes.
- El estudiante debe relacionar los temas profundizados con su entorno, la aplicabilidad que tienen para que sea capaz de proponer soluciones a diferentes problemas.
- El contenido de este documento es de gran utilidad para el desarrollo de temas de mayor complejidad relacionados con la circunferencia.
- Seria importante trabajar en la lectura de textos matemáticos y su interpretación en los espacios de clase con el fin de propiciar la discución y brindar herramientas para la comprensión e interpretación del lenguaje matemático.

BIBLIOGRAFÍA

[1] LEHMANN CHARLES H.: *Geometría Analítica, Capítulo IV* EDITORIAL LIMUSA, (1989).

[2] BALDOR AURELIO *Geometría y Trigonometría, Capítulo XII* GRUPO EDITORIAL PATRIA (2008).

[3] ESCOBAR ACOSTA JAIME *Elementos de geometría, Capítulo VI* EDITORIAL PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, (1994).

[4] GORDON FULLER, DALTON TARWATER: *Geometría Analítica,*ADDISON WESLEY IDEROAMERICANA, S.A , (1999).

[5] LAZARO MANRIQUE HUGO: *Problemas de Geometría Analítica plana,* FONDO EDITORIAL, (1999).

[6] OTEYZA ELENA *Geometría analítica* EDITORIAL PRENTICE HALL HISPANOAMERICANA, (1994).

[7] VIEDNA CASTAÑO JUAN A. *Lecciones de geometría intuitiva* EDITORIAL NORMA, (1969).

[8] KINDLE JOSEPH H. PH.D *Teoria y problemas de geometría analítica plana y del espacio* EDITORIAL MC GRAW HILL(1987)

[9] TRUJILLO LIZIZ ADRIANA Y GIRALDO DIAZ DABIER *Trabajo de grado Costrucción de las secciones cónicas con geogebra* (2011).

[10] PEREZ PRADO CARLOS DANIEL *Precalcúlo: Enfoque de resolución de problemas* EDITORAL PEARSON EDUCACIÓN (2006).

Webgrafía

[11] *www.uv.es/~ivorra/libros/geometria.pdf* IVORRA CASTILLO CARLOS *Geometría pdf*

[12] *http://imarrero.webs.ull.es/sctm03.v2/modulo1/JMGlez.pdf* GONZÁLEZ RODRÍGUEZ JOSÉ M. *La Matemática y la sabiduría popular de los canarios*