

	<b>GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>					  	
	<b>CARTA DE AUTORIZACIÓN</b>						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-06</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 1</b>

Neiva, 4 de Diciembre de 2014

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El suscrito:

CHRISTIAN YOBAN MURCIA QUINTERO, con C.C. No. 1075239916, autor del trabajo de grado titulado UNA MIRADA A LOS PROBLEMAS DE OPTMIZACIÓN A PARTIR DEL CÁLCULO DE VARIACIONES presentado y aprobado en el año 2014 como requisito para optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS; autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

*Christian Yoban Murcia Quintero*

CHRISTIAN YOBAN MURCIA QUINTERO

	<b>GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS</b>						  
	DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO						
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>1 de 2</b>

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** UNA MIRADA A LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN A PARTIR DEL CÁLCULO DE VARIACIONES.

**AUTOR:** CHRISTIAN YOBAN MURCIA QUINTERO

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
MURCIA QUINTERO	CHRISTIAN YOBAN

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
PENAGOS	MAURICIO

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
FERRER VILLAR	OSMIN OBERTO

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

**FACULTAD:** EDUCACIÓN

**PROGRAMA:** LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

**CIUDAD:** NEIVA

**AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2012

**NÚMERO DE PÁGINAS:** 58

**TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):**

Diagramas  Fotografías \_\_\_ Grabaciones en discos \_\_\_ Ilustraciones en general  Grabados \_\_\_ Láminas \_\_\_  
Litografías \_\_\_ Mapas \_\_\_ Música impresa \_\_\_ Planos \_\_\_ Retratos \_\_\_ Sin ilustraciones \_\_\_ Tablas o Cuadros \_\_\_

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento: No aplica

**MATERIAL ANEXO:** No aplica

**PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):** No aplica



## GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

### DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO



CÓDIGO

AP-BIB-FO-07

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

#### PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

ESPAÑOL	INGLÉS	ESPAÑOL	INGLÉS
1. VARIACIONES	VARIATIONS	6. REFRACCIÓN	REFRACTION
2. PARAMETRIZACIÓN	PARAMETERIZATION	7. EULER	EULER
3. BRAQUISTOCRONA	BRACHISTOCHRONE	8. HIPOCICLOIDE	HYPOCYCLOID
4. CATENARIA	CATENARY	9. SNELL	SNELL
5. CICLOIDE	CYCLOID	10. BERNOULLI	BERNOULLI

#### RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este trabajo se presentan distintos problemas de ciertas curvas que muestran un comportamiento especial y que dieron nacimiento al Cálculo de Variaciones como una ciencia formal, dónde algunas de dichas curvas, conllevaron a la solución de problemas reales de la física y la ingeniería. Se muestra el comportamiento de algunas de éstas curvas, partiendo de su definición, la representación gráfica y su aplicabilidad. Se espera que el presente trabajo sea de interés y que contribuya de alguna manera a difundir, extender y dinamizar la importancia sobre el Cálculo de Variaciones.

#### ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In this project, it is presented different problems of certain curves that show a special behaviour. Those problems gave the birth of the Calculus of Variations as a formal science, where some of those curves that were mentioned above, gave the solution of real problems of physics and engineering. Furthermore, It shows the behavior of some curves from their definitions, the graphic representation and the applicability. In conclusion, It is hoped that this current project becomes of interest; somehow it helps to spread, extend and strengthen as well, the importance about Calculus of Variations.

#### APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado:

Firma:

Nombre Jurado:

Firma:



*Universidad Surcolombiana*

---

---

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

Una mirada a los problemas de  
optimización a partir del cálculo  
de variaciones

CHRISTIAN YOBAN MURCIA QUINTERO

Neiva, Huila  
2014



*Universidad Surcolombiana*

---

---

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en  
Matemáticas

Una mirada a los problemas de  
optimización a partir del cálculo  
de variaciones

*Trabajo presentado como requisito de grado  
para optar al título de licenciado en  
matemáticas*

CHRISTIAN YOBAN MURCIA QUINTERO  
2008276622

Asesor:  
MSc. MAURICIO PENAGOS

Neiva, Huila  
2014

# Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

Jefe de Programa

---

Director

---

Segundo Lector

Neiva, Diciembre de 2014



## AGRADECIMIENTOS

Principalmente agradezco a Dios por brindarme la oportunidad de vivir, por permitirme disfrutar de cada momento de mi vida, guiándome y fortaleciéndome durante todo este tiempo y haciendo que no desfallezca en el camino que ha dispuesto para mí.

A mis padres los más sinceros y profundos agradecimientos por hacer de mí la persona que soy, por brindarme todo su apoyo y confianza; gracias por su entrega y esfuerzo para ayudarme a alcanzar mis metas.

Al profesor Mauricio Penagos por su colaboración y disposición para dirigir mi trabajo de grado; también por sus consejos y su confianza en mí para culminar exitosamente este proceso.



<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>OBJETIVOS</b>	<b>11</b>
OBJETIVOS GENERALES . . . . .	11
OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	11
<b>JUSTIFICACIÓN</b>	<b>13</b>
<b>HISTORIA</b>	<b>15</b>
<b>1. MARCO TEORICO</b>	<b>17</b>
1.1. Cálculo de Variaciones . . . . .	17
1.2. Ecuación de Euler . . . . .	19
<b>2. DOS PROBLEMAS RESUELTOS POR JACOB BERNOULLI</b>	<b>23</b>
2.1. La Catenaria . . . . .	23
2.2. La Cicloide . . . . .	28
<b>3. APRECIACIÓN DIDÁCTICA</b>	<b>35</b>
3.1. Rápido descenso . . . . .	35
3.2. Uniendo eslabones . . . . .	36
<b>4. OTRAS APLICACIONES DEL CALCULO DE VARIACIONES</b>	<b>39</b>
4.1. Distancia más corta entre dos puntos . . . . .	39
4.2. El problema de la Braquistocrona . . . . .	41
4.3. Ley de Snell . . . . .	46
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>
<b>1. anexo</b>	<b>55</b>
1.1. Tren Gravitacional Terrestre . . . . .	55



Uno de los problemas interesantes en las matemáticas ha sido buscar una teoría que permita minimizar o maximizar, mediante cálculos, distintos tipos de curvas para dar un análisis de su comportamiento y por supuesto su variación en algún intervalo del dominio de dicha curva. Un ejemplo sencillo es el análisis de la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$  donde a través de procesos de análisis sencillos, es posible encontrar el punto máximo o mínimo (vértice) de la curva que describe la función y los intervalos donde es creciente o decreciente.

En este trabajo se quiere presentar distintos problemas de ciertas curvas que presentan un comportamiento especial y que dieron nacimiento al ***Cálculo de Variaciones***, como una ciencia formal, dónde algunas de dichas curvas, conllevaron a la solución de problemas reales de la física y la ingeniería. Mostraremos el comportamiento de algunas de éstas curvas, partiendo de su definición, la representación gráfica y su aplicabilidad.

Se espera que el presente trabajo sea de interés y que contribuya de alguna manera a difundir, extender y dinamizar la importancia sobre el ***Cálculo de Variaciones***.



## **OBJETIVOS GENERALES**

- Presentar algunos resultados teóricos fundamentales del Cálculo de Variaciones y a partir de ellos estudiar su aplicación a problemas matemáticos relacionados con la física y la ingeniería.

## **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Mostrar algunos resultados básicos de la teoría del Cálculo de Variaciones.
- Presentar en detalle: La Cicloide, La Ley de Refracción de Snell y el problema de la Braquistocrona, para mostrar algunas de las aplicaciones reales del Cálculo de Variaciones.
- Visualizar de manera didáctica el problema de la curva del más rápido descenso (Braquistocrona), también el problema de la Catenaria y la diferencia de ésta con la parábola.



## JUSTIFICACIÓN

A finales del siglo XVII los problemas de máximos y mínimos constituyeron la motivación fundamental para el desarrollo del *cálculo diferencial e integral*. Es a Newton y a Leibniz a quienes se les atribuye sus orígenes y desarrollo preliminar.

Refiriéndome a las famosas palabras de Euler “Dado que la textura del Universo es la más perfecta y la obra de un Creador sapientísimo, nada sucede en el Universo sin obedecer alguna regla de máximo o mínimo”; tratando de extender problemas de cálculos de optimización de funciones de una variable, hacia el estudio de problemas con funciones de funciones (funcionales), el *Cálculo de Variaciones* surgió en el siglo XVIII y fueron Euler y Lagrange los que lo convirtieron en una teoría Matemática rigurosa.

Por tanto en este trabajo se quiere mostrar el Cálculo de Variaciones como una poderosa herramienta para poder encontrar funcionales que dan respuestas a múltiples problemas utilizando técnicas que agilicen procesos de cálculo en sus distintas aplicaciones.



Dentro de las Matemáticas los “problemas” siempre han jugado un papel trascendental. Cada situación planteada requiere de un manejo especial y riguroso de las herramientas con las cuales se va a afrontar dicho problema y de la esencia o naturaleza del mismo.

Por ejemplo, los griegos se plantearon el problema de hallar la figura plana, que con un perímetro prefijado, encerrara el área máxima. Zenodorus (200 a.C - 140 a.C.) y Pappus de Alejandría (290 - 350 d.C.) demostraron que el círculo tiene mayor área que cualquier polígono isoperimétrico.

La curva llamada **Catenaria**; que inquietó al matemático **Jacob Bernoulli** y a otros Matemáticos de la época, al querer descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cadena de peso uniforme. De igual forma la **Braquistocrona**, que aunque se desprende directamente de la Cicloide, surge como respuesta a la inquietud de descubrir la curva que une dos puntos, de tal forma que un cuerpo que cae o rueda por efecto de la gravedad, tarde el menor tiempo posible en llegar de un punto al otro.

Por muchas razones además de las anteriores, se puede afirmar que los problemas de máximos y mínimos constituyeron una de las motivaciones fundamentales para la creación del cálculo. Particularmente El Cálculo de Variaciones nace dentro del análisis matemático en los últimos años del siglo XVII y se establece durante todo el siglo XVIII. Se ocupa de hallar funciones o curvas que tengan cierta propiedad relacionadas con los conceptos de máximo o mínimo. La incógnita no es un número Natural, Real o Complejo; sino una función y es así como el origen del Cálculo de Variaciones, es también el origen del análisis funcional.

El Cálculo de Variaciones debe su nombre, en cuanto a variaciones se refiere, a **Joseph Louis de Lagrange** (1736-1813), que fué el primero en usar éste término y producir su contenido. Más tarde y gracias a sus inmensas contribuciones **Leonhard Euler** (1707-1783) hizo que se fortaleciera la teoría.

En los orígenes del Cálculo de Variaciones se podrían distinguir tres etapas. La primera es la de los hermanos Bernoulli que culmina con el trabajo de Johann Bernoulli de 1718, aunque las ideas y pasos más importantes se encuentran en los dos trabajos de Jakob ó Jacob Bernoulli de 1697 y de 1701. La segunda etapa comprende los aportes de Euler que culminan en la obra "*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime Proprietate Gaudendis*" de 1744, que constituye el primer texto de Cálculo de Variaciones y la tercera etapa es la de Lagrange, que empieza con una carta a Euler en 1755 <sup>1</sup>, y continúa con varios artículos en los que se introduce el concepto de variación de una función y donde se presenta la resolución de nuevos problemas. Este trabajo de Lagrange constituye los fundamentos del Cálculo de Variaciones moderno.

---

<sup>1</sup>En esta carta contiene resuelto el así llamado problema isoperimétrico, que había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. Su demostración contiene un método al que llamaba variación.

## 1.1. Cálculo de Variaciones

La teoría del *calculo de variaciones* se ocupa de problemas que permiten determinar extremos, máximos o mínimos de funcionales; donde un funcional es una aplicación de un espacio de funciones sobre el conjunto de los números reales, entonces asocia una función de una cierta clase con un número real, donde, dados dos puntos en un plano a lo largo de una curva cualquiera se encuentra una función que maximice o minimice esa curva en función de lo que necesitamos.

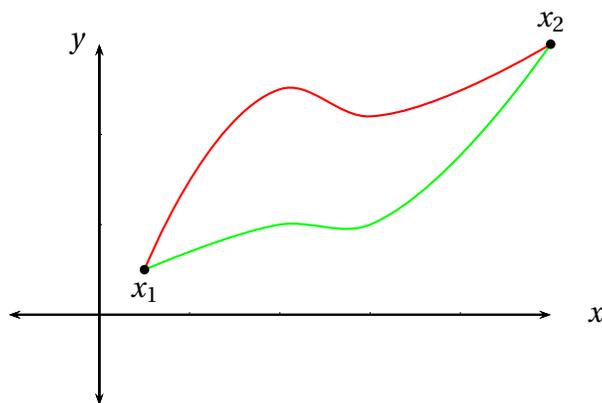


Figura 1: Longitud de una curva en el plano

La distancia entre los dos puntos de la curva es:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Por tanto el funcional resultante de la función es dada por:

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Esto es asociado a cualquier función, y obtenemos el **funcional genérico**

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx \quad (1.1)$$

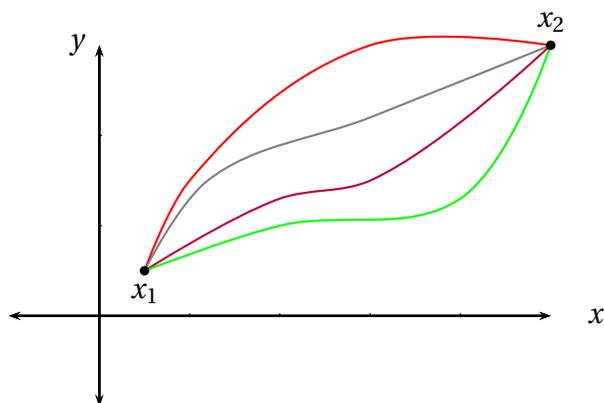
Por tanto el problema fundamental del cálculo de variaciones, es encontrar una función que extreme, (maximizando o minimizando) el funcional anterior.

Para hallar la curva requerida  $Y = y(x)$ , se considera el efecto en la integral (1.1) de las llamadas *curvas próximas* [ver figura 2]

$$Y = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (1.2)$$

donde  $\eta(x)$  es una función arbitraria y  $\epsilon$  es un parámetro arbitrario. Para que la curva (1.2) pase por  $x_1$  y  $x_2$ , se requiere que

$$\eta(x_1) = 0 \quad , \quad \eta(x_2) = 0 \quad (1.3)$$



**Figura 2: Curvas próximas a la curva  $Y = y(x)$  que representa la distancia entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$**

Ahora el funcional (1.1) y dadas las condiciones (1.2),(1.3); obtenemos lo siguiente:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx = \Phi(\epsilon) \quad (1.4)$$

y si  $\epsilon = 0$  entonces  $J(y)$  tiene un máximo o un mínimo, sí y sólo sí  $\Phi(\epsilon)$  es un máximo o un mínimo, luego:

$$\left. \frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (1.5)$$

Tenemos:

$$\frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} \right) dx \quad (1.6)$$

Para (1.2) tenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial \epsilon} = \eta(x) \qquad \frac{\partial y'}{\partial \epsilon} = \eta'(x) \quad (1.7)$$

Por tanto reemplazando los valores de (1.7) en la integral (1.6) y teniendo en cuenta (1.5) obtenemos lo siguiente:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx = 0 \quad (1.8)$$

Tomando de (1.8)  $\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx$  e integrando por partes obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \right) dx$$

Teniendo las condiciones de (1.3), factorizando  $\eta(x)$  y reemplazando en (1.8) tenemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

Puesto que  $\eta(x)$  es arbitraria, implica que el integrando también es cero es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.9)$$

Lo obtenido en (1.9) se denomina **Ecuación de Euler**

## 1.2. Ecuación de Euler

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Esta ecuación que Euler publicó en 1744 la podemos expresar de otra forma. Como es una ecuación diferencial de segundo orden, utilizando la regla de la cadena para derivar la expresión  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right)$ , que explícitamente se escribe así:

$$f_y - f_{xy'} - f_{xy'} y' - f_{y'y'} y'' = 0$$

A las funciones que satisfacen la ecuación de Euler se les llama **extremales** y sólo en una de esas extremales se puede alcanzar máximo o mínimo del funcional.

Casos particulares de la ecuación de Euler:

- a) Si  $f$  no depende de  $y'$ :

En este caso la ecuación de Euler es de la forma  $f_y = 0$ , que es una ecuación algebraica sin ninguna complicación, y que tendrán solución si se cumplen las condiciones de frontera.

- b) Si  $f$  depende sólo de  $y'$ :

En este caso  $f_y, f_{xy'}$  y  $f_{yy'}$  son nulos. Teniendo en cuenta el desarrollo de la ecuación de Euler, nos quedaría  $f_{y'y'} y'' = 0$ . Se ha de cumplir que, o bien  $y'' = 0$  o bien  $f_{y'y'} = 0$ . Si  $y'' = 0$  ha de ser  $y(x) = c_1 x + c_2$  que es una familia de rectas dependientes de dos parámetros  $c_1$  y  $c_2$ . Si es  $f_{y'y'} = 0$ , quiere decir que esa ecuación tiene raíces reales, con lo cual  $y' = k$  e  $y(x) = kx + c$  que también es una familia de rectas con un sólo parámetro y que está contenida en la familia anterior.

- c) Si  $f$  sólo depende de  $y$  y de  $y'$ :

En este caso la ecuación de Euler no depende de  $x$ , toma la forma  $f_y - f_{yy'} y' - f_{y'y'} y'' = 0$ . Ahora si multiplicamos la ecuación de Euler por  $y'$  obtenemos  $\frac{d}{dx} (f - y' f_{y'}) = 0$  donde integrando obtenemos  $f - y' f_{y'} = k$  donde  $k = \text{constante}$ . Esta simplificación de la ecuación de Euler es conocida como *Identidad de Beltrami*.

### **Demostración de la identidad de Beltrami:**

Para ello diferenciamos la ecuación de Euler con respecto a  $x$ :

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.11)$$

Multiplicando la Ecuación de Euler por  $y'$  obtenemos:

$$y' \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1.12)$$

$$y' \frac{\partial f}{\partial y} = y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \quad (1.13)$$

Sustituyendo (1.11) en (1.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= 0 \end{aligned}$$

dado el hecho que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  el resultado es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= 0 \\ f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} &= c \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la Identidad de Beltrami

d) Si  $f$  sólo depende de  $x$  y de  $y'$ :

En este caso  $\frac{d}{dx} f_{y'} = 0$  y ello supone que  $f_{y'} = k$  donde  $k = \text{constante}$

A continuación se mostrarán en detalle dos curvas que dieron solución a unos problemas planteados por Jacob Bernoulli en su época que son **La Catenaria** y **La Cicloide** los cuales corresponden al **Problema Isoperimétrico** y **La curva del más rápido descenso**.



## CAPÍTULO 2

# DOS PROBLEMAS RESUELTOS POR JACOB BERNOULLI

### 2.1. La Catenaria

#### Historia

A lo largo de la historia, los matemáticos se mostraron fascinados por la forma que adoptaba una cuerda o cadena que se combaba bajo su propio peso e intentaron descubrir cual era la curva que la describía. Así, por ejemplo, ya en los libros de notas de Leonardo Da Vinci podemos encontrar esquemas de cadenas colgando.

La solución del problema no era nada fácil. Galileo erró en su solución puesto que supuso que la cadena asumiría la forma de una parábola. Para la época en que realizó los experimentos que le llevaron a tal conclusión, ya tenía 74 años y se encontraba casi ciego.

Sin embargo hoy sabemos que aunque el trazado de la parábola se asemeja mucho al trazado de la catenaria, ambas curvas son diferentes pues mientras la parábola está descrita por una ecuación cuadrática, en la expresión de la catenaria se involucran funciones hiperbólicas.

El matemático alemán Joachim Jungius (1587-1657) en su obra *“Geometría Empírica”*, logró demostrar que una cadena colgante no adopta forma de parábola, sin embargo su obra fué publicada hasta 1669, pero fue necesario que pasara casi medio siglo tras la muerte de Galileo, en 1642, para encontrar la solución verdadera.

En 1690 el suizo Jacob Bernoulli propone un desafío en la prestigiosa *“Acta Eruditorum”*, descubrir la fórmula matemática que definiera la verdadera forma de la curva de la cadena colgante. La respuesta no tardo en llegar y en 1691 la ecuación fue obtenida, de forma independiente, por su hermano menor Johann Bernoulli, con el que tenía gran rivalidad, y por Gottfried Leibniz y Chistiaan Huygens en 1691.

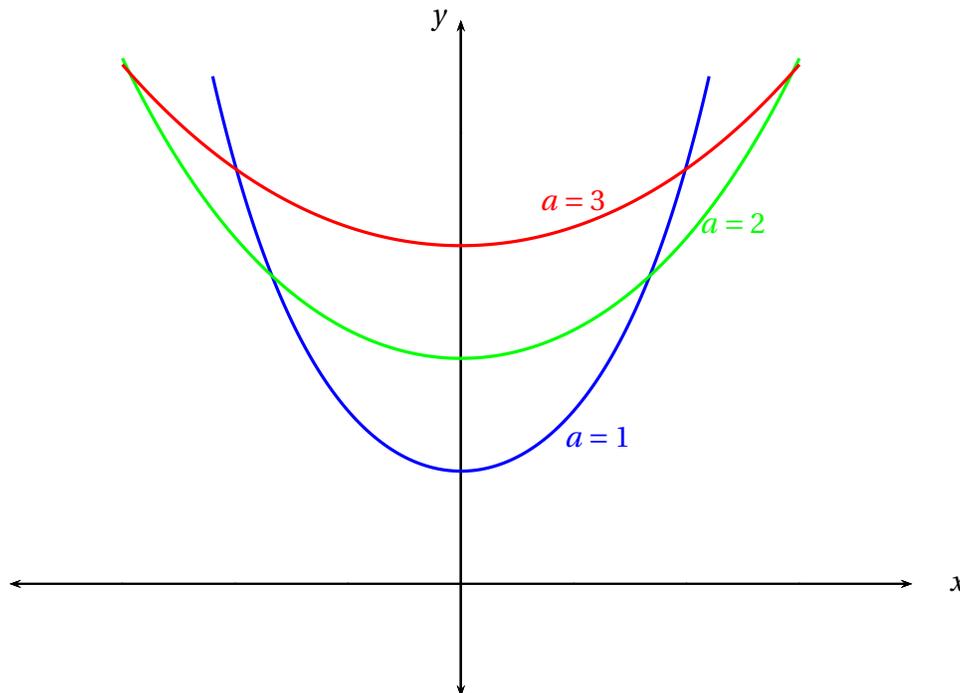
Fue también durante el transcurso de estas investigaciones cuando Huygens emplea por primera vez el término *Catenaria* para designar a esta familia de curvas en una carta dirigida a Leibniz. Este término que deriva del latín *catena*, cuyo significado es cadena, se ha impuesto a otros sinónimos como curva *funicular* o *chainette*.

En el mismo año en que el problema fue resuelto. David Gregory escribió, uno de los primeros tratados sobre esta familia de curvas y más tarde, en 1744, Leonhard Euler demostró que la catenaria es la curva que, rotada sobre el eje  $x$  produce una forma tridimensional llamada *Catenoide*, que es la primera superficie mínima descubierta.

### Definición de la Curva

La catenaria designa la curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena o cuerda de densidad uniforme y perfectamente flexible sujeta por sus dos extremos y que se encuentra sometida únicamente a las fuerzas de la gravedad. La ecuación de la catenaria tomando su mínimo en el punto  $(0, a)$  es:

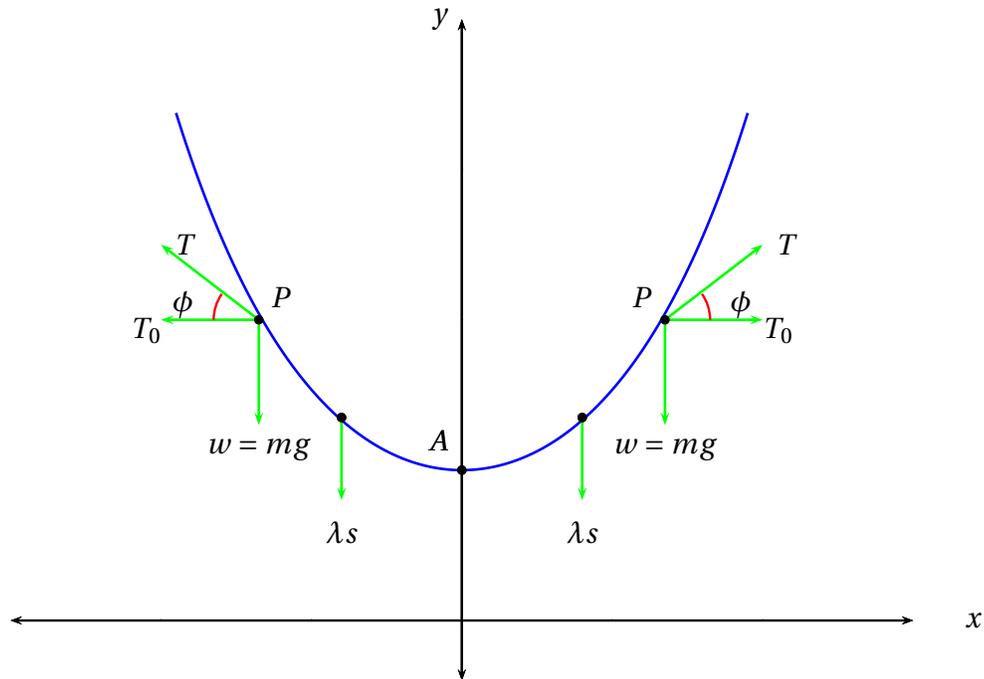
$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$



**Figura 3: Representación gráfica de curvas catenarias ( $a$  es un parámetro que regula la apertura de la curva)**

### Ecuación

La Catenaria se forma en función del coseno hiperbólico. Para determinar su ecuación paramétrica se tendrá en cuenta la siguiente gráfica:



**Figura 4: Fuerzas que actúan sobre el arco  $s$**

Si denotamos por  $s$  la longitud del arco  $\widehat{AP}$  y además la relación entre las fuerzas en un punto cualquiera de la curva viene dada por:

- $T_0$  : Tensión Horizontal que tira de  $A$
- $T$  : Tensión tangencial que tira de  $P$
- $\lambda s$  : es la densidad de masa en cada punto del cable ( $\lambda = \frac{m}{L}$  masa por unidad de longitud)

Aplicando el equilibrio de fuerzas a las fuerzas horizontales y verticales se tiene que,

$$T \cos \phi = T_0 \quad (2.1)$$

$$T \sin \phi = \lambda s \quad (2.2)$$

Si dividimos (2.2) con (2.1) obtenemos

$$\tan \phi = \frac{\lambda s}{T_0}$$

dado que  $\tan \phi = \frac{dy}{dx}$ , se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} s \quad (2.3)$$

Como  $s$  es función de  $x$  y derivando (2.4) con respecto a  $x$ , tenemos

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda}{T_0} \frac{ds}{dx} \quad (2.4)$$

y como  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ , la ecuación (2.5) se puede escribir finalmente como,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.5)$$

Ahora debemos mostrar que  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$  satisface la ecuación diferencial (2.5) para  $a = \frac{T_0}{\lambda}$ . Dado que  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$  y reemplazando en  $a$  tenemos,

$$y = \frac{T_0}{\lambda} \cosh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right) \quad (2.6)$$

Derivando en función de  $x$  dos veces en (2.6) obtenemos,

$$y = \frac{T_0}{\lambda} \cosh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_0}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right) \frac{\lambda}{T_0} = \sinh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \sinh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right) \right] = \cosh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right) \frac{T_0}{\lambda}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda}{T_0} x \cosh\left(\frac{\lambda}{T_0} x\right)$$

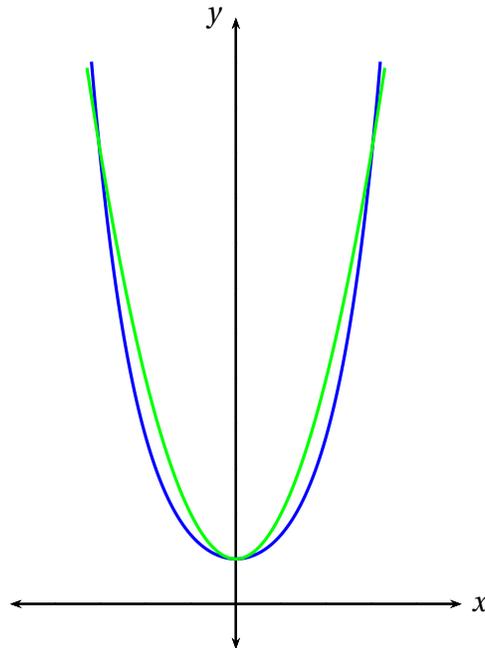
Por tanto  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$  es la curva que describe la *Catenaria*.

### Diferencias de la catenaria con respecto a la parábola

Si observamos superpuestas las gráficas de una catenaria y una parábola podemos entender porqué los antiguos matemáticos en un principio suponían que era la parábola

la curva que se combaba bajo su propio peso.

El desarrollo de las fórmulas matemáticas de una catenaria y una parábola coincide en sus tres primeros términos ( $y = ax^2 + bx + c$ ) y solo a partir del cuarto ambas expresiones se diferencian (pudiendo existir en los últimos términos de la expresión de la catenaria  $x$  elevadas a potencias mayores cuando se hace su desarrollo en series de Taylor). Esto hace que las gráficas de ambas curvas se parezcan para valores pequeños de la  $x$ , acusando más su diferenciación según aumentan los valores de ésta.



**Figura 5: Gráficas superpuestas de la Parábola y la Catenaria**

— parábola — catenaria

Ambas curvas tienen además una curiosa relación. Si hiciéramos rotar una parábola apoyada sobre el eje de abscisas su foco dibujaría una curva catenaria.

### Propiedades

Al ser la catenaria una curva que se deflecta bajo su propio peso, ésta tiene la característica de ser el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales del cable se compensan y por ello carece de tensiones laterales por lo que la cadena permanece inmóvil sin desplazarse hacia los lados. Las fuerzas que actúan son verticales, la debida a la gravedad (peso), y una tensión tangente a la cadena en cada punto que es la que la mantiene estirada.

## 2.2. La Cicloide

### Historia

Su nombre se deriva del sustantivo griego  $\kappa\theta\kappa\lambda\omicron\varsigma$ , "círculo", junto con el sufijo  $\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$  que quiere decir, "semejante a". Esta maravillosa curva fue estudiada la primera vez por el filósofo Nicolás de Cusa (1401-1464) en 1450 cuando intentaba encontrar el área de un círculo y, posteriormente, por Mersenne (1588-1648) (filósofo, amigo de Descartes). En el año 1599 Galileo estudió la curva y fue el primero en darle el nombre con el que la conocemos actualmente. Galileo intentó averiguar el área de esta curva pegando diferentes segmentos rectos sobre la misma, mediante aproximación. Después, en 1634, el matemático Gilles Personne de Roberval (1602-1675) mostró que el área de la región de un bucle de cicloide era tres veces el área correspondiente a la circunferencia que la genera. En 1658, Christopher Wren (1632-1723) demostró que la longitud de la cicloide es igual a cuatro veces el diámetro de la circunferencia generatriz.

### Definición de la Curva

Una cicloide es el lugar geométrico generado por un punto de una circunferencia al rodar sobre una línea recta; es la curva que describe un punto perteneciente a una rueda que gira sin deslizarse.

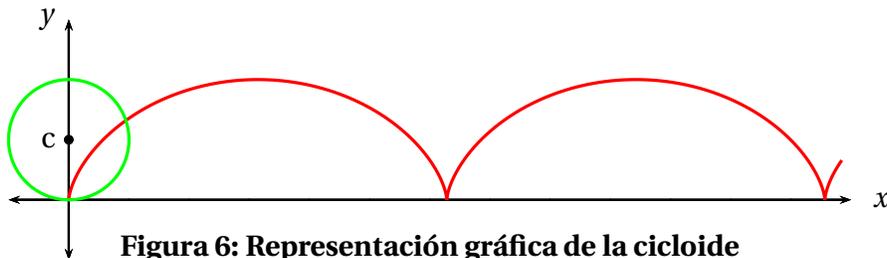


Figura 6: Representación gráfica de la cicloide

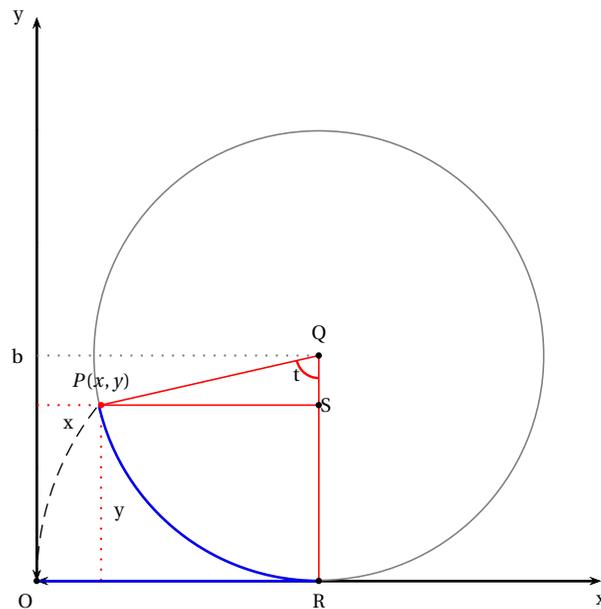
### Ecuaciones Paramétricas de la Cicloide

Las ecuaciones paramétricas de la cicloide, son más prácticas que las cartesianas para calcular sus propiedades, además permiten ver la curva como la resultante de dos movimientos.

Consideremos un círculo que rueda sobre el eje  $x$  hacia la derecha y que el punto que sirve para trazar la cicloide está situado inicialmente en el origen del sistema de coordenadas. Escogeremos como parámetro la medida  $t$  en radianes del ángulo, pues éste corresponde al ángulo de rotación del círculo. Nuestro problema se reduce a expresar las coordenadas  $(x, y)$  de cualquier punto  $P$  perteneciente a la cicloide en función de  $t$  o, dicho de otro modo, hallar una función de trayectoria

$$r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow r(t) = (x, y)$$



**Figura 7: Movimientos que actúan en la cicloide**

Debemos probar (figura 7) que la medida del segmento  $\overline{OR}$ , es igual a la medida del arco  $\widehat{PR}$ , ya que el círculo rueda sin resbalar. Ahora bien, la medida del arco  $\widehat{PR}$  es  $bt$ , pues recordemos la longitud de arco de una circunferencia esta dada por:

$$S = r\theta, \theta \text{ en radianes}$$

De esta manera tenemos que:

$$\overline{OR} = \widehat{PR} = bt$$

por otro lado:

$$\sin t = \frac{\overline{PS}}{b}$$

así que:

$$b \sin t = \overline{PS}$$

Además:

$$x = \overline{OR} - \overline{PS} = bt - b \sin t$$

y

$$y = \overline{QR} - \overline{QS} = b - b \cos t$$

llegando así a las ecuaciones que buscamos:

$$x = bt - b \sin t = b(t - \sin t)$$

$$y = b - b \cos t = b(1 - \cos t)$$

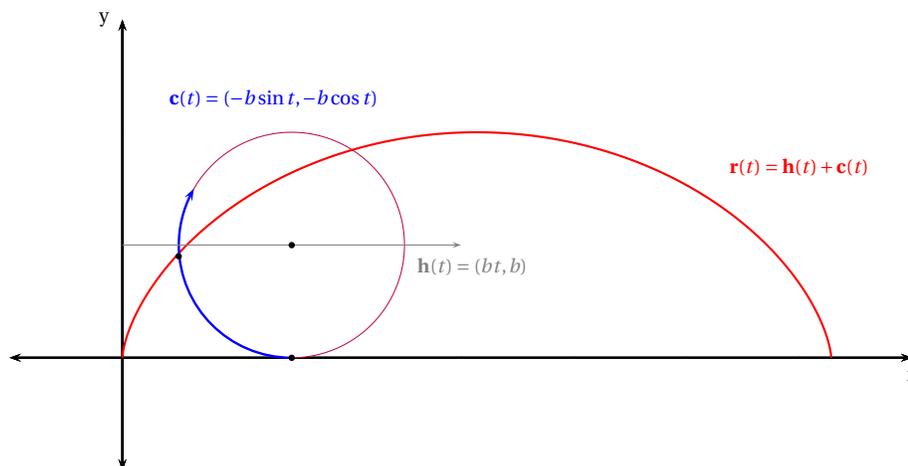
Estas ecuaciones pueden verse como el resultado de sumar dos parametrizaciones distintas, de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}(t) = (x, y) = (bt, b) + (-b \sin t, -b \cos t) = \mathbf{h}(t) + \mathbf{c}(t)$$

donde

$$\mathbf{h}(t) = (bt, b) \quad y \quad \mathbf{c}(t) = (-b \sin t, -b \cos t)$$

Con esto podemos apreciar el desplazamiento de la curva, pues se pueden observar claramente los dos movimientos que generan la cicloide  $\mathbf{h}(t)$  y  $\mathbf{c}(t)$ . De la figura, observamos que



**Figura 8: Desplazamiento  $\mathbf{h}(t)$  y  $\mathbf{c}(t)$  de la cicloide**

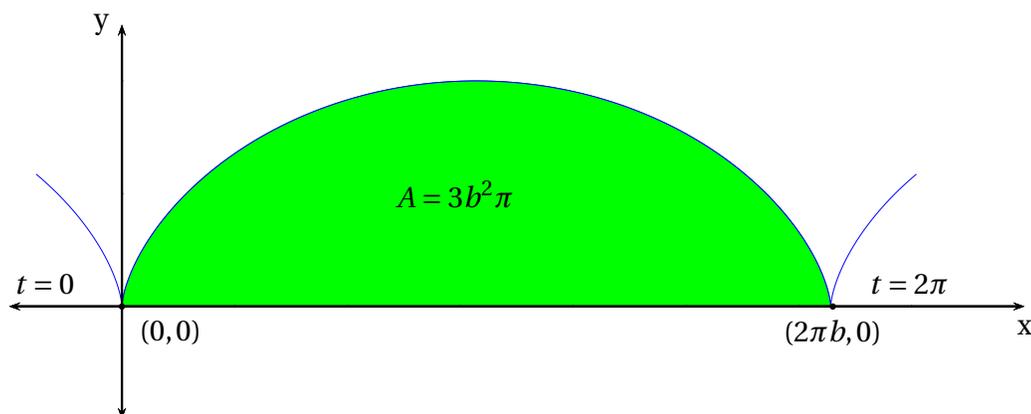
Donde  $\mathbf{h}(t) = (bt, b)$  corresponde a la trayectoria de un punto que se mueve hacia la derecha a lo largo de la recta horizontal  $y = b$  comenzando en el punto  $(0, b)$  para cuando  $t = 0$ . Por cada unidad de  $t$  el punto se mueve  $bt$  hacia la derecha. Por otro lado, el segundo término de la suma es  $\mathbf{c}(t) = (-b \sin t, -b \cos t)$  corresponde a la trayectoria que sigue un punto que se mueve en una circunferencia con centro en  $(0, 0)$  y radio  $b$  en el sentido de las manecillas del reloj, empezando en el punto  $(0, -b)$ , para cuando  $t = 0$ .

Al sumarse estas dos trayectorias, el resultado es que el punto va girando en el sentido de las manecillas del reloj mientras el centro de la circunferencia se mueve horizontalmente

en la recta horizontal y estos dos movimientos combinados van produciendo la Cicloide.

### Propiedades de la Cicloide

- a) El área bajo un arco de Cicloide es tres veces el área del círculo generador



**Figura 9: área del círculo generador**

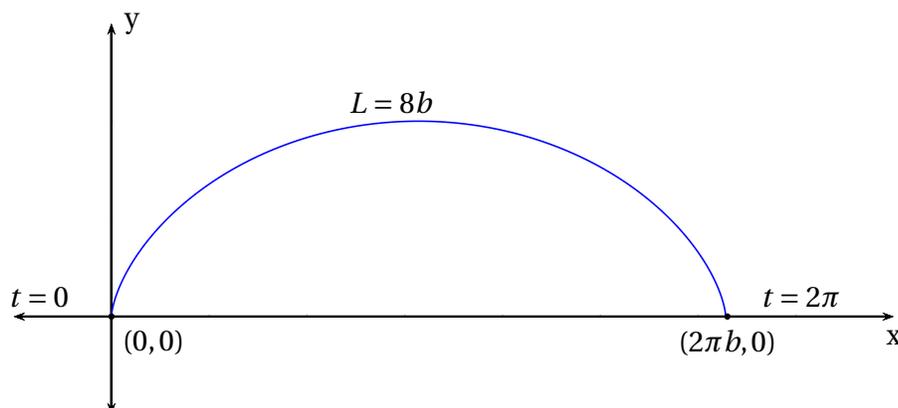
Lo primero que debemos tener claro, es que el primer arco de la cicloide se produce cuando los valores de  $t$  están entre 0 y  $2\pi$ , puesto que la rueda necesita dar una vuelta completa para trazarlo. Así pues, la integral que nos permite calcular dicha área es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt \\
 A &= \int_0^{2\pi} (b - b \cos t)(b - b \cos t) dt \\
 A &= b^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = b^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt \\
 A &= b^2 \int_0^{2\pi} dt - 2b^2 \int_0^{2\pi} \cos t dt + \frac{b^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt \\
 A &= 2b^2\pi - 2b^2 \left[ \sin t \right]_0^{2\pi} + \frac{b^2}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 A &= 2b^2\pi + b^2\pi \\
 A &= 3b^2\pi
 \end{aligned}$$

Efectivamente nos resulta que el área bajo un arco de cicloide es tres veces el área del círculo que lo genera

Aunque fue Galileo el primero en conjeturar este resultado sin poder demostrarlo, fueron Roberval en Francia y Torricelli en Italia los primeros que lo hicieron.

- b) **La longitud de un arco de Cicloide es ocho veces la del radio del círculo generador de la Cicloide**



**Figura 10: Longitud del arco de cicloide**

Para hallar la longitud del arco procedemos de manera similar, pero usando la integral pertinente para calcular la longitud de un arco.

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
 L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(1 - \cos t)^2 + b^2 \sin^2 t} dt \\
 L &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\
 L &= b \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt
 \end{aligned}$$

Como  $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$ , en el intervalo  $(0, \pi)$  se tiene que  $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$

y en el intervalo  $(\pi, 2\pi)$ ,  $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$ . Reemplazando estas expresiones en la integral tenemos

$$\begin{aligned}
 L &= b \left[ \int_0^{\pi} \sqrt{2} \left( \sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2} \left( \sqrt{2} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt \right] \\
 L &= 2b \left[ \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \right] \\
 L &= 2b \left[ -2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{\pi} + 2 \cos \frac{t}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \\
 L &= 2b(2 + 2) = 8b
 \end{aligned}$$

Resultando ser la longitud del arco de cicloide ocho veces el radio  $b$  de nuestro círculo inicial o cuatro veces el diámetro del mismo.

Otras propiedades asociadas a la Cicloide son las siguientes:

- c) La Cicloide es tautócrona, esto es, dos partículas de la misma masa que caen en un arco cicloidal invertido de diferentes alturas alcanzan el punto más bajo en el mismo instante.
- d) La Cicloide es braquistócrona, es decir, es la curva del más rápido descenso. O bien, el camino que une dos puntos fijos que debe seguir una partícula para recorrerlo en un tiempo mínimo es el de una cicloide.

Más adelante se mostrará el resultado del problema de La Braquistocrona.



### 3.1. Rápido descenso

Para realizar el ejercicio se necesitan los siguientes materiales:

- Cartón o cartulina.
- Dos canicas iguales.
- Una calculadora.

Realizaremos con el cartón o cartulina dos toboganes conectando los puntos  $(0, h)$  y  $(l, 0)$  de un plano vertical. El primero será simplemente una rampa recta y el segundo tendrá la forma de una curva cicloide que responde a la parametrización

$$x = b(t - \sin t) \quad , \quad y = h + b(1 - \cos t)$$

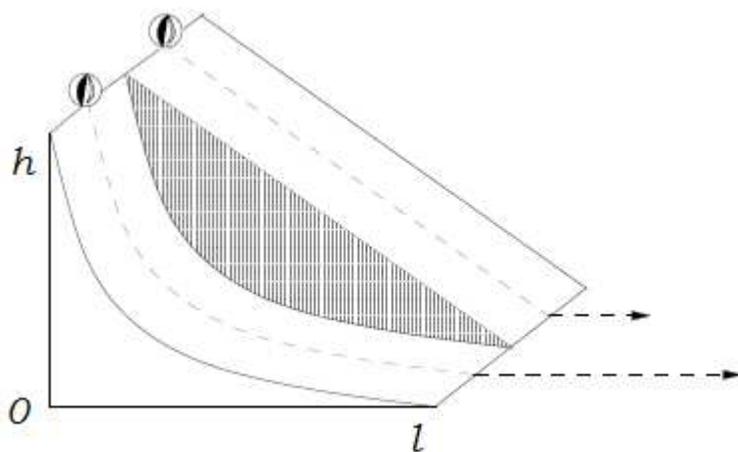


Figura 11: Esquema de los toboganes para la braquistocrona y una línea recta

El valor de  $b$  se calcula de manera que la curva pase por  $(l, 0)$  con lo cual se debe resolver el sistema  $b(t - \sin t) = l$ ,  $b(1 - \cos t) = h$ . Dividiendo ambas ecuaciones y operando se llega a una ecuación para  $t$  que se puede resolver aproximadamente con la calculadora usando el método de Newton (esto es,  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ), después basta tomar  $b = \frac{h}{(1 - \cos t)}$ .

Una vez contruidos ambos toboganes (figura 11) los pondremos uno al lado del otro y dejaremos caer las canicas simultáneamente desde ambos. Con ello comprobaremos experimentalmente que el tobogán de la cicloide es más rápido por ser la braquistocrona. Con paciencia y ganas, es posible reemplazar el tobogán recto por cualquier otro. Dentro de unos límites razonables, la braquistocrona siempre será la curva del más rápido descenso.

### 3.2. Uniendo eslabones

Materiales:

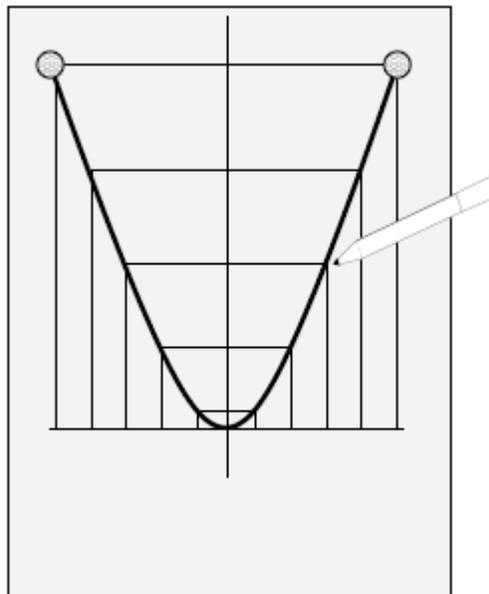
- Una cadena homogénea con eslabones pequeños (por ejemplo de joyería).
- Una hoja de papel milimetrado.
- Un cartón.
- Dos chinchas.
- Un lapicero.
- Una calculadora.

Elijamos dos puntos destacados (digamos de coordenadas enteras) en una misma horizontal del papel milimetrado y se clava allí los chinchas de los eslabones extremos de la cadena poniendo debajo el cartón. Señalemos la mediatriz (perpendicular en el punto medio) del segmento que une los chinchas. Cuando pongamos el cartón en vertical y dejemos a la cadena colgar libremente, por la simetría, el punto más bajo pertenecerá a dicha mediatriz. Señalémoslo con el lapicero y marquemos también los puntos de la cadena que pertenecen a las paralelas a la mediatriz a distancias 1, 2, 3, etc. Todo esto se puede hacer cómodamente en horizontal abatiendo el cartón con cuidado para que no se deforme la curva descrita por la cadena.

Después de desclavar la cadena, consideremos unos ejes cartesianos cuyo origen es el punto más bajo y calculemos, mirando las divisiones del papel milimetrado, las coordenadas del resto de los puntos señalados, los cuales serán de la forma  $(x_n, y_n)$  con  $n \in \mathbb{Z}$ .

Sea  $(r_0, s_0)$  el punto donde está uno de los chinchas, la solución aproximada,  $a$ , es la ecuación

$$s_0 = a \left( \cosh \frac{r_0}{a} - 1 \right)$$



**Figura 12: Representación de la cadena en la hoja milimetrada**

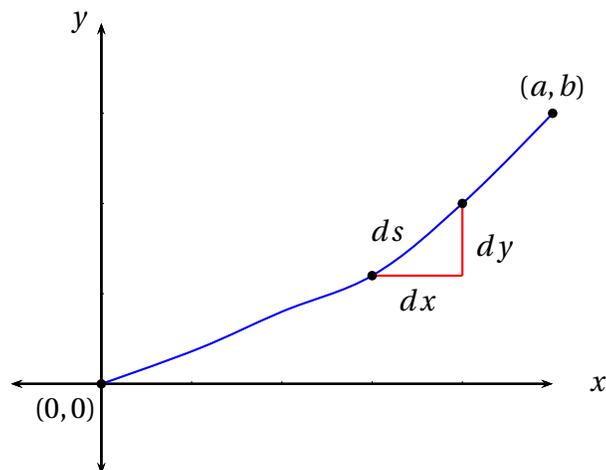
Para el caso de iniciar en el origen; este cálculo puede hacerse aplicando el método de Newton  $f(x) = \frac{s_0}{a} - \cosh\left(\frac{x}{a} + 1\right)$ . Calculando cada uno de los datos para valores de la hoja milimetrada vamos señalando los puntos y así se comprueba experimentalmente que la ecuación de una cadena que cuelga de sus extremos es de la forma

$$y = a\left(\cosh \frac{x}{a} - 1\right)$$

A la curva representada por esta ecuación (o a su trasladada) se le llama catenaria.



### 4.1. Distancia más corta entre dos puntos



**Figura 13: Longitud de una curva en el plano**

Queremos encontrar la ecuación de la curva  $y(x)$  que partiendo del origen hacia un punto  $(a, b)$  del plano  $xy$  tome la distancia más corta, según lo descrito en la **figura 13** la curva está dada por:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

por lo tanto

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Buscamos la curva  $y(x)$  que minimiza totalmente esta longitud

$$J[Y] = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Para este problema

$$f(x, y, y') = [1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}}$$

Como el funcional depende solo de  $Y'$  tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial Y'} \right) = 0$$

Donde

$$\frac{\partial f}{\partial Y'} = \frac{1}{2} [1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}} 2y' = \frac{y'}{[1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}}}$$

por lo tanto,

$$\frac{y'}{[1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}}} = c$$

Donde  $c$  es la constante de integración, además

$$c^2 = \left[ \frac{y'}{[1 + (y')^2]^{\frac{1}{2}}} \right]^2 = \frac{(y')^2}{1 + (y')^2}$$

entonces

$$\frac{1 + (y')^2}{(y')^2} = \frac{1}{c^2}$$

y así,

$$\frac{1}{(y')^2} + 1 = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{(y')^2} = \frac{1}{c^2} - 1 = \frac{1 - c^2}{c^2}$$

Luego

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$$

Al resolver la ecuación anterior para  $y'$  y haciendo  $\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = k$  obtenemos:

$$\begin{aligned} y' &= k \\ dy &= k dx \\ \int dy &= \int k dx \\ y &= kx + c \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales tenemos:

$$y = kx$$

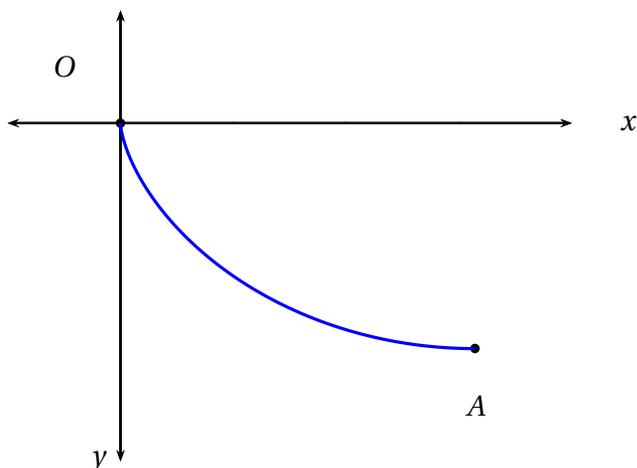
Lo anterior determinan una familia de rectas que pasan por el origen.

## 4.2. El problema de la Braquistocrona

### Historia

En Acta Eruditorum de junio de 1696 el matemático Johann Bernoulli anunció el siguiente problema como desafío a la comunidad científica: “Datis in plano verticali punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B”.

Que traduce lo siguiente: “Dados dos puntos A, B, en un plano vertical, hallar la curva a lo largo de la cual un material móvil soltado en el punto A llega al punto B en un tiempo mínimo, suponiendo que no hay resistencias y bajo el efecto de la gravedad”. Es decir hallar la curva de descenso en tiempo mínimo.



**Figura 14: Representación de la Braquistocrona**

Denominó a esta curva braquistocrona (del griego  $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$  braquistos “el más corto”,  $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$  chronos “tiempo”) o curva que sigue el descenso más rápido cuando existe gravedad y que es objeto de estudio en el cálculo de variaciones y dirigido como reto abierto a las mentes más brillantes. Los participantes tenían seis meses para resolverlo aunque a solicitud de Gottfried Leibniz (1646-1716) la fecha fue prorrogada hasta la pascua de 1697. Bernoulli predijo correctamente la identidad de los cinco matemáticos que darían una demostración, a saber: él mismo y su hermano Jacob, Leibniz, Newton y L’Hopital.

El 29 de enero de 1697 Newton recibía una carta procedente de Basilea que contenía dos problemas. Aunque también había sido enviada, además de Newton, a otros cuantos matemáticos del continente.

El remitente de la misiva era Johann Bernoulli aunque Gottfried Leibniz, que mantenía con Newton varias disputas, también había influido en su envío. El reto tenía aparentemente intención de desafiar a Newton, quien se había alejado de las actividades científicas; y es que el problema requería del cálculo diferencial e integral, cuya paternidad se discutía entre Newton y Leibniz, ya que se lo descubrieron de forma simultánea e independiente.

La carta llegó a manos de Newton a las 6 de la tarde y a las cuatro de la mañana ya había resuelto ambos problemas. A la mañana siguiente Newton envió las soluciones al presidente de la Royal Society. Las soluciones fueron publicadas de forma anónima en el número de febrero de 1697 de **Philosophical Transactions**. Newton resolvió en unas horas lo que a muchos matemáticos de la época le hubiese costado toda una vida.

Pese al anonimato con que se publicaron las soluciones, por la elegancia de las mismas Bernoulli reconoció de inmediato a su autor y al leer el artículo en *Philosophical Transactions* exclamó: “*Ex ungue leonis*” (“De las garras del león”).

En mayo de 1697, el Acta Eruditorum publicó cuatro soluciones, cuyos autores eran Leibniz, el mismo Bernoulli y su hermano mayor Jacob, y la anónima de Newton.

Mientras que la solución de Jacob Bernoulli es considerada el problema inaugural de una nueva disciplina matemática conocida como “Cálculo de Variaciones”. La cicloide se emplea para resolver el problema tautocrono (Descubierto por Christian Huygens), en el que si despreciamos el rozamiento y si invirtiésemos una cicloide dejando caer un objeto por la misma, por ejemplo una bola, ésta llegará a la parte más baja de la curva en un intervalo de tiempo que no depende del punto de partida.

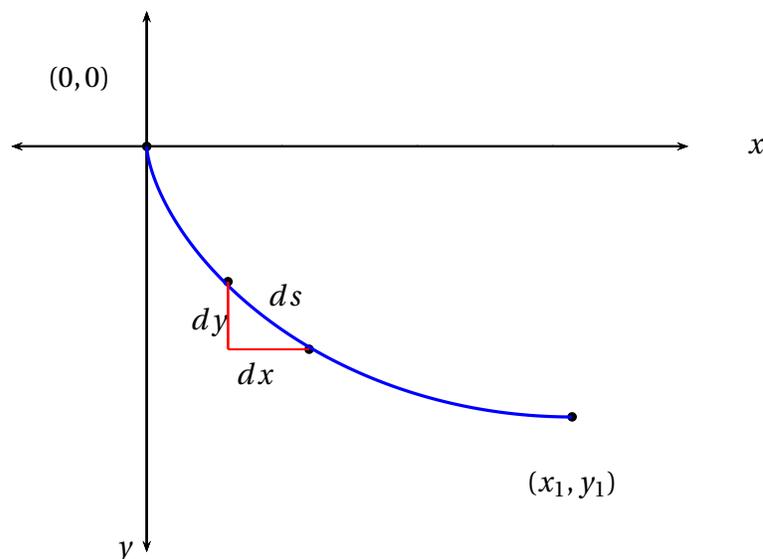
Para el desarrollo del problema, asumamos el hecho que el objeto se desliza desde el punto  $(0, 0)$ , a un punto  $(x_1, y_1)$ . Además como es en el menor tiempo debemos integrar en función del tiempo. Así que,

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$dt = \frac{ds}{v}$$

Por tanto el funcional a integrar es

$$J[t] = \int \frac{ds}{v}$$

En la **figura 15** tenemos que



**Figura 15: Longitud de una curva en el plano**

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\(ds)^2 &= (dx)^2 \left(1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right) \\(ds)^2 &= (dx)^2 (1 + (y')^2) \\(ds) &= \sqrt{(1 + (y')^2)} dx\end{aligned}$$

Ahora, por el principio de la conservación de la energía mecánica tenemos,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

Donde  $v$  es la velocidad,  $m$  es la masa y  $g$  es la gravedad, luego

$$\begin{aligned}v^2 &= 2gy \\v &= \sqrt{2gy}\end{aligned}$$

Reemplazando los valores encontrados  $ds$  y  $v$  en el funcional  $J[t]$  tenemos,

$$J[t] = \int \frac{\sqrt{(1 + (y')^2)}}{\sqrt{2gy}} dx$$

El integrando es

$$f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx$$

Y en virtud de la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

así que

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

Dado que el integrando esta en función de  $y$  y  $y'$ , usaremos la identidad de Beltrami

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c$$

luego

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}} - y' \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c$$

Y simplificando,

$$c = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \left( \sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \left( \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \right)$$

O bien,

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = c\sqrt{2gy}$$

Y luego de alguna manipulación algebraica al despejar  $(y')^2$  obtenemos:

$$(y')^2 = \frac{\frac{1}{2gc^2} - y}{y}$$

Si hacemos ahora  $\frac{1}{2gc^2} = k$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} (y')^2 &= \frac{k-y}{y} \\ y' &= \sqrt{\frac{k-y}{y}} \\ \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{k-y}{y}} \end{aligned}$$

Diferenciando por variables separables,

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{\frac{y}{k-y}} dy \\ \int dx &= \int \frac{y}{\sqrt{ky-y^2}} dy \\ x &= -\sqrt{ky-y^2} + \frac{k}{2} \arccos\left(\frac{k-2y}{k}\right) + m \end{aligned}$$

Donde  $m$  es una constante. Cuando  $y = 0$  y  $x = 0$ , entonces  $m = 0$ . Si hacemos el cambio de variable  $\theta = \arccos\left(1 - \frac{2y}{k}\right)$ , entonces  $\cos\theta = 1 - \frac{2y}{k}$ .

Y así,

$$y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

Ahora como

$$x = -\sqrt{ky - y^2} + \frac{k}{2} \arccos\left(\frac{k-2y}{k}\right)$$

Entonces, factorizando  $\frac{k}{2}$  en ambos términos obtenemos:

$$x = \frac{k}{2} \arccos\left(\frac{k-2y}{k}\right) - \left(\frac{k}{2}\right) \left(\sqrt{2\left(\frac{2y}{k}\right) - \left(\frac{2y}{k}\right)^2}\right)$$

$$x = \frac{k}{2} \left[ \arccos\left(\frac{k-2y}{k}\right) - \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{2y}{k}\right)^2\right)} \right]$$

Y al sustituir  $\theta$  y  $\cos\theta$  en la última expresión, se obtiene:

$$x = \frac{k}{2}(\theta - \sqrt{1 - (\cos\theta)^2}) = \frac{k}{2}(\theta - \sqrt{(\sin\theta)^2}) = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$$

Los resultados obtenidos para  $x$  y  $y$  corresponden a una cicloide, donde el radio es  $\frac{k}{2}$ . Por tanto las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$x = \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$$

$$y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

### 4.3. Ley de Snell

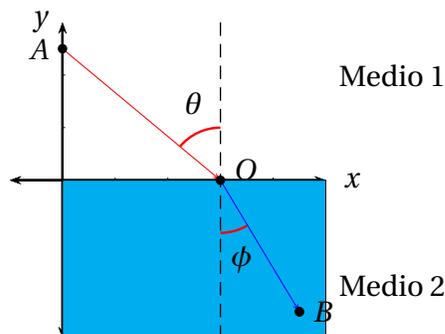


Figura 16: Esquema de la ley de Refracción de Snell

## Historia

La ley de Snell es una expresión que permite describir la relación entre los ángulos de incidencia y refracción, cuando se hace referencia a la luz o de otras ondas que pasan a través de un límite entre dos medios isótropos diferentes, tales como el agua y el vidrio.

La ley de Snell relaciona los senos de los ángulos de incidencia y refracción, y éstos son iguales a la relación de velocidades de fase en los dos medios de comunicación, o el equivalente al recíproco de la relación de los índices de refracción; con cada uno como el ángulo medido desde la normal de la frontera, como la velocidad de la luz en el medio respectivo y como el índice de refracción del medio respectivo.

La ley de Snell se sigue del principio de Fermat de menor tiempo, que a su vez se desprende de la propagación de la luz en forma de ondas.

Ptolomeo (100 - 170 dc), en Alejandría, había encontrado una relación con respecto a los ángulos de refracción, pero era inexacta para ángulos que no eran pequeños. Ptolomeo estaba seguro de que había encontrado una ley empírica precisa, en parte como resultado de esquivar sus datos para adaptarse a la teoría. Alhazen (965 - 1040), en su libro de Óptica, se acercó a descubrir la ley de la refracción, aunque no se cumpla dicha formalidad.

La ley de la refracción primero fue descrita con precisión por Ibn Sahl (940 - 1000), de Bagdad, en el manuscrito "*los espejos y lentes ardientes*". Hizo uso de ella para elaborar las formas de las lentes que enfocan la luz sin aberraciones geométricas, conocidas como lentes anaclastic (las lentes que enfocan la luz con aberraciones geométricas).

La ley fue redescubierta por Thomas Harriot (1560 - 1621) en 1602, que sin embargo no publicó sus resultados a pesar de haber mantenido correspondencia con Kepler sobre este mismo tema. En 1621, el matemático Holandés Willebrord Snel van Royen (1580 - 1626) obtiene una forma matemáticamente equivalente, que no se publicó durante su vida. René Descartes (1596 - 1650) deriva independientemente la ley con argumentos de conservación del momento heurístico en términos de la función seno, en su tratado de 1637 "*Discurso del método*", y lo utilizó para resolver una serie de problemas ópticos. Rechazando la solución de Descartes, Pierre de Fermat (1601 - 1665) llegó a la misma solución basada únicamente en su principio de menor tiempo.

Según el matemático Holandés Eduard Jan Dijksterhuis (1892-1965), en "*De natura et Lucis proprietate - Isaac Vossius*" escribió que "Descartes había visto el periódico de Snell y confeccionado su propia prueba. Ahora sabemos que este cargo es innecesario pero se ha adoptado muchas veces desde entonces". Tanto Fermat y Huygens repiten esta acusación de que Descartes había copiado Snell. En Francia, la ley de Snell se llama "Loi de Descartes" ó "Loi de Snell-Descartes".

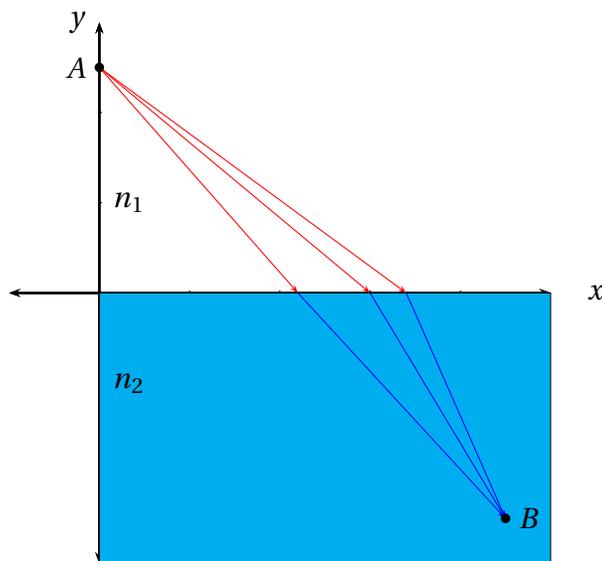
En 1678 Christiaan Huygens (1629 - 1695) en su obra "*Traité de la lumière*", mostró como la ley de Snell podría explicarse por la derivada de la naturaleza ondulatoria de la luz, a lo

que llamaremos el principio de Huygens.

### PRINCIPIO DE FERMAT

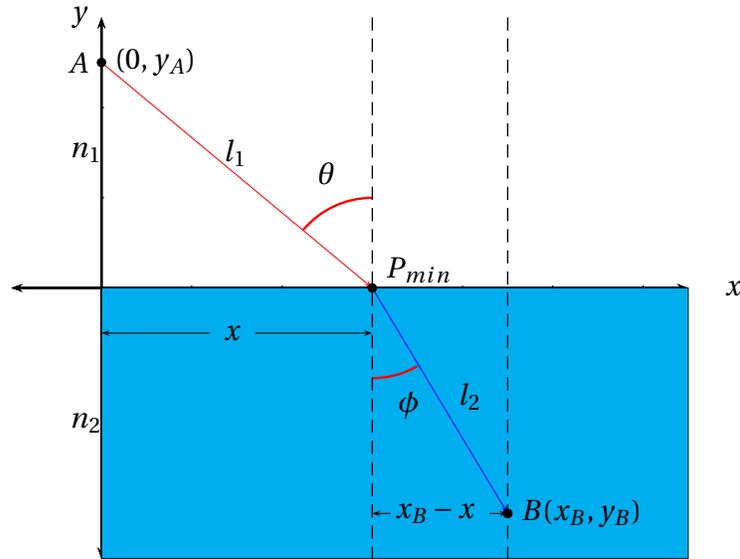
En un medio homogéneo de índice de refracción  $n$ , definido  $n$  como  $n = \frac{c}{v}$ , donde  $c =$  *velocidad de la luz en el vacío* y  $v =$  *velocidad en el medio*, el principio de Fermat establece que: “La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto A a otro punto B es aquella para la cual el camino óptico es mínimo”. Esta definición, y dado que  $c$  es una constante, es equivalente a afirmar que el tiempo de recorrido de la luz debe ser un mínimo.

La **figura 17** indica los posibles caminos que podría seguir la luz al propagarse de A hasta B; previa refracción en un dioptrio plano que separa dos medios de índices  $n_1$  y  $n_2$ , con  $n_1 < n_2$ .



**Figura 17: Caminos posibles que podría tomar la luz entre A y B**

Tomaremos uno de los posibles caminos que podría seguir la luz, asignando coordenadas cartesianas a los puntos A y B de la **figura 17**. Sean  $A = (0, y_A)$  y  $B = (x_B, y_B)$  dos puntos fijos situados del plano, de modo que A está situado en el primer medio, y B en el segundo medio y un rayo de luz que se propaga de A a B atravesando la superficie que separa los dos medios en el punto  $P = (x, 0)$  tenemos.



**Figura 18: Punto del tiempo mínimo que recorre la luz**

El siguiente paso es deducir el tiempo que tarda el rayo en recorrer  $\overline{AP} = l_1$  y  $\overline{PB} = l_2$ , dado que en cada medio el tiempo se calcula mediante  $t = \frac{d}{v}$ , además sean  $v_1$  y  $v_2$  las velocidades de propagación de la luz en el primer y segundo medio respectivamente. Así,

$$t_1 = \frac{l_1}{v_1} \quad y \quad t_2 = \frac{l_2}{v_2}$$

Entonces,

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{l_1}{\frac{c}{n_1}} + \frac{l_2}{\frac{c}{n_2}} = n_1 \frac{l_1}{c} + n_2 \frac{l_2}{c} = \frac{1}{c} (n_1 l_1 + n_2 l_2)$$

Por otro lado

$$l_1 = \sqrt{x^2 + (y_A)^2} \quad y \quad l_2 = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B)^2}$$

y haciendo el tiempo un mínimo respecto a  $x$  obtenemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left( n_1 \frac{dl_1}{dx} + n_2 \frac{dl_2}{dx} \right) = 0$$

Y por lo tanto,

$$n_1 \frac{dl_1}{dx} + n_2 \frac{dl_2}{dx} = 0 \tag{4.1}$$

derivamos a  $l_1$  y  $l_2$  respecto a  $x$  y obtenemos

$$\frac{dl_1}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y_A)^2}} \quad y \quad \frac{dl_2}{dx} = -\frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B)^2}}$$

A partir de la **figura 18** tenemos que

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y_A)^2}} = \sin \theta \quad y \quad -\frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B)^2}} = -\sin \phi$$

Reemplazando lo obtenido en (4.1) tenemos,

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta + n_2(-\sin \phi) &= 0 \\ n_1 \sin \theta &= n_2 \sin \phi \end{aligned}$$

Así obtenemos la ley de Snell de la refracción de la luz.

## CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta lo desarrollado en el presente trabajo de grado se concluye lo siguiente:

- A partir del cálculo variacional es posible analizar problemas de optimización, es decir de máximos o mínimos de funcionales que permiten deducir curvas interesantes y mostrar su gran aplicación en distintos campos de la física y la ingeniería.
- Destacar la gran importancia de los problemas en la Matemática, como fuente inagotable y generadora de nuevos conceptos, situaciones y adelantos científicos.
- Se ha podido rescatar la riqueza histórica de la evolución del Cálculo de Variaciones conociendo cada una de sus etapas y los grandes contribuyentes a la formación rigurosa de ésta teoría.
- Se han presentado de forma didáctica dos de los problemas que dieron origen al Cálculo de Variaciones como es la catenaria y la braquistocrona mostrando de forma experimental sus resultados.



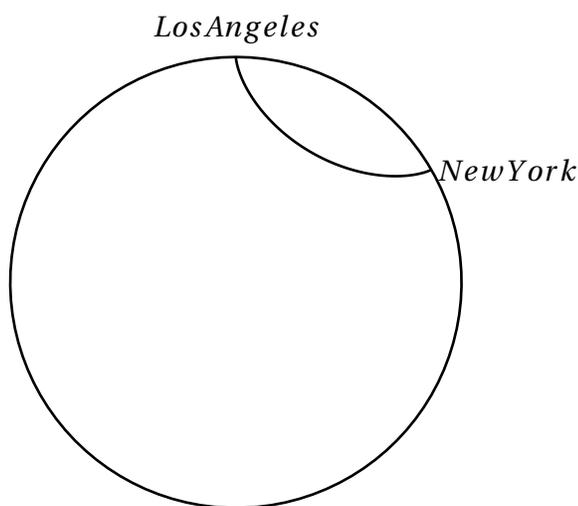
## BIBLIOGRAFÍA

- [1] EMERY, JAMES. *Brachystochrone*, 11-12-1992 (Editado 04-03-2008).
- [2] RICKEY, FREDERICK. *History of the Brachistochrone*, 29-05-1996.
- [3] HERNANDEZ ABREU, DOMINGO *La Cicloide: un recorrido histórico por sus propiedades*, Revista Iberoamericana de educación Matemática, Número 12, Diciembre de 2007.
- [4] FISHER, JIM. *Introduction to the Calculus of Variations*, Marzo 20 de 1999.
- [5] MARTÍNEZ, EDUARDO. *Una breve introducción al cálculo de Variaciones*, 2008.
- [6] CAÑADA, ANTONIO. *Cálculo de Variaciones*, Editorial Universidad de Granada, 2009.
- [7] CÁNOVAS PEÑA, JOSÉ S. *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales*, Universidad Politécnica de Cartagena, Departamento de Matemática aplicada y Estadística, Mayo de 2004.
- [8] CHAMIZO, FERNANDO *Modelización II*, Universidad Autónoma de Madrid, Enero de 2003.
- [9] MAXHAM, AMANDA *Brachistochrone inside the Earth: The Gravity Train*, 2008.
- [10] GOLDSTEIN, POOLE y SAFKO *Classical Mechanics*, tercera edición, 2001.



## 1.1. Tren Gravitacional Terrestre

En el Capítulo 2 del libro “*Classical Mechanics*” de *Goldstein* se propone el siguiente problema: “Encuentra la ecuación de Euler que describe la curva Braquistocrona para una partícula que se mueve dentro de la Tierra con densidad de masa uniforme. Obtenga una primera integral para ésta ecuación diferencial por analogía de la integral de Jacobi en  $h$ . Con la ayuda de esta integral, muestre que dicha curva es una Hipocicloide (la curva descrita por un punto de un círculo que rueda dentro de una mas grande). Obtenga una expresión para el tiempo de viaje a lo largo de la braquistocrona entre dos puntos dentro de la superficie terrestre. ¿Cuánto le tomaría ir desde New York a Los Angeles (asuma que los separa 4800 km de la superficie) a lo largo del túnel de braquistocrona (asumiendo que no hay fricción) y que tan lejos estará por debajo de la superficie el punto más profundo del túnel?”



**Figura 19: Ubicación de los puntos New York - Los Angeles a lo largo del túnel de braquistocrona dentro de la superficie terrestre**

**Solución:**

Primero se necesita una expresión para la energía potencial como una función de  $r$  dentro de la Tierra. El intregando de la masa desde un punto  $a$  con distancia  $r$  desde el centro de la tierra es:

$$M = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad (\text{A1.1})$$

Si la densidad de la masa,  $\rho$ , es constante a lo largo de la Tierra entonces,

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (\text{A1.2})$$

Dónde  $R$  es el radio de la Tierra y  $M$  es el total de masa terrestre. Expresando la aceleración debido a la gravedad en terminos de (A1.1) y (A1.2) tenemos,

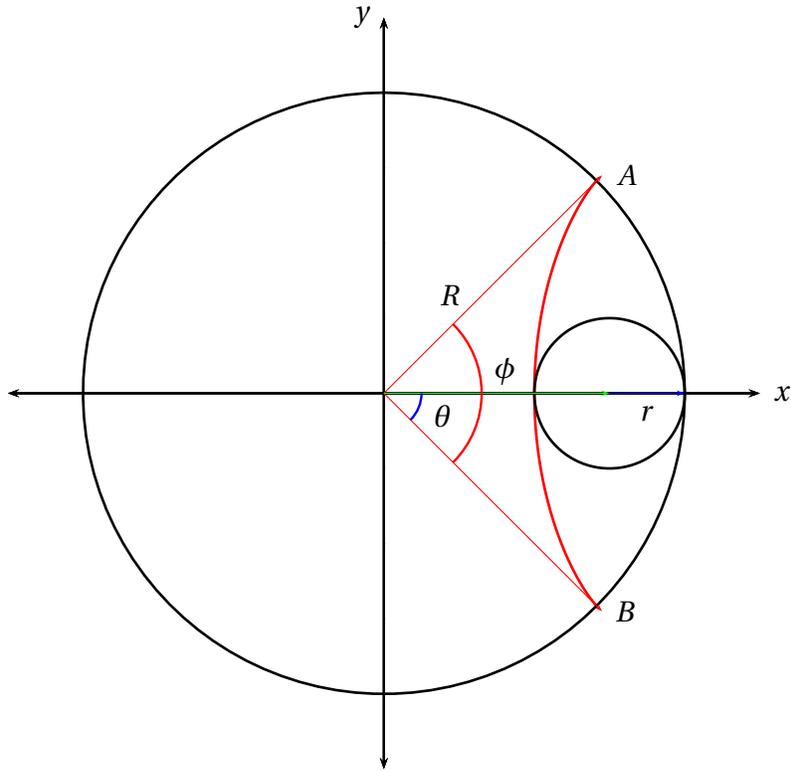
$$F(r) = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GM}{R^3}r \quad (\text{A1.3})$$

si  $m$  es la masa del tren. El Potencial es simplemente la integral de la fuerza y se convierte en,

$$U(r) = \int_0^r F(r)dr = \frac{GMm}{2R^3}r^2 \quad (\text{A1.4})$$

Para encontrar la velocidad, escribiremos la expresión para la energía total (la cual es una constante)

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GMm}{2R^3}r^2 \quad (\text{A1.5})$$



**Figura 20: Curva Hipocicloide**

Resolviendo para  $v$  tenemos:

$$v = \sqrt{\frac{g(R^2 - r^2)}{R}} \quad (\text{A1.6})$$

Donde se ha usado la constante,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (\text{A1.7})$$

Ahora se quiere minimizar el tiempo por el cual el tren viaja a través del túnel. El tiempo requerido para que el tren se deslice a lo largo del túnel a través de un punto A hasta B es:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (\text{A1.8})$$

Donde  $ds$  es la distancia a lo largo del camino. Por tanto,

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_A^B \frac{(x'^2 + y'^2)R}{g(R^2 - (x^2 + y^2))} \quad (\text{A1.9})$$

Como la ecuación no depende del tiempo, usamos la Identidad de Beltrami en dos ocasiones para dos ecuaciones acopladas:

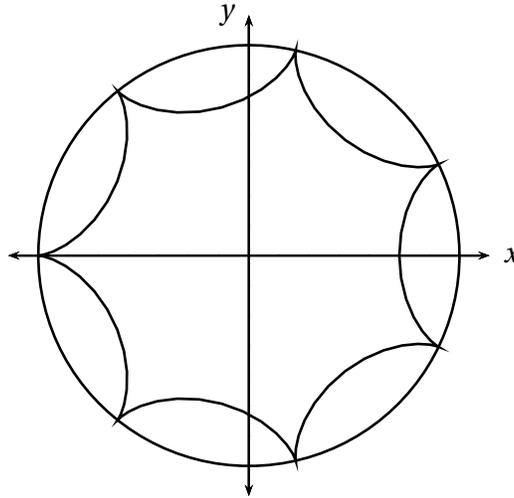
$$f - x' \frac{\partial f}{\partial x'} = c_1 = \frac{y'^2 \sqrt{\frac{R(x'^2 - y'^2)}{g(R^2 - x^2 - y^2)}}}{y'^2 - x'^2} \quad (\text{A1.10})$$

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c_2 = \frac{x'^2 \sqrt{\frac{R(x'^2 - y'^2)}{g(R^2 - x^2 - y^2)}}}{x'^2 - y'^2} \quad (\text{A1.11})$$

si sumamos (A1.10) y (A1.11) y elevando al cuadrado obtenemos,

$$R(x'^2 + y'^2) = gC^2(R^2 - x^2 - y^2) \quad (\text{A1.12})$$

Donde  $C = c_1 + c_2$



**Figura 21: Solución del tren gravitacional terrestre**

La solución de (A1.12) es una Hipocicloide que paraméricamente está descrita por:

$$\begin{aligned} x(t) &= (R - r) \cos t + r \cos \left( \frac{R - r}{r} t \right) \\ y(t) &= (R - r) \sin t + r \sin \left( \frac{R - r}{r} t \right) \end{aligned}$$

Con  $R$  el radio del círculo mayor y  $r$  el radio del círculo que está dentro del mayor.