Neiva, 23 Noviembre del año 2015

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Jeferson Yused Olaya Narváez, con C.C. No. 1082214160,

autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o Jeferson Yused Olaya Narvaez

titulado: Algunos Resultados Matemáticos que Hicieron Historia.
presentado y aprobado en el año 2015 como requisito para optar al título de

Licenciado en matemáticas;

autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

□□Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:______________________________

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:______________________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Algunos Resultados Matemáticos que Hicieron Historia

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Olaya Narvaez	Jeferson Yused

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio
Alvis Puentes	Johnny Fernando
Reyes Bahamon	Francisco Javier

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2015 **NÚMERO DE PÁGINAS: 57**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas_x__ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros_x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Teorema	Theorem	6. _____________	_____________
2. Ecuación	Equation	7. _____________	_____________
3. Interpretación	Interpretation	8. _____________	_____________
4. Aplicación	Application	9. _____________	_____________
5. Historia	History	**10.** __________	__________

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Es te trabajo de grado consta de 57 páginas dividida en 5 capítulos, en el capítulo uno el Teorema de Pitágoras donde se hace una introducción y algunas aplicaciones, en el segundo capítulo se estudió la ecuación para los logaritmos, exponiendo sus propiedades y algunas aplicaciones encada uno de ellas.

En el tercer capítulo se examinó la ecuación de los números complejos sus propiedades básicas realizando aplicaciones y en el capítulo cuarto se afirmó sobre la ley de gravitación universal, brindando al lector una apreciación de las diferentes aplicaciones que se pueden realizar utilizando esta ley.

También consta de un capitulo quinto donde se hace una conclusión de todos los capítulos de acuerdo con los objetivos propuestos en este trabajo.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This degree work consists of 57 pages divided into 5 chapters, in chapter one the Pythagorean Theorem where an introduction and some applications, in the second chapter the equation for the logarithm is studied by exposing their properties and some applications one encada of them.

In the third chapter the equation of complex numbers their basic properties and applications made in the fourth chapter said on the law of universal gravitation, providing the reader an appreciation of the various applications that can be performed using this law was

examined.

It also has a fifth chapter where a conclusion of all chapters in accordance with the objectives proposed in this work is done.

Nombre Presidente Jurado: Mauricio Penagos

Firma:

Nombre Jurado: Johnny Fernando Alvis Puentes

Firma: Johny F Alvis Puentes

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunos Resultados Matemáticos que Hicieron Historia

Jeferson Yused Olaya Narváez

Neiva, Huila
2015

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunos Resultados Matemáticos que Hicieron Historia

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Jeferson Yused Olaya Narváez
2003202019

Asesor:
MSc. Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2015

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Noviembre de 2014.

AGRADECIMIENTOS

Finalizando esta etapa tan importante en mi vida, quiero expresar un profundo agradecimiento a todos aquellos que con su ayuda, apoyo y compresión me alentaron a lograr esta meta de ser Licenciado en Matemt́icas. Agradecer a Dios por darme el privilegio de crecer como persona. A mis padres, porque no existe forma alguna de retribuirles sus sacrificios, esfuerzos y amor, quiero que sientan que la meta alcanzada tambiÃ n es de ellos y que la fuerza que me ayudó a conseguirla fue su gran apoyo.

De igual manera quiero manifestar mi sincero agradecimientos a los docentes del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana y a mi Asesor profesor Mauricio Penagos por su colaboración para realizar este trabajo de grado y finalmente al profesor Ricardo Cedeño Tovar (q. p. d) por su especial disposición y ayuda brindada.

A todos ellos infinitas gracias.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

INTRODUCCIÓN

La Matemática es una de las ciencias más antiguas de la humanidad y con muchos campos de aplicación. Que durante su desarrollo ha experimentado un crecimiento vertiginoso ya que a través del tiempo se ha convertido en una herramienta que permite explicar y comprender todo lo que nos rodea, esto gracias a la curiosidad innata del hombre por explicar los fenómenos de la naturaleza. Es admirable ver como las Ecuaciones, los símbolos y los teoremas se convierten en herramientas eficientes para la comprensión de fenómenos transcendentales en el desarrollo de la humanidad.

En este trabajo de grado, basado en el libro "17 Ecuaciones que cambiarón el mundo " de Ian Stewart mostramos lo importante que han sido las ecuaciones durante toda la era arcaica de la Humanidad, ya que son un arma fundamental para poder comprender y explicar situaciones que han marcado un precedente histórico y fundamental en la concepción del universo y de nuestro planeta. Nos detendremos a estudiar cuatro ecuaciones que de una u otra manera influyerón notablemente para la explicación de fenómenos desconocidos por el hombre.

En el estudio de cada una de ellas haremos una breve reseña de su origen y los hechos mas relevantes en los que se utiliza cada ecuación. También resaltaremos quién fué el que descubrió la escritura simbólica de la ecuación, es decir como fue formalizada y mirar la concepción actual que tenemos sobre ella.

Las ecuaciones que se estudian son las siguientes:

- El Teorema de Pitágoras.
- Ecuaciones para los logaritmos.
- La ecuación $x^2 + 1 = 0$.
- Ley de Gravitación Universal.

Una de las técnicas que utilizare es la lectura analítica de las ecuaciones, para poder construir una explicación coherente de acuerdo a los datos relacionados dentro del contexto donde se aplica y así obtener la solución al problema.

En el capitulo uno estudiaremos la relación matemática o mas conocida como el Teorema de Pitágoras donde haremos una recopilación de su historia, donde mostraremos algunas demostraciones tradicionales que marcaron un punto importante al momento de su aplicación, también realizaremos ejercicios donde se aplica dicho teorema.

En el capitulo dos examinaremos la ecuación de los Logaritmos, mostrando los avances a través de su historia, además presentaremos las respectivas propiedades generales para poder utilizarlas en cualquier situación que se requiera en particular en este capitulo los utilizaremos para mostrar como se usan en la ciencia y la naturaleza.

En el capitulo tres nos enfocaremos en la Raíz cuadrada de $\sqrt{1}$ exponiendo su interpretación, tanto histórica como aplicativa, donde mencionaremos las propiedades básicas con sus respectivas operaciones elementales como es la suma la resta, multiplicación y división y finalizaremos con ejercicios de aplicación.

En el capitulo cuarto trataremos la ley de la Gravitación universal, haciendo un recorrido histórico de como se construyeron las diferentes teorías de nuestro sistema solar, y para concluir se realizara algunas aplicaciones de esta ley.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Elaborar un diagnóstico bibliográfico sobre las ecuaciones matemáticas que explican los siguientes resultados: El teorema de Pitágoras, la ley de la gravitación universal, la ecuación para los logaritmos, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y sus principales aplicaciones.

Objetivos Específicos

1. Determinar algunas aplicaciones de cada una de las ecuaciones en mención.
2. Interpretar los significados prácticos que tuvo cada ecuación en la evolución del mundo.
3. Mencionar la motivación que tuvieron los matemáticos para la formulación de cada ecuación.

JUSTIFICACIÓN

Las matemáticas juegan un papel importante en la vida del hombre, ya que proporcionan instrumentos como las ecuaciones, que permiten explicar diversas situaciones que ocurren en el mundo real. A pesar de que pueden ser complicadas y aburridas, ya sea por la manera en que las presentan, pero si hacemos un alto y nos detenemos un poco a mirar como se desarrollaron en cada época veremos lo importante del contexto como se da cada una de ellas.

En este trabajo queremos brindar al lector una ubicación del contexto cultural y humano y dar a conocer los hechos más relevantes de cada una de las ecuaciones que mencionamos anteriormente partiendo del origen de la misma, su evolución y aplicaciones más importantes, donde buscaremos crear una armonía entre lo histórico y lo aplicativo, donde cualquier persona pueda comprender la importancia de su origen para poder tener una idea mas acertada de como debemos familiarizarnos con ellas.

Debido a que los problemas que se presenta a nivel de los estudiantes de secundaria y de pre-grado y en la mayoría de las carreras universitarias, una de las dificultades que mas se presentan a la hora de utilizar las ecuaciones como herramienta es el temor por que se desconoce el significado de su origen y las múltiples aplicaciones que tiene cada una de ellas. Esto tiene como consecuencia que se haga un mal uso de ellas, provocando apatía y poco interés en sus aplicaciones practicas.

Por lo cual según Polya (1957) afirma que para realizar cual quier estudio de matemática es necesario que el profesor les de a los alumnos incógnitas para resolver problemas y no ejercicios rompecabezas, para que el estudiante reflexione y pueda dar solución a cualquier tipo de situación problema que se le presente.

Es por eso que debemos aprender a utilizar las ecuaciones como herramienta indispensable para poder proporcionar tanto instrumentos, como técnicas, historia y pautas generales de su uso para desarrollar más conocimiento y así encontrar una mejor comprensión del mundo y poder tener una visión mas acertada de como una ecuación tan sencilla puede abarcar un tiempo un espacio dependiendo de su utilización y del contexto donde queremos aplicarla por que así estaremos haciendo un buen uso de ella, para que el resultado sea cada ves mas acertado.

CAPÍTULO 1

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

" Educad a los niños y no será necesario castigar a los hombres"
Pitágoras

1.1. Preliminar

Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que nació en la isla de Samos en el año 570 a.C. Es considerado el primer matemático puro; contribuyó en el avance de la matemática helénica, la geometría y la aritmética derivada particularmente de las relaciones numéricas, aplicadas a la teoría de pesos, medidas, música y astronomía. Es el fundador de la llamada "Hermandad Pitagórica", una sociedad que se interesaba también en la medicina, cosmología, filosofía, ética y política entre otras.(Steweart, 2013, p.90)El pitagorismo formuló principios que influenciaron también a Aristóteles y de manera general, al posterior desarrollo de la matemática y la filosofía racional en occidente.

El Teorema de Pitágoras es un Teorema clásico que se puede notar como una ecuación de la siguiente manera: $a^2 + b^2 = c^2$ donde a, b y c representan los lados de un triángulo rectángulo. Esto nos dice que estamos relacionando los tres lados del triángulo y a la vez haciendo una relación del álgebra y la geometría, permitiéndonos conocer las longitudes de los lados del triángulo en términos de coordenadas. A ciencia cierta no se sabe quien en realidad formuló dicho teorema.

Pitágoras de Samos fundó una escuela filosófica con el nombre de Escuela Pitagórica. Aunque en la antigüedad los griegos habían escrito el teorema en forma verbal, se cree que la primera demostración registrada estuvo a cargo de Euclides de Alejandría, alrededor del año 250 a.C, convirtiendose en el primer matemático en escribirlo en su libro "Los Elementos", que ha sido el texto matemático mas influyente de todos los tiempos.(Steweart, 2013, p.17)

Euclides convierte la geometría en lógica haciendo explícitos sus supuestos básicos en pruebas sistemáticas o demostraciones de todos sus teoremas, construyendo así una torre conceptual cuyos fundamentos son los puntos y las rectas. En la proposición 47 del Libro I de los Elementos, según la traducción de Thomas Heath se afirma: "En triángulos rectángulos, el cuadrado del lado subtendiente al ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo recto". Entendiendo que no aparece la palabra hipotenusa por ningún lado, tampoco suma o adición, tan solo la palabra "subtendiente", que significa " ser opuesto a" y sí hacemos la comparación con el Teorema de Pitágoras claramente expresa una ecuación, porque contiene la palabra "igual a".(Steweart, 2013, p.17)

En la matemática griega se trabajaba con rectas y áreas en vez de números. Fué de este modo que Pitágoras y sus sucesores quienes habrían decodificado el teorema como una igualdad de áreas : el área de un cuadrado construido usando el lado más largo de un triángulo rectángulo equivale a la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los otros lados .

Hay evidencias históricas que indican que el Teorema de Pitágoras era conocido mucho antes. Por ejemplo, en la antigua Babilonia se encontró una tabla de arcilla con escritura cuniforme de un problema matemático y su respuesta, puede ser parafraseada de la siguiente manera:(Steweart, 2013, p.20)

"En un rectángulo, 4 es la longitud y 5 la diagonal. ¿Cuál es el ancho?
4 veces 4 es 16
5 veces 5 es 25
Quita 16 de 25 para obtener 9 ?
3 veces 3 es 9
por lo tanto 3 es el ancho".

El Teorema de Pitágoras cuenta con el mayor número de demostraciones diferentes, donde se han utilizado diversos métodos para realizar dicha demostración.

El matemático Estadounidense E.S Loomis catalogó las demostraciones en cuatro grandes grupos:

1 **Las Algebraicas**
2 **Las Geométricas**
3 **Las Dinámicas**
4 **Las Cuáterniónicas**

El Teorema de Pitágoras es quizás la relación matemática, conocida por más personas con formación básica y que ofrece un valor práctico, teórico y didáctico tanto en la versión aritmética y algebraica $a^2 = b^2 + c^2$, siendo a la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, b y c las medidas de los catetos del mismo, teniendo en cuenta que en la Geometría el a^2 es el área de un cuadrado construido, tomando como lado la hipotenusa y que b^2 y c^2 son las áreas respectivas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos. Este teorema tiene diversas conexiones con problemas y teorías, tales como la sección áurea, la simetría dinámica, la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo.

1.2. Algunas demostraciones tradicionales del Teorema de Pitágoras

Entre las muchas demostraciones existentes de dicho teorema, nos referiremos a algunas que revisten especial importancia histórica o por su simplicidad o riqueza conceptual merecen ser destacadas:

1. **Demostración clásica del Libro I de " Los Elementos de Euclides"**
En esta demostración la haremos siguiendo la traducción de Rodrigo Zamorano en el siglo XVI.

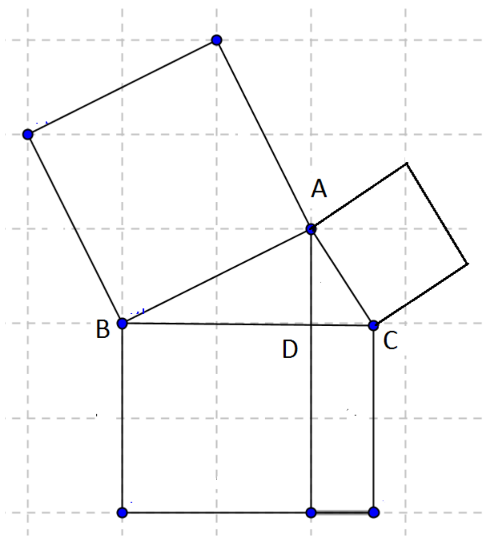

Figura 1.1: Representación clasica del triangulo de pitagóras.

Teorema. En los triángulos rectángulos el cuadrado que es hecho de el lado que está opuesto al ángulo recto es igual a los dos cuadrados que son hechos de los lados que contienen el ángulo recto.

Demostración: sea ABC un triángulo ractángulo, con el ángulo recto en A, donde el segmento $\overline{BD}$ es perpendicular al lado lado $\overline{BA}$. Teniendo encuenta los triángulos DBA y DAC, ambos son semejantes con el triángulo ABC, y por lo tanto resulta semejantes entre sí, de la semejanza de los triángulos ya mencionados resulta : $\overline{BA}/\overline{BC} = \overline{AC}/\overline{AD}$.

2. **Demostración: utilizando teoremas de triángulos, rectángulos y relaciones algebraicas**

La siguiente prueba es una de las más utilizadas en los libros de texto y se basa en la formación de triángulos rectángulos semejantes, al trazar en un triángulo rectángulo dado, la altura correspondiente a la hipotenusa.

Sea el triángulo ABC, Recto en A y, D el pie de la altura de dicho triángulo correspondiente a la hipotenusa $\overline{BC}$.

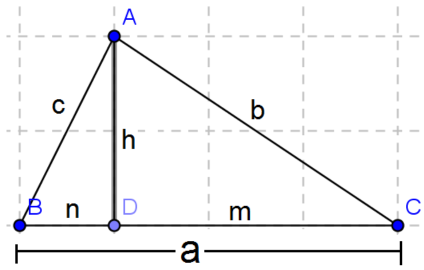

Figura 1.2: Imagen del triángulo de pitagóras.

Esta altura da lugar a la formación de triángulos ABD y ADC semejantes por tener lados proporcionales con el inicial ABC. De dicha semejanza se deduce el Teorema del Cateto. El cual expresa que en todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.
Si llamamos $\overline{BC} = a$, $\overline{BA} =$ c, $= \overline{AC} =$ b. Pero para demostrar lo siguiente nos apoyamos de las relaciones métricas de un triangulo rectángulo: si observamos que en el primer triangulo BAD tenemos el cateto $\overline{BA}$ tiene como proyección n luego el triangulo ACD el cateto $\overline{AC}$ tiene como proyección m y si sumamos la proyeccion $n + m = a$:
ya teniendo lo anterior hechamos mano del teorema longitud del cateto elevado al cuadrado obteniendo lo siguiente:

(1) $b^2 = m.a$
(2) $c^2 = n.a$

al sumar (1) y (2) se obtiene:

$$c^2 + b^2 = am + an = a(m + n) = a.a = a^2$$

3. **Demostración :** (Atribuida a Pitágoras)

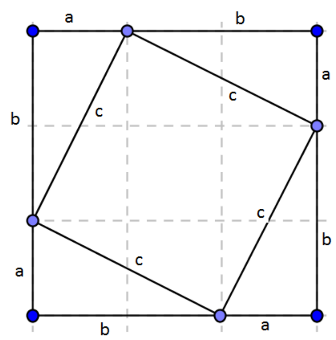

Figura 1.3: Imagen del triángulo inscritos en un cuadrado.

El cuadrado mayor tiene área $(a + b)^2$. El cuadrado interno tiene un área cuadrada que la podemos llamar C^2. Cada uno de los triángulos de lados a, b y c tiene área de $\dfrac{ab}{2}$ luego :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= C^2 + 4(\frac{ab}{2}) \\ a^2+2ab+b^2 &= C^2+2ab \\ a^2+b^2 &= C^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.3. Algunas aplicaciones del Teorema Pitágoras

Uno de de los teoremas milenarios más importantes y estudiados a través de la historia, ha sido sin duda el teorema de pitagóras, esto se refleja en las innumerables demostraciones e interpretaciones que los diferentes matemáticos han realizado durante la evolución del hombre. Debido a este resultado la humanidad a podido resolver diferentes interrogantes de una manera sencilla y eficaz, es tanto así que podemos concluir que a servido como ayuda o apoyo para el mejoramiento de la calidad de vida, por este motivo a continuación utilizaremos el teorema de pitágoras como la herramienta simple pero fundamental para la solución de los siguientes problemas:

1. Se inscribe un círculo dentro de un cuarto de círculo, como se observa en la figura. Si el círculo mayor tiene radio R, hallar el radio del círculo menor.

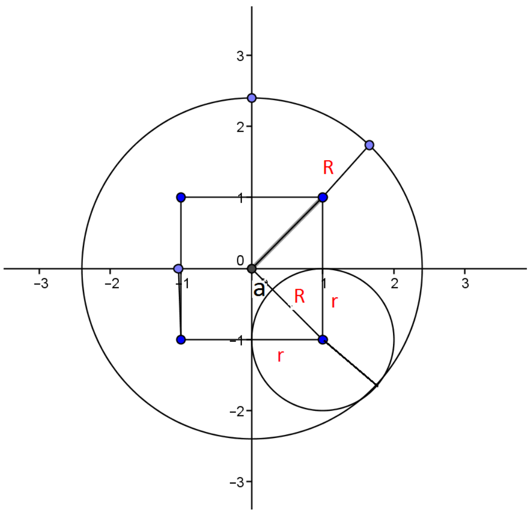

Figura 1.4: Imagen del círculo inscritos en un cuadrado.

Solución: Unimos los centros de ambos círculos, como en la figura 1·4. No tese que $R = a+2r$, en donde r es el radio del círculo menor y a es la medida del segmento de recta fuera del circulo menor desde el centro del circulo mayor. Al trazar dos radios del circulo menor, paralelos a los dos radios del circulo mayor, se obtiene un cuadrado de lado r. Utilizando el Teorema de Pitágoras tenemos :

$$r^2 + r^2 = (a+r)^2$$

$$\sqrt{2r^2} = \sqrt{(a+r)^2} = |a+r|$$

y como, $a > 0$, $r > 0$, entonces:

$$\sqrt{2}r = a + r \text{ entonces } a = r(\sqrt{2} - 1)$$

Finalmente, como $R = a + 2r$ entonces $R = r(\sqrt{2} - 1) + 2r = r(\sqrt{2} - 1 + 2) = r(\sqrt{2} + 1)$ así que:

$$r = \frac{R}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)R$$

2. En el siguiente cuadrado observamos que tiene como lado 1 la región rallada, formada por el área solapada de cuartos de círculos centrados en los vértices del cuadrado. Los círculos diagonalmente opuestos. Hallar el área que esta cubierta por lineas.

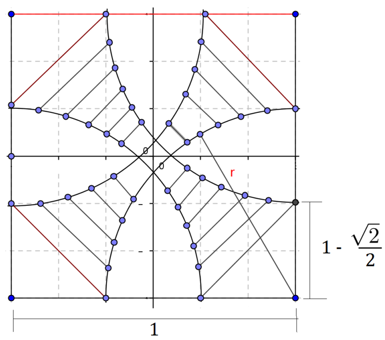

Figura 1.5: Imagen del círculo inscritos en un cuadrado.

solución : Como primera medida vamos hallar el r como lo muestra la figura $1 \cdot 5$

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ r &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

El cuadrado puede descomponerse así :

$(1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)$ circulo de radio r)+2 $\left(\frac{1}{4}\right)$área sombreada) +2 (triángulo rectangulo isosceles de$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ de lado) ó sea:

$$1 = \frac{1}{2}(\pi r^2) + \frac{1}{2}(A_s) + 2\left(\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}A_s + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

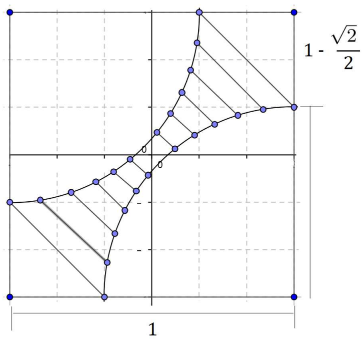

Figura 1.6: Imagen de un cuarto de círculo inscrito en un cuadrado.

ó sea:

$$A_s = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{2}$$

3. José se desplaza de su casa hacia su trabajo en la siguiente dirección: al norte 4 km y luego 3 km al oeste ¿Cuál es la distancia de su casa al trabajo?

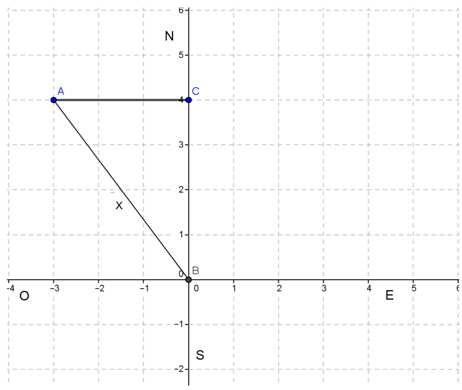

Figura 1.7: Imagen de orientación .

$$\begin{aligned} x^2 &= 4^2 + 3^2 \\ x^2 &= 16 + 9 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \sqrt{25} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

4. En la cáncha de fútbol del municipio de Yaguará es (rectangular como sabemos) mide 125 metros de largo. Si la longitud de sus diagonales es de 150 metros. ¿ cuál es el ancho del campo de juego?

Lo primero que debemos hacer es analizar la figura, y observamos que el triángulo queda comprendido por esa diagonal del campo de juego (la hipotenusa), el largo del campo (uno de los catetos) y el ancho (el otro cateto cuya longitud es lo que se nos pide hallar que en este caso lo llamaremos c).La solución sería el siguiente:

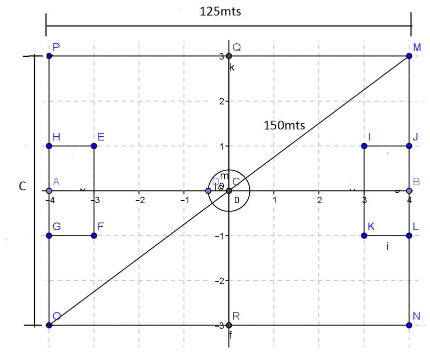

Figura 1.8: Cancha de fútbol .

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 \\
150^2 &= 125^2 + c^2 \\
22 \cdot 500 &= 15 \cdot 625 + c^2 \\
c^2 &= 22 \cdot 500 - 15 \cdot 625 \\
c^2 &= 6 \cdot 875 \\
c &= \sqrt{6 \cdot 875} \\
c &= 82 \cdot 9
\end{aligned}
$$

5. Juan tiene una escalera cuya longitud es de 3 metros y la apoya contra la pared, desde el suelo alcanza una longitud 2,5 m sobre esa pared vertical. La pregunta es: ¿ calcular a qué distancia está el pie de la escalera a la base de la pared?

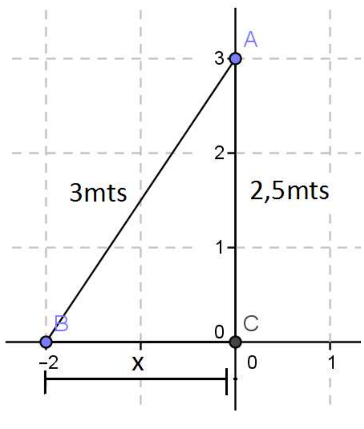

Figura 1.9: Escalera apoyada sobre la pared.

Como podemos observar en la figura $1 \cdot 9$ la escalera cumple el rol de la hipotenusa, la altura de la pared es uno de los catetos y la distancia del pie de la escalera hasta la base de la pared, es el otro cateto, precisamente la medida que se nos pide calcular es una incógnita que hemos llamado x.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 \\
3^2 &= b^2 + (2,5)^2 \\
9 &= b^2 + 6,25 \\
b^2 &= 9 - 6,625 \\
b^2 &= 2,75 \\
b &= \sqrt{2,75} \\
b &= 1 \cdot 6
\end{aligned}
$$

1.4. Interpretación práctica del Teorema Pitágoras en la evolución del mundo

Este teorema es catalogado como una herramienta geométrica indispensable y fácil de utilizar. Desde sus orígenes nació como una necesidad para calcular cierto tipo de distancias, que según la época se hacían muy complicadas de realizar. Fue tanto el auge que en la edad media a los estudiantes para obtener el título se les pedía que realizaran una demostración del Teorema de Pitagóras, por tal motivo se encuentran innumerables demostraciones hechas por matemáticos y filósofos de la época.

Permitiéndonos conocer y visualizar diferentes interpretaciones para una mayor comprensión y aplicación de dicho teorema. En consecuencia, el Teorema sigue vigente hasta el día de hoy solo que el modo de aplicación se ha multiplicado por la diversidad de campos de influencia que en períodos anteriores debido al avance en lo tecnológico y científico en que el ser humano se ha interesado por comprender y explicar.

1.5. Conclusión

Habiendo hecho una introspección al Teorema de Pitagóras en este capítulo podemos concluir que fué un gran invento no solo para la matemática sino para todas las áreas del conocimiento. Por medio de él podemos realizar diferentes cálculos de una manera sencilla y rápida.

Ademas podemos contar con una gran cantidad de interpretaciones, que a lo largo de la historia se han ido perfeccionando cada día para facilitar la comprensión y poder potenciar más el uso del Teorema en la explicación de los fenómenos en que el ser humano aun no ha podido comprender.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES PARA LOS LOGARITMOS

"Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos".

Napiér

2.1. Preámbulo

En este capítulo dedicaremos nuestra atención al estudio de los logaritmos, su origen y la manera como aparecieron algunas de las ecuaciones que los relacionan.

En la antigüedad los números aparecieron de una manera práctica, como lo fué en el proceso de contar animales y los productos básicos que utilizaban nuestros ancestros para su alimentación. Se han encontrado vestigios en Mesopotamia que datan del año 800 a.c donde se registra que usaban pequeñas piezas para representar una cantidad. Junto con los números aparece la aritmética básica como un método para sumar multiplicar y dividir números. Esto generó un gran avance, tanto así que al poco tiempo aparece el ábaco como herramienta fundamental para hacer cuentas de manera mucho mas fácil que lo tradicional. Esto duró poco porque cada vez se hacia mas difícil realizar cuentas de cantidades muy grandes, por tal motivo el tiempo transcurría y los científicos y matemáticos de la época buscaban la manera de perfeccionar técnicas, mucho más efectivas y fáciles de utilizar con las cuales pudieran realizar todo tipo de operaciones con cualquier cantidad.(Steweart, 2013, p.39)

Al utilizar la aritmética, los científicos necesitaban realizar cálculos cada vez más elaborados, generando un proceso extenuante y muy tedioso, ya que consumía mucho tiempo, a veces meses o hasta años. La matemática plantea la idea de una técnica llamada logaritmo, cuyo inventor fue un terrateniente escocés llamado Jhon Napier $(1550 - 1617)$ conocido como el Barón de Markinston. Napier estudió en la Universidad Saint Andrews y fué el primero en definir los logaritmos. También se le atribuye el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas.
La técnica utilizada por Napier despertó curiosidad y admiración en científicos de la época entre ellos a Brigg quien era conocido por hacer cálculos astronómicos, y quien generó que la técnica de Napier podria ahorrar mucho tiempo en estos cálculos tan grandes y tediosos como los que él realizaba. Fue así como los dos se pusieron en la tarea de mejorar la técnica y el

truco estaba en trabajar en potencias de números fijos, como por ejemplo la base diez por su sencillez.

De esta manera se hicieron importantes las propiedades de la potenciación. En general, cualquiera que sea el valor real de x , si multiplicamos su n-esíma potencia por potencia, siendo m y n números enteros entonces obtenemos su $(m+n)$ -ésima potencia, o bien :

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

Ésta expresión indica que si al multiplicar potencias de la misma base los exponentes se suman en este caso queda así: $m+n$, lo cual es mucho más simple .

DEFINICIÓN: Logaritmo de un Número Real

Dado un número real (argumento de x) la función logaritmo le asigna el exponente n (la potencia) a la que un número fijo b ($base$) se ha de elevar para obtener dicho argumento.
Es la función inversa de b a la potencia n . Esta función se escribe como:

$$n = log_b x \text{ si y solo si } b^n = x \text{ con } b > 0$$

Para que esta función esté bien definida no toda las bases y números son posibles. La base b tiene que ser positiva y distinta de uno y x tiene que ser un número positivo esto es, $x > 0$ y n puede ser cualquier número real es decir, $n \in \mathbb{R}$. Así la expresión $10^2 = 100$ significa que el logaritmo de 100 en base 10 es 2 y se escribe como:

$$log_{10} 100 = 2$$

.

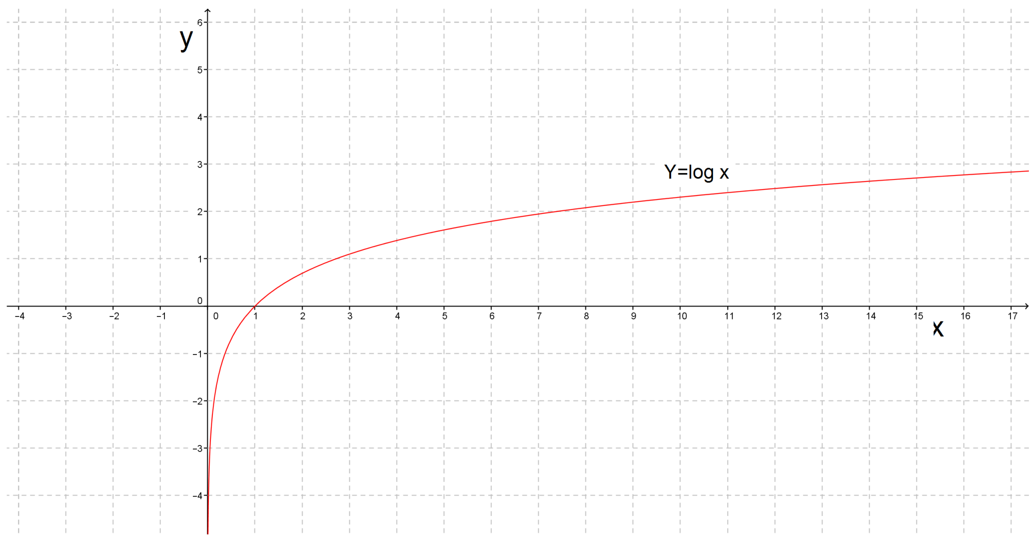

Figura 2.1: Gráfica logaritmo.

2.2. Propiedades generales de los logaritmos

1. Es importante notar que los números negativos no tienen logaritmo en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ ya que cualquiera que sea el exponente n se tendrá siempre que $b^n > 0$ en consecuencia no hay ningún valor de n que pueda satisfacer $b^n = x$ sea negativo, aunque podemos salvar el obstáculo ampliando el dominio de definición al cuerpo de los números complejos.

2. $log_b b = 1$. Esto se sigue del hecho que $b^1 = b$.

3. $log_b 1 = 0$ el logaritmo de 1 en cualquier base $b > 0$ es cero, pues $b^0 = 1$

4. Logaritmo de un cociente
El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, esto es:

$$log_b \tfrac{M}{N} = log_b M - log_b N$$

Demostración :
Sea $x = log_b M$,e, $y = log_b N$
luego $b^x = M$,y, $b^y = N$.
Como $b \neq 0$, $\frac{b^x}{b^y} = \dfrac{M}{N} = b^{x-y}$
luego, $log_b \frac{M}{N} = x, y$, o bien, $log_b \frac{M}{N} = log_b M - log_b N$

5. Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos $log_b(M \cdot N) = log_b M + log_b N$.

Demostración :

En efecto, sea $x = log_b M, e, y = log_b N$, luego
$b^x = M$,y , $b^y = N$
Así que $M \cdot N = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
En consecuencia $log_b(M \cdot N) = log_b M + log_b N$

6. Logaritmo de una potencia
El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base es decir:

$$log_b M^n = n log_b N$$

Demostración :
Sea $x = logA$ y $b > 0$. Vamos a demostrar que $log_b A^n = n(log_b A)$
como $b^x = A$, entonces elevando ambos miembros a la potencia n tenemos $b^{nx} = A^n \to log_b A_b^n = nx$, de lo cual se sigue que $log_b A^n = n(logA)$

7. Logaritmo de una raíz
El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el indice de la raíz. Esto es:

$$log_b \sqrt[n]{M} = \frac{log_b M}{n}$$

Sea $x = log_b A$ y $b > 0$ como $b^x = A$, entonces $b^{x/n} = \sqrt[n]{A}$ si $b^{x/n} = \sqrt[n]{A}$
Ahora bien : Si $\frac{x}{n}$ es el exponente a que hay que elevar la base entonces $log \sqrt[n]{A} = \frac{x}{n}$ y como $x = log_b A$,se sigue que $log_b \sqrt[n]{A} = \dfrac{log_b A}{n}$

Teniendo como base lo anterior los investigadores Napier y Bring construyeron las famosas tablas de los logaritmos, constituyendo un gran avance para los ingenieros, astronómos y científicos. Esta herramienta fué catalogada por los ingenieros como la regla del cálculo.

La primera regla de cálculo la construyó en 1630 el matemático William Oughtred $(1575 - 1660)$ usando escalas circulares, pero en 1632 las modificó haciendo dos reglas rectas, la idea era simple: colocar dos varillas en fila, luego las longitudes se suman. Si las varillas están marcadas en escala logarítmica en las cuales los números están separados según sus logaritmos, entonces los números correspondientes se multiplican. Mas tarde los ingenieros desarrollan reglas de cálculo más avanzadas utilizando funciones trigonométricas y raices cuadradas para calcular potencias. Finalmente las tablas de los logaritmos se relegaron un poco con los ordenadores digitales, pero juegan un papel muy importante en la ciencia y en la tecnología, junto a su compañera inseparable la función exponencial. Para logaritmos de base 10 la función 10^x y para los logaritmos neperianos, la función e^x, donde logaritmos $e = 2{,}71828$ aproximadamente.

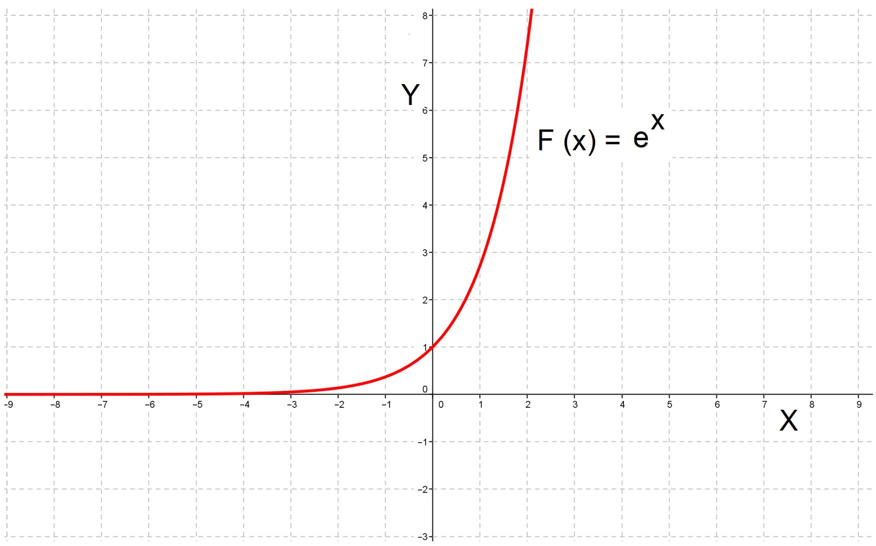

Figura 2.2: Función exponencial.

Las funciones exponencial y logarítmica son la inversa una de la otra. Esto significa que si tomamos un número y se saca su logaritmo y luego se aplica el exponencial de ese, obtiene el número con el que se empezó. Si tenemos las siguientes funciones $f(x) = 4x$ y $g(x) = \frac{x}{4}$ observamos que son inversas: $f(5) = 4(5) = 20$ luego tomamos el resultado y aplicamos la otra función $g(20) = \frac{20}{4} = 5$

2.3. La importancia de los Logarítmos

En el año 2011 sucedió un terremoto en las costas de Japón causando un tsunami que arrojó una gran destrucción en gran parte del área poblada, matando aproximadamente a 25,000 personas. En la costa se encontraban plantas nucleares que se diferenciaban por la cantidad de reactores que tenian. Una de ellas tenía seis, que al momento del tsunami, tres estaban operando y las otras estaban temporalmente fuera de servicio. El combustible había sido transferido a piscinas de agua dentro de los edificios, esto se hizo para cortar el suministro de energia electrica, pero al parecer no sirvió de mucho ya que el sistema de rifrigeración fue dañado por el tsunami, a pesar de que se utilizaron bombas de agua para su refrigeración, pero esto reaccionó con el revestimiento de zirconio en las varillas del combustible para producir hidrógeno causando una gran explosión en el edificio que albergaba los reactores.
Seis meses más tarde la compañía operaria de los reactores, TEPCO afirmó que la situación permanecía siendo crítica, que necesitaba mucho más trabajo antes de decir que los reactores estaban totalmente bajo control. La función logaritmo responde una pregunta vital, sobre cuánto material radioactivo se ha liberado y de que tipo, ¿cuánto tiempo permanecerá en el ambiente?, ¿donde podía ser peligroso?. Estos elementos radioactivos se descomponen a través de procesos nucleares formados por partículas que constituyen la radiación.
El nivel de la radioactividad disminuye con el tiempo, asi como disminuye la temperatura de un cuerpo caliente (*exponencialmente*), para medir el nivel de radioactividad útlilizamos la siguiente ecuación donde el nivel de radiactividad $N(t)$ con el tiempo t .(Tomado de la revista Historia e importancia de los logaritmos)

$$t = N_0(e^{kt})$$

Esta ecuación es la solución de una ecuación diferencial que nos permite conoser el nivel de radiactividad en un tiempo determinado, se deduce de la siguiente manera:

$$\tfrac{dN}{dt} = kN$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int K\, dt$$

luego,

$$lnN = kt + c$$
$$N(t) = e^{Kt}.e^{c} = Me^{kt}$$
$$N(t) = Me^{kT}$$

luego, cuando $t = 0$, $N = N_0$ y por lo tanto, $N(t) = N_o e^{kt}$.

Donde N_0 representa el nivel inicial y k es una constante que depende del elemento químico que nos concierne.Una medida conveniente del tiempo que perdería la radio actividad es su periodo de vida media, esto es, el tiempo que tarda un nivel inicial N_0 en reducirse a la mitad Para esto solucionaremos la ecuación:

$$\tfrac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{Kt}$$

es decir:

$$ln\tfrac{1}{2} = Kt.$$

Así que,

$$t = \frac{ln(\frac{1}{2})}{k}$$

con esta ecuación podemos calcular el periodo de vida de una población dependiendo de el elemento químico y de su radiactividad del mimo.
Supongamos que el período de semidesintegración es una semana. Entonces la velocidad original la cual emite radiación después de 1 semana es la mitad. De esta manera, habrá bajado a un cuarto después de 2 semanas, un octavo trascurrido 3 semanas. En conclusión tarda 10 semanas en reducirse a una milésima de su nivel original. Es importante decir que en caso de accidentes con reactores nucleares, las partículas con las que se debe tener más cuidado son las del yodo y la de cesio, ya que el yodo puede causar cancer de tiroides. El cesio tiene un periodo de semidesintegración de 30 años tarda 200 años en bajar una centésima del valor inicial de radioactividad, con lo cual se contamina la tierra por mucho tiempo.

2.4. Aplicación de los logaritmos

La encontramos en estudios realizados sobre la percepción humana, que consiste en cómo sentimos el mundo alrededor nuestro. En la década de los cuarenta del siglo XIX el doctor Alemán Ernest Weber, realizó un experimento para determinar la sensibilidad en los seres humanos. Su experimento consistía en darle a los sujetos objetos pesados para sostener en sus manos y luego les preguntaba cuál de los dos era más pesado. Pero lo novedoso es que a mediados del siglo XIX aparece Gustav Fechner quien redescubrió la misma ley si no que la formuló matemáticamente, quién la llamo la ley de Weber pero en la actualidad se conoce como la ley de Fechner. Dicha ley afirma que la sensación percibida es proporcional al logaritmo de los estímulos, lo podemos ver en la sensación del peso, en la visión y el oído.

Si miramos una luz, el brillo que percibimos varía igual que el logaritmo de la potencia de energía real, si la fuente es diez veces más brillante que otra, la diferencia que percibimos es constante.

Ejemplo escalas logarítmicas en la naturaleza: Se le llama escala logarítmica o también conocida como escala de magnitud local se utiliza para cuantificar el efecto de un terremoto ocurrido en un aŕea particular, la medición de este sismo se realiza a través de unas ondas o rangos de magnitud, que se utilizan para diferenciar las diferentes cantidades dependiendo de la situación. Esto nos lleva atener la siguiente visualización de la escala logarítmica:

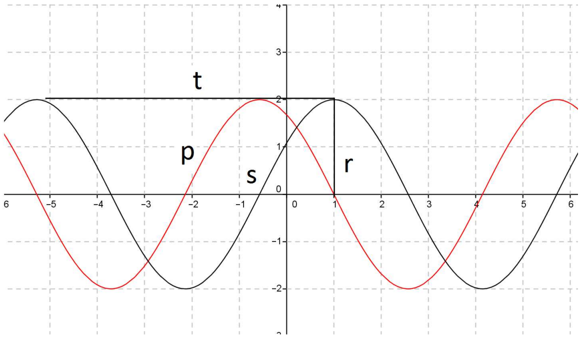

Figura 2.3: Imagen de una onda.

Como se muestra en la figura$(2 \cdot 3)$ podemos observar que las ondas p se registran antes que las ondas s y que el tiempo transcurrido entre estos intervalos de tiempo se denomina Δt.

Conclusión: A es la amplitud de las ondas,Δt es el tiempo en segundos desde el inicio de las ondas de p hasta las ondas de s y m vendría haciendo la magnitud arbitraria pero constante a los terremotos que liberan la misma cantidad de energía.
Teniendo como referencia lo anterior, aparece la escala de richter que se elaboro como una tabla de comparación, relacionando la magnitud del sismo con la energía que libera dependiendo la intensidad del terremoto, para ello se utilizo la siguiente ecuación:

$$M = logA + 3log(8\Delta t) - 2{,}92$$

Con la ayuda de esta ecuación se pudo elaborar una tabla llamada la escala de richter, que nos sirve para hacer una comparación según la magnitud del sismo.

Escala de Richter		
Magnitud	Equivalencia de energía (TNT)	Referencia
-1,5	1g	Rotura de una roca en un laboratorio
1,0	170g	pequeña explosión en una construcción
2,0	910g	bomba convencional
2,5	gkg	Explosión de un tanque de gas
3,0	28kg	bombardeo ala altura de Londres
3,5	181kg	explosión de una planta de gas

Cuadro 2.1: Tabla escala Richter.

Si la magnitud del terremoto es de $1,0$ entonces según la escala de richter, la energía que libera es aproximadamente $170g$ de (TNT) que equivale ala destrucción de un pequeño sitio de construcción
(Hanks, 2009)

2.5. Síntesis de la interpretación práctica de los logaritmos en la evolución del mundo

El paso de la Edad Media a los tiempos modernos estuvo marcado por transformaciones cuyos resultados generaron un nuevo estilo de vida. El resultado fue la aparición de nuevas clases sociales, produciendo la expansión comercial y el perfeccionamiento de las técnicas de navegación. Fué tal magnitud que surgía la necesidad de encontrar algorítmos menos laboriosos que los utilizados hasta entonces, es decir, algoritmos de la multiplicación, de la división. Por este motivo se remplaza operaciones como la división y la multiplicación por la suma y resta de logaritmos. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad. En una palabra, podemos resumir que con los logarítmos se resuelven con mayor sencillez.

2.6. Conclusión

Los logaritmos surgieron de una idea muy simple y sencilla, convirtiéndose en un instrumento importante, tal vez modesto, pero esencial para el conocimiento científico. Durante la historia se han realizado diferentes interpretaciones de las cuales hago referencia del autor M.O. Francisco Javier Tapia Moreno quien plantea desde su punto de vista el ahorro de tiempo y sacrificio que nos hacen los logaritmos al momento de hacer cálculos que eran muy engorrosos para hacerse pero hoy gracias a ellos podemos realizar de una manera mas sencilla y practica, utilizando la tecnología como lo son las calculadoras ordenadores y programas especializados en el tema.

Por tal motivo vale la pena profundizar en este tema empezando por los maestros que tienen la misión de enseñar términos estrictamente prácticos y cotidianos, de logaritmos por que es tan útil como saber las operaciones básicas de la matemática, sin tener estos conocimientos no podríamos comprender la realidad, y por lo tanto careceríamos de herramientas fundamentales para el análisis de la Matemática.
Es por eso que la humanidad se ha detenido en hacer teorías para abordar los logaritmos, de una manera fácil, y concisa que pueda estar al alcance de todos.

CAPÍTULO 3

LA RAIZ CUADRADA $\sqrt{-1}$

Jerónimo Cardano en 1545 *se planteó el siguiente problema: dado un segmento*$\overline{AB}$ *de longitud* 10 *unidades, dividirlo en dos partes de forma que el rectángulo que se forma tenga un área de* 40 *unidades cuadradas. Para resolverlo, Cardano procedió de la siguiente manera: Sea* x *la longitud de una división y* $10 - x$ *el de la otra. Entonces,*

$A = x(10 - x) = 40$

asi que

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

de donde se sigue que

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(40)}}{2(1)}$$

y así $x = 5 \pm \sqrt{-15}$.

si $x = 5+\sqrt{-15}$ *la longitud es de un lado, la longitud del otro será* $10-x = 10-(5+\sqrt{-15}) = 5 - \sqrt{-15}$

Similarmente, si $x = 5 - \sqrt{-15}$ *la longitud del otro es* $x = 5 + \sqrt{-15}$
Conclusión: lo que Jerónimo Cardano llego fue que no existe una solución real

3.1. Prólogo

Los números complejos llegarón como consecuencia de la construcción de las tablas logarítmicas, también para comprender las ondas de calor y la electricidad, para finalmente ser la base de la mecánica cuantica.

La investigación empezó cuando el matemático Italiano Jerónimo Girolamo Cardano en 1545 escribió un texto de álgebra donde presentó ecuaciones cuadraticas como $x^2 + 1 = 0$, que no tiene solución en los números reales, debido a que no existe un número real cuyo cuadrado sea -1. De esta manera encontró un nuevo tipo de números, que según él era muy desconcertante a tal punto en que desechó esa idea de número que habia descubierto. Más tarde en 1572 el matemático Daniel Bernoulli, retomó la idea de Cardano y decidió que podía mejorarla, para ello propuso lo siguente: todo lo que tenemos que hacer es introducir una simple cantidad llamada i cuyo cuadrado sea -1, y añadirlo al sistema de los números reales, permitiendo combinaciones de i con números reales para formar expresiones de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales arbitrarios con la seguridad de que a cualquiera de estas combinaciones se le denominaria números complejos. Tambien es importante resaltar que el término de número complejo lo introdujo el matemático alemán Carld Friedrich Gauss $(1777-1855)$ en el álgebra básica y en escritos sobre teoria de números.

Los números complejos se consideran como un cuerpo denotado por $\mathbb{C}$ e identificaremos el número real a con el complejo $a+0i$ o en forma de pareja ordenada como $(a,0)$. Los números reales aparecen como un subconjunto de los complejos, teniendo como referencia que este último es un espacio vectorial es de dimensión 2. Por otro lado se puede afirmar que los números complejos no pueden ser convertidos en un cuerpo ordenado .

La Unidad Imaginaria $i=\sqrt{-1}$

A principios del siglo XIX, Gauss y William Rowan Hamilton $(1805-1865)$ propusieron la idea de definir cada complejo como un par ordenado de números reales dotado de ciertas propiedades especiales que daremos a continuación: Si a y b son números reales, el par (a,b) se llama número complejo, los números a y b se llaman componentes de (a,b) donde la primera componente a, se llama la parte real del número complejo; la componente b se llama la parte imaginaria. En ocasiones el complejo (a,b) se representa por $z=a+ib$. La igualdad, la adición y la multiplicación de números complejos definen del modo siguiente:

$*$ Igualdad: $(a,b)=(c,d)$ significa $a=c$ y $b=d$.
$*$ Suma: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.
$*$ Producto: $(a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

Para hablar de una unidad imaginaria debemos tener encuenta lo siguiente: Primero, que los números complejos tienen algunas propiedades de las que gozan los números reales; en segundo lugar los números complejos los podemos escribir $(a,0).(0,a)=(a{,}0-0.a;0.a+a.a)=(0,a^2)$ dando como resultado un número especial en la matemáticas $(i,0)$ que es la unidad imaginaria definida asi: $i=(0,1)$ de donde deducimos inmediatamente lo siguente:
$i^2=i.i=(0,1).(0,1)=(-1,0)=-1$.
En conclusíon al número complejo $(0,1)$ lo representamos con la letra i y se le llama **unidad imaginaria**.

Las operaciones de adición y multiplicación de números complejos satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Esto es, si x , y , z son números complejos cualquiera, tenemos :
$*$ Ley conmutativa: $x+y=y+x$, $xy=yx$
$*$ Ley asociativa : $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x(yz)=(xy)z$
$*$ Ley distributiva: $x(y+z)=xy+xz$
$*$ El complejo $(0,0)=0+0i$ y es el elemento neutro para la suma

$*$ El complejo $(1, 0)$el es elemento neutro para la multiplicación .

3.2. Conjugado de un número complejo:

Para obtener el conjugado de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la componente imaginaria: el conjugado de $z = a + ib$ es $\bar{z} = a - ib$

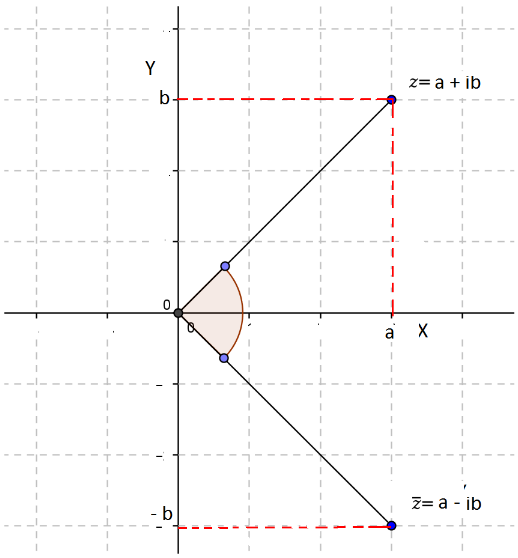

Figura 3.1: Imagen del Conjugado de un número complejo.

3.3. Interpretación geométrica de un número complejo:

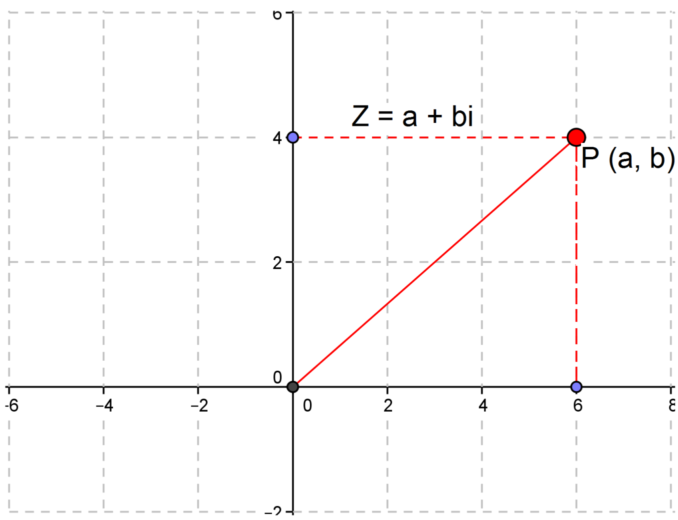

Figura 3.2: Interpretación de un número complejo.

Dado que un número complejo (a, b) es un par ordenado de número reales, este puede representarse geométricamente mediante un punto en el plano cartesiano, o por una flecha o vector geométrico que une el origen con el punto (a, b). Ahora, al plano XY se le llama plano complejo, donde X es el eje real, y el eje imaginario Y. Como podemos observar el número complejo $a + ib$ que esta representado en la figura (3,2).

3.4. Ejemplos

1. Encuentre la suma, diferencia, producto y el cociente del siguiente par de números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = -2 + i$. solución:
Suma:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3+2i) + (-2+i) \\ &= (3+(-2)) + (2+1)i \\ &= 1+3i \end{aligned} \tag{3.1}$$

Resta:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3+2i) - (-2+i) \\ &= (3+(-2)) + (2+1)i \\ &= 5+1i \end{aligned} \tag{3.2}$$

Producto:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3+2i).(-2+i) \\ &= -6+3i-4i+2i^2 \\ -6-i-2 &= -8-i \end{aligned} \tag{3.3}$$

Cociente:

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \tfrac{(-2)+i}{3+2i} \\ &= \frac{(-2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{(-6+2)+i(3+4)}{13} = \frac{-4}{13} + \frac{7}{13}i \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. Calcule $(3 + 2i)^2$. Solοción:

$$\begin{aligned} (3+2i)^2 &= (3)^2 + (2)(3)(2i) + (2i)^2 \\ &= 9+12i-4 \\ &= 5+12i \end{aligned} \tag{3.5}$$

3. Calcule $(-2+i)^{-1}$.

$$(-2+i)^{-}1 = \frac{1}{(-2)+i}$$
$$\frac{1}{(-2+i)}.\frac{(-2-i)}{(-2)-i} = \frac{(-2}{5} - \frac{i}{5}$$

3.5. Aplicaciones de los números complejos:

Los números complejos se usan en ingeniería electrónica y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables. En una expresión del tipo $z = r^{i\phi}$, podemos pensar en r como la amplitud y en ϕ como la fase de una onda sinusoidal de una frecuencia dada. Como la parte real de una función de variable compleja de la forma $f(t) = ze^{iwt}$, donde w representa la frecuencia angular y el número complejo z nos da la fase y la amplitud, el tratamiento de todas las fórmulas que rigen las resistencias, capacidades e inductores pueden ser unificadas introduciendo resistencias imaginarias, esto se usa en redes eléctricas.
En el campo de la mecánica cuántica se utiliza los espacios de Hilbert en dimension infinita sobre los números complejos.

Ejemplo complejos en los logaritmos

1. Calcular el siguiente número complejo: $z = \frac{2}{i}log\left[\frac{1+i}{1--i}\right]$

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{1-i} &= \tfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} &= i \\ logi &= \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ z = \frac{2}{i}logi &= \pi + 4\pi k \end{aligned} \tag{3.1}$$

2. Describir los conjuntos de puntos del plano determinados por las siguientes ecuaciones.

a). $|z-2i| \leq 1$

Sea $z = a+bi$ entonces $z = 2i = a + (b-2)i$, se cumplirá

$$|z-2i| \leq 1 \Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 \leq 1$$

El conjunto buscado es el interior del círculo de centro $(0,2)$ y radio 1.
b). $|z-2i| > |z-2i| \leq 1$
Sea $z = x+iy$ entonces $z-2 = (x-2)+iy$ y $z-3 = (x-3)+iy$
sus módulos quedan así:

$$|z-2i| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$
$$|z-2i| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

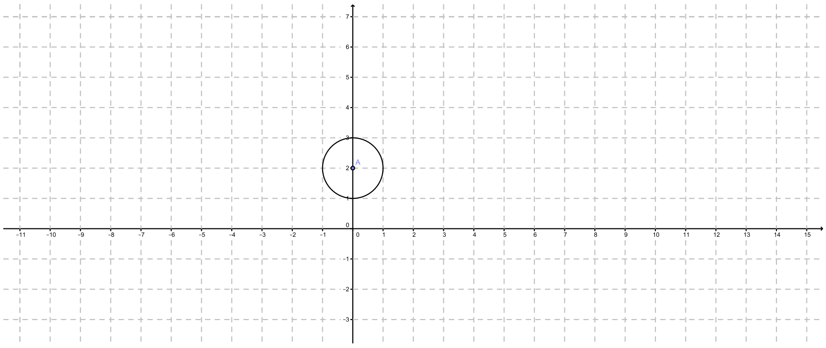

Figura 3.3: Circulo.

y por lo tanto,

$$|z-2i| > |z-2i| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2$$
$$x^2 + 4 - 4x + y^2 > x^2 + 9 - 6x + y^2$$
$$2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

la solución es el conjunto

$$R = (x + iy/x > 5/2, x, y \in \mathbb{R})$$

3. Si $F(z)$ es un polinomio con coeficientes reales y $F(2+3i) = 1-i$ ¿ Queda determinada $F(a-bi)$ conociendo $F(a+bi)$, si los coeficientes de $F(z)$ no son todos reales?
En este caso de que los coeficientes de $F(z)$ no sean todos reales no se determina el valor de $F(a-bi)$ conocido el de $F(a+bi)$. Por ejemplo, en el caso de $F(z) = iz^2$

$$\begin{aligned} F(2+3i) &= i(2+3i)^2 \\ i(4+12i-9) &= i(-5+12i) \\ &= -12-5i \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} F(2-3i) &= i(2-3i)^2 \\ i(4-12i-9) &= i(-5-12i) \\ &= 12-5i \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.6. Importancia de los números complejos en la física:

Auque fue ignorados por la fisíca clásica, se utilizan mucho en la mecánica cuántica así como el estudio de las ondas y las continuaciones analíticas, esto cambio con la aparición de la mecánica cuántica por que las ondas debían ser complejas para que recordaran la dirección y el momento de movimiento en este caso no importa si la notación de los números complejos esta hecha de manera binómica trigonométrica o polar ya que todo son matemáticamente equivalentes y el resultado no se verá afectado.
Otro aporte importante que hace los números complejos a la física es en la solución de los valores de la energía utilizando las funciones de espectro o mas conocidas como las transformaciones de fourier, donde la corriente o el voltaje de una corriente alterna se

representa como la parte real de una funcion de variable compleja. El numero complejo representa la fase y la amplitud, también se pueden unificar formulas de resistencias capacidades e inductoras agregando resistencias imaginarias

En conclusión en lo referente con sistemas cuánticos no se puede ignorar la presencia de los números complejos ni mucho menos en la física termodinámica.

3.7. Conclusión

Al haber ejecutado el estudio sobre los números imaginarios, podemos concluir que se debe introducir este conjunto de números para poder afrontar problemas como la resolución de ecuaciones que no tenían solución en el dominio de los números Reales. Lo importante es que se pueden realizar operaciones como si estuviéramos en el conjunto de los Reales solo que debemos tener en cuenta algunas propiedades mencionadas en este capitulo.
En consecuencia dentro del cuerpo de los números complejos, en con tramos una herramienta llamada la formula de Cardano o ecuación de la unidad imaginaria, con la cual podemos resolver cualquier tipo de ecuación que no tenga solución en el conjunto de los números reales. Esto genero avances significativos en la evolución de la matemática y la ciencia ya que proporcionaba resultados que eran imposible de comprender en el conjunto de los números reales.

CAPÍTULO 4

GRAVITACION UNIVERSAL

4.1. Prefacio

Todo comenzó con la observacioń de las estrellas, con fines científicos o por superstición y en algunos casos como forma de inspiración poética, siendo una actividad de la humanidad, durante todos los siglos de civilización.

La astronomía fue el pilar de la ciencia en muchas culturas, ya que la agricultura fué la base de la economía en los pueblos primitivos, necesitando la observación de las estaciones para determinar la época de siembra por medio de un calendario que ilustrara debídamente sobre los cambios del año .

En Mesopotamia los primeros astronómos fueron los sacerdotes porque disponían del tiempo suficiente para sus indagaciones, ya que no estaban ocupados en actividades agrícolas. Ellos empezaron con observar el fenómeno más importante que se repetía en forma periódica, el cual era la inundación del rio Nilo. Pretendían hacer un calendario en el cual se pudiera determinar la fecha exacta para la siembra de los productos agrícolas producidos en esa región; para esto los sacerdotes astronómos contaron los cambios de la luna, pudiendo construir un calendario llamado año lunar.

En otras civilizaciones como Egipto y China los astrónomos mejoraron sus investigaciones al construir un calendario mixto utilizando el sol y la luna, donde el dia comenzaba al salir el sol. Es importante destacar lo que sucedia en la América pre-colombina; la civilización Maya que florecía en el año 1000 de nuestra era, tenía un lenguaje avanzado y una gran destreza para la ingenieria y el arte, pudiendo desarrollar un sistema aritmético mucho más avanzado que el Europeo. Por ejemplo tenían un símbolo para el cero, sin embargo aunque eran buenos en la matemática nunca pudierón descubrir los movimientos de los astros excepto los más sencillos. Sus calendarios estaban basados en lo divino y en lo profano. Se tienen vestigios que en el año 776 se realizó una conferencia entre los mayas para unificar los calendarios, debido a inconsistencias en lo aritmético que existía tanto en el calendario de los divinos como el de los profanos.

4.2. La astronomía en Grecia

Fue en Grecia donde la astronomía logró grandes avances que influyeron en épocas sucesivas, en una forma determinante con protagonistas importantes como Tales de Mileto $(640 - 585$ a.C) quien consideraba que la tierra tiene forma de disco flotante sobre el agua. Tales también propuso que el universo estaba delimitado por las estrellas y por último predijo el eclipse solar del 28 de mayo del año 585 a.C.

Otro astronómo importante es Tales de Mileto $(611-547)$ a.C, quien fue el primero en describir en forma concreta la superficie de la tierra y observar las dimensiones y las distancias de los cuerpos celestes, descubriendo que la tierra como un disco plano en el centro del universo.
Luego aparecieron personajes como Platón y Aristóteles quienes afirmaron que los planetas son incompatibles con la perfección ideal del universo y por lo tanto da como resultado a movimientos circulares simples. Esta idea permanece vigente actualmente. Por último tenemos el astronómo más importante de la antiguedad: Tolomeo $(100 - 170)$ d.C quien realizó un estudio completo sobre Geografía y Astronomía, recopilado en el libro “El Almagesto”, publicado en el año 150 d.C, donde consideraba a todos los cuerpos celestes girando con movimiento uniforme en órbitas circulares cuyos centros se mueven en circunferencias un poco excéntricas al rededor de la tierra. La luna y los planetas Mercurio, Venus y el Sol giraban en torno a la tierra, y las estrellas giraban en una órbita exterior.

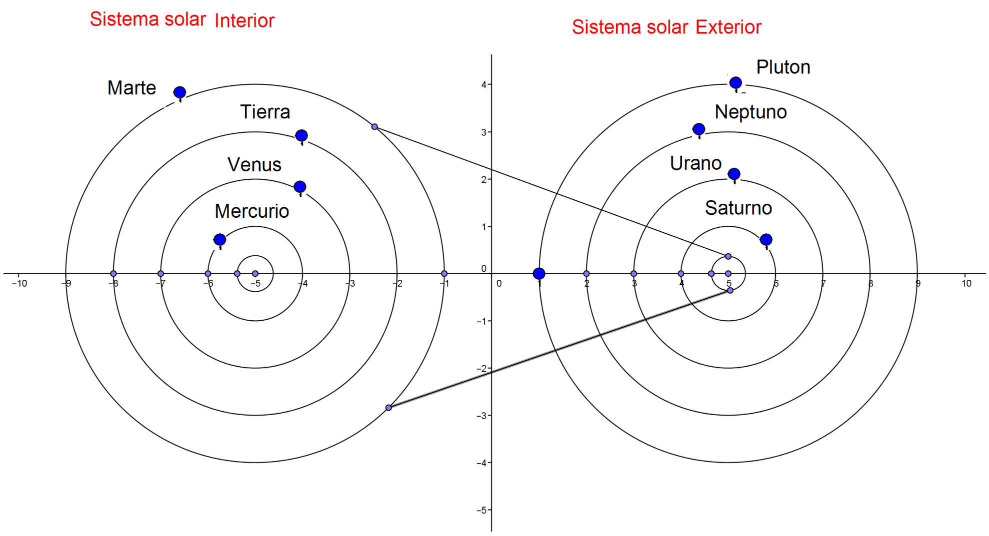

Figura 4.1: Imagen del sistema solar.

4.3. La edad media y la revolución científica

Después de Tolomeo, la civilización Griega decayó y fueron escasos los progresos en astronomía. y sus planteamientos permanecieron como dogma durante más de mil años. En el siglo XVI durante el renacimiento, Europa despierta de un sueño profundo en que había estado en la astronomía y las demás ciencias. Se inicia con Nicolás Copérnico $(1473 - 1543)$ d.C el distinguido eclesiástico y humanista polaco, que estudia las diferentes teorías sobre astronomía por orden del Papa que lo contrata para la reforma del calendario, Copérnico fija su posición en sus siete (7) postulados:

1. Todas las esferas celestes tienen un centro común .

2. El centro de la tierra no es el centro del Universo si no de la gravedad.

3. Todos los cuerpos celestes giran al rededor del sol que es el centro del Universo .

4. La distancia que separa la tierra del sol es insignificante con relación a la distancia que separa la tierra de las estrellas fijas.

5. El movimiento común de todos los fenómeno celestes se debe, no al movimiento del cielo, si no de la tierra .

6. El sol está inmóvil y su movimiento aparente no es más que la proyección en la bóveda celeste del movimiento de la tierra .

7. Las estaciones, las retrogradaciones y otros movimientos son aparentes y debidos a la proyeccón del movimiento de la tierra en la bóveda celeste. De esta forma se habia dado un paso en la interpretación del Universo pero las órbitas circulares del sistema se mostraron insuficientes para las observaciones que se hacían en la época.

Más tarde aparece Tycho Brahe $(1546 - 1601)$ quien durante diez años observó las estrellas, formula una nueva teoría en la que la tierra se encontraba en el centro de las órbitas de la luna, el sol y de las estrellas fijas. Cuando Tycho Brahe muere, su ayudante Juan Kepler continuó con las observaciones pero rechaza la visión geocéntrica de su predecesor y por primera vez libera a las órbitas del perfeccionismo de la circunferencia. Con esto Kepler busca unas leyes desciptivas del movimiento planetario sin plantearse nunca las causas dinámicas. Entre $(1609 - 1613)$ Kepler formula las tres leyes del movimiento planetario llamadas las Leyes de Kepler y que enunció de la siguiente manera:

1. **Ley de las órbitas**
Las órbitas de los planetas son elípticas, en uno de cuyos focos se encuentra el sol.

2. **Ley de las áreas**
El radio que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales, esta ley significa que el movimiento no es circular uniforme.

3. **Ley de los períodos**
La relación entre los cubos de los semiejes mayores y los cuadrados de los períodos es la misma para todos los planetas, y la podemos representar mediante la siguiente formula: $\frac{r^3}{T^2} = 3,39 \times 10^{18} \frac{m^3}{s^2}$ donde R es la distancia promedio del planeta al sol y T el periodo promedio de una vuelta alrededor del sol.

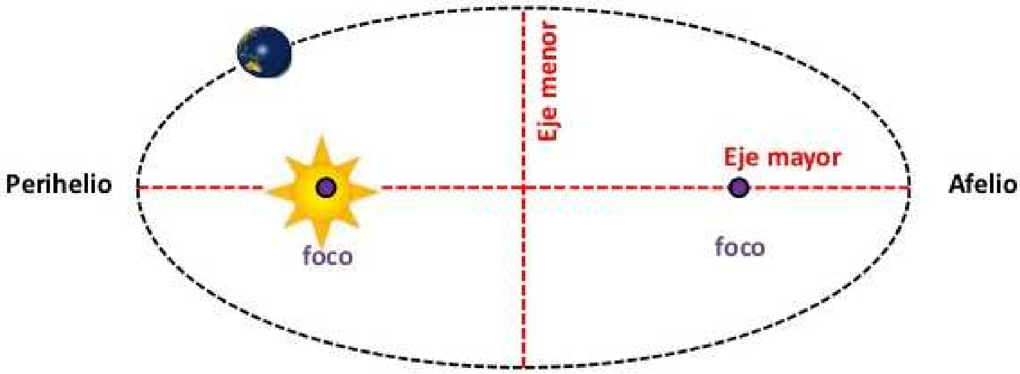

Figura 4.2: Imagen de la ley de las órbitas.

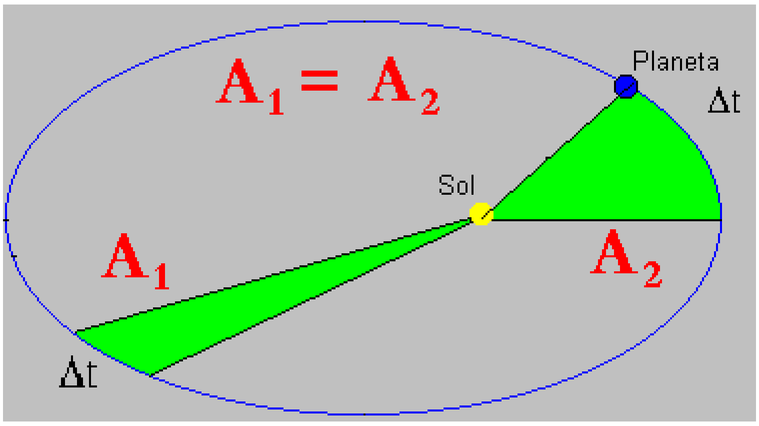

Figura 4.3: Imagen de la ley de las áreas.

4.4. La astronomía moderna

En la época medieval las leyes de Kepler y el sistema de Copérnico se enfrentaron de tal manera que el astronómo Giordano Bruno (1548 – 1600) resultó quemado vivo por defender la teoría Copernicana.

El modelo heliocéntrico planteado por Copérnico, no dejó de ser sólo especulación hasta que Galileo Galilei en el año 1609 utilizando el telescopio inventado por el constructor de lentes Lippershey, observó los cráteres y montañas de la Luna, las manchas del Sol y los satélites de Júpiter que giran alrededor de este planeta como un sistema solar en miniatura. Galileo comprobó que la Vía Láctea estaba formada por millares de estrellas. Sus observaciones lo convencieron que la teoría de Copérnico era correcta, lo que le costó ser juzgado por la inquisición el dia 12 Abril de 1673 .

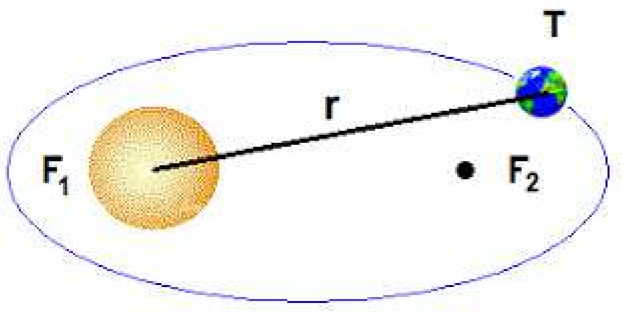

Figura 4.4: Imagen de la ley de los períodos.

Figura 4.5: Imagen Copérnico.

4.5. Ley de la gravitación universal

El año 1687 Isaac Newton publicó el libro "Philosophie Naturalis Principia Mathematica" donde se incluyeron todos los estudios de astronomía iniciados por Nicolás Copérnico. Newton descubre la ley de gravitación universal, demostrando de esta forma que el movimiento de los cuerpos celestes puede predecirse. Esta ley de gravitación universal se puede demostrar al suponer que las órbitas de los planetas son circulares y aplicar la tercera ley de Kepler.

Para justificar este hecho,consideremos que el planeta se mueve con velocidad v alrededor del sol en una circunferencia de radio r, el movimiento es circular uniforme, el planeta en el período T recorre una distancia $2\pi r$, y así:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \ .$$

Como el movimiento es circular uniforme, la fuerza resultante sobre el planeta es centrípeta dada por:

$$f_c = ma_c = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \ .$$

Al aplicar la tercera ley de Kepler, como $r^3 = cT^2$, entonces:

$$T^2 = \frac{r^3}{c} \text{ y así: } f_c = m4\pi^2 r.\frac{c}{r^3} = m\frac{4\pi^2 c}{r^2}$$

Con lo anterior Newton concluyó que la fuerza de atracción gravitacional dependía directamente de la masa m del planeta y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia media del planeta al Sol. Al considerar la ley de acción y reacción, esta fuerza de atracción también debe depender de la masa del Sol, es decir que la constante c está relacionando la masa del Sol. Por lo tanto tenemos:

$$f_G \alpha \frac{m_s m}{r^2}$$

donde m_s es la masa del sol. En conclusión la fórmula de gravitación universal queda de la siguiente manera:

$$fg = G\frac{m_s m}{r^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal,cuyo valor es:

$$G = 6,67 \times 10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2} \ .$$

Esta constante se obtuvo mediante una balanza de torsión, utilizando un rayo de luz para me dir la desviación, asi se pudo medir el valor de la constante:

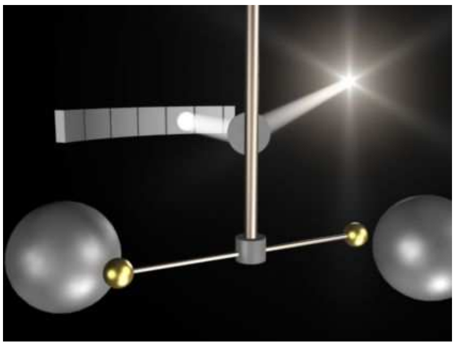

Figura 4.6: Imagen balanza torsión .

La ley de la gravitación universal queda enunciada asi: “La fuerza de gravitación universal entre dos masas es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distacia que las separa.”

Ejemplo
La atracción gravitacional entre dos masas de $100Kg$ y $80Kg$ separadas $2m$ es:

$$f_g = \frac{6,67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{k_{g^2}}.(100kg)(80kg)}{(2m)^2} =$$

$$\frac{(6,67)(10^{-11})\frac{Nm^2}{k_{g^2}}.(10kg)^2(8kg)(10)}{(4m^2)} = \frac{(6,67)(8).(10)^{-8}}{4} = 13,34{,}10^{-8} = 1,334{,}10^{-7}N$$

4.6. Movimiento de satélites

Culturalmente la Luna es el cuerpo celeste que más ha influido en el desarrollo de los pueblos ya que es el único satélite natural de la tierra. La Luna gira alrededor de nuestro planeta con un período de $27,3$ días, pero también da una vuelta alrededor de su propio eje manteniendo la misma cara dirigida hacia la Tierra. Este fenómeno llamado "rotación capitulada" se debe a la fuerte atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna .

Al aplicar la ley de la gravitación universal entre la Tierra y la Luna es posible calcular el radio de la órbita Lunar. En efecto,

$$f_g = M_l a_c = \frac{GM_t M_l}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_t T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}(5,98 \times 10^{24} Kg)(27,3 \times 86400 s)^2}{4\pi^2}} = 3,83 \times 10^8 m$$

Altura de los satélites
La altura sobre la superficie terrestre de los satélites artificiales se puede calcular utilizando el método de aplicar la segunda ley de Neuwton a la fuerza de atracción gravitacional. Para cualquier satélite en órbita al rededor de la Tierra se cumple :

$$m_a a_c = \frac{GM_t m_a}{(r_t + h)^2}$$

Donde M_l es la masa de la Tierra y h la altura del satélite. Podemos notar que el periodo de rotación del satélite es independiente de su masa ya que ésta se cancela al igualar las expresiónes,

$$\frac{4\pi^2 (r + h)}{T^2} = \frac{GM_t}{(r + h)^2}.$$

Ejemplo 1:
Calcular la masa del Sol, considerando que la Tierra describe una órbita circular de 150 millones de kilómetros de radio.

Solución: Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento de traslación de la Tierra, se cumple que:

$$F = m_T . a_N$$

así que:

$$G = \frac{m_s . m_T}{r^2} = m_T . \frac{v^2}{r}$$

y por lo tanto,

$$G = \frac{m_s}{r} = v^2$$

Sustituyendo la velocidad de la Tierra por su relación con el periodo de traslación, se tiene: por lo tanto,

$$G = \frac{m_s}{r} = \frac{4.\pi^2}{G}.\frac{r^3}{T^2}$$

Si tomamos T = 365, 25 días, es decir $T = 3,156 \times 10^7 s$, entonces:

$$m_s = \frac{4.\pi^2}{6,67 \times 10^{-11}} \times \frac{(150 \times 10^9)}{(3,156 \times 10^7)^3} = 2,01 \times 10^{30} Km$$

Ejemplo 2:

La masa de la Luna es aproximadamente $\frac{1}{81}$ de la masa de la Tierra y su radio es $\frac{1}{4}$ del radio de la Tierra. Calcula lo que pesará en la superficie de la Luna una persona que tiene una masa de $70kg$.

Solución: Aplicando la ley de gravitación universal en la superficie de la Luna, se tiene:

$$P_l = \frac{G.m_l.m}{R_l^2} = G.\frac{m_T \frac{1}{81} m}{(R_T \frac{1}{4})^2} = \frac{16}{81}.G.m$$

Sustituyendo:

$$P_l = \frac{16}{81} \times 9,8 \times 70 = 135,5N$$

Ejemplo 3:

La Luna gira alrededor de la tierra siguiendo una trayectoria elíptica en la que el centro de la Tierra está en uno de los dos focos, como se ilustra en la figura. Las longitudes de los ejes mayor y menor de la órbita son 768 · 800 y 767 · 640 kilómetros, respectivamente. Encontrar las distancias mayor y menor (apogeo y perigeo respectivamente) entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna.

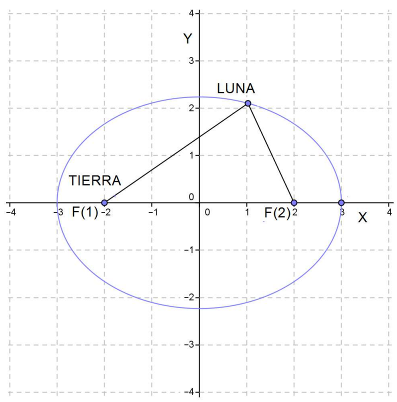

Figura 4.7: Imagen de una trayectoria elíptica .

Si consideramos la longitud del eje mayor:

$$2a = 768 \cdot 800\text{km de aquí } a = 384 \cdot 400\text{km}$$

La longitud del eje menor:

$$2b = 767 \cdot 640 \text{ km de aquí } b = 383 \cdot 820 \text{ km}$$

Ahora,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(384 \cdot 400)^2 - (383 \cdot 820)^2} \approx 21 \cdot 108\text{km}$$

Luego,

$$a + c \approx 405 \cdot 508\text{km}$$
$$a - c \approx 363 \cdot 292\text{km}$$

La distancia mayor entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna (apogeo) es $405 \cdot 508$ kilómetros y la distancia menor (perigeo) es $363 \cdot 292$ kilómetros.

Conclusión:

A pesar de ser tan obvío en este momento el concepto de gravedad, se debe tener en cuenta que pasaron muchos años para que Newton, se hiciera la gran pregunta, ¿porqué se caen las cosas?.

Nuestros antepasados, pudieron haber contestado que era por no tener apoyo. Pero Newton se encargo de definir a partir de teorías y ecuaciones cual era realmente la respuesta, adecuada.

Al someter a una sola ley matemática los fenómenos físicos más importantes del universo observable, Newton demostró que la física terrestre y la física celeste son una misma cosa. El concepto de gravitación lograba de un solo golpe:

∗ Revelar el significado físico de las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

∗ Resolver el intrincado problema del origen de las mareas.

∗ Dar cuenta de la curiosa e inexplicable observación de Galileo Galilei de que el movimiento de un objeto en caída libre es independiente de su peso.

Cabe destacar la vital importancia que tiene saber todos estos temas para poder así comprender aun más como se encuentra compuesto nuestro universo, ya que logra responder preguntas como: ¿como se mueven los planetas? ¿cuales son sus velocidades? ¿porque ocurren los eclipses? etc. Muchos de los temas puestos y explicados en este trabajo han sido investigados por muchos siglos por científicos como Kepler,Newton,Copérnico,Ptolomeo, entre otros, y que gracias a estos grades avances es posible calcular datos de otros planetas con formulas propuestas por estos científicos.
Es por eso que a nosotros nos ha ayudado a comprender un poco más nuestro universo descubriendo fórmulas como las expresadas por Kepler en sus leyes, o la ley de Newton como la Ley de Gravitación universal, datos que sin duda han sido bien utilizados por el hombre en los cuatro siglos que han pasado desde que fueron formulados, permitiendo que existan progresos enormes en materia espacial, ya sea poniendo en órbitas objetos (Satátelites) con fines cívico-militares o bien realizando investigaciones en el espacio. En fin el Universo es algo que nos sorprende y nos seguirá sorprendiendo por mucho más tiempo.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Des pues de haber escudriñado el libro las 17 ecuaciones que cambiaron al mundo y otros documentos de guía podemos decir que en este trabajo se alcanzo el objetivo general que era de conocer un poco mas acerca los hechos que enmarcaron situaciones por las cuales las ecuaciones como el teorema de pitágoras, la ley de la gravitación universal, la ecuación para los logaritmos y la ecuación $x^2+1=0$ se convirtieron en herramientas necesarias y fundamentales para que el ser humano pudiera evolucionar y comprender las situaciones y fenómenos que de alguna manera fueron transformando su entorno y su forma de vivir.

En cuanto a los objetivos específicos podemos concluir que: en el objetivo numero 1 se alcanzo lo propuesto que era realizar algunas aplicaciones de cada una de las ecuaciones que se estudiaron en cada capitulo de este trabajo, resaltando algunas propiedades importantes de cada una de ellas, para que podamos usarlas y así obtener los resultados esperados. y poder construir las diferentes teorías y algoritmos que faciliten la comprensión del mundo en que vivimos.

En el objetivo 2 se pudo mirar que a lo largo de la historia han trascurrido y numerables interpretaciones y demostraciones de cada una de las ecuaciones, tambiém pudimos evidenciar que son muchos los efectos que han tenido en la supervivencia de la humanidad,por que sean involucrado tanto en lo social como en lo científico por tal motivo podemos afirmar que las ecuaciones si han cambiado el mundo.

Por ultimo en el objetivo 3 se pudo deducir que todas las ecuaciones nacieron por necesidad del hombre para poder satisfacer sus necesidades y ala ves poder comprender las situaciones y fenómenos desconocidos para el. Por este motivo los matemáticos se vieron obligados a construir algoritmos y ecuaciones que facilitaran los diferentes cálculos que se presentaban en las diferentes épocas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] IAM, STEWEART. *las* 17, Ecuaciones que cambiaron el mundo, España.

[2] RECALDE, LUIS CORNELIO. *Las raíces históricas de la integral de Lebesgue*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XV, $N°$ 2, Cali, 2007.

[3] PANCHAPAGESAN, T. V. *Medida e Integración Parte I*, Tomo I, Universidad de los Andes, Mérida, 1991.

[4] RUDIN, WALTER. *Análisis Real y Complejo*, McGraw-Hill, Madrid, 1990.

[5] FERNÁNDEZ, PEDRO JESÚS. *Medida e integra<u>c</u>ão*, Instituto de Matemáticas Pura y Aplicada, CNPq, Río de Janeiro, 1976.

[6] REVISTA. *Historia e Inportancia de loa Logaritmos* , 2011.