Neiva, Julio 28 de 2017

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

Eduard González Trujillo, con C.C. No. 1.077.856.990,

Margarita Ladino Sánchez, con C.C. No. 1.075.291.482,

Autores del trabajo de grado titulado:

SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. UNA PROPUESTA METODOLÓGICA

presentado y aprobado en el año 2017 como requisito para optar al título de

Licenciado en Matemáticas;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma:______________________________

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Eduard

Firma:______________________________

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. UNA PROPUESTA METODOLÓGICA

AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Ladino Sánchez	Margarita
González Trujillo	Eduard

ASESORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Penagos	Mauricio
Guzmán García	Mauricio

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2017 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 72

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general **X** Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros **X**

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Adobe Reader

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Matemáticas	Mathematics	6. Razones	Reasons
2. Trigonometría	Trigonometry	7. Triángulos	Triangles
3. Didáctica	Didactics	8. Congruencia	Congruence
4. Enseñanza	Teaching	9. Semejanza	Likeness
5. Aprendizaje	Learning	10. Pitágoras	Pitagoras

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Consideramos que el estigma que tienen los estudiantes por las matemáticas en algunos casos puede ser debido a la escasa o nula contextualización de los temas tratados en el aula. Nada se escapa de eso, ni siquiera la trigonometría elemental, fundada en la geometría euclideana básica de los triángulos rectángulos que de por sí es bastante intuitiva.

Al respecto, el docente debe pensar en una buena planeación y organización de la temática que va a presentar en el aula de clase, iniciando con la indagación de los conocimientos previos que poseen los estudiantes. En cualquier tipo de actividad de enseñanza que se presenta el docente debe ayudar a los estudiantes a establecer las relaciones entre los conocimientos que ya poseen y los conocimientos nuevos.

El mitigar la problemática en el aprendizaje del conocimiento trigonométrico conlleva al docente a diseñar estrategias secuenciales que facilite al educando la comprensión y asimilación de los aprendizajes significativos. Es bajo este punto donde el docente puede crear una diferencia esencial entre el aprendizaje memorístico y el aprendizaje significativo mediante secuencias didácticas bien elaboradas y estructuradas que sirvan de mediación entre el profesor y el estudiante.

La percepción sobre la necesidad que tienen los docentes para abarcar la trigonometría, la cual tiene un amplio campo de trabajo, conlleva a enfatizarnos específicamente en la enseñanza de las razones trigonométricas y de la importancia de su aprendizaje, formulado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué estrategias pedagógicas y metodológicas debe poner en práctica el docente de matemáticas en la clase para lograr un aprendizaje significativo de las razones trigonométricas en los estudiantes de décimo grado?.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

We consider that the stigma that students have for mathematics in some cases may be due to the scarce or null contextualization of the topics treated in the classroom. Nothing escapes that, not even elementary trigonometry, founded on the basic Euclidean geometry of the rectangular triangles which in itself is quite intuitive.

In this respect, the teacher should think about good planning and organization of the subject that will present in the classroom, starting with the investigation of the previous knowledge that the students have. In any type of teaching activity that the teacher presents should help the students to establish the relationships between the knowledge they already have and the new knowledge.

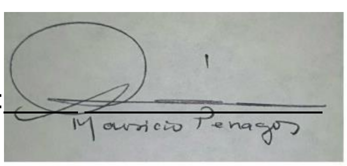
Mitigating the problem in the learning of trigonometric knowledge leads the teacher to design sequential strategies that facilitate the student's understanding and assimilation of meaningful learning. It is at this point that the teacher can create an essential difference between rote learning and meaningful learning through well-structured and structured didactic sequences that mediate between teacher and student.

The perception of the need for teachers to encompass trigonometry, which has a wide field of work, leads us to emphasize specifically in the teaching of trigonometric reasons and the importance of their learning, formulated the following research question:

What pedagogical and methodological strategies should the mathematics teacher put into practice in the classroom to achieve meaningful learning of trigonometric ratios in tenth grade students?

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Mauricio Penagos

Firma: 

Nombre Jurado: Mauricio Guzmán

Firma: Mauricio Guzmán García

”

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. UNA PROPUESTA METODOLÓGICA

MARGARITA LADINO SÁNCHEZ
EDUARD GONZÁLEZ TRUJILLO

Neiva, Huila
2017

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. UNA PROPUESTA METODOLÓGICA

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de licenciados en matemáticas

Margarita Ladino Sánchez
20121109629
Eduard González Trujillo
20111102848

Asesores:
MSc. Mauricio Penagos
Mag. Mauricio Guzmán

Neiva, Huila
2017

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Julio de 2017

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios porque cada día me demuestra lo hermosa que es la vida, por permitirme vivir una vida llena de aprendizajes y compartir con personas que me aportan día tras día experiencias y felicidad.

Le doy gracias a mi madre por su sacrificio y esfuerzo para brindarme una excelente educación, por ser mi ejemplo de vida y el eje principal en la culminación de mi carrera. A mi familia y mi pareja por ser mi apoyo en cada decisión y proyecto.

Agradezco a mis docentes y al semillero Miguel de Guzmán por sus aportes, su amistad, su inmensa bondad y sus valiosas enseãnzas. Gracias a mis asesores MSc. Mauricio Penagos y Mag. Mauricio Guzmán por la oportunidad de recurrir a sus conocimientos y capacidades, así como también por la paciencia y las orientaciones brindadas en el desarrollo del trabajo de grado.

Para finalizar, agradezco a todos los que fueron mis compañeros de vida universitaria, por los momentos compartidos, por su cariño, su amistad y su apoyo.

Margarita Ladino Sánchez

*" Al momento de proteger a tu familia, no existían imposibles para ti. Tu entrega por brindarle todo a tus seres queridos es digna de admiración. No existe otra persona que ame tanto a quienes están a su alrededor. Para mi fortuna, yo fui uno de los que recibió tu afecto incondicional. Muchas gracias, mami **Ermila Trujillo Carvajal** ".*

En primer lugar doy infinitas gracias a mi madre, por haberme dado fuerza y valor para culminar esta etapa; demostrándome su amor corrigiendo mis faltas y celebrando mis triunfos. A mi padre y hermanos, que con sus consejos me han ayudado a afrontar los retos que se me han presentado a lo largo de mi vida.

Agradezco especialmente a mi tío Jose Ricaute quien con su ayuda, cariño y comprensión ha sido parte fundamental en mi formación profesional. Finalmente, a mis asesores MSc. Mauricio Penagos y Mag. Mauricio Guzmán por sus valiosos aportes que hicieron posible este proyecto.

Eduard González Trujillo

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Consideramos que el estigma que tienen los estudiantes por las matemáticas en algunos casos puede ser debido a la escasa o nula contextualización de los temas tratados en el aula. Nada se escapa de eso, ni siquiera la trigonometría elemental, fundada en la geometría euclideana básica de los triángulos rectángulos que de por sí es bastante intuitiva.

Con el presente trabajo de grado se busca aplicar las razones trigonométricas para solucionar ejercicios sobre triángulos, aplicados a problemas del contexto propio del estudiante.

Más explícitamente se ha diseñado una propuesta que promueve la construcción del concepto razones trigonométricas a partir de situaciones cercanas al contexto del estudiante, y por tanto con sentido para él, lo que aporta innovación en las clases de trigonometría de matemáticas en el grado décimo.

En el primer capítulo se iniciará con un recorrido histórico por las culturas antiguas como los Babilonios, los Egipcios, los Griegos y posteriormente se tendrán en cuenta otros grandes referentes como Leonhard Euler y sus aportes a la trigonometría. Ademas se trabajarán los conceptos previos que se relacionan con las razones trigonométricas como ángulos, elementos de un triángulo, las razones y proporciones, congruencia y semejanza, el Teorema de Tales y el Teorema de Pitágoras. Estos conceptos son fundamentales para el capítulo posterior exclusivo a las razones trigonométricas, en el cual se deducen algunos resultados a partir de triángulos especiales los cuales servirán de apoyo para el estudio y resolución de las aplicaciones.

Puesto que las razones trigonométricas permiten la resolución de dos tipos de triángulos: los que son rectángulos y los que no lo son; el cuarto capítulo está basado en la resolución de los triángulos no rectángulos en las que se incluyen los teoremas del seno y del coseno.

Finalmente, para mediar la relación que existe en el proceso de enseñanza-aprendizaje se presenta una secuencia didáctica mediante tareas que facilitarán la comprensión de las razones trigonométricas. Esperamos que con esto los estudiantes adquieran una mejor experiencia en su proceso de educación obteniendo un aprendizaje significativo.

JUSTIFICACIÓN

La pregunta investigativa surge como reflexión de la necesidad de integrar los contenidos curriculares con los intereses y el contexto de los estudiantes. Por esta razón se plantea la necesidad de diseñar una propuesta de aula basada en la aplicación de secuencias didácticas para la enseñanza de las razones trigonométricas, que motiven y aporten claridad y profundidad en los contenidos, atendiendo a las exigencias del Ministerio de Educación Nacional propuestos en los Estándares Básicos en Competencias matemáticas.

Una secuencia didáctica, definida por Centro Virtual Cervantes o Instituto Cervantes es "una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí" lo cual, conlleva a proponer actividades alternativas y consecuentes que orienten las practicas de enseñanza, el análisis, la reflexión frente a la relación de los contenidos curriculares y los intereses o necesidades de los estudiantes y la intervención docente frente al contexto propio y el ambiente del aula que garantice la apropiación de los conocimientos y el aprendizaje significativo como factor de incidencia.

De igual forma, se ha considerado que dentro del abordaje de los contenidos de las razones trigonométricas, es responsabilidad del docente tener en cuenta los conocimientos previos de sus estudiantes; por esta razón, la puesta en el aula también pretende suplir esa desconexión que han tenido los estudiantes al olvidar lo aprendido durante su proceso de formación académica. Mediante actividades, preguntas y problemáticas se pretende lograr la integración de contenidos y en la observación de algunos desequilibrios o desbalances, las secuencias didácticas pretenden ayudar a mantener un orden en el aprendizaje; además, trabajar con ellas representa la oportunidad de desarrollar habilidades, descubrir destrezas y a su vez ayudar a agilizar la creatividad generando ideas innovadas a la realidad de los problemas que se enfrentan a diario el mundo de la de la trigonometría.

Consideramos que la estrategia de las secuencias didácticas y la implementación de material didáctico en el aula de clases facilita la formación de los educandos de forma más creativa y motivada para la comprensión de los saberes y la resolución de problemas. Al desarrollar las clases con secuencias didácticas se integran varios factores de intereses comunes en el aprendizaje significativo y en la formación de cada uno de los estudiantes, a la vez que para la evaluación se tiene en cuenta el dominio del contenido conceptual y la producción y creatividad de los estudiantes, es decir estos sean actores de su propio aprendizaje, demuestren habilidades y evidencien la creatividad y las destrezas producidas en el proceso de su aprendizaje-significativo.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Elaborar tres (3) secuencias didácticas que faciliten el proceso de activación de los conocimientos previos y fortalezca los nuevos saberes en la temática: razones trigonométricas, en los estudiantes de grado décimo.

Objetivos Específicos

- Fundamentar el conocimiento de la trigonometría a partir de los saberes previos de los estudiantes.

- Identificar elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas en situaciones de contexto.

- Articular las TIC en el diseño de las secuencias didácticas por medio del software geogebra y a la vez implementar recursos didácticos que favorezcan la enseñza de las razones trigonométricas.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La profesión docente conlleva a poseer la necesidad de un espíritu creativo, el cual propenda por la enseñanza y aprendizaje de una forma contextualizada contribuyendo a lograr grandes cambios en el proceso educativo. Es necesario propiciar en los estudiantes espacios de formación y socialización del conocimiento que se aborda en el aula de clase, para que interactúen y discutan con sus compañeros, logrando representar un aprendizaje significativo y autónomo. Duarte (2004) indica que en el aula de clase se debe favorecer el desarrollo de la autonomía de los sujetos en el marco de unas relaciones cooperativas con los demás y con el medio.

La implementación en el aula de recursos didácticos para la enseñanza de la matemática se ha restringido en algunos casos al uso del tablero y la calculadora, la cual pone en evidencia la limitación que existe en torno a la búsqueda de estrategias didácticas que permitan contribuir con un mejor método de apropiación en la enseñanza. En respuesta a lo anterior, es recomendable que el docente lleve al aula actividades que permitan lograr una clase llamativa y motivar a que sea el estudiante quien adquiera un aprendizaje significativo y aporte al desarrollo su propia formación. Para Duarte (2004):

Dentro del mundo de la escuela, tal vez es en el aula de clases donde se ponen en escena las más fieles y verdaderas interacciones entre los protagonistas de la educación intencional, maestros y estudiantes. Una vez cerradas las puertas del aula se da comienzo a interacciones de las que sólo pueden dar cuenta sus actores. Es aquí donde el maestro se hace y se muestra, aquí ya los deseos se convierten en una realidad, ya no es el mundo de lo que podría ser, sino el espacio de lo que es. (p. 9)

Al respecto, el docente debe pensar en una buena planeación y organización de la temática que va a presentar en el aula de clase, iniciando con la indagación de los conocimientos previos que poseen los estudiantes. En cualquier tipo de actividad de enseñanza que se presenta el docente debe ayudar a los estudiantes a establecer las relaciones entre los conocimientos que ya poseen y los conocimientos nuevos.

En el caso particular de la enseãnza de la trigonometría, se requiere que el docente indague y se forme una idea clara de los conocimientos anteriores de sus estudiantes que han sido construcciones personales elaboradas en interacción con el mundo cotidiano, con los objetos, con las personas y en diferentes experiencias sociales o escolares durante la secundaria, puesto a que éstos serán los que se pongan en juego al estar frente a una nueva información o a un nuevo material.

Lo que se pretende es que el estudio de la trigonometría no se convierta en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, por esta razón, es importante brindar a los estudiantes herramientas, procedimientos y estrategias de razonamiento necesarias para que exploren, analicen, relaciones, conjeturen, comprueben y afiancen los conceptos y propiedades trigonométricas. Por otro lado las tecnologías de la información y la comunicación TIC ofrecen al docente herramientas para que el proceso de enseẽanza-aprendizaje sea más eficiente y de paso contribuyen a que los estudiantes se motiven, pongan en juego sus ideas, exploren, analicen y pongan a prueba sus conjeturas.

Todo esto parece indicar que el profesor debe ser tan creativo, que las situaciones problema que proponga para abordar un concepto matemático, deben permitirle a los grupos de trabajo colaborativo, afrontar la situación con las herramientas matemáticas que posee y de esta manera abordar la resolución de problemas para lograr un aprendizaje significativo. D'Amore (1997, citado en Gómez 2002) afirma:

El pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolución de problemas y esto está en sintonía con la tendencia natural del niõ a hacer preguntas y a buscar respuestas. Por consiguiente las nociones matemáticas básicas se apoyan y constituyen partiendo de situaciones problemáticas, que ofrecen la oportunidad de verificar qué estrategias resolutivas utiliza y cuáles son las dificultades que encuentra. (p. 21)

El mitigar la problemática en el aprendizaje del conocimiento trigonométrico conlleva al docente a diseñar estrategias secuenciales que facilite al educando la comprensión y asimilación de los aprendizajes significativos. Es bajo este punto donde el docente puede crear una diferencia esencial entre el aprendizaje memorístico y el aprendizaje significativo mediante secuencias didácticas bien elaboradas y estructuradas que sirvan de mediación entre el profesor y el estudiante.

La percepción sobre la necesidad que tienen los docentes para abarcar la trigonometría, la cual tiene un amplio campo de trabajo, conlleva a enfatizarnos específicamente en la enseñanza de las razones trigonométricas y de la importancia de su aprendizaje, formulado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué estrategias pedagógicas y metodológicas debe poner en práctica el docente de matemáticas en la clase para lograr un aprendizaje significativo de las razones trigonométricas en los estudiantes de décimo grado?.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Breve Historia de la Trigonometría

Figura 1.1: Breve Historia de la Trigonometría

Etimológicamente la palabra trigonometría se deriva de dos raíces griegas: trigon, que significa triángulo, y metra, que significa medida, entonces, se tiende a creer que su aplicación solo se limita o refiere a las varias relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados. Sin embargo, el hombre la ha empleado para calcular áreas, distancias, trayectorias y en el estudio de la mecánica etc., con base en la resolución de triángulos.

Inicialmente aparece como parte de la geometría que se ocupa de formular relaciones entre las medidas angulares y las longitudes de los lados de un triángulo para resolver inicialmente problemas de navegación y en el cálculo del tiempo calendarios por parte de los griegos la posición de las estrellas en la bóveda celeste, por esto, la trigonometría se dividió en dos ramas fundamentales, que son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se usa sobre todo en navegación y astronomía y estudia triángulos esféricos, es decir, triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

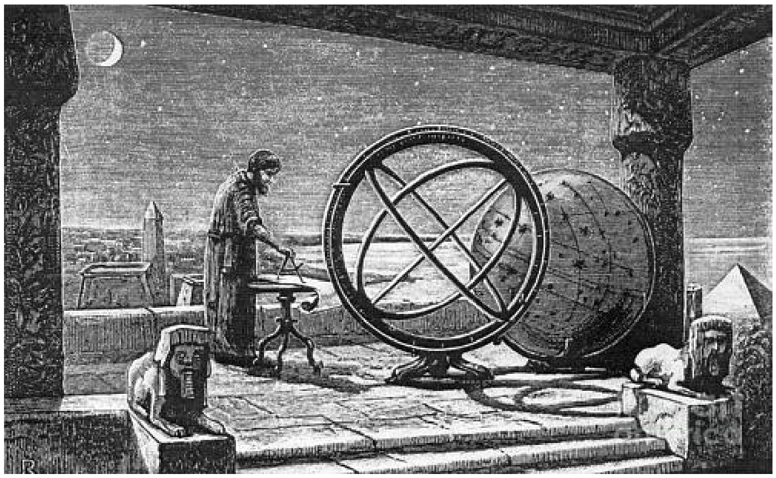


Figura 1.2: Hiparco de Nicea

La trigonometría comienza con los Babilonios y los Egipcios. Estos últimos establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Posteriormente en la Grecia clásica, alrededor del siglo II a.C. el astrónomo, geógrafo y matemático Hiparco de Nicea (190 a.C. - 120 a.C.) construyó una tabla de "cuerdas" que equivalía a una moderna tabla de senos para resolver triángulos. Comenzó dividiendo el diámetro en 120 partes y la circunferencia en 360 partes, luego cada una de las partes anteriores en otras 60 partes y posteriormente en 60 partes, en concordancia al sistema sexagesimal de los Babilonios.

Durante muchos siglos, la trigonometría de Claudio Tolomeo (100 d.C. 170 d.C.) fue la introducción básica para los astrónomos. El libro de astronomía el Almagesto, escrito por él, también tenía una tabla de cuerdas junto con la explicación de su método para compilarla, y a lo largo del libro dio ejemplos de cómo utilizar la tabla para calcular los elementos desconocidos de un triángulo a partir de los conocidos. El teorema de Menelao utilizado para resolver triángulos esféricos fue autoría de Tolomeo. Al mismo tiempo, los astrónomos de la India habían desarrollado un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada. Los matemáticos indios utilizaron diversos valores para ésta en sus tablas.

A finales del siglo VIII los astrónomos Árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría tanto para triángulos planos como esféricos. Los matemáticos sugirieron el uso del valor $r = 1$ en vez de $r = 60$, y esto dio lugar a los valores modernos de las funciones trigonométricas. El occidente latino se familiarizó con la trigonometría Árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. El primer trabajo importante en esta materia en Europa fue escrito por el matemático y astrónomo alemán Johann Müller, llamado Regiomontano.

Figura 1.3: Jhon Napier

A principios del siglo XVII, el matemático escocés Jhon Napier (1550 - 1617) inventó los logaritmos y con su aporte de relaciones entre los elementos de los triángulos planos (teorema de Napier) y entre los de los triángulos esféricos (analogías de Napier), gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje. A mediados del siglo XVII Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos del trabajo de Newton fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Newton encontró la serie para $\operatorname{sen} x$ y series similares para $\cos x$ y $\tan x$. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Figura 1.4: Leonhard Euler

Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler (1707 - 1783) quien produjo significativos aportes como Introducción al análisis de los infinitos (1748), Instituciones del cálculo diferencial (1755), Instituciones del cálculo integral (1768 - 1770) e Introducción al álgebra (1770), demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

1.2. Conocimientos Previos

Para el estudio de la Trigonometría se debe tener en cuenta que el estudiante se halla apropiado de conceptos y principios de la geometría euclideana como punto, segmento, recta, semirrecta y ángulos, lo que se da por hecho. De esta manera, conceptualizaremos los necesarios para el desarrollo de un curso de trigonometría en grado décimo como triángulos, conversiones de medidas, congruencia y semejanza de triángulos, éstos serán una herramienta para el desarrollo de las aplicaciones que se realizarán con los estudiantes.

1.2.1. Sistema de medida angular y equivalencia

Los ángulos pueden ser medidos en el sentido del movimiento de las agujas del reloj (tiene medida negativa) y al contrario del movimiento de las agujas del reloj (con medida positiva). Un ángulo está en posición normal con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas cuando su vértice está en el origen, su lado inicial coincide con el eje positivo de las x y el lado final está contenido en uno de los cuatro cuadrantes determinados en el plano cartesiano. Si los ángulos se encuentran en posición normal y coinciden sus lados finales, éstos se llaman ángulos coterminales.

Es decir, dos o más ángulos se denominan coterminales, cuando tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final. Si α y β son ángulos coterminales (Figura1.5), se cumple que:

- $\alpha - \beta = 360k \ (k \in \mathbb{Z})$

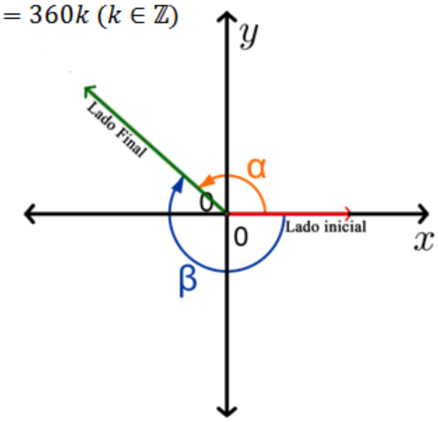


Figura 1.5: Ángulos coterminales

Existen diferentes sistemas de medición de ángulos, el más conocido es el sistema sexagesimal que consiste en dividir la circunferencia en 360 partes iguales llamadas grados, representados por el símbolo (°), a la vez, estos se dividen en 60 partes iguales formando el minuto (’) y estos últimos en 60 partes iguales formando el segundo (”), por lo cual, se tiene la equivalencia $1° = 60' = 3600''$

Para determinar la medida de un ángulo se usa como instrumento el transportador (Figura1.6)

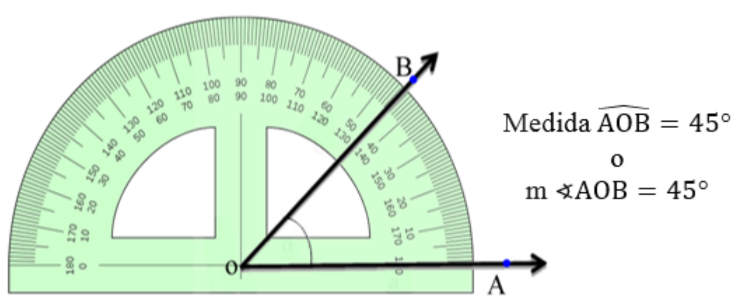


Figura 1.6: Transportador

Otro sistema de medida para los ángulos es el radial, cuya unidad de medida es el radián; un radián (rad) equivale al ángulo central que se forma al colocar el radio r de un círculo sobre su circunferencia. Como el diámetro de la circunferencia cabe π veces sobre la circunferencia, entonces

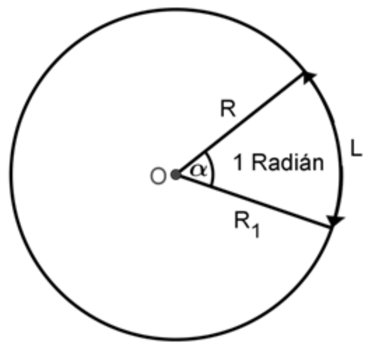


Figura 1.7: Medida angular

$$\text{Si } R = L, \text{ entonces } \alpha = 1 \text{ Radián}$$

$$\text{Luego 1 vuelta} = 360° = 2\pi \text{ radianes por lo cual,}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$$

1.3. Triángulos

Al tener un polígono de tres lados cuya región del plano está limitada por tres rectas intersecadas dos a dos por los puntos A,B y C no alineados, se tiene que la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se llama triángulo y se identifican en él, los siguientes elementos:

Vértices: Punto donde concurren cada par de rectas que forman el triángulo. (A, B, C).

Lados: Segmentos determinados por dos vértices. (a, b, c).

Ángulos Internos: Son los Ã¡ngulos formados internamente por dos lados consecutivos. $(\angle\alpha, \angle\beta, \angle\lambda)$.

Ángulos externos: Son los lados adyacentes a los ángulos internos. $(\angle\theta)$.

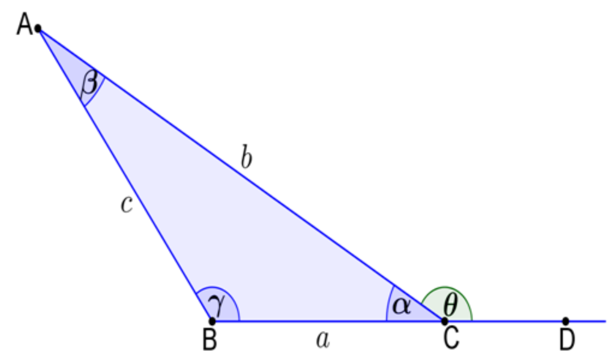


Figura 1.8: Elementos del triángulo

1.3.1. Teorema de Tales

Si un haz de rectas paralelas se corta por dos rectas secantes, los segmentos determinados sobre una de las secantes son proporcionales a los determinados sobre la otra.

Construcción del Teorema de Tales

Dibujar en una hoja dos rectas secantes r y s. Señalar sobre la recta r tres puntos B_1, B_2 y B_3 que disten de O. 4, 16 y 22 centímetros respectivamente. (Figura 1.9)

Señalar sobre la recta s un punto C_1 que diste a 2 centímetros de O.

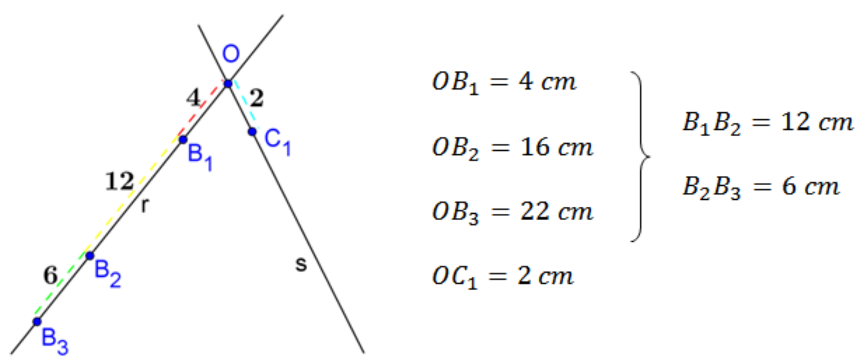


Figura 1.9: Teorema de Tales

Trazar la recta que pasa por B_1 y C_1 y paralelas a ésta, que pasen por los puntos B_2 y B_3. A los puntos de intersección de dichas paralelas con la recta s las llamaremos C_2 y C_3. (Figura 1.10)

Comprobar que los segmentos OC_2 y OC_3 miden 8 y 11 centímetros respectivamente.

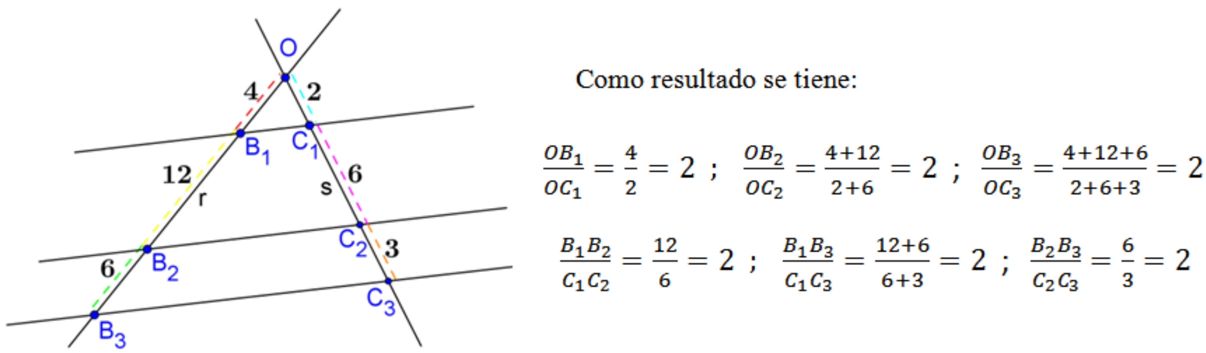


Figura 1.10: Teorema de Tales.

De donde se deduce que:

$$\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OB_2}{OC_2} = \frac{OB_3}{OC_3} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_1B_3}{C_1C_3} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3} = 2$$

El número 2 es la constante de proporcionalidad.

1.3.2. Triángulos en posición de Tales

Cuando un haz de rectas paralelas es cortado por dos rectas secantes, se obtienen triángulos con vértices común que se dicen en posición de Tales.

Los triángulos en posición de Tales son semejantes, es decir tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos son proporcionales.

AB_1, AB_2, y AB_3 se oponen a ángulos iguales y se dice que son lados homólogos, también son homólogo AC_1, AC_2 y AC_3.

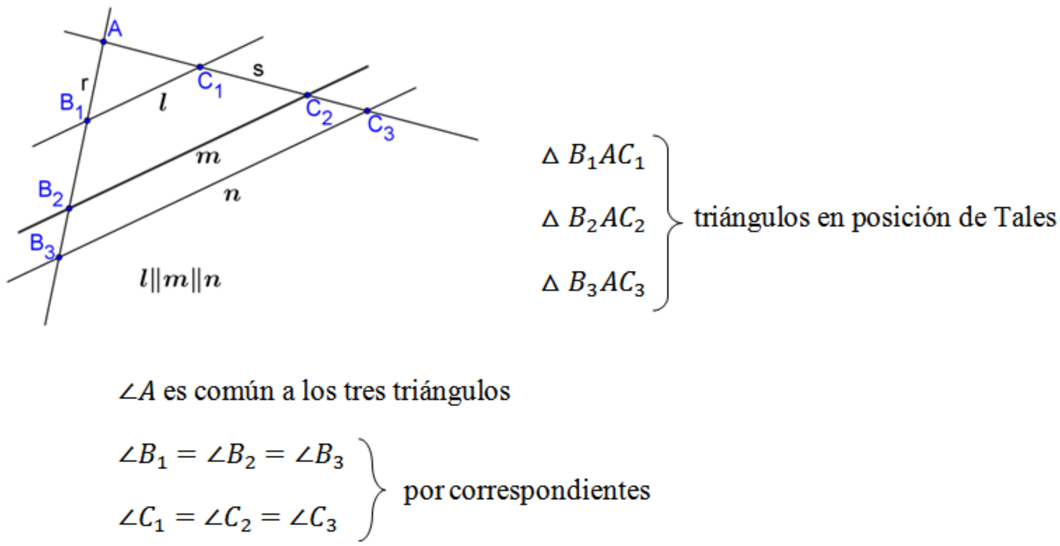


Figura 1.11: Triángulos en posición de Tales

1.3.3. Teorema fundamental de la proporcionalidad

Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados, divide a estos en segmentos proporcionales (Figura 1.12).

Es decir en el $\triangle ABD$, $A_2B_2 \parallel AB$, entonces $\frac{CA_2}{A_2A} = \frac{CB_2}{B_2B}$

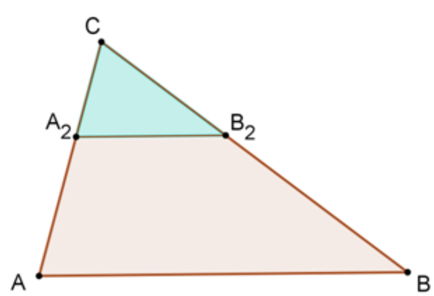


Figura 1.12: Teorema fundamental de la proporcionalidad

1.3.4. Congruencia de Triángulos

Dos polígonos son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño. Al hacer referencia en los triángulos, dos triángulo serán congruentes si uno de ellos pueden superponerse en el otro, de tal manera que sus lados coincidan. Si $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ entonces es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de los triángulos, es decir $ABC \leftrightarrow DEF$

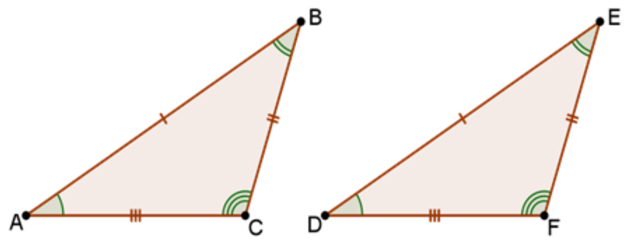


Figura 1.13: Congruencia de Triángulos

En la Figura 1.13 se puede observar que las parejas de lados $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$ y las parejas de ángulos A y D, B y E, C y F son correspondientes. Tal como lo indican las marcas, la expresión $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nos dice seis cosas:

Con base a lo anterior, se presentan algunos criterios que permiten determinar cuándo dos triángulos son congruentes.

Congruencia LLL

Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los lados correspondientes de otro triángulo entonces los triángulos son congruentes. Por ejemplo:

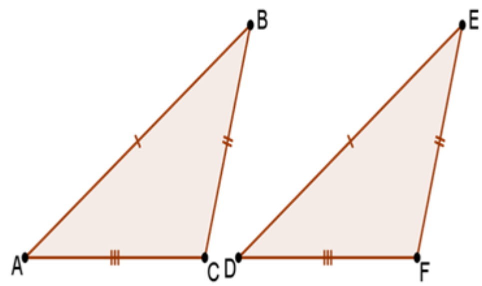


Figura 1.14: Congruencia LLL

En los triángulos ABC y DEF (Figura 1.14) se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, luego, si sus lados son congruentes, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Congruencia LAL

Si dos lados y el ángulo comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

En los triángulos ABC y DEF (Figura 1.15) se tiene que $\overline{BC} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle C \cong \angle D$, luego, si sus lados son congruentes, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

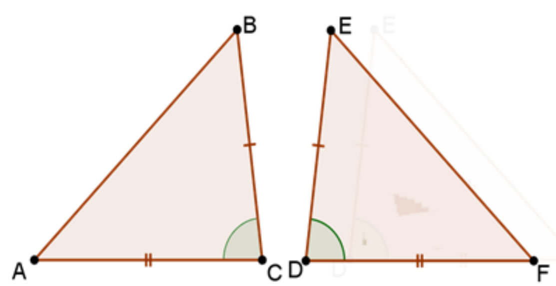


Figura 1.15: Congruencia LAL

Congruencia ALA

Si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

En los triángulos ABC y DEF (Figura 1.16) se tiene que $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle C \cong \angle F$, luego, si sus lados son congruentes, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

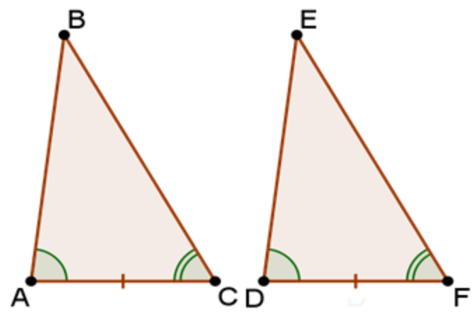


Figura 1.16: Congruencia ALA

1.3.5. Semejanza de Triángulos

Dos polígonos son semejantes si tienen la misma forma y diferente tamaño. En el caso de los triángulos, éstos serán semejantes si los ángulos correspondientes son congruentes y la razón entre lados correspondientes son proporcionales.

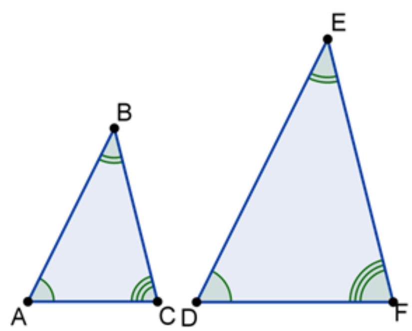


Figura 1.17: Semejanza de Triángulos

Si en los triángulos ABC y DEF (Figura 1.17) se cumple que que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, entonces $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle DEF$, lo cual se denota $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

A continuación se presentarán los criterios que permiten establecer cuándo dos triángulos son semejantes.

Criterio LLL

Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales; si los tres lados del triángulo ABC son proporcionares a los tres lados del triángulo DEF (Figura 1.18), esto es,

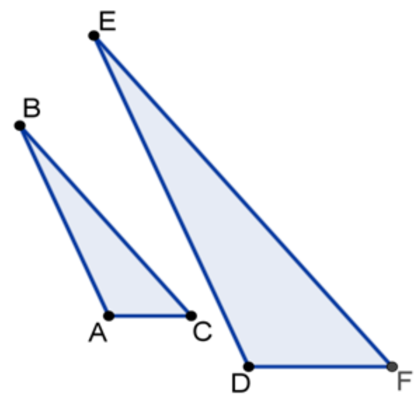


Figura 1.18: Criterio LLL

$\frac{DE}{AB} = k$, $\frac{EF}{BC} = k$ y $\frac{DF}{AC} = kP$ de esto, se establecen las igualdades $DE = kAB$, $EF = kBC$ y $DF = kAC$. Luego, el triángulo DEF se puede considerar una ampliación del $\triangle ABC$ y el $\triangle ABC$ una reducción del $\triangle DEF$, dependido del valor tomado por k. Así, sin importar el valor de k, se cumple que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Criterio AA

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos correspondientes son congruentes.

Sean los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ (Figura 1.19) se puede observar que $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, como la pareja de ángulos son congruentes éstos determina los vértices B y E, C y F correspondientes y a su vez los vértices correspondientes determinan los lados $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ correspondientes.

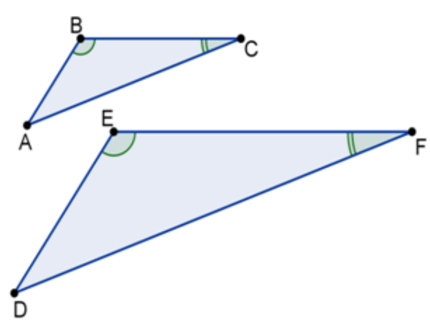


Figura 1.19: Criterio AA

$*$ Como $\frac{EF}{BC} = k$ entonces $EF = kBC$.

En la Figura 1.20 se puede observar la transformación que se aplica al triángulo ABC, la cual conserva la medida de los ángulos. Luego, se observa que

$\frac{B'C'}{BC} = k$; $B'C' = kBC = EF$ ($*$)

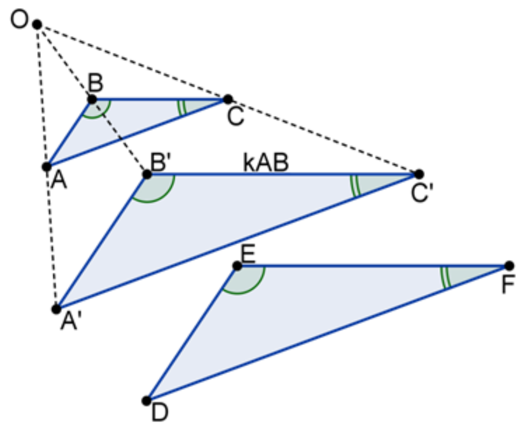


Figura 1.20: Criterio AA.

Además, al conservar la transformación la medida de los ángulos, $m\angle B' = m\angle E$ y $m\angle C' = m\angle F$; de donde los triángulos $A'B'C'$ y DEF son congruentes, conllevando a que el triángulo ABC puede ser transformado en el triángulo DEF al aplicar una homotecia. Permitiendo concluir que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Criterio LAL

Dos triángulos son semejantes si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes entre ellos son congruentes. En la figura 1.21 se tiene que $\angle B \cong \angle E$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. (El argumento de la demostración es similar al ilustrado en el criterio anterior).

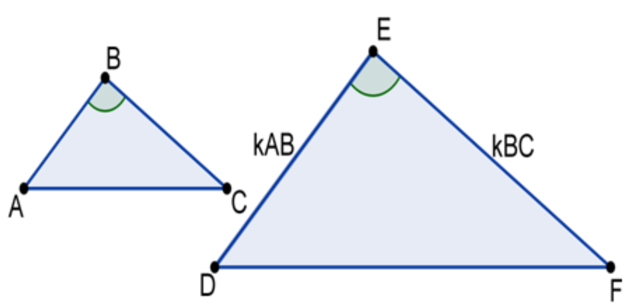


Figura 1.21: Criterio LAL

1.3.6. Teorema de Pitágoras

Dado un triángulo rectángulo ABC (Figura 1.22), llamaremos hipotenusa c al lado opuesto al ángulo de 90° y los dos lados opuestos a los ángulos A y B los llamaremos catetos a y b respectivamente.

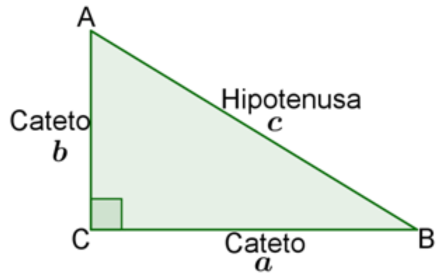


Figura 1.22: Triángulo rectángulo

El teorema de Pitágoras enuncia que en todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

El teorema de Pitágoras enuncia que en todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Demostración del teorema de Pitágoras.

Dado un triángulo rectángulo con catetos AC y BC e hipotenusa AB, demostrar que: $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Partiendo del triángulo rectángulo ABC, se traza una perpendicular a BC que pase por el $\angle ACB$ (Figura 1.23). Por semejanza de triángulos se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ y $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ por criterio de semejanza AA puesto que comparten el ángulo recto y un ángulo agudo respectivamente.

Tomando las proporciones de semejanza entre $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ y $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ se tiene que

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} \text{ y } \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

Ahora, escogemos las proporciones $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$ y operando cada una de ellas se tiene

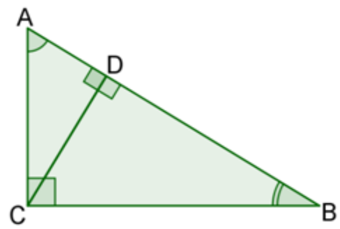


Figura 1.23: Demostración del teorema de Pitágoras

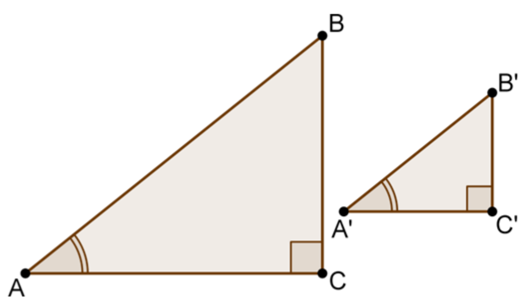
$(AC)(AC) = (AB)(AD)$ y $(AB)(BD) = (BC)(BC)$
$(AC)^2 = (AB)(AD)$ y $(AB)(DB) = (BC)^2$
Luego, sumando estas $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)(AD) + (AB)(DB)$
$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)[(AD) + (DB)]$; como $AD + DB = AB$
$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)(AB)$
$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$
Por tanto, se concluye que $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$ Luego, como $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$ entonces $c^2 = a^2 + b^2$

CAPÍTULO 2

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS - LEY DE SENOS Y DE COSENOS

2.1. Razones Trigonométricas

Considérese los triángulos ABC y $A'B'C'$ con un par de ángulos agudos congruentes. En los triángulos rectángulos de la Figura 1, se puede considerar que $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle C \cong \angle C'$, luego, por criterio AA se tiene $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y en consecuencia las razones entre las medidas de los lados correspondientes son iguales.



$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}, \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ y } \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

Figura 2.1: Razones Trigonométricas

Notemos que estas razones no dependen de la longitud de los lados sino de la medida del ángulo. Cada una de ellas recibe un nombre a partir de la medida del ángulo A, las cuales se llaman razones trigonomátricas:

- **Seno del ángulo A:** $SenA = \frac{BC}{AB}$
- **Coseno del ángulo A:** $CosA = \frac{AC}{AB}$

- **Tangente del ángulo A:** $TanA = \frac{BC}{AC}$

La razón trigonométrica $SenA$ es la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo A y la hipotenusa, explícitamente:

$$Sen\ A\ =\ \frac{Longitud\ del\ cateto\ opuesto}{Longitud\ de\ hipotenusa}$$

La razón trigonométrica $CosA$ es la razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo A y la hipotenusa

$$Cos\ A\ =\ \frac{Longitud\ del\ cateto\ adyacente}{Longitud\ de\ hipotenusa}$$

La razón trigonométrica $TanA$ es la razón entre la longitud del cateto opuesto y el cateto adyacente del ángulo A.

$$Tan\ A\ =\ \frac{Longitud\ del\ cateto\ opuesto}{Longitud\ del\ cateto\ adyacente}$$

Seno, coseno y tangente son las razones fundamentales que se pueden establecer en un ángulo agudo y los lados del triángulo rectángulo del cual forman parte. A cada razón fundamental le corresponde una razón recíproca, las cuales son:

- **Cotangente,** razón entre la longitud del cateto adyacente al ángulo y la longitud del cateto opuesto al mismo y se puede expresar como:

$$Cot\ A\ =\ \frac{1}{Tan\ A}\ =\ \frac{Longitud\ del\ cateto\ adyacente}{Longitud\ del\ cateto\ opuesto}$$

- **Secante,** razón entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto adyacente al mismo y se puede expresar como:

$$Sec\ A\ =\ \frac{1}{Cos\ A}\ =\ \frac{Longitud\ de\ hipotenusa}{Longitud\ del\ cateto\ adyacente}$$

- **Cosecante,** razón entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del cateto opuesto al mismo y se puede expresar como:

$$Csc\ A\ =\ \frac{1}{Sen\ A}\ =\ \frac{Longitud\ de\ hipotenusa}{Longitud\ del\ cateto\ opuesto}$$

Ejemplo. Las seis razones trigonométricas del $\angle\beta$ en el siguiente triángulo son:

$$Sen\beta = \tfrac{5}{13}, Cos\beta = \tfrac{12}{13}, Tan\beta = \tfrac{5}{12}$$

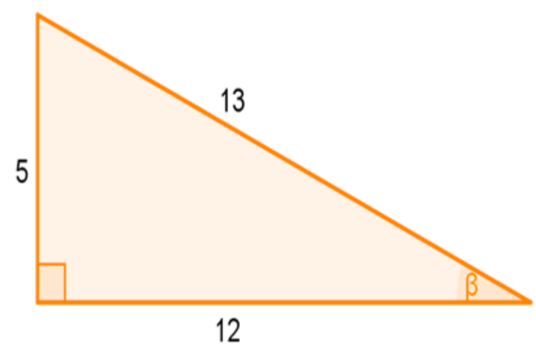


Figura 2.2: Triángulo Rectángulo

Las correspondientes razones recíprocas son:

$$Cot\beta = \tfrac{12}{5}, Sec\beta = \tfrac{13}{12}, Csc\beta = \tfrac{13}{5}$$

2.1.1. Razones trigonométricas de triángulos especiales

- **Triángulo equilátero:**

Considérese un triángulo equilátero ABC de lado la unidad. Trazando la bisectriz CD al ángulo opuesto a la base, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales, $\triangle CDA$ y $\triangle CDB$. De acuerdo a lo planteado, se llamará a a la magnitud del segmento CD (Figura 2.3). Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$a^2 = 1^2 - (\tfrac{1}{2})^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4};\ a = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Como los ángulos agudos de este triángulo miden 30° y 60° (Figura 2.4 y 2.5), es posible determinar los valores de las razones trigonométricas de la siguiente manera:

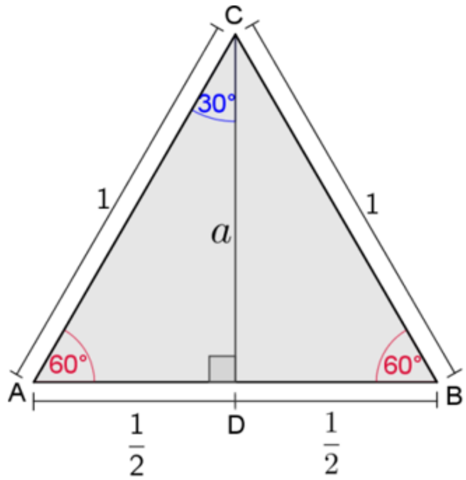


Figura 2.3: Triángulo equilátero

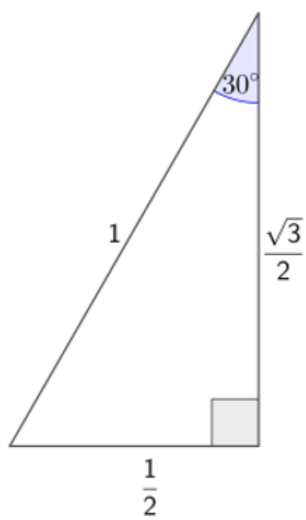


Figura 2.4: Ángulo de 30°

$$Sen30° = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2};\ Cos30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ Tan30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$Cot30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};\ Sec30° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2};\ Csc30° = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;$$

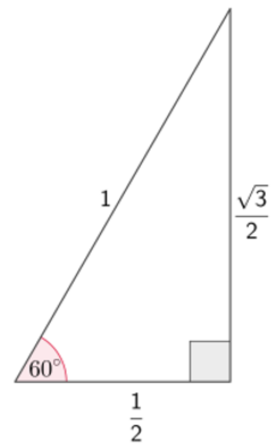


Figura 2.5: Ángulo de 60°

$$Sen60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ Cos60° = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2};\ Tan60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

$$Cot60° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ Sec60° = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;\ Csc60° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2};$$

- **Triángulo rectángulo isósceles:**

Ahora, considérese un cuadrado ABCD cuya longitud de los lados es igual a 1. Si se traza la diagonal BD se forman dos triángulos isósceles con ángulo recto en A y los otros dos ángulos de 45° (Figura 2.6). Los catetos de cada triángulo son de longitud 1, mientras que la hipotenusa que a su vez es la diagonal tiene como longitud c, cuyo valor se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras.

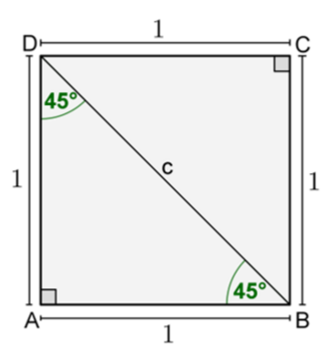


Figura 2.6: Cuadrado ABCD

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2;\ c = \sqrt{2}$$

Ya que los ángulos agudos de este triángulo son de 45° (Figura 2.7), basta con tomar un ángulo de referencia para hallar los valores de las razones trigonométricas, así:

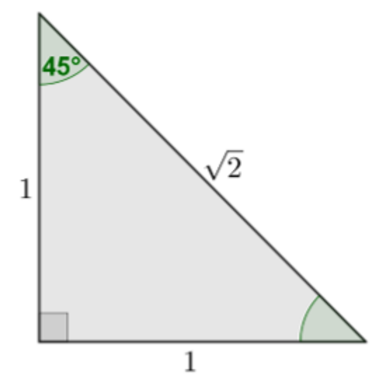


Figura 2.7: Ángulo de 45°

$$Sen45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \, Cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \, Tan45° = \frac{1}{1} = 1;$$

$$Cot45° = \frac{1}{1} = 1; \, Sec45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}; \, Csc45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2};$$

Los resultados anteriores nos permiten organizar los resultados en la siguiente tabla:

UNIDAD ANGULAR		**RAZONES**					
Grados	Radianes	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0	∞	1

Figura 2.8: Tabla de ángulos especiales

Anteriormente resolvimos triángulos rectángulos haciendo uso de razones trigonométricas. Ahora resolveremos triángulos oblicuángulos; esto es, triángulos que no tienen ángulo recto alguno. En las siguientes dos lecciones verás que puedes usar la trigonometría con cualquier triángulo y como herramientas, utilizaremos dos leyes: la Ley de los Senos y Ley de los Cosenos.

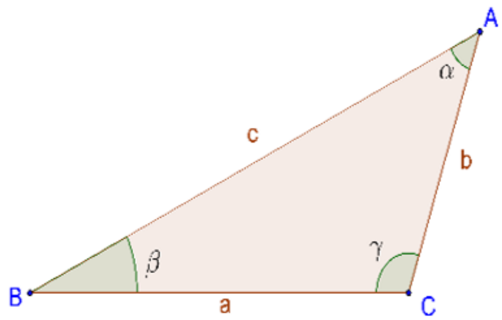


Figura 2.9: Triángulo ABC

Considerando el triángulo ABC, cuyos Ã¡ngulos son α, β y λ, y sus lados opuestos correspondientes son BC, AC y AB.
Si se aumenta la amplitud del ángulo λ, se nota que la medida del segmento AB también aumenta; de igual manera sucede con los ángulos β y el lado CA y el ángulo α y el lado BC.

Por lo anterior se enuncia la siguiente

2.2. Ley de senos

En cualquier triángulo ABC, la razón entre un lado y el seno del ángulo opuesto es constante; de acuerdo a la Figura 2.9

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\lambda}{c} \qquad o \qquad \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\lambda}$$

2.2.1. Deducción de la ley de senos

Sea ABC cualquier triángulo oblicuángulo. En la Figura (a), los ángulos α y β son agudos, mientras que en la Figura (b), el ángulo β es obtuso. Trazando a CD perpendicular a AB o a AB extendida y denotando su longitud con la letra h.

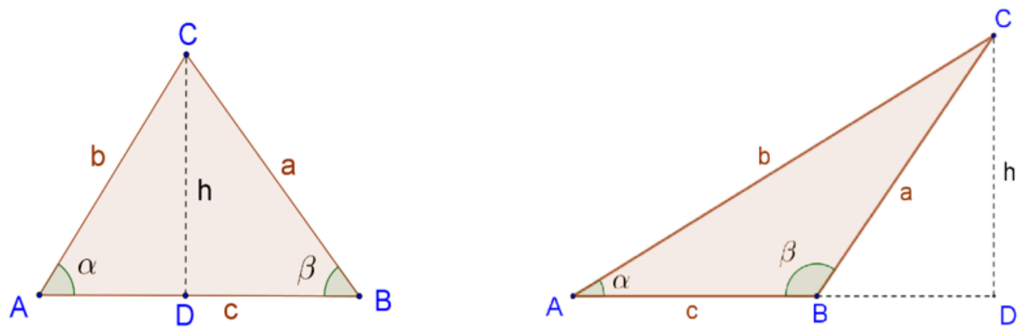


Figura (a) **Figura (b)**

Figura 2.10: Deducción de la ley de senos

En el triángulo rectángulo ACD de ambas figuras, $h = bsen\alpha$, mientras que en el triángulo rectángulo BCD en la figura (b) $h = asen\beta$, ya que, $h = asen\triangle DBC = asen(180° - \beta) = asen\beta$. Así,

$$asen\beta = bsen\alpha \qquad o \qquad \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$$

En forma similar,

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\lambda} \qquad o \qquad \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\lambda}$$

Así finalmente,

$$\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\lambda}{c} \qquad o \qquad \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\lambda}$$

2.3. Ley de cosenos

En cualquier triángulo ABC, el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos; esto es,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\lambda$$

2.3.1. Deducción de la ley de cosenos

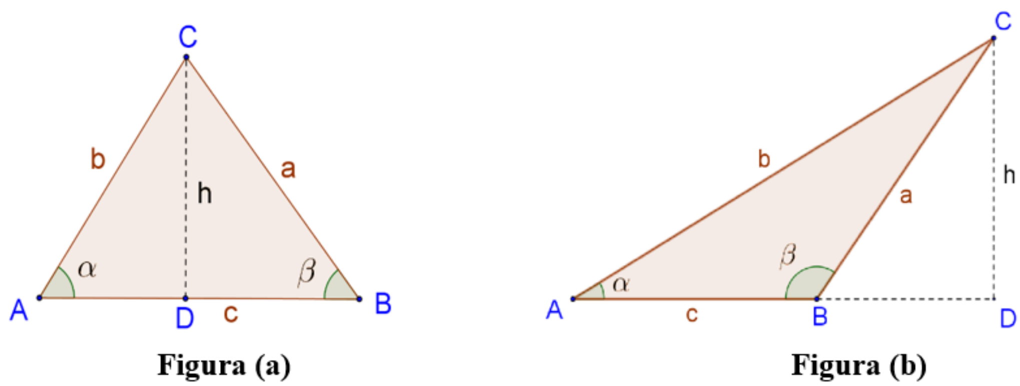


Figura 2.11: Deducción de la ley de cosenos

En cada triángulo rectángulo ACD de ambas figuras, $b^2 = h^2 + (AD)^2$, mientras que en el triángulo rectángulo BCD en la figura (a) $h = asen\beta$, y $BD = acos\beta$. Entonces,

$AD = AB - DC$; y $b^2 = h^2 + (AD)^2$

$AD = c - acos\beta$; y $b^2 = (asen\beta)^2 + (c - acos\beta)^2$

$$b^2 = a^2sen^2\beta + c^2 - 2cacos\beta + a^2cos^2\beta$$
$$b^2 = a^2(sen^2\beta + cos^2\beta) + c^2 - 2accos\beta$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\beta.$$

Por otro lado, tenemos en la figura (b) que $h = asen\angle CBD = asen(180° - \beta) = asen\beta$, y $BD = acos\angle CBD = acos(180° - \beta) = -acos\beta$. Entonces,

$$b^2 = h^2 + (AD)^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta$$

Las ecuaciones restantes se obtienen de manera similar cambiando cíclicamente las variables.

CAPÍTULO 3

SECUENCIAS DIDÁCTICAS

3.1. Descripción de la unidad didáctica

En este capítulo se presenta la descripción de la unidad didáctica. Inicialmente se expone teóricamente qué es una secuencia didáctica, seguidamente se presentan (3) secuencias elaboradas para trabajar con sus fases, objetivos y sesiones. Finalmente se exponen las tareas que componen la secuencia didáctica con sus respectivas guías de afianzamiento o actividades.

3.1.1. Secuencias didácticas

En los últimos años, especialmente en el campo de la didáctica de las ciencias, se ha promovido diferentes dispositivos pedagógicos constructivistas, que si bien no coinciden totalmente, se basan todos en secuencias didáctica (Osborne y Freiberg, 1991). En ellas, las actividades se diferencian según las fases o momentos del proceso de aprendizaje que se repiten en la enseñanza de cada contenido y en los diferentes niveles de enseñanza de dicho contenido.

El ser docente conlleva reflexionar sobre las situaciones habituales del aula, encontrando en sus estudiantes lógicas distintas. Además, de una gran variedad de motivaciones, expectativas, estilos y ritmos de trabajos. Por todo ello estos dispositivos didácticos deben incorporar sistemas de trabajo que faciliten esta construcción del conocimiento desde los diferentes puntos de partida y situaciones individuales, pero de forma común.

Tal como lo define el Centro Virtual Cervantes (Cervantes, Instituto, 1997-2017).

Se entiende por secuencia didáctica una serie ordenada de actividades relacionadas entre sí. Esta serie de actividades, que pretende enseñar un conjunto determinado de contenidos, puede constituir una tarea, una lección completa o una parte de ésta.

Según las características de las actividades y la función que desempeñan, se puede identificar diversas fases en una secuencia didáctica: presentación, comprensión, práctica y transferencia. (p.1)

Cabe resaltar que la finalidad de la secuencia didáctica es servir como instrumento de planificación de las tareas escolares para ordenar y guiar el proceso de enseñanza que promueve el docente con el ajuste adecuado para que su desarrollo sea pertinente dentro o fuera del aula de clases con sus alumnos.

La secuencia didáctica da respuesta a cuestiones curriculares, tales como ¿quénseñar? (propósitos y contenidos), ¿cuándo enseñar? (secuencia didáctica al iniciar un curso, una unidad, un aprendizaje o una clase), ¿cómo enseñar? (actividades, organización del espacio y el tiempo, materiales y recursos didácticos) y finalmente la evaluación.

Para organizar la secuencia de actividades se toma como base la propuesta del Grupo Deca, que propone incluir:

- Actividades de iniciación e introducción: En esta fase se observan las ideas previas de los estudiantes y se da cuenta de la importancia de trabajar nuevos conceptos.
- Actividades de desarrollo y estructuración: El estudiante entra en contacto con los nuevos conceptos y empieza a trabajar para asimilarlos. Es importante tener en cuenta que, en esta etapa el estudiante logra comprensión de algunas situaciones que le permiten la resolución de situaciones problemáticas.
- Actividades de aplicación y profundización: El estudiante aplica los conocimientos adquiridos en situaciones problemáticas nuevas, reflexiona acerca de los procesos empleados en la resolución de los problemas y plantea nuevos problemas.
- Actividades de evaluación: La evaluación es concebida como un continuo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje; sin embargo, las actividades planteadas en esta fase están diseñadas específicamente para conocer el grado de apropiación y estrategias de resolución de problemas.

3.1.2. Secuencia para la enseñanza de congruencia y semejanza

Tipo de Actividad	Actividad	Intención	Recursos
Actividad de Introducción	Análisis y Construcción del Conjunto de Cantor.	Revisar los conceptos previos de los estudiantes sobre proporcionalidad y medida.	Guía 1 Actividad: Descubre el Conjunto de Cantor
Actividad de estructuración	Análisis y construcción del Triángulo de Sierpinski.	Deducir el Teorema de Thales, haciendo una aproximación a la semejanza.	Guía 1 Actividad: Explorando el Triángulo de Sierpinski
Actividad de profundización	Análisis y modelación de la situación problema "midiendo la altura de un árbol".	Establecer de forma clara y correcta las relaciones entre los elementos de la situación, de tal forma que, además, se pueda aplicar los criterios de triángulos semejantes.	Guía 1 Actividad: Midiendo la altura del árbol
Actividad de evaluación	Reconocimiento y análisis de los logros obtenidos.	Socializar y aplicar los conocimientos adquiridos.	Guía 1 Actividad: Afianza lo aprendido

Figura 3.1: Secuencia para la enseñanza de congruencia y semejanza

GUÍA #1			
ÁREA	Trigonometría	**TEMA**	Congruencia y semejanza
ESTÁNDAR	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas		
DESEMPEÑOS ESPERADOS	• Identifica las condiciones y características que permiten establecer la semejanza y congruencia entre figuras. • Visualiza, reconoce y efectúa transformaciones de polígonos en el plano, las utiliza para establecer congruencias y semejanza y las aplica en la solución de problemas.		

ESTUDIANTE	

Descubre el conjunto de Cantor

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Hoja milimetrada, lápiz, regla, fotocopias.

1. En una hoja milimetrada siguiendo los pasos que dados a continuación construye el Conjunto de Cantor:

   Paso 1. Traza un segmento de 36 unidades.

   Paso 2. Divide el segmento en tres partes iguales y elimina el del centro.

   Paso 3. Repite en cada uno de los nuevos segmentos obtenidos el paso 2.

   Paso 4. Continúa aplicando el paso 2 a cada uno de los segmentos que vas obteniendo

2. Halla la longitud de uno de los segmentos obtenidos en cada paso.

Paso	Longitud
1	
2	
3	
4	

3. Compara:

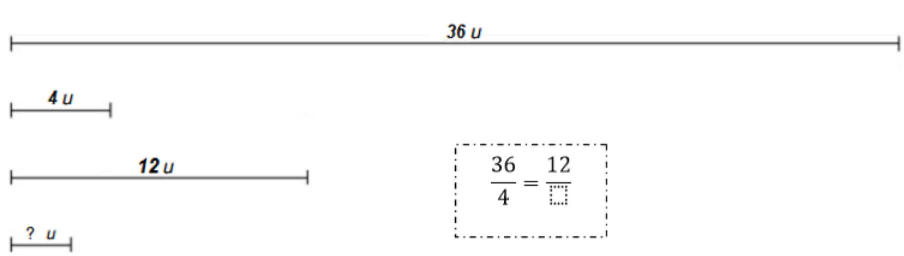
   a) La longitud de un segmento del paso 2 con respecto a un segmento del paso 1. ¿Qué puedes concluir?

   b) La longitud de un segmento del paso 3 con uno del paso 2. ¿Qué puedes concluir?

   c) La longitud de un segmento del paso 4 con uno del paso 3. ¿Qué puedes concluir?

   d) ¿Qué relación encuentras entre la medida de los segmentos que se compararon?

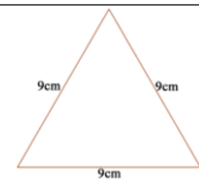
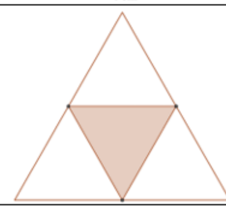
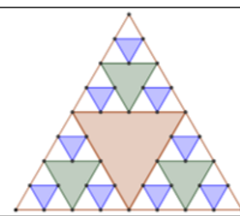
4. Con las longitudes de los segmentos dados en el ejemplo, completa el término faltante



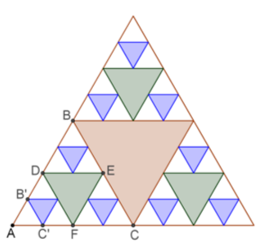
EXPLORANDO EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Hoja milimetrada, lápiz, colores, fotocopias.

1. En una hoja milimetrada siguiendo los pasos dados a continuación, realiza la construcción del triángulo de Sierpinski y completa el paso 3:

Paso 1: Dibujemos un triángulo equilátero de 9 unidades de lado	
Paso 2: Halle el punto medio de cada lado y únalos mediante segmentos. Coloree el triángulo central.	
Paso 3: Sobre cada uno de los tres triángulos que no fueron coloreados repita el paso 2	
Paso 4: Continuemos aplicando el paso 2 a cada uno de los nuevos triángulos que se dejan sin colorear al aplicar el paso 3.	

2. Observa el triángulo de Sierpinski y responde:



a) Encuentra la razón entre los segmentos:

AC' y AC $= \frac{\square}{\square}$

$B'C'$y BC $= \frac{\square}{\square}$

AB' y AB $= \frac{\square}{\square}$

¿Qué puedes concluir al encontrar las razones entre los segmentos?

____

b) ¿Qué relación hay entre los triángulos ABC, $A'B'C'$ y DEF ?

____

c) Al trazar las rectas BC, $B'C'$, DF con color amarillo. ¿Qué puedes decir de estas rectas?

____

MIDIENDO LA ALTURA DE UN ÁRBOL

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Hoja de block, lápiz, regla, metro, colores, fotocopias.

Procedimiento:

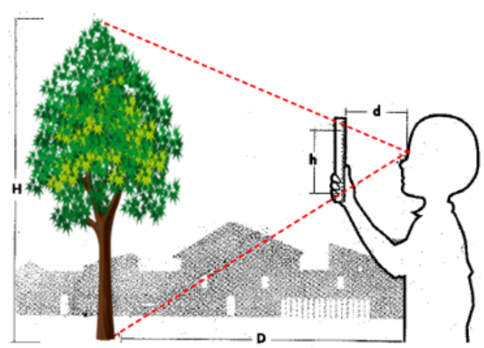
Paso 1. Seleccione un árbol, que esté en un contexto inmediato.

Paso 2. Colóquese a una cierta distancia del árbol y espere a que su compañero utilice el metro para medir la distancia que hay entre el árbol y su ubicación. Llame D a esa distancia y H a la altura del árbol.

Paso 3. Extienda el brazo mientras sostiene la regla verticalmente a la altura de los ojos. Espere a que su compañero mida la distancia entre la mano y el ojo. A esa longitud entre la regla y el ojo del observador la denominamos d.

Paso 4. Cierre uno de los ojos y con el restante determine a cuantos centímetros de la regla corresponde a la altura del árbol. A esa longitud en la regla la denominamos h.

Paso 5. Una vez obtenidos los datos, proceda a modelar la situación realizando una ilustración.



Paso 6. Por semejanza de triángulos se obtiene que $\frac{H}{h} = \frac{D}{d}$.

Paso 7. Responda

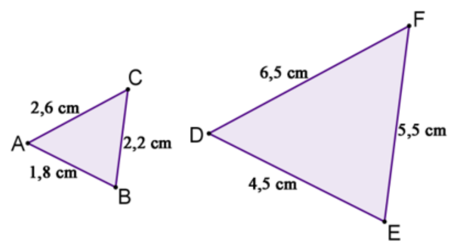
a) ¿Cómo se puede obtener la altura del árbol por medio de la relación del paso 6?
b) ¿Qué altura tiene el árbol?
c) ¿Cuál es la razón de semejanza?

AFIANZA LO APRENDIDO

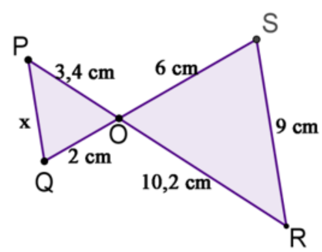
Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Hoja de respuesta, lápiz, regla, fotocopias.

Esta sesión cerrará el tema con la realización del examen que se expondrá a continuación. El control de tiempo y lugar lo realizará el docente dependiendo del contexto en el que se encuentren los estudiantes. Una vez terminado el examen, los estudiantes deberán entregarlo corregido y se resolverá en el tablero.

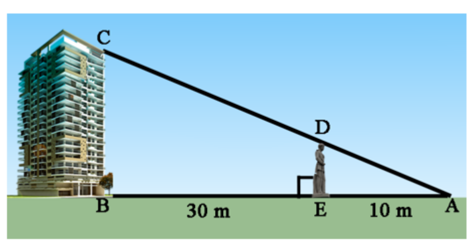
1. Determina y comprueba el criterio que permite demostrar la semejanza entre cada par de triángulos.



2. Comprueba la semejanza de los triángulos y calcula el valor de x.



3. Halla la altura del edificio si $\overline{AB}$ es su sombra a las 10 : 00 y $\overline{AD}$ es la sombra de la estatua de 6 m de altura a la misma hora.



4. Para medir la altura de un árbol, Valery coloca un espejo en el suelo a una distancia de 7,5 m. Luego, tiene que retirarse 2 m para poder ver reflejado el árbol en el punto medio del espejo. Calcula la altura del árbol. (Nota: la altura de Valery hasta sus ojos de de 1,60 m).

3.1.3. Secuencia para la enseñanza del Teorema de Pitágoras

Tipo de Actividad	Actividad	Intención	Recursos
Actividad de Introducción	Presentación y análisis del Teorema de Pitágoras.	Revisar los conceptos previos de los estudiantes sobre segmento, proporciones, mediatriz, simetría, transportar distancias, diagonal y construcción triángulos rectángulos.	Conocimientos previos 1.3.6 Teorema de Pitágoras.
Actividad de estructuración	Uso del papel origami como recurso didáctico en la enseñanza del Teorema de Pitágoras.	Establecer los elementos implicados en el Teorema de Pitágoras: Triángulo rectángulo, comparación de superficies y el propio Teorema de Pitágoras.	Guía 2 Actividad: Descubre el Teorema de Pitágoras en origami.
Actividad de profundización	Teorema de Pitágoras en un ambiente Geogebra para el desarrollo de las habilidades de demostración por medio de las TICS.	Desarrollar las habilidades de demostración en torno a la geometría dinámica, analizando los tipos de demostración que emergen con el uso del software geogebra en el proceso de demostración del Teorema de Pitágoras.	Guía 2 Actividad: Construcción visual del Teorema de Pitágoras.
Actividad de evaluación	Resolución de problemas vía modelización.	Resolver problemas cotidianos a través de la resolución de triángulos rectángulos.	Guía 2 Actividad: Aplicaciones del Teorema de Pitágoras.

Figura 3.2: Secuencia para la enseñanza del teorema de Pitágoras

GUÍA #2			
ÁREA	Trigonometría	**TEMA**	Teorema de Pitágoras
ESTÁNDAR	Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Thales).		
DESEMPEÑOS ESPERADOS	• Desarrolla y aplica estrategias adecuadas en el planteamiento, análisis y solución de problemas relacionados con el Teorema de Pitágoras. • Demuestra la relación Pitagórica por medio de construcciones usando material concreto.		

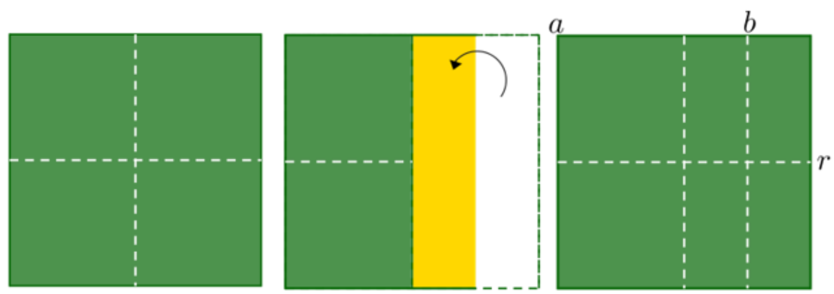
ESTUDIANTE	

DESCUBRE EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN ORIGAMI

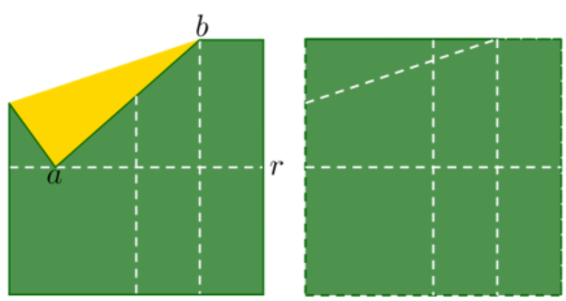
Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Hoja de papel origami, fotocopia.

En una hoja de papel origami descubre el Teorema de Pitágoras, siguiendo los pasos dados a continuación:

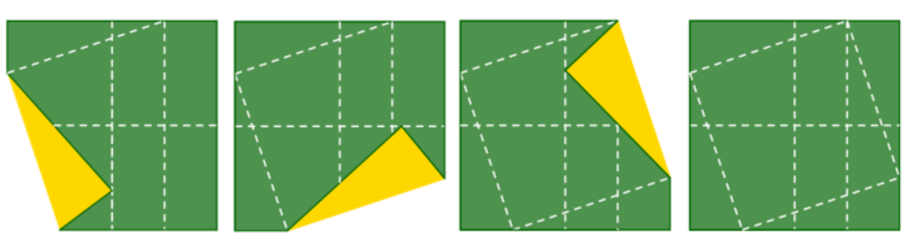
Paso 1. Tome un papel y divídalo en cuatro cuadrados iguales. Posteriormente vuelva a dividir el lado de uno de estos cuadrados pequeños otra vez por la mitad.



Paso 2. Lleve el vértice a sobre la recta r y que pase por b, construyendo asÃ un triángulo rectángulo.



Paso 3. Repite el proceso con todos los vértices y desdoblamos. De esta manera se ha construido un cuadrado sobre la hipotenusa de cada uno de los triángulos rectángulos.

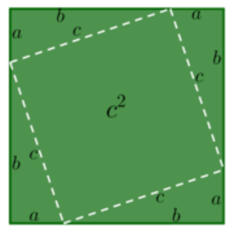


Paso 4. En cada uno de los triángulos rectángulos llame a nombre:

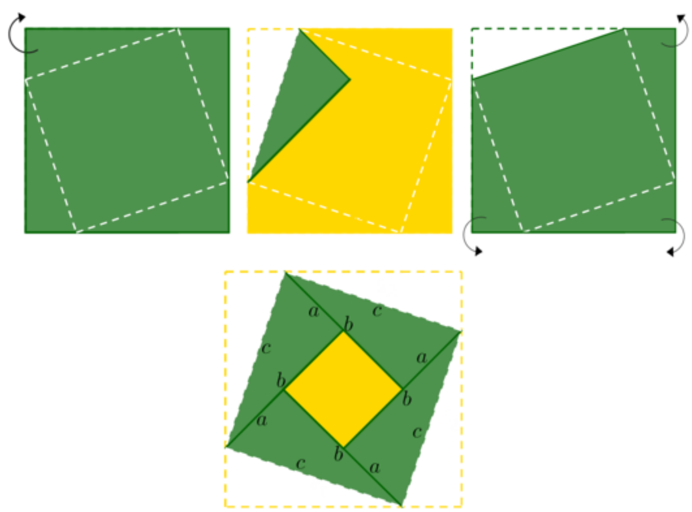
c = Hipotenusa

a = Cateto menor

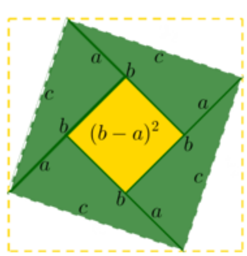
b = Cateto mayor



Paso 5. Doble cada lado c del cuadro hacia la parte trasera de la hoja (cara amarilla).



Paso 6. Se expresa el área del cuadrado de lado c como el área del cuadrado de lado a-b más el área de los cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b



$$c^2 = (a-b)^2 + 4\left(\frac{a.b}{2}\right)$$

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

CONSTRUCCIÓN VISUAL DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

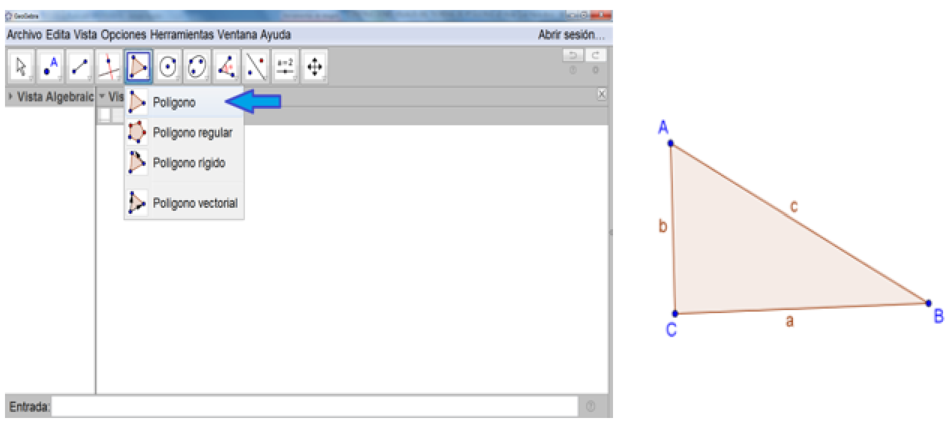
Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Computadores con software geogebra, videobeam y fotocopias.

A continuación se presenta la construcción (paso a paso) de una demostración visual del Teorema de Pitágoras mediante el uso del software matemático Geogebra.

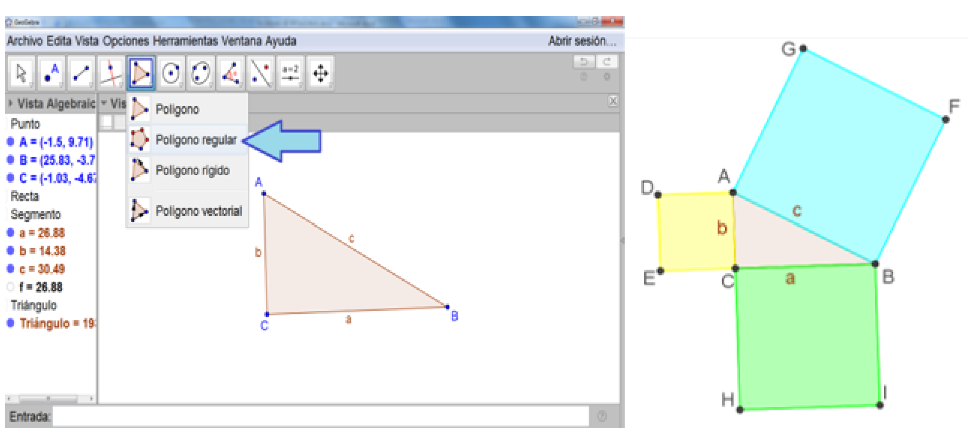
Construcción Poligonal

Atribuida a Henry Ernest Dudeney en 1917. Matemático inglés autor de juegos y puzles matemáticos.

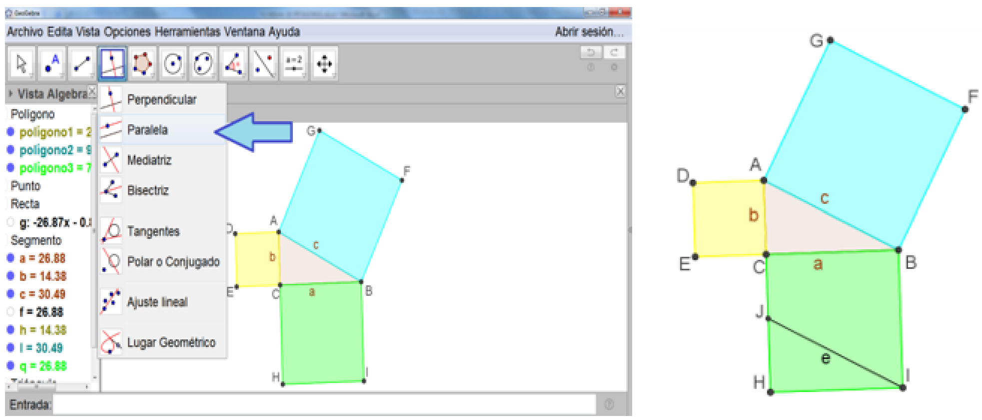
Paso 1. Construye un triángulo rectángulo haciendo uso de la herramienta Polígono.



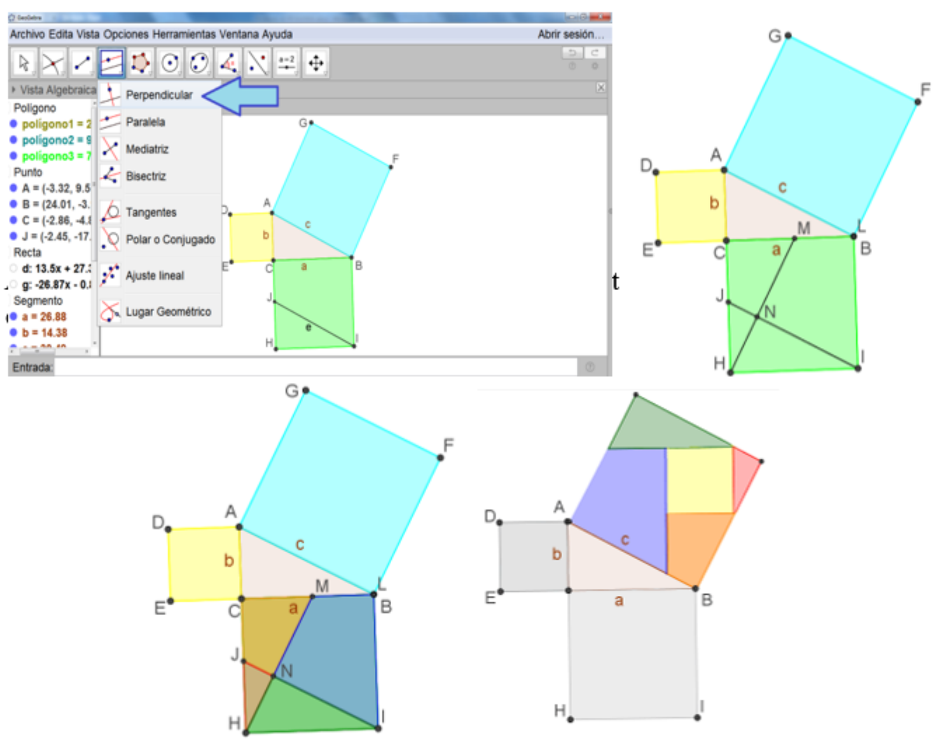
Paso 2. Trace cuadrados adyacentes a los lados del triángulo por medio de la herramienta Polígono regular.



Paso 3. Para construir el segmento paralelo al lado c que pasa por el Punto I del cuadrado construido sobre el cateto a, se debe usar la herramienta Paralela.



Paso 4. Continúe la construcción trazando un segmento perpendicular al segmento del paso anterior y que pasa por el Punto H.



Explicación

Cuando se realiza la traslación del cuadrado (amarillo) y los cuatro polígonos construidos, se obtiene un cuadrado de lado igual a la longitud de la hipotenusa del triángulo inicial, además los cuatro polígonos y el cuadrado (amarillo) tienen la misma área que los cuadrados construidos de los catetos del triángulo. Es decir el, cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Comprobación

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo ABC y c su hipotenusa, además A_1 es el área de los cuadrados construidos sobre los catetos y A_2 el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, al comparar sus áreas se obtiene:

$$A_1 = a^2 + b^2$$
$$A_1 = c^2$$

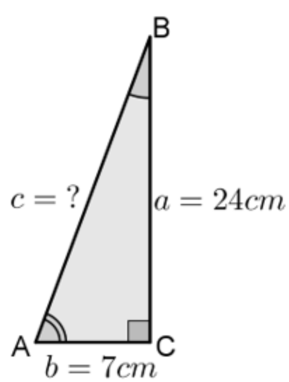
Como $A_1 = A_2$, se tiene que, $a^2 + b^2 = c^2$

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Lápiz, cuaderno y fotocopias.

A continuación se presenta la construcción (paso a paso) de una demostración visual del Teorema de Pitágoras mediante el uso del software matemático Geogebra.

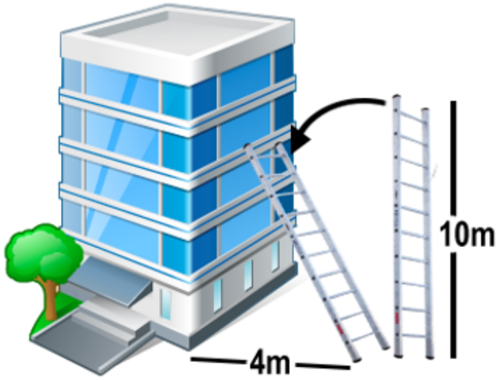
1. Utiliza el triángulo $\triangle ABC$ para hallar la longitud de la hipotenusa.



Solución. Se tiene que $a = 24\ cm$ y $b = 7\ cm$, además haciendo uso del teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = (24cm)^2 + (7cm)^2$$
$$c^2 = 576cm^2 + 49cm^2$$
$$c^2 = 625cm^2$$
$$c = \sqrt{625cm^2} = 25cm$$

2. Una escalera de bomberos de 10 metros de longitud se apoya en la fachada de un edificio, poniendo el pie de la escalera a 4 metros del edificio. ¿Qué altura, en metros, alcanza la escalera?



Aplicando el teorema de Pitágoras

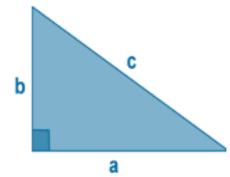
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(4m)^2 + b^2 = (10m)^2$$

$$b^2 = (10m)^2 - (4m)^2$$

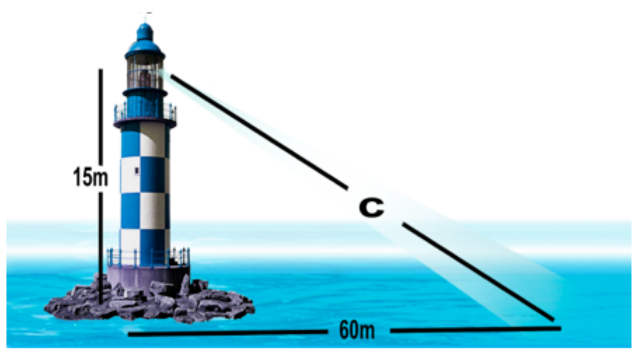
$$b^2 = 100m^2 - 16m^2$$

$$b = \sqrt{84m^2} = 9{,}2m$$

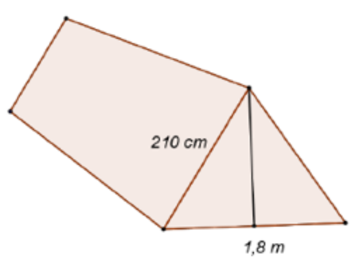


Por tanto, la escalera alcanza 9,2 metros de altura.

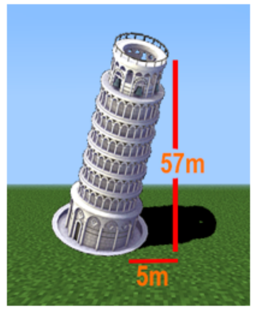
3. Un faro de 15 metros de altura proyecta su luz horizontalmente sobre el mar 60 metros de la costa. ¿Cuál es la longitud, en metros, del haz de luz?



4. Con el fin de darle estabilidad a un camping se necesita instalar una varilla en la parte central de una de sus caras, ¿cuál debe ser su medida si la cara posterior es un triángulo isósceles cuya base mide 1,8 m y uno de los lados iguales mide 210 cm?



5. La Torre de Pisa está inclinada de modo que su pared lateral forma un triángulo rectángulo de catetos 5 metros y 57 metros. ¿Cuánto mide la pared lateral?



3.1.4. Secuencia para la enseñanza de las razones trigonométricas

Tipo de Actividad	Actividad	Intención	Recursos
Actividad de Introducción	Construcción del goniómetro casero	Construir un instrumento de medición de ángulos que permita a los estudiantes medir los ángulos que se forman con los objetos encontrados a determinada distancia y la superficie del suelo.	Guía 3 Construcción del goniómetro casero.
Actividad de estructuración	Análisis y modelación de las razones trigonométricas en una salida de campo.	Elaborar y construir el significado de las razones trigonométricas, a partir de la traducción de las distintas representaciones y la transformación sintáctica entre una misma representación.	Guía 3 Actividad: La cometa
Actividad de profundización	Relación de la ley de senos y cosenos con la vida diaria	Modelizar y resolver correctamente problemas de la vida real que involucren triángulos oblicuángulos, usando la ley de los senos y de los cosenos.	Guía 3 Actividad: La antena del tejado.
Actividad de evaluación	Resolución de problemas vía modelización.	Resolver problemas reales usando las razones trigonométricas y la ley del seno y del coseno para el cálculo de distancias y ángulos	Guía 3 – Actividad: Midiendo la altura del árbol. – Actividad: Aplicaciones de las razones trigonométricas. – Actividad: Aplicaciones de la ley de senos y cosenos.

Figura 3.3: Secuencia para la enseñanza de congruencia y semejanza

GUÍA #3			
ÁREA	Trigonometría	**TEMA**	Razones trigonométricas- Ley del seno y del coseno
ESTÁNDAR	• Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. • Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.		
DESEMPEÑOS ESPERADOS	• Interpreta y usa las razones trigonométricas en triángulos rectángulos para determinar medidas de longitudes y de ángulos en diferentes situaciones y problemas. • Aplica las leyes de seno y coseno para solucionar situaciones problema reales que se modelen a través de triángulos. • Reconoce la importancia de la trigonometría como herramienta fundamental en la solución de situaciones problemas.		

ESTUDIANTE	

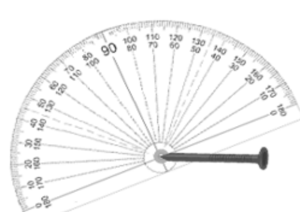
CONSTRUCCIÓN DEL GONIÓMETRO CASERO

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Transportador de 180°, hilo o cuerda, plomo de pesca u objeto que genere peso, tubo o pitillo, clavo, tijeras, bisturí y pegante.

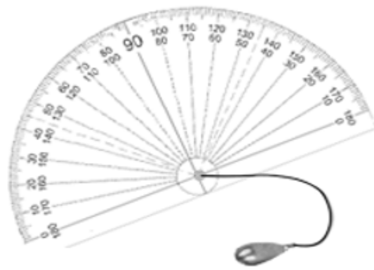
La construcción del goniómetro servirá como instrumento de medición en las actividades trabajadas en el desarrollo de esta guía, facilitándoles a los estudiantes la medición de ángulos.

Paso 1. Es necesario tener todos los instrumentos listos. El transportador es la parte esencial del goniómetro, es el que proporciona la habilidad para medir ángulos.

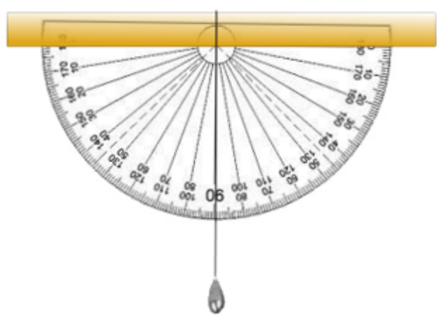
Paso 2. Tomar el clavo y realizar un orificio en el centro del transportador.



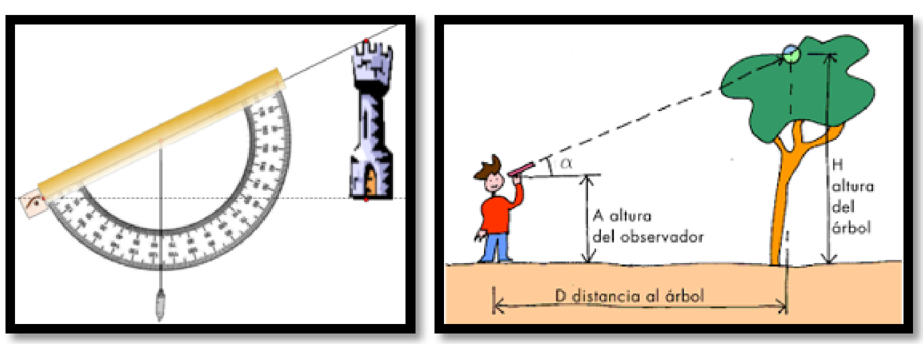
Paso 3. Un extremo del hilo o cuerda será fijado al orificio realizado, el otro extremo de la cuerda será atado al plomo de pesca (La medida del hilo dependerá del grandor del transportador).



Paso 4. El tubo o pitillo se debe pegar en la parte para medir en centímetros del transportador, su medida dependerá del ancho del transportador.



Paso 5. Medir ángulos

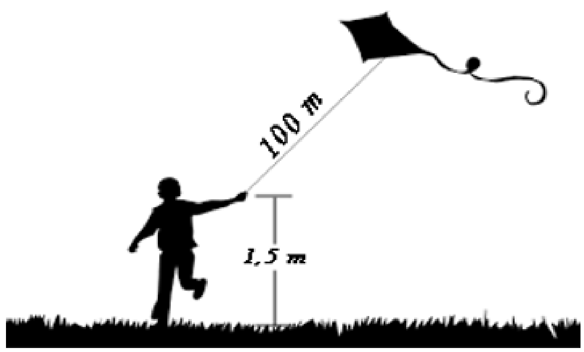


LA COMETA

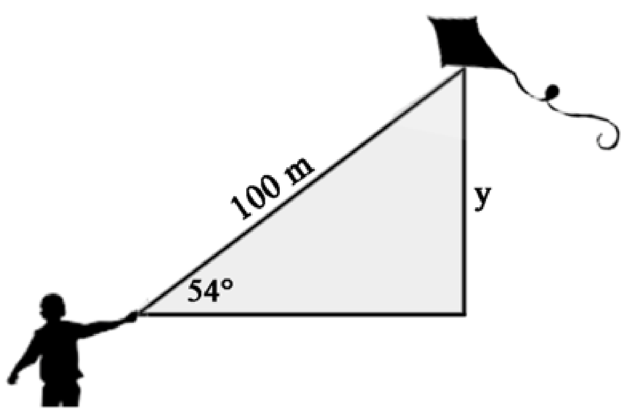
Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Lápiz, hoja de operaciones y fotocopias.

La presente actividad es realizada como instrumento de apoyo para el docente en el desarrollo de sus clases, en ella el papel de estudiante es activo ya que por medio del diálogo heurístico, se involucra dentro de su proceso de aprendizaje.

Un niño eleva una cometa, la altura del niño con el brazo levantado es de 1.5 metros; la cuerda de la cometa tiene una longitud de 100 m. El ángulo de elevación de la cometa es de 54° y se debemos determinar la altura de la cometa con respecto al suelo.



Al modelar la situación, ¿Qué tipo de triángulo se obtiene?, ¿Qué elementos del triángulo conocemos? ¿Cuál es la incógnita? ¿Mediante qué ley, razón trigonométrica o expresión podríamos determinar la altura de la cometa?



¿Qué razón trigonométrica relaciona la incógnita con los datos conocidos? Procedamos a plantear la razón trigonométrica.

Conocemos el ángulo $\alpha = 54°$ y la hipotenusa corresponde a la longitud de la cuerda, es decir, 100 metros. Falta hallar el cateto opuesto que corresponde a la altura de la cometa. Sustituye los datos y ahora sí podemos determinar el valor de y.

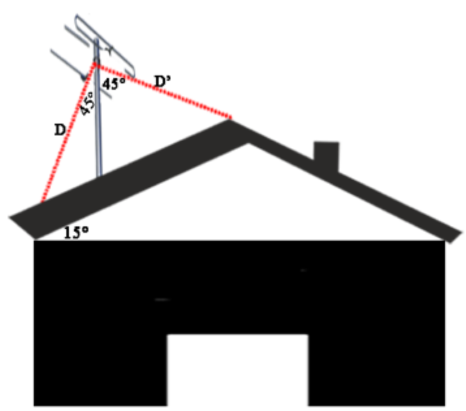
$$Sen54° = \frac{y}{100}$$

¿La altura de la comenta es y? Recordemos que el valor de y es la altura desde donde es sostenida la cuerda hasta donde está la cometa. Sirve de algo conocer la altura del niño con el brazo levantado?, así, la altura de la cometa con respecto al suelo es …

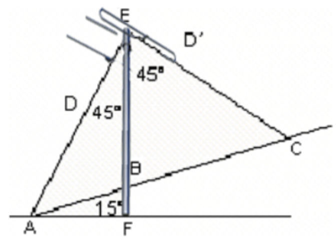
LA ANTENA DEL TEJADO

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Lápiz, hoja de operaciones y fotocopias.

Sobre el techo de una casa cuyo ángulo de de elevación es de 15°, se ha instalado una antena de forma vertical sostenida por un tubo de 1.5m, la antena es sostenida por unos cables que forman un ángulo de 45° con el tubo. Determina las longitudes D y D' de los cables (sugerencia, extienda el tubo verticalmente sobre el techo).



Nombraremos cada uno de los puntos de la figura de la siguiente manera (tal manera es arbitraria, ello nos servirá para resolver el ejercicio); adicionalmente, seguiremos la sugerencia del ejercicio, que es extender el tubo sobre el techo, entonces hacemos lo siguiente:



Sabemos que el tubo, es decir, el segmento BE, tiene una longitud de 1.5 m, conocemos los ángulos BEC y BEA, cuyas medidas son de 45° y también el ángulo BAF, cuya medida es de 15°; como se ha extendido el tubo sobre el techo de manera vertical ¿Cuánto mide el ángulo BFA? __________.

Haga una lista de la información se tiene:

$\overline{BE}$ =_______
∠A = _______ , ∠BEC =______ , ∠BEA =____ y ∠F =_____

Necesitamos las magnitudes de los cables D' y D, como estos lados no hacen parte de triángulos rectángulos, no puede utilizarse las razones trigonométricas, lo cual implica que podemos usar la Ley del _______ o la Ley del _______.

Para los triángulos ABE y EBC, la información que tenemos son el lado BE y los ángulos BEA y BEC respectivamente. En el triángulo AFB, ¿Cuánto mide el ángulo ABF? $\angle ABF =$ _______ ¿Qué procedimiento podemos seguir para determinar esta medida?

Según las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice ¿qué podemos afirmar acerca de los ángulos ABF y EBC? _______.

Así, para el triángulo BCE, conocemos los valores de dos ángulos y un lado (al tener dos ángulos, puedo determinar la medida del otro ángulo), con esta información ya se puede decir que se puede usar la Ley del _______.

El ángulo que falta es:

$$\angle c = \_\_\_\_\_\_\_$$

Luego aplicando la Ley del Seno:

$$\frac{\square}{sen\ 60°} = \frac{D'}{sen\ 75°} = \frac{BC}{\square}$$

Para hallar la magnitud del cable D' se toman las dos primeras igualdades. La longitud del cable D' es ________. (Para hallar magnitud del cable D, se sigue un procedimiento similar).

¿Qué tipo de ángulo es ABC? ¿Cuál es su medida?

Como el ángulo EBC mide ______, se puede decir que el ángulo ABE es lo que le falta a EBC para llegar a 180°, es decir: Como ya se tiene la magnitud del ángulo ABE, se puede determinar la magnitud del cable D, de manera similar a como ya se determinó para D'.

MIDIENDO LA ALTURA DEL ÁRBOL

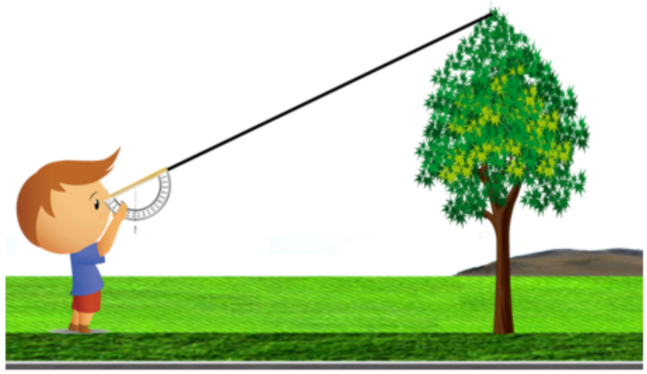
Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: Goniómetro, metro, lápiz, hoja de operaciones, cámara, computador y fotocopias.

La siguiente actividad puede ser realizada en el patio del colegio o en un parque cercano. Antes de iniciar, el docente deberá formar grupos de (3) estudiantes y crear los siguientes roles entre los integrantes de grupo:

- El observador: Tiene la responsabilidad de elegir el árbol que se va a medir, será quien emplee el goniómetro y mida el ángulo de elevación.
- El secretario: Será quien emplee el metro para poder tomar las medidas.
- El registrador: Es quien escribe las medidas y toma las fotos con muy buen ángulo (debe capturar al observador y el árbol que se medirá). También, tiene la misión de apoyar al secretario con las medidas.

Una vez repartidos los roles entre los estudiantes, éstos deberán seguir los siguientes pasos:

Paso 1. El observador elegirá un árbol para medir su altura, una vez que haya elegido el árbol, se va a retirar lo suficiente para que pueda enfocar con el goniómetro la parte más alta del árbol.

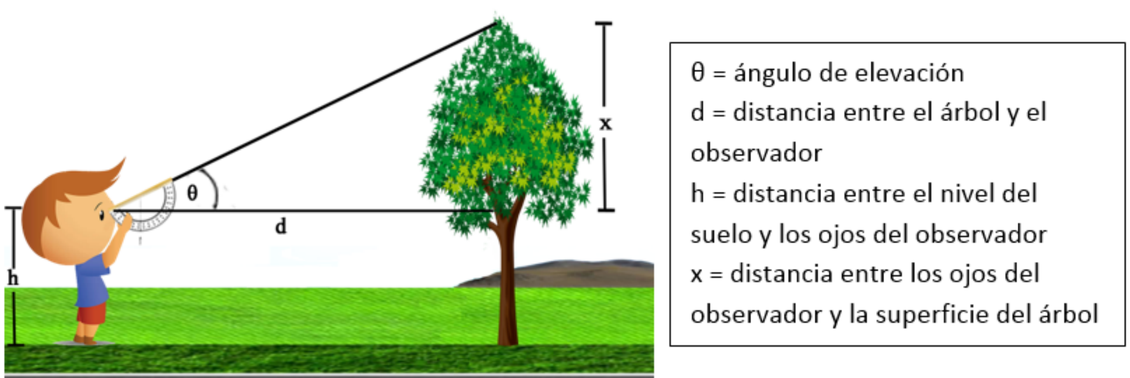


Paso 2. El secretario toma nota de la distancia existente entre el árbol y el observador.

Paso 3. La siguiente medida que tomará el secretario es de la distancia existente entre el nivel del suelo y el observador pero a la altura de los ojos.

Paso 4. El secretario junto el registrador verificarán en el goniómetro cuál es el ángulo de elevación que está marcando.

Paso 5. El registrador captará una fotografía en la que incluya el árbol y el observador, esta fotografía será editada por los estudiantes y será utilizada para modelar los datos recolectados, así:



Paso 6. Análisis y resolución

a) ¿Qué elementos debemos tener en cuenta para determinar la altura del árbol? ¿Por qué?

b) ¿Qué elementos del triángulo tenemos?

c) ¿Mediante qué ley, razón trigonométrica o expresión podríamos determinar a x?

d) Hallar x

e) ¿Hemos terminado el problema? ¿La altura del árbol con respecto al suelo es x?

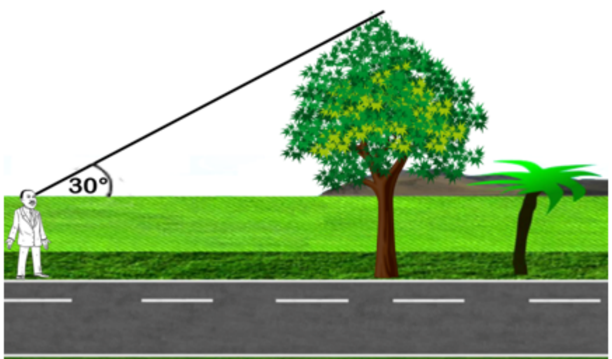
f) ¿Cuál es la altura del árbol?

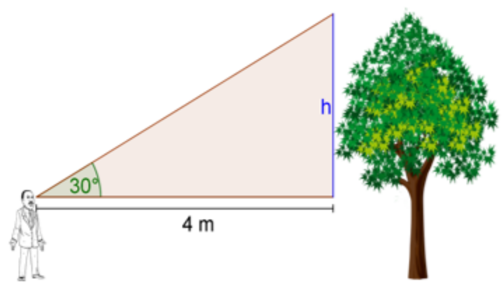
APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: lápiz, cuaderno, hoja de operaciones y fotocopia.

Ejemplo. Una persona de 1,75m, está situada a 4m de distancia desde la base de un árbol y descubre que la línea de visión a la parte más alta del árbol forma un ángulo de 30° con la horizontal. Encuentra la altura del árbol.

Modelando el problema con un triángulo y organizando los datos se tiene.





Como se quiere determinar la longitud del lado opuesto al ángulo de 30°, se usa la razón trigonométrica que relacione el lado opuesto (incógnita) con el lado adyacente (dato conocido), claramente se puede aplicar la tangente o cotangente, de esta manera se tiene.

$$\text{Tan } 30° = \frac{h}{4} \qquad \text{Despejando h}$$

$$4 \ \text{Tan } 30° = h \qquad \text{reemplazando Tan } 30°$$

$$4 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = h \qquad \text{Operando}$$

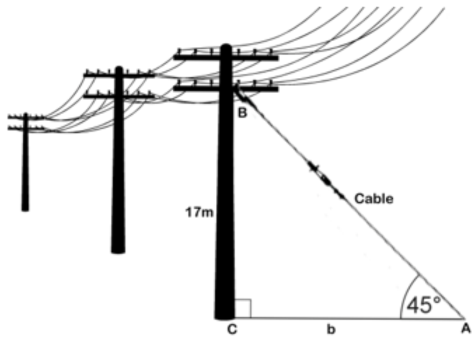
$$2{,}3 \approx h$$

Como la persona mide 1,75m y el valor de h es 2,3m, la altura del árbol es 4,05m.

1. Un cable de suspensión se adhiere a un poste de 17 metros de largo, formando un ángulo de 45° con el suelo. Encontrar:

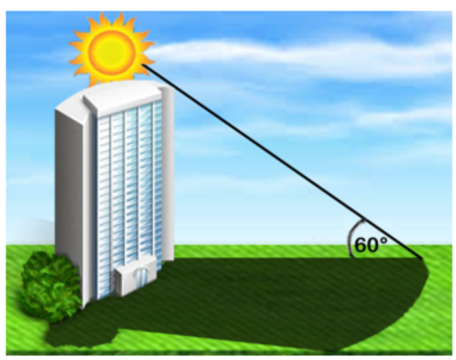
a) La longitud del Cable.

b) La distancia desde el punto de suspensión hasta la base del poste.
Modelando la situación se tiene:



En este caso la longitud del cable será c y la distancia hasta la base del poste b.

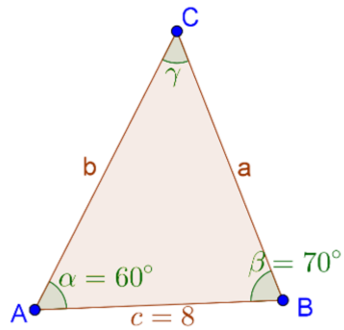
2. La altura de un edificio es de 55 metros. Cuando el sol forma un ángulo de 60° sobre el horizonte, calcula la longitud de la sombra que se proyecta.



EJERCICIOS Y APLICACIONES DE LA LEY DE SENOS Y DEL COSENOS

Recursos humanos: Docente y estudiantes.
Recursos Materiales: lápiz, cuaderno, hoja de operaciones y fotocopia.

Ejemplo. Calcular los elementos restantes del triángulo ABC



Solución: Sean $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$ y $c = 8$. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°; entonces, $\lambda = 100° - 70° - 60° = 50°$. Usando la ley de los senos tenemos que,

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{a} = \frac{\operatorname{sen} 70°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{8}$$

De la igualdad anterior hallaremos los valores para a y b.

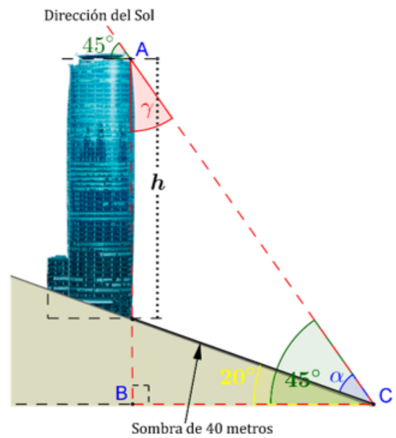
$$\frac{sen60°}{a} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{8} \qquad y \qquad \frac{sen70°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 50°}{8}$$

$$a = 8 * \frac{sen60°}{\operatorname{sen} 50°} \qquad y \qquad b = 8 * \frac{sen70°}{\operatorname{sen} 50°}$$

$$a \approx 9{,}04 \qquad y \qquad b \approx 9{,}81$$

Ejemplo.

Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 20°. El Sol está sobre la colina, y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 45°. Calcular la altura del edificio, si su sombra mide 40 metros de longitud.

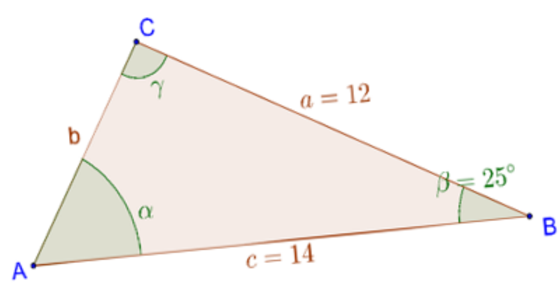


Solución: Llamando h a la altura del edificio sobre la pendiente, con lo cual se forma un triángulo rectángulo ABC como se ve en la imagen. Ahora bien, $\alpha + 20° = 45°$, por tanto, $\alpha = 25°$. Como $\triangle ABC$ es triángulo rectángulo, $\lambda = 180° - 90° - 45° = 45°$. Por la ley de los senos tenemos,

$$\frac{\operatorname{sen} 25°}{h} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{40} \text{ así que } h = 40 * \frac{\operatorname{sen} 25°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 23{,}9m$$

Ejemplo.

Calcular los elementos restantes del triángulo ABC.



Solución: $a = 12$, $c = 14$ y $\beta = 25°$. Usando la ley de los cosenos tenemos que,

$$\frac{\operatorname{sen} 25°}{h} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{40} \text{ así que } h = 40 * \frac{\operatorname{sen} 25°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 23{,}9m$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$b^2 = (12)^2 + (14)^2 - 2(12)(14)\cos 25°$$
$$b^2 \approx 35{,}48 luego, b \approx 5{,}96$$

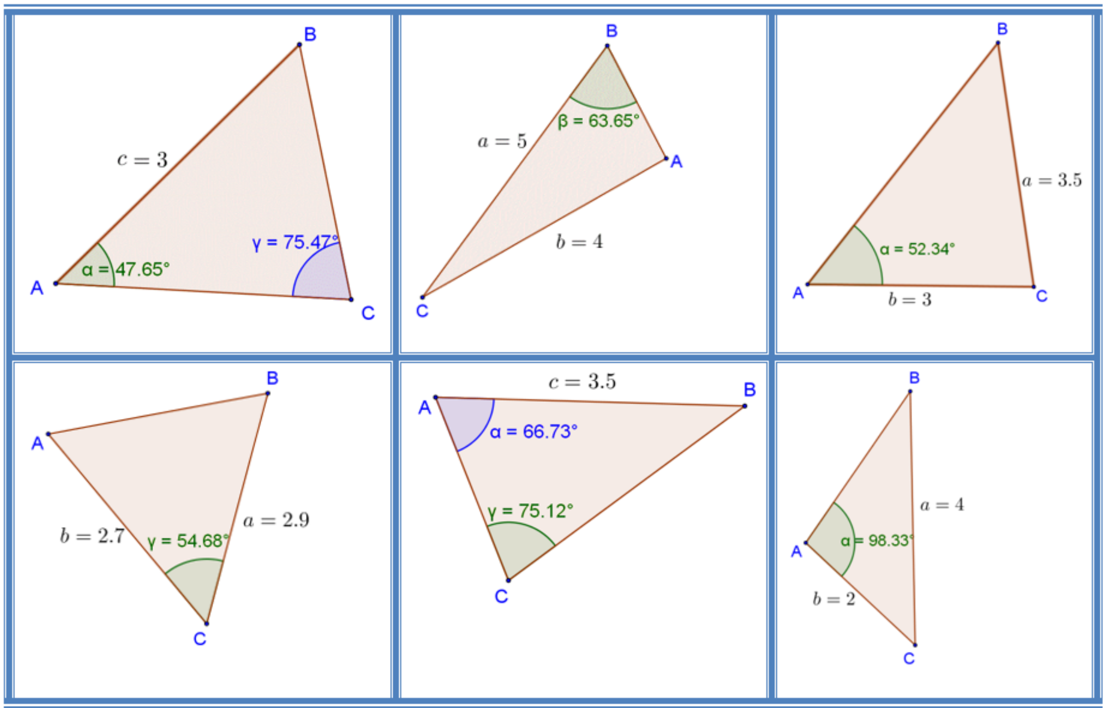
Por otro lado, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$(12)^2 = (5{,}96)^2 + (14)^2 - 2(5{,}96)(14)\cos\alpha$$
$$\cos\alpha \approx 0{,}5245 \; luego, \alpha \approx 58{,}37°.$$

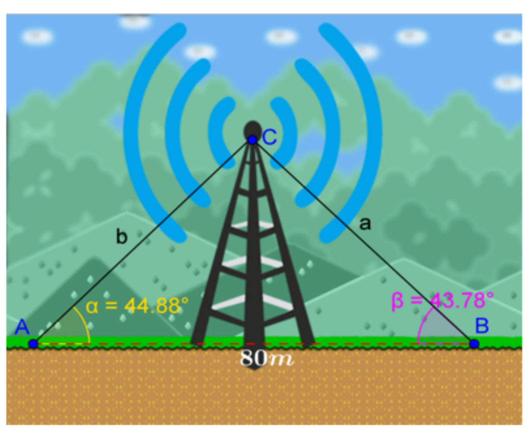
Por último la suma de los ángulos de un triángulo es 180°; entonces, $\lambda = 180° - 25° - 58{,}37° = 96{,}63°$.

Ejercicios de Práctica

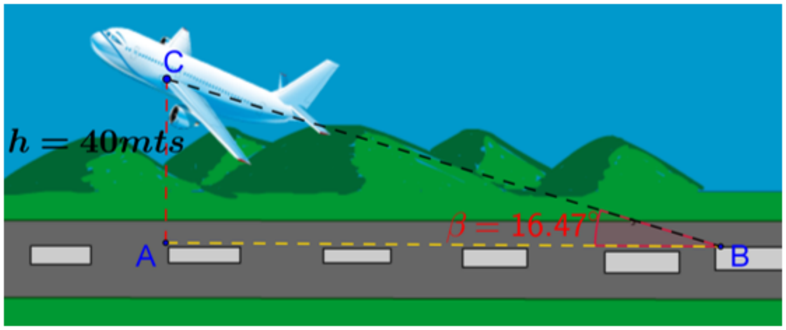
1. Hallar el valor de los ángulos y los lados que faltan para cada triángulo.



2. Una antena de radio está sujeta con cables de acero, como se muestra en la figura. Hallar la longitud de los cables.



3. Un avión sale de un aeropuerto y se eleva manteniendo un ángulo constante de $16,47°$ hasta que logra una altura de 40mts. Determina a qué distancia horizontal del aeropuerto se encuentra en ese momento.



4. Si medimos los ángulos de elevación de una montaña desde lo más alto y desde la base de una torre de 20 metros de alto y éstos son 39° y 41° respectivamente. ¿Cuál es la altura de la montaña?

5. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Andrés y Brandon hay 25 metros, y entre Brandon y Carlos, 15 metros. El ángulo formado en la esquina de Carlos es de 30°. ¿Cuál es la distancia entre Andrés y Carlos.

6. La sombra que proyecta un árbol de 3,4 metros sobre el piso horizontal mide 4,3 metros. ¿Cuál es la medida del ángulo que hace la horizontal con la línea que une los dos puntos extremos, de la sombra y del árbol?

7. Dos piedras se encuentran a la orilla de una playa a una distancia uno de otro de 7,8 metros en los puntos A y B, y se encuentra una boya situada en un punto C. Si la piedra A mide un ángulo CAB igual a 79,3° y el que está en B mide un ángulo CBA igual a 43,6°. ¿A qué distancia está la boya de la costa?

8. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8 metros del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 35° y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 43°. ¿Cuál es la altura del edificio de enfrente?

9. Mauricio vive a 253 metros del paradero del bus y Claudia vive a 319 del mismo sitio, sus trayectos forman un ángulo de 42°. ¿Cuál es la distancia que separa la casa de Mauricio de la casa de Claudia?

10. Dos trenes parten simultáneamente de una estación en dirección tal que forman un ángulo de 35°. Uno va a 15 km/hr y el otro a 25 km/hr. ¿A qué distancia se encuentran separados después de dos horas de viaje?

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. Conclusiones

Las siguientes son algunas conclusiones

- Las TIC pueden utilizarse como mediadoras para la enseñanza de la trigonometría, pues estas permiten visualizar, verificar y finalmente desarrollar los conceptos propuestos.
- El software Geogebra utilizado como herramienta tecnológica en la propuesta, es un software de distribución libre con el que se puede trabajar online o instalado en los computadores; además puede encontrarse muchos tutoriales de apoyo.
- La presentación de hechos históricos y biografías de matemáticos notables, se convierten en una estrategia que permite metodológicamente ampliar el conocimiento del estudiante y motivarlo en la aprehensión del conocimiento.
- La normatividad a nivel nacional en cuanto a la enseñanza de la matemática aparece en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, por tal razón para la elaboración de las secuencias didácticas se hace necesario tener claro lo expuesto en estos documentos, a fin de implementar estrategias adecuadas para su planeación y ejecución.
- Las relaciones trigonométricas se constituyen en herramientas importantes para modelar y estudiar situaciones reales en otros campos y ramas de ciencia.

4.2. Recomendaciones

- La enseñanza de las razones trigonométricas debe articularse con la geometría porque ésta le brinda los conceptos que sustentan su definición.

- Realizar un diagnóstico sobre los conocimientos previos es importante para el trabajo con las secuencias didácticas, la solución de problemas teóricos y las aplicaciones para la vida cotidiana.

- Se recomienda realizar una revisión de la propuesta, la cual queda abierta a sugerencias que permitan mejorarla, en pro de elaborar un material que redunde en la calidad académica de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ACEVEDO CAICEDO, M. M., CAMPOS FLÓREZ, M. L., JIMÉNEZ BECERRA, L. R. & LEÓN INFANTE, B. A., 2007, *Curso libre juvenil de matemáticas. (F. d. ciencias, Ed.)*, BOGOTÁ, COLOMBIA: UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA.

[2] ANDRADE MENDOZA, O. E., *Diseño de una propuesta de aula para enseñar razones trigonométricas en el grado décimo de la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo del municipio de Copacabana Antioquia*, DOCTORAL DISSERTATION, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MEDELLÍN .

[3] ARENAS, F., BECERRA, M., MORALES, F., URRUTIA, L. & GÓMEZ, P., 2012, *Razones trigonométricas.*

[4] BARRERA, A., ALBERTO, W., MONTES CRUZ, W. A., RUIZ GARCÍA, W. J., ALVARADO, U. & JOSÉ, A., 2009, *Enseñanza-aprendizaje de congruencia y semejanza de figuras geométricas en el Instituto Nacional Público Víctor Manuel Soto Gutiérrez del Municipio de Chichigalpa*, DOCTORAL DISSERTATION.

[5] BRAVO PINEDA, M. P., GONZÁLEZ CARABALÍ, N. F. & PAZ CHARRIA, A., 2014, *Secuencias didácticas para el aprendizaje de las razones trigonométricas.*

[6] CASTAÑEDA CASTRO, A., 2011, *Aplicación de estrategias que conduzcan a la comprensión y apropiación de metodologías para la resolución de triángulos de cualquier tipo, en estudiantes de grado décimo = Strategies applied that facilitate the understanding and appropriation of methodologies for any kind of triangle resolution in tenth grade students* , DOCTORAL DISSERTATION, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, MANIZALES.

[7] CASTRO, C., DÍAZ, L., & PALACIOS, R., 2011,*Secuencia didáctica para la enseñanza de la semejanza utilizando fractales.*

[8] CERVANTES, INSTITUTO., 1997-2017,*Centro virtual Cervantes*, RECUPERADO DE: HTTP://CVC.CERVANTES.ES/ENSENANZA/BIBLIOTECA-ELE-DICCIO-ELE-DICCIONARIO/SECUENCIADIDACTICA.HTM.

[9] DUARTE, J., 2004, *Ambiente de aprendizaje. Una aproximación conceptual*, EN REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN (ISSN: 1681-5653), COLOMBIA, RECUPERADO DE: HTTP://WWW.RIEOEI.ORG/DELOSLECTORES/524DUARTE.PDF.

[10] FRIEDRICHS, K. O., 1997, *De Pitágoras a Einstein*, (A. LINARES, TRAD.), CALI, COLOMBIA: RANDOM HOUSE - EDITORIAL NORMA.

[11] GARCÍA, G., 2003, *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*, UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL, RECUPERADO DE: HTTP://WWW.MINEDUCACION.GOV.CO/1759/ARTICLES-116042-ARCHIVO-PDF2.PDF.

[12] GODINO, J., 2002, USO DE MATERIAL TANGIBLE Y GRÁFICO TEXTTUAL EN EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS; SUPERANDO ALGUNAS POSICIONES INGENUAS, (A. M. COLS, ED.) *Actas do Prof Mat*, 177-124.

[13] GÓMEZ, M., 2002, *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evaluación de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informático para matemáticas*, TESIS DOCTORAL, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, ESPAÑA.

[14] GRUPO DECA, 2002, *Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación*, REVISTA AULA NO.6.

[15] JORBA, J., & SANMARTÍ, N., 1996, *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas*. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.

[16] MASSA ESTEVE, M. R., 2009, *La Historia de las Matemáticas en la Enseñanza de la Trigonometría*, COLECCIÓÌN DIGITAL EUDOXUS, 1(5).

[17] ROSAL, A. A. S., 2010, ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LOS CONTENIDOS DE TRIGONOMETRÍA EMPLEANDO LAS TICS, *EDUTEC, Revista electrónica de tecnología educativa*, (31).

[18] SULLIVAN, M., 1997, *Trigonometría y geometría analítica*, (VOL. CUATRO), NAUCALPAN DE JUÁREZ, MÉXICO: PEARSON PRENTICE HALL.