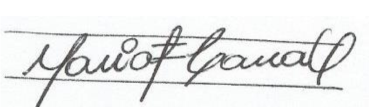
Neiva, Diciembre 02 de 2016

Señores
CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN
UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
Ciudad

Las suscritas:

Ingrid Tatiana Lugo García con C.C. No. 1075256838 y Maria Fernanda Correa Quintero, con C.C. No. 1075237004, autoras del trabajo de grado titulado Construcciones Neusis en Geometría, presentado y aprobado en el año 2016 como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:
Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.
De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: 

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Construcciones Neusis en Geometría

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Lugo García	Ingrid Tatiana
Correa Quintero	Maria Fernanda

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto
Penagos	Mauricio

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciada en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2016 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 40

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general _X_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Regla	Rule	**6.** Construir	Construct
2. Compás	Compass	**7.** Número	Number
3. Construible	Construible	**8.** Raíz	Root
4. Algebraico	Algebraic	**9.** Neusis	Neusis
5. Trascendente	Trascendent	**10.** Cuerpo	Body

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

El trabajo es una motivación al estudio de los números algebraicos y trascendentes junto a sus propiedades más elementales y los resultados que permiten establecer la imposibilidad de resolver con regla y compas con las restricciones instauradas los tres problemas clásicos de la matemática griega: trisección del ángulo, duplicación del cubo, cuadratura del círculo. Esta imposibilidad solo puede ser explicada rigurosamente a la luz de estas teorías. Adicionalmente el trabajo muestra paso a paso la forma ingeniosa como los griegos resolvieron esos problemas de construcción ante la imposibilidad de hacerlo en la forma planteada inicialmente, técnicas que en la literatura sobre el tema se conocen con el nombre de Construcciones Neusis.

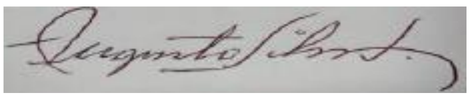
ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The work is a motivation to the study of the algebraic and transcendent numbers close to his more elementary properties and the results that aloow to establish the inability to solve with rule and compass with the eslablished restrictions three classic problems of the Greek mathematics: trisección of the angle, duplication of the bucket, squaring of the circle. This

impossibility only can be explained rigorously in the ligh of these theories. Additional the work shows stepwise the ingenious form as the greeks they solved these problems of construction before the inability to do it in the form raised initially, technical that in the literature on the topic are known by the name of Constructions Neusis.

APROBACIÓN DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Augusto Silva Silva

Firma: 

Nombre Jurado: Mauricio Penagos

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcciones Neusis en Geometría.

Ingrid Tatiana Lugo García
Maria Fernanda Correa Quintero

Neiva, Huila
2016

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcciones Neusis en Geometría

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Ingrid Tatiana Lugo García
2009289073
Maria Fernanda Correa Quintero
2009287703

Asesor:
Profesor Augusto Silva Silva

Neiva, Huila
2016

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, Noviembre de 2016

AGRADECIMIENTOS

Faltando poco para terminar una etapa importante de nuestras vidas, queremos agradecer a las personas que de una u otra forma contribuyeron a que este proceso académico personal se hiciera realidad, lo que sin duda alguna es motivo de celebración para familiares, amigos y por supuesto para nosotras.

Agradecemos a nuestros padres por su apoyo incondicional, esfuerzo, dedicación; por siempre darnos una palabra de aliento, de amor que nos motivó a no rendirnos y ante todo gracias por la paciencia.

Profesores de la Licenciatura en Matemáticas para ustedes tambien van todos los agradecimientos que podamos sentir, pues sus enseñanzas marcaron nuestras vidas contribuyendo a nuestra formación no solo profesional sino también personal. Al profesor Augusto Silva Silva gracias por su apoyo y paciencia en el tiempo dedicado a la elaboración de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

PRESENTACIÓN

El presente Trabajo de Grado, denominado Construcciones Neusis en Geometría hace un aporte para rescatar el uso de la regla y el compás en la enseñanza de la Geometría.

El trabajo consta de tres capítulos así:

- **Capítulo 1.** Construcciones Elementales: En el se hace una presentación de la temática en general, incluye una reseña breve de los tres problemas clásicos de la Matemática Griega. Se presentan además las construcciones más elementales que son posibles con la regla y el compás como son: punto medio y mediatriz de un segmento, perpendiculares y paralelas a una recta dada; suma, resta, multiplicación y división de segmentos y la raiz cuadrada.

- **Capítulo 2.** Números Algebraicos, Trascendentes y Construibles: En este capítulo se presentan los conceptos correspondientes, sus propiedades más elementales y los resultados relacionados con ellos que permiten establecer la imposibilidad de resolver solo con el uso de la regla y el compás los tres problemas relacionados.

- **Capítulo 3.** Construcciones Neusis: En este capítulo se presentan las distintas formas, algunas de las cuales fueron inventadas por los mismos matemáticos griegos, para resolver los tres problemas clásicos ya reseñados.

  El trabajo incluye en su parte final, algunas conclusiones que se obtuvieron durante su elaboración.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Recrear las orientaciones e instrucciones elementales necesarias y suficientes para realizar las construcciones elaboradas por los matemáticos griegos para resolver el problema de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Adicionalmente se presenta una de las aproximaciones propuestas por Arquímedes para el número π.

Objetivos Específicos

- Hacer una presentación general de la problemática de las construcciones con regla y compás incluyendo una breve reseña de los tres problemas clásicos de la Matemática griega.
- Presentar la forma de llevar a cabo algunas construcciones elementales con regla y compás: perpendiculares, paralelas, mediatrices, bisectrices, suma, resta, multiplicación y división de segmentos y raíz cuadrada, entre otras.
- Presentar los conceptos de número algebraico, número construible, número trascendente y algunos resultados relacionados con ellos.
- Reproducir las construcciones hechas por los matemáticos griegos para resolver los problemas de duplicar el cubo y trisectar un ángulo las cuales se conocen con el nombre de Construcciones Neusis.

JUSTIFICACIÓN

La realización de éste trabajo de grado se justifica por las siguientes razones:

1. Las construcciones con regla y compás hacen parte de las matemáticas clásicas griegas, temas de los cuales se ocuparon Arquímedes, Euclides, Hipócrates, Aristarco y Pappus entre otros.

2. Las mencionadas construcciones dieron origen a los llamados tres problemas clásicos griegos, los cuales fueron resueltos muchos siglos después con la aparición de nuevas herramientas, métodos y procedimientos desarrollados en la rama de la matemática que hoy se conoce como Álgebra Moderna.

3. El trabajo requiere para su realización el desarrollo de la destreza manual, de la utilización hábil de instrumentos de trazo como la regla, el compás, la escuadra y el transportador indispensables para el profesor de Matemáticas.

4. El trabajo hace un aparte importante en la comprensión de algunos temas que requieren grados de abstracción significativos, como son los conceptos de número cosntruible, extensión de un cuerpo, número algebraico y número trascendente entre otros.

5. Históricamente es de suma importancia, resaltar el hecho de que fueron los mismos matemáticos gríegos quienes plantearon formas alternativas para resolver los tres problemas reseñados, ante la imposibilidad de hacerlo en la forma planteada inicialmente.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

1.1. Los Tres problemas Clásicos de la Matemática Griega

Las construcciones con regla y compás fueron una actividad privilegiada de los matemáticos griegos, razón por la cual han hecho presencia en el desarrollo de las matemáticas durante los siglos posteriores.
El uso de la regla y el compás estaban sujetas a restricciones muy severas, las cuales limitaban considerablemente las construcciones que podían hacerse. Las restricciones son las siguientes:

1) La regla usada por los griegos, solo podía emplearse para trazar el segmento de recta que determina dos puntos. La regla no tenía marcas, luego no podía usarse para medir; la regla no podía deslizarse en el plano para trazar paralelas ni tampoco podía rotarse.

2) El compás solo se podía usar para trazar circunferencias (o arcos de circunferencia) con centro en un punto y cualquier radio. Tampoco podía usarse el compás para medir segmentos, ni para dividir segmentos, circunferencias o arcos en partes iguales.

Las anteriores restricciones dieron origen a tres problemas de construcción con regla y compás los cuales se conocen como Problemas Clásicos de la Matemática Griega. Ellos Son:

a) Duplicación del Cubo: Se conoce con el nombre de problema Deliano, por su relación con la antigua ciudad griega de Delfos, situada al pie del monte Parnaso, en donde se encontraba el más importante de los oráculos griegos puesto bajo el patrocinio de Apolo, divinidad griega, dios del día, de la poesía, de la música y de las artes.

El problema consiste, en construir con regla y compás la arista de un cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado.

b) Trisección del ángulo: Dado un ángulo cualquiera se trata de dividirlo en tres ángulos iguales usando sólo la regla y el compás.

c) Cuadratura del círculo: Dado cualquier círculo, se trata de construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área que el círculo.

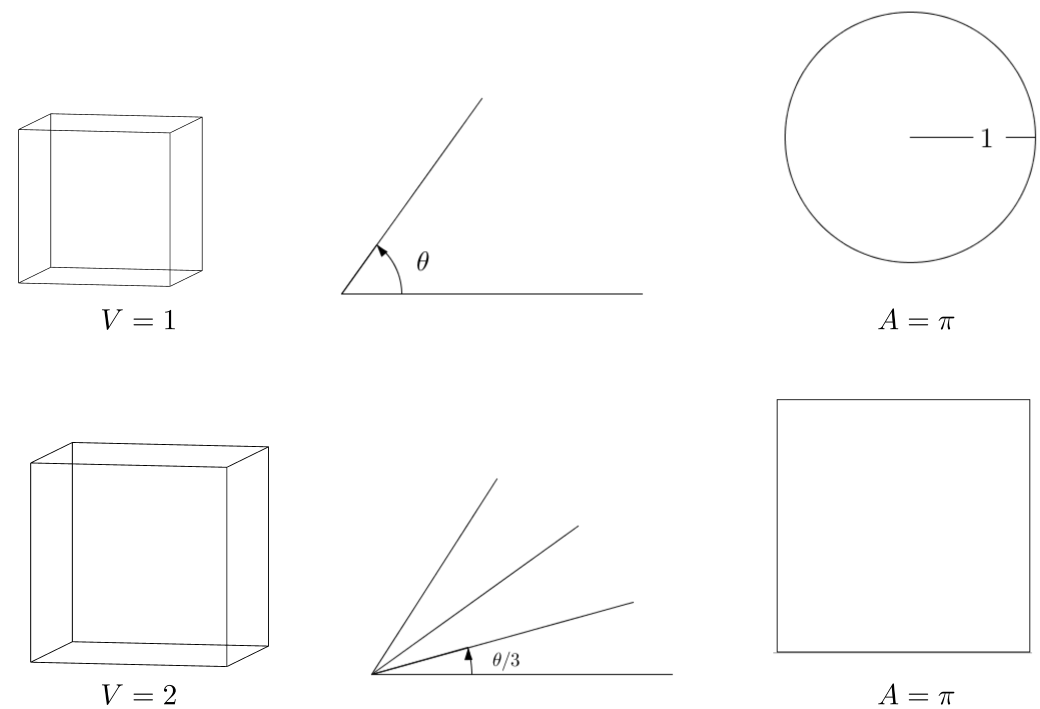


Figura 1.1

Los tres problemas clásicos griegos fueron motivo de controversia, debate y discusión entre la comunidad matemática por mas de dos mil años. La respuesta durante ese tiempo fue que ninguno de los tres se puede resolver por medio de construcciones con regla y compás en el sentido de la matemática griega.

La solución definitiva a éstos problemas debió esperar avances significativos de la matemática en las ramas de la Teoría de Grupos, de Anillos, de Cuerpos y la elaboración de una teoría consistente sobre números construibles, algebráicos y trascendentes; éstas ramas forman parte de lo que hoy se conoce con el nombre de Álgebra Moderna.

Es de anotar que aunque los tres problemas no pueden resolverse con regla y compás, los mismos matemáticos griegos desarrollaron otras técnicas que les permitieron hallar soluciones para cada uno de ellos. Consisten fundamentalmente en darle a la regla y al compás otros usos como medir, alinear puntos, deslizar un segmento o en la elaboración de instrumentos diseñados con propósitos específicos. Estas construcciones se conocen en la literatura sobre este tema como Construcciones Neusis; y, Arquímedes fué uno de los primeros en usarlas.

En el presente trabajo, usaremos la regla y el compás en la forma establecida por los griegos para las construcciones más elementales: Punto medio, mediatriz, perpendiculares, paralelas y bisectriz de un ángulo. Para otras construcciones como suma, resta, producto, cociente y raíz cuadrada usaremos también el compás para transportar segmentos.

1.2. Punto medio y Mediatriz de un segmento

Dado un segmento $\overline{AB}$ su punto medio y su mediatriz se construyen de la siguiente forma:

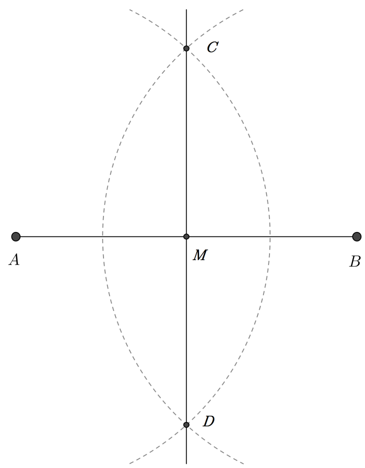


Figura 1.2

i) Con centro en A y en B y un radio que sea mayor que la mitad del segmento, se trazan arcos para determinar los puntos C y D.

ii) Trazar con la regla la recta CD.

El punto M donde esta recta corta al segmento $\overline{AB}$ es el punto medio y la recta determinada por C y D es la mediatriz. Es de anotar que todos los puntos de la mediatriz equidistan de A y B

1.3. Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella

Dada una recta r y un punto A, fuera de ella, la perpendicular a r por el punto A se construye así:

i) Con centro en A y un radio conveniente se traza un arco que determine en r, los puntos P y Q.

ii) Con centro en P y Q, con un radio conveniente, se trazan arcos (con la misma abertura) para determinar el punto B.

La recta s determinada por A y B es la recta perpendicular deseada.

Una ligera modificacón de esta construcción, permite trazar la perpendicular a r, sobre un punto A, que esté en r.

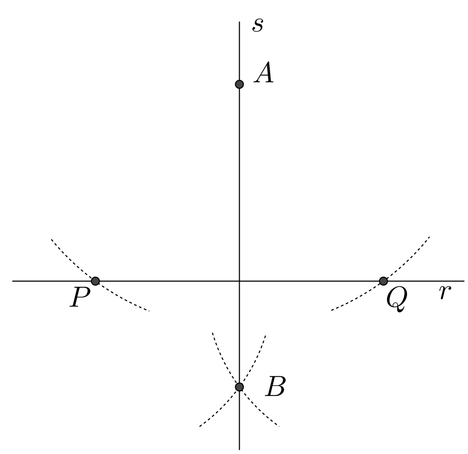
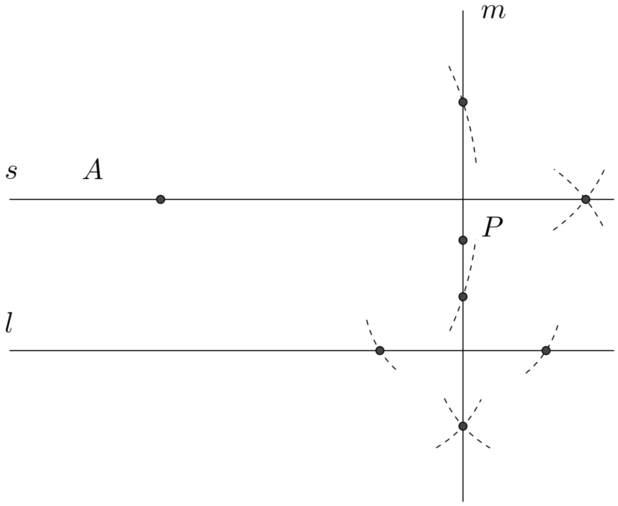


Figura 1.3

1.4. Paralela a una recta por un punto dado.

Dada una recta l y un punto A fuera de ella, la recta paralela a l y que pasa por A se construye así:



i) Escogemos un punto P, distinto de A y que no esté en l.

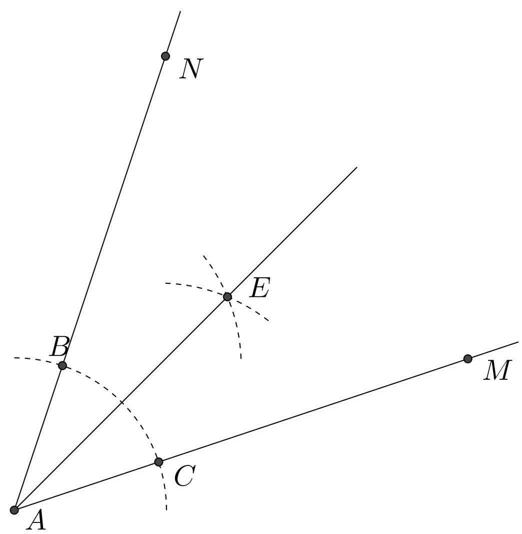
ii) Construimos la recta m perpendicular a l y que pase por P

iii) Luego construimos una recta s, perpendicular a m y que pase por A. La recta s es paralela a l.

Figura 1.4

1.5. Bisectríz de un ángulo.

Dado un ángulo NAM, su bisectriz se construye de la siguiente forma:



i) Con centro en el vértice A y cualquier radio se traza un arco para determinar los puntos B y C sobre los lados $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ del ángulo dado.

ii) Con centro en los puntos B y C se trazan arcos con la misma abertura para determinar el punto E.

iii) La recta determinada por A y E es la bisectriz del ángulo.

Figura 1.5

1.6. Construcción de un ángulo igual a uno dado.

Dado un ángulo AOB, la construcción de un ángulo igual al dado se hace así:

i) Se traza un recta s y sobre ella se ubica un punto O'

ii) Con centro en O y cualquier radio, se traza un arco para determinar los puntos P y Q sobre los lados del ángulo dado.

iii) Se transporta sobre s el segmento $\overline{OP}$, para obtener $\overline{O'P'}$ y con ese radio se traza un arco con centro en O'

iv) Sobre el arco trazado en *iii*) se transporta el segmento $\overline{PQ}$, a partir de P', para obtener el punto Q'

v) Se traza el segmento $\overline{O'Q'}$. El ángulo $Q'O'P'$ es igual al ángulo dado.

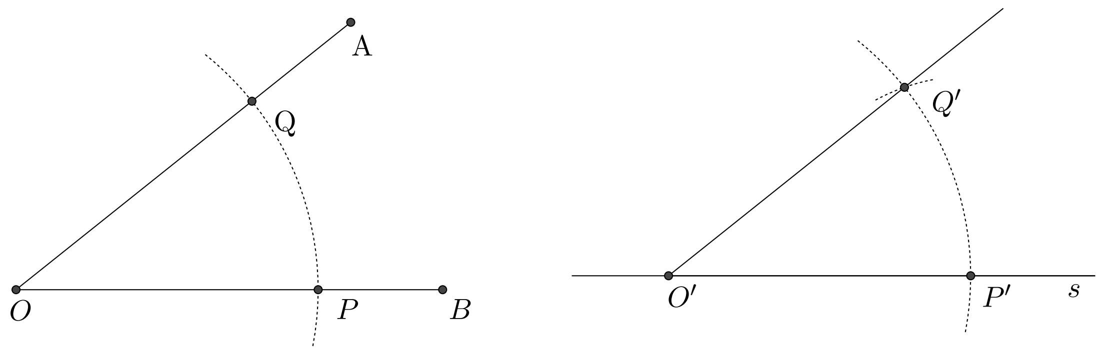


Figura 1.6

1.7. Construcción de un triángulo igual a uno dado

Dado un triángulo ABC, la construcción de un triángulo igual al dado se hace así:

i) Se traza una recta r y sobre ella se transporta el segmento $\overline{AB}$, para obtener el segmento $\overline{A'B'}$

ii) Se traza un arco con centro en A' y de radio el segmento $\overline{AC}$

iii) Se traza un arco con centro en B' y radio el segmento $\overline{BC}$

iv) El punto de intersección C' de los arcos anteriores es vértice del triángulo buscado.

El triángulo $A'B'C'$ es igual al triángulo dado.

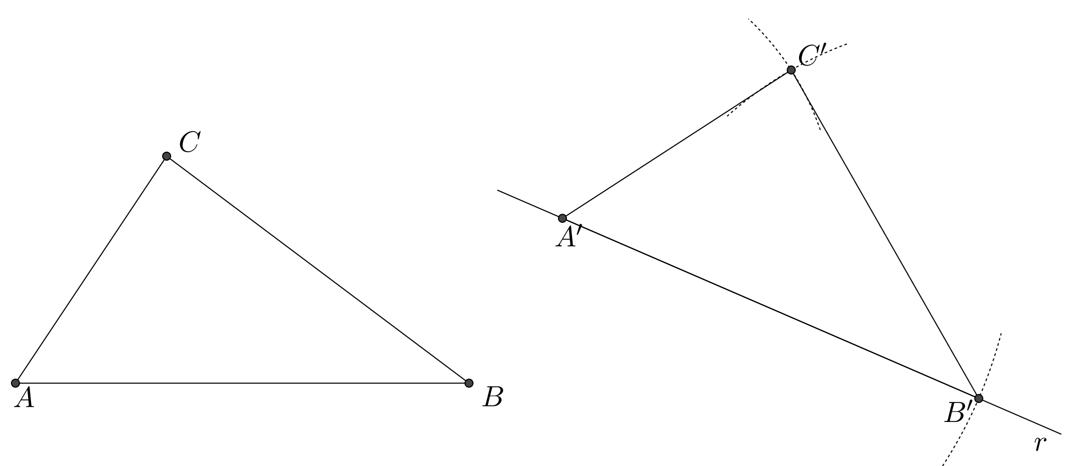


Figura 1.7

1.8. Construcción de un polígono igual a uno dado.

Dado un polígono $ABCDE$, la construcción de un polígono igual se hace así:

i) Se escoge un vértice, digamos A, del polígono dado y se trazan diagonales a los otros vértices.

ii) Se traza una recta l, sobre ella se transporta el lado $\overline{AB}$ del polígono dado para obtener el lado $\overline{A'B'}$

iii) Sobre el segmento $\overline{A'B'}$ se construye (con base en 1,7) el triángulo $A'B'C'$ igual al triángulo ABC, luego sobre $\overline{A'C'}$ se construye el triángulo $A'C'D'$ igual de ACD , y así sucesivamente.

El polígono $A'B'C'D'E'$ es igual al polígono dado.

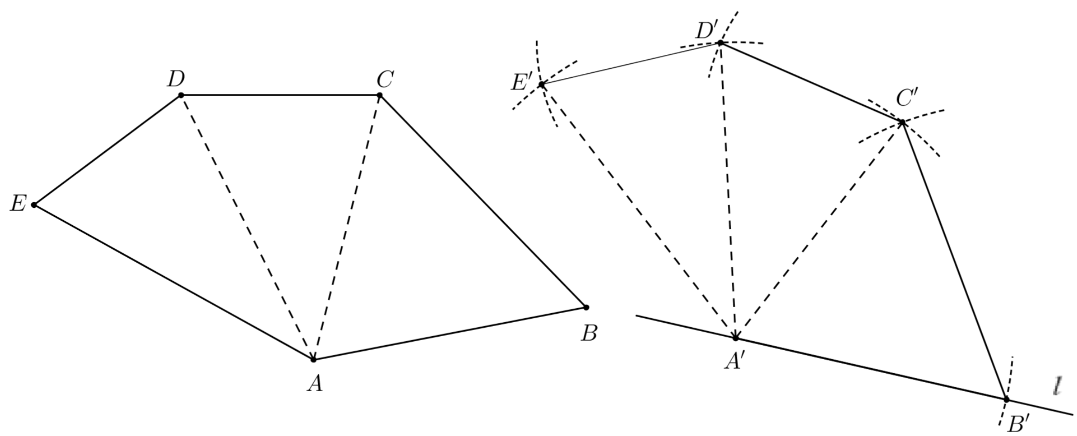
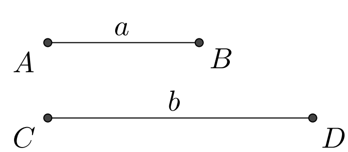


Figura 1.8

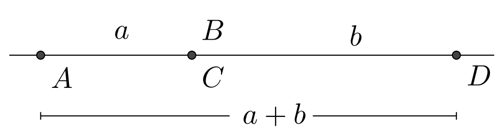
1.9. Construcción de la suma y la resta de dos segmentos

Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de longitudes a y b respectivamente la suma se construye así:



i) Sobre una recta s, transportamos el segmento $\overline{AB}$

ii) Sobre la misma recta s y a continuación de $\overline{AB}$, transportamos el segmento $\overline{CD}$.

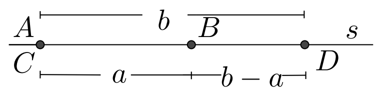


iii) El segmento $\overline{AD}$, de longitud $a + b$ es la suma de los segmentos.

La resta se construye de la siguiente manera:

i) Sobre una recta s transporte el segmento mayor $\overline{CD}$

ii) Sobre el segmento $\overline{CD}$, sobreponga el segmento $\overline{AB}$, haciendo coincidir C con A.



iii) El Segmento $\overline{BD}$ es $b - a$

1.10. La Multiplicación y la División mediante construcciones con regla y compás

Para las construcciones hechas hasta el momento no se ha necesitado establecer una unidad de medida. Para las construcciones siguientes, es necesario de antemano establecer una unidad de medida, para tal efecto cualquier segmento puede escogerse como unidad de medida.

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de longitudes a y b respectivamente y una unidad de medida, representada en el segmento $\overline{EU}$ el producto se construye así:

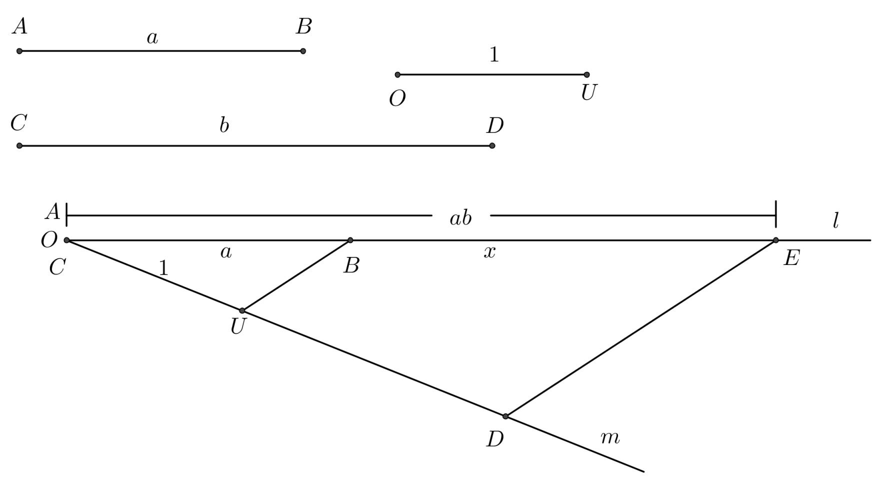


Figura 1.10.1

i) Trazamos dos rectas l y m partiendo de un punto común, digamos O

ii) Transportar sobre l el segmento $\overline{AB}$ de longitud a, de tal manera que A coincida con O.

iii) Transportar sobre m el segmento $\overline{CD}$ de longitud b, de tal manera que C coincida con O.

iv) Transportar sobre m el segmento unitario $\overline{EU}$, de tal manera que el punto E coincida con O.

v) Trazar la recta $\overline{UB}$.

vi) Trazar por D la paralela a $\overline{UB}$, para encontrar el punto F en la recta l.

vii) El segmento $\overline{AF}$ es el producto de los dos segmentos dados.

En efecto: por semejanza de triángulos se tiene que: $\dfrac{a}{1} = \dfrac{a+x}{b}$. Luego: $a + x = ab$. Osea $\overline{AF}$ es el producto de dos segmentos. Obsérvese que el segmento unitario puede transportarse sobre la recta l, obteniéndose el mismo resultado.

Para construir la división de dos segmentos se procede igual que para la multiplicación hasta la instrucción *iv*).

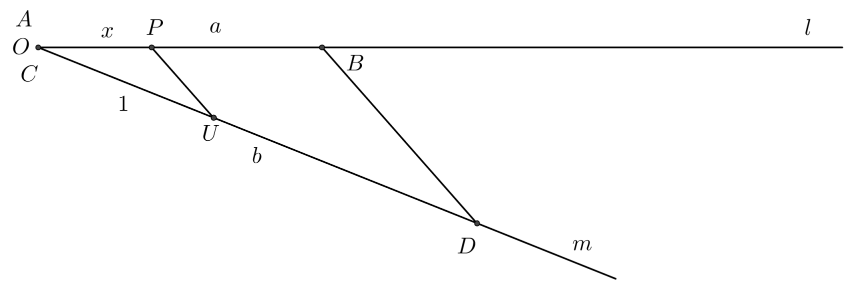


Figura 1.10.2

Seguidamente,

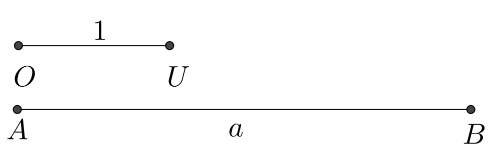
i) Trace el segmento $\overline{BD}$.

ii) Trazar por U, la paralela a $\overline{BD}$ para determinar sobre l el punto P. El segmento $\overline{AP}$ es el cociente entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

En efecto: por semejanza de triángulos se tiene que: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{b}{a}$. Luego $x = \dfrac{a}{b}$. Nótese que para construir $\dfrac{b}{a}$, debe transportarse la unidad sobre la recta l.

1.11. Construcción de la raíz cuadrada de un segmento.

Dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud a, su raíz cuadrada se construye de la siguiente forma:



i) Sobre una recta s, transportar el segmento $\overline{AB}$ y a continuación el segmento unitario $\overline{OU}$.

ii) Encontrar el punto medio M del segmento $\overline{AU}$.

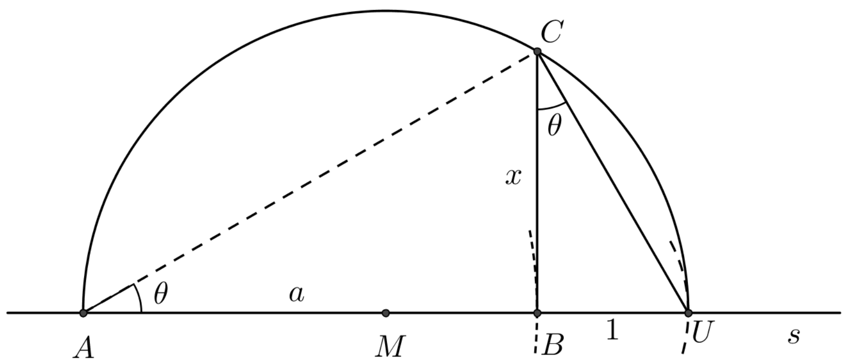


Figura 1.11

iii) Con centro en M, trazar un semicírculo de radio $\overline{AM}$.

iv) Construir la perpendicular a s por el punto B para determinar el punto C sobre el semicírculo.

v) Trazar el segmento $\overline{BC}$. Este segmento es la raíz cuadrada de $\overline{AB}$.

En efecto: los triángulos ABC y CBU son semejantes, luego sus lados correspondientes son proporcionales, o sea: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BU}}{\overline{BC}}$. Es decir, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{x}$ ó sea $x^2 = a$, así que $x = \sqrt{a}$.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS ALGEBRAICOS,TRASCENDENTES Y CONSTRUIBLES

2.1. Números Algebraicos y Trascendentes.

Un **número algebraico** es cualquier número x, real o complejo que satisface la ecuación $p(x) = 0$, donde $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros digamos

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. El número $x = \sqrt{2}$ es algebraico, pues es raíz del polinomio $x^2 - 2$; el número $x = \sqrt[3]{2}$ es algebraico porque es raíz de $x^3 - 2$.

Todo número racional es algebraico, pues si $x = a/b$ con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, x es raíz de $p(x) = bx - a$. El concepto de número algebraico, es por esta razón, una extensión del concepto de número racional.

Puede probarse que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Como el conjunto de números reales es no-numerable, existen números reales que no son algebraicos, se conocen con el nombre de números **Trascendentes.**

El término **Trascendente**, fue introducido por Leonhard Euler, para indicar que estos números trascienden al poder de los métodos algebraicos. Números como π y e son trascendentes.

2.2. Números Construibles y Cuerpos de Números.

Cada construcción con regla y compás es una sucesión de operaciones de las enumeradas a continuación:

a) Unir dos puntos con una recta.

b) Hallar el puno de intersección de dos rectas.

c) Trazar una circunferencia con centro y radio dados.

d) Hallar el puno de intersección de dos circunferencias o de una recta con una circunferencia.

Dado un segmento inicial, tomándolo como unidad, a partir de él pueden construirse otros segmentos digamos r y s. A partir de r y s pueden construirse $r+s$, $r-s$, $r\cdot s$ y r/s. Dicho de otra manera, a partir de un segmento inicial, por procesos de suma, resta, multiplicación y división puede construirse el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales.

En general, se llama **Cuerpo de Números** a todo conjunto que sea cerrado (clausurativo) con respecto a las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. $\mathbb{Q}$ Es un cuerpo de números.

La sola utilización de la regla no permite abandonar o salir de los confines de $\mathbb{Q}$. Como sabemos, $2 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pero $\sqrt{2}$ puede construirse con regla y compas. Si a $\mathbb{Q}$ se le agrega $\sqrt{2}$ obtenemos un conjunto más amplio que $\mathbb{Q}$, cuyos elementos son de la forma $a+b\sqrt{2}$ con a, b números racionales no simultáneamente nulos. Este nuevo conjunto lo notamos $Q[\sqrt{2}]$, y, es un conjunto de números, o sea cerrado para las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

En efecto: si

$$x = a + b\sqrt{2}$$
$$y = c + d\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x \pm y = & \ (a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) \\ = & \ (a \pm c) + (ad+bc)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$x \cdot y = \left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{2}\right)$$

$$= (ac+2bd)\cdot(ad+bc)\,\sqrt{2}$$

si $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} \cdot \frac{c-d\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}} \\ &= \frac{(a+b\sqrt{2})\cdot(c-d)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} = \frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2} \\ &= \frac{(ac-2bd)}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\cdot\sqrt{2} \end{aligned}$$

Obsérvese que $c^2 - 2d^2 \neq 0$, pues si $c^2 - 2d^2 = 0$, entonces $2d^2 = c^2$; $2 = c^2/d^2$; $\sqrt{2} = \left|\frac{c}{d}\right|$, lo cual contradice la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Es claro que todos los números de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ son construibles con regla y compás, sin embargo al igual que antes, la sola utilización de la regla no permite salir de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Note que $1+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ pero $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. En efecto, si $\sqrt{1+\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$, entonces $1+\sqrt{2} = a^2+2b^2+2\sqrt{2}ab$, o sea $a^2+2b^2-1 = (1-2ab)\sqrt{2}$ ó $\sqrt{2} = \dfrac{a^2+2b^2-1}{1-2ab}$ lo cual

contradice la irracionalidad de $\sqrt{2}$, pues $a, b \in \mathbb{Q}$ y $1 - 2ab \neq 0$.
En efecto: si

$$2ab = 1$$

y

$$a^2 + 2b^2 - 1 = 0$$

luego,

$$a^2 + 2\left(\frac{1}{2a}\right)^2 - 1 = 0$$

$$a^2 + \frac{1}{2a^2} - 1 = 0$$

$$2a^4 - 2a^2 + 1 = 0$$

Así que:

$$a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\,(2)\,(1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Lo cual no es posible pues $a \in \mathbb{Q}$.

Es claro que $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ puede construirse con regla y compás. El conjunto de números $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ puede ampliarse agregándole el número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ para obtener otro conjunto de números de la forma $x + y\sqrt{1+\sqrt{2}}$, donde x e y son números de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ o sea de la forma $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.

Es rutinario probar que los números del nuevo conjunto son construibles y que forman un cuerpo de números.

De manera más general, supongamos que podemos construir los elementos de un cuerpo F_0. Sea $k \in F_0$, tal que $\sqrt{k} \notin F_0$. Podemos ampliar el cuerpo F_0 a otro cuerpo F_1, adjuntándole a F_0 el número $\sqrt{k}$, o sea haciendo $F_1 = F_0[\sqrt{k}]$. Tomamos ahora un elemento $w \in F_1$ tal que $\sqrt{w} \notin F_1$. Ampliamos F_1 a otro cuerpo F_2, adjuntándole a F_1 el número $\sqrt{w}$, o sea haciendo $F_2 = F_1[\sqrt{w}]$. Los elementos de F_2 son de la forma $\alpha + \beta\sqrt{w}$ donde $\alpha, \beta \in F_1$ o sea de la forma $x + y\sqrt{k}$, donde $x, y \in F_0$.

El proceso podría continuar indefinidamente. Los cuerpos $F_1, F_2, F_3, ...$ así obtenidos se denominan **extensiones de F_0 por adjunción de raices cuadradas.**

2.3. Definición de Número Construible.

Definición 2.3.1. *Un número se dice **construible** con regla y compás si es elemento de alguna extensión de los números racionales $\mathbb{Q}$ por adjunción de raíces cuadradas.*

El número de extensiones carece de importancia, solo refleja el grado de complejidad de la construcción con regla y compás.

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento:

Ejemplo 2.3.2. *Determinar si los siguientes números son o no construibles, en caso afirmativo determinar la extensión en la cual están.*

a) $x = 2 + 3\sqrt{3}$

b) $x = 2 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

c) $x = 2 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{5}}}$

En efecto,

a) *Claramente* $2 + 3\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ *o sea que* x *está en* $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ *y es construible.*

b) *Se sabe que* $1 + \sqrt{2} \in F_1 = Q[\sqrt{2}]$, *luego* $\sqrt{1 + \sqrt{2}} \in F_1[\sqrt{k}]$ *donde* $k = 1 + \sqrt{2}$, *en consecuencia* $2 + \sqrt{1 + \sqrt{2}} \in F_1[\sqrt{k}]$. x *está en la segunda extensión de* $\mathbb{Q}$: *en la primera se adjuntó* $\sqrt{2}$ *y en la segunda* $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. *El número es construible.*

c) x *está en la tercera extensión de* $\mathbb{Q}$. *La primera extensión es:* $F_1 = Q[\sqrt{5}]$, *la segunda extensión:* $F_2 = F_1[\sqrt{k}]$; $k = 1 + \sqrt{5}$. *Finalmente, la tercera extensión:* $F_3 = F_2[\sqrt{w}]$; $w = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{5}}$, $x \in F_3$, *luego* x *es construible.*

Existe una relación de mucho interés entre los números construibles y los algebraicos: Todo número construible es algebraico. En efecto, los números racionales son raíces de polinomios de grado 1 : $\frac{r}{s}$ es la raíz de $sx - r = 0$; los números del cuerpo F_1 son raíces de polinomios cuadráticos, los números del cuerpo F_2 son polinomios de cuarto grado etc.

Hallar el polinomio del cual es raíz un determinado número construible es un procedimiento de tipo algebraico. Los ejemplos siguientes ilustran el método.

Ejemplos 2.3.3. *Hallar los polinomios de los cuales son raíces los siguientes números construibles:*

a) $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

c) $x = \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3}}}$

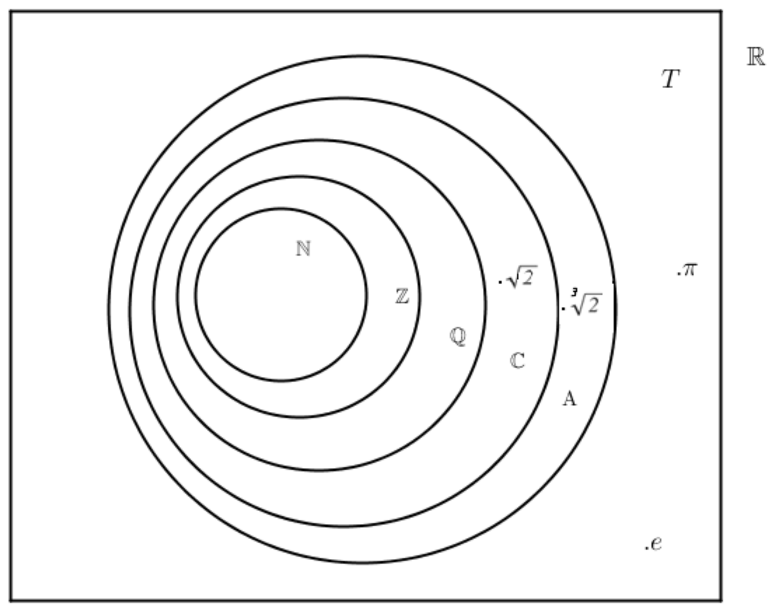
En efecto,

a) $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $x^2 = 2 + \sqrt{3}$, $x^2 - 2 = \sqrt{3}$. *Luego,* $3 = (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$; *El polinomio es:* $p(x) = x^4 - 4x^2 + 1$

b) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$; $3 = (x - \sqrt{2})^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$. *Luego:* $2\sqrt{2}x = x^2 - 1$, *entonces,* $4 \cdot 2 \cdot x^2 = (x^2 - 1)^2$, *luego:* $8x^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ *ó* $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$, *el polinomio es:* $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$

c) $x = \dfrac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{5 + \sqrt{3}}} \cdot \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{3}}}{\sqrt{5 - \sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{3}}}{\sqrt{25 - 3}} = \dfrac{\sqrt{5 - \sqrt{3}}}{\sqrt{22}}$, *luego:* $\sqrt{22}x = \sqrt{5 - \sqrt{3}}$, $22x^2 = 5 - \sqrt{3}$; $\sqrt{3} = 5 - 22x^2$, *entonces:* $3 = (5 - 22x^2)^2 = 25 - 220x^2 + 484x^4$. *El polinomio es:* $p(x) = 484x^4 - 220x^2 + 22$

2.4. Un diagrama alternativo para los Números Reales



$\mathbb{N}$: Naturales
$\mathbb{Z}$: Enteros
$\mathbb{Q}$: Racionales
$\mathbb{C}$: Construibles
A: Algebraicos
T: Trascendentes

Figura 2.4

2.5. Raices Racionales de un Polinomio.

Definición 2.5.1. *Dado un polinomio*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, a_n \neq 0$$

con coeficientes enteros, un número r (real o complejo) se llama una raíz de $p(x)$ en caso de que $p(r) = 0$.

Teorema 2.5.2. *Si el número racional $r = \frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, es raíz del polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$ entonces a es factor de a_0 y b es factor de a_n.*

Demostración: *Sin perder generalidad, podemos suponer que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible. Como $\frac{a}{b}$ es raíz de $p(x)$, entonces*

$$p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + ... + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

Osea:

$$a_0 + a_1 \cdot \frac{a}{b} + a_2 \cdot \frac{a^2}{b^2} + ... + a_{n-1} \cdot \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + a_n \cdot \frac{a^n}{b^n} = 0$$

Multiplicando esta igualdad por b^n, obtenemos

$$a_0 \cdot b^n + a_1 \cdot a \cdot b^{n-1} + a_2 \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b + a_n \cdot a^n = 0$$

Luego:

$$-a_0 \cdot b^n = a_1 \cdot a \cdot b^{n-1} + a_2 \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b + a_n \cdot a^n$$

ó

$$\frac{-a_0 b^n}{a} = a_1 \cdot b^{n-1} + a \cdot a_2 \cdot b^{n-2} + ... + a_{n-1} \cdot a^{n-2} \cdot b + a_n \cdot a^{n-1}$$

Como el lado derecho de esta última igualdad es un número entero, el lado izquierdo es tambien entero y como a y b no tienen factores comunes, a tiene que ser un factor de a_0. De manera similar se demuestra que b es un factor de a_n.

Observaciones 2.5.3.

1. *El Teorema no garantiza la existencia de raíces racionales para un polinomio $p(x)$.Por ejemplo, existen polinomios como $x^2 - 2$, que no tienen raices racionales. El Teorema solo establece qué números racionales pueden ser raíces de $p(x)$.*
2. *Cuando $p(x)$ es mónico (El coeficiente de la máxima potencia es igual a uno),las posibles raices racionales son los divisores del término independiente. Los siguientes ejemplos ilustran el teorema.*

Ejemplo 2.5.4. *Determinar si $p(x) = 5x^3 + 11x^2 - 2x - 8$ tiene o nó raices racionales.*

Para el caso: $a_0 = -8; a_n = 5$.

Los factores de -8 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

Los factores de 5 son: $\pm 1 \quad y \pm 5$

Las posibles raices racionales son:

$$\pm 1; \pm\frac{1}{5}; \pm 2; \pm\frac{2}{5}; \pm 4; \pm\frac{4}{5}; \pm 8; \pm\frac{8}{5}$$

Por división sintética:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 11 & -2 & -8 & -1 \\ & -5 & -6 & 8 & \\ \hline 5 & 6 & -8 & 0 & \end{array}$$

Luego, -1 es una raíz; además:

$$5x^3 + 11x^2 - 2x - 8 = (x+1)\left(5x^2 + 6x - 8\right)$$

Las posibles raices racionales de $5x^2 + 6x - 8$, son las mismas de antes.
Por división sintética:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & -8 & -2 \\ & -10 & 8 & \\ \hline 5 & -4 & 0 & \end{array}$$

Asi que -2 es raíz; además:

$$5x^2 + 6x - 8 = (x+2)(5x-4)$$

Luego:

$$p(x) = (x+1)(x+2)(5x-4)$$

Las raices de $p(x)$ son: $-1, -2 \quad y \quad \frac{4}{5}$.

Ejemplo 2.5.5. *Verificar si el polinomio* $p(x) = x^3 + x + 2$ *tiene o nó raices racionales. Como* $p(x)$ *es mónico las posibles raices racionales son los factores de* 2 *:* ± 1 *y* ± 2*. Por división sintética:*

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Luego, -1 *es raíz:*

$$x^3 + x + 2 = (x+1)\left(x^2 - x + 2\right)$$

Las posibles raices de $x^2 - x + 2$*, son de nuevo* ± 1 *y* ± 2*, pero ningun valor anula el polinomio. En conclusión* $p(x)$ *solo tiene una raíz racional:* -1*.*

2.6. Un resultado para Polinomios cúbicos.

Dos de los tres problemas clásicos griegos se resuelven fácilmente por medio de un resultado que enunciaremos a continuación referente a polinomios cúbicos. Es claro que si un polinomio de grado tres tiene una raíz racional, entonces sus tres raíces son construibles con regla y compás, pues en cualquier caso las raíces de un polinomio cuadrático (sean reales ó complejas) son construibles.

El resultado es el siguiente: **si un polinomio cúbico con coeficientes racionales no tiene raíces racionales, ninguna de sus raíces es construible con regla y compás.**

Aunque la prueba de éste resultado solo utiliza algunas propiedades de las raíces de los polinomios cúbicos, no se incluye en el presente trabajo.

2.7. Imposibilidad de llevar a cabo algunas construcciones.

2.7.1. La duplicación del cubo.

Dado un cubo de lado 1, duplicarlo consiste en construir con regla y compás un cubo de volumen 2; si x es el lado del nuevo cubo, deberá tenerse

$$x^3 = 2$$

El problema se reduce a verificar si el polinomio $p(x) = x^3 - 2$ tiene o no raíces racionales. Las posibles raíces de $p(x)$ son ± 1 y ± 2, como $p(\pm 1) \neq 0$, $p(\pm 2) \neq 0$, $p(x)$ no tiene raíces racionales; ninguna de sus raíces es construible con regla y compás y la duplicación del cubo es imposible.

2.7.2. La trisección de un ángulo.

La construcción de un ángulo con regla y compás está estrechamente relacionada con la construcción de sus funciones trigonométricas. De hecho si θ es construible con regla y compás también lo son sus funciones trigonométricas y recíprocamente.

Dado lo anterior, la trisección de un ángulo θ puede remitirse a la construcción de $\cos\dfrac{\theta}{3}$.

Usando la identidad de Euler,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

Válida para $n \geq 1$, cuando $n = 3$, conduce a la igualdad:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Desarrollando el cubo, e igualando parte real e imaginaria de los complejos que resultan se obtienen las identidades

$$\begin{aligned} \cos 3\theta = & \ 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = & \ 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{aligned}$$

Cambiando θ por $\dfrac{\theta}{3}$ en la primera de estas identidades obtenemos la fórmula

$$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$$

La imposibilidad de trisectar un ángulo cualquiera θ, queda establecida demostrando la imposibilidad de trisectar un ángulo en particular.

Ejemplo 2.7.1. ***Imposibilidad de Trisectar el ángulo de 60˚***

Cuando $\theta = 60°$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, *haciendo* $z = \cos\dfrac{\theta}{3} = \cos 20°$, *la ecuación anterior toma la forma*

$$\frac{1}{2} = 4z^3 - 3z \quad ó \quad 8z^3 - 6z - 1 = 0$$

El cambio de variable $v = 2z$, *transforma la última ecuación en*

$$v^3 - 3v - 1 = 0$$

Las posibles raíces racionales de $p(v) = v^3 - 3v - 1$ *son* ± 1, *pero*

$$\begin{aligned} p(1) &= -3 \neq 0, \\ p(-1) &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces $p(v)$ *no tiene raíces racionales, luego ninguna de sus raíces es construible con regla y compás, luego es imposible construir* v, *lo mismo ocurre con* z *y el ángulo de 60˚ no puede trisectarse.*

Ejemplo 2.7.2. ***Imposibilidad de Trisectar el ángulo de 30˚***

Como $\cos 30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *la ecuación correspondiente es*

$$4z^3 - 3z = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El cambio de variable, $u = \sqrt{3}$, la transforma en

$$8u^3 - 18u - 9 = 0$$

Si llamamos $v = 2u$, obtenemos

$$v^3 - 9v - 9 = 0$$

Las posibles raíces racionales de $p(v) = v^3 - 9v - 9$ son ± 1, ± 3 y ± 9, pero ninguno de estos valores anula el polinomio. Luego ninguna raíz de $p(v)$ es construible y en consecuencia la trisección del ángulo de 30˚ no es posible.

2.8. La cuadratura del círculo.

Los problemas de la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo pueden resolverse por métodos relativamente elementales. Este no es el caso de la cuadratura del círculo. Como este problema exige la construcción de un cuadrado con la misma área del círculo, el asunto se reduce a la construcción del número real $\sqrt{\pi}$. Además es claro que si π es construible, $\sqrt{\pi}$ también es construible.

La imposibilidad de construir a π, se establece demostrando que el número π no es algebraico, o sea, probando que π es trascendente.

El matemático *Charles Schmidt* (1822 – 1905) ideó una técnica por medio de la cual probó que e es trascendente. El matemático *F. Lindeman* perfeccionó la prueba de Schmidt y en 1882 probó la Trascendencia de π, resolviendo para siempre el problema de la cuadratura del Círculo. Ver [Herstein, I.N. (1964). Álgebra Moderna. Ed. Trilleras S.A.]

2.9. Una Aproximación para π.

Existen varias formas de conceptualizar el número π para las personas que inician su formación en Matemáticas. Algunas de ellas son las siguientes:

- El límite de la sucesión formada por los perímetros de los polígonos regulares inscritos (ó circunscritos) a una circunferencia de radio 1 es 2π.
- En todas las circunferencias, se verifica que el cociente entre su longitud y su diámetro siempre es el mismo. Este guarismo común se representa con el número π.
- π es el área del círculo de radio 1.
- π es un número especial cuyo valor aproximado es $3,14$ ó $\frac{22}{7}$.

Existen muchas formas de representar a π, algunas son las siguientes:

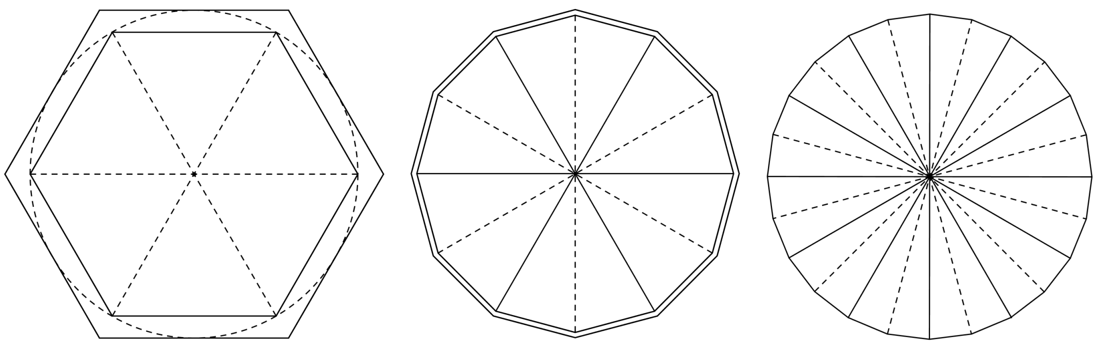
- $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$
- $\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...\right)$
- $\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2+\frac{9}{2+\frac{25}{2+...}}}$
- $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

- $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}$ (Producto de J. Wallis)

Arquímedes, usando el Método de Exhaución, estableció la relación:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

El procedimiento es el siguiente:
Dada una circunferencia de radio 1, se inscribe y circunscribe en ella un hexágono regular; por bisección de los ángulos centrales se obtienen polígonos inscritos y circunscritos de 12, 24, 48 y 96 lados. Se toma como una aproximación de 2π, el perímetro del polígono inscrito ó circunscrito de 96 lados.



Hexágono $\qquad$ $12 - \acute{a}gono$ $\qquad$ $24 - \acute{a}gono$

Figura 2.9.1

Para facilitar los cálculos se establecen fórmulas que relacionen los lados del polígono de n lados con el polígono de $2n$ lados. El lado del polígono inscrito de n lados se denota como S_n y el lado del polígono circunscrito de n lados se denota como t_n
Esta nomenclatura permite escribir que para todo $n \geq 6$,

$$n \cdot S_n < 2\pi < n \cdot t_n.$$

Relación entre S_n y S_{2n}:

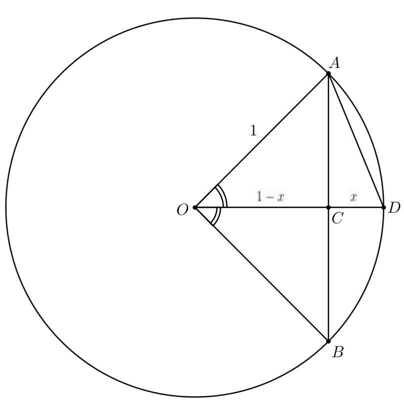


Figura 2.9.2

Llamando $AB = S_n$; AOB es el ángulo central correspondiente a S_n; al bisectarlo aparecen los ángulos (iguales) AOD y DOB, de manera que S_{2n} es AD. Si $x = CD$ entonces $OC = 1 - x$
Los triángulos ACO y ACD son rectángulos, luego:
$\overline{OA}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{AC}^2$ $\quad y \quad$ $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$

Haciendo los reemplazos corespondientes se obtiene:

$$1 = (1-x)^2 + \frac{1}{4}S_n^2 \quad ; \quad S_{2n}^2 = \frac{1}{4}S_n^2 + x^2$$

Resolviendo éstas dos ecuaciones para x, se obtiene

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}}$$

fórmula que permite calcular el lado del $2n$-ágono inscrito, conociendo el lado del n-ágono. Como Arquímedes empezó con el hexágono regular, entonces: $S_6 = 1$. Cálculos directos proporcionan:

$$S_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4-1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}517638$$

$$S_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0{,}517638)^2}} = 0{,}261052$$

$$S_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0{,}261052)^2}} = 0{,}130806$$

$$S_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0{,}130806)^2}} = 0{,}065438$$

Relación entre t_n y t_{2n}

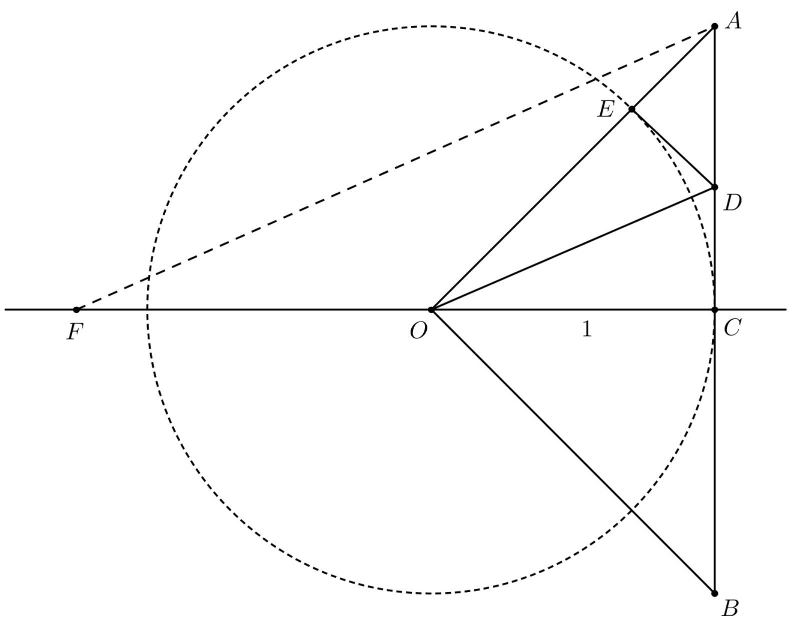


Figura 2.9.3

De la figura adjunta se tiene:

$$AB = t_n \quad ; \quad ED = \frac{1}{2}t_{2n} = DC$$

OD: bisectriz de AOC.

La recta AF se ha trazado de manera que sea paralela a DO.
Además:

$$\angle EOD = \angle DOC$$

$$\angle EOD = \angle FAO$$

$$\angle DOC = \angle AFO$$

Luego: $\angle AFO = \angle FAO$, en consecuencia el triángulo AOF es isósceles y entonces $FO = OA$. Como los triángulos DCO y ACF son semejantes, entonces:

$$\frac{DC}{OC} = \frac{AC}{FC};\ como\ FC = FO + 1,\ entonces$$

$$\frac{DC}{OC} = \frac{AC}{1+FO};\ como\ OC = 1\ y\ FO = OA,\ entonces$$

$$DC = \frac{AC}{1+OA};\ como\ DC = \frac{1}{2}t_{2n},\ AC = \frac{1}{2}t_n$$

entonces:

$$\frac{1}{2}t_{2n} = \frac{\frac{1}{2}t_n}{1+OA} \text{ ó } t_{2n} = \frac{t_n}{1+OA}$$

Pero:

$$\overline{OA}^2 = 1 + \overline{AC}^2 \text{ ,ó}$$

$$\overline{OA}^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}t_n\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}t_n^2 = \frac{4+t_n^2}{4}$$

Luego

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{4+t_n^2}}{2}$$

Entonces:

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1+\frac{\sqrt{4+t_n^2}}{2}} = \frac{2t_n}{2+\sqrt{4+t_n^2}}$$

Finalmente: $t_{2n} = \frac{2t_n}{2+\sqrt{4+t_n^2}}$, fórmula que permite calcular el lado del $2n$-ágono circunscrito, conocido el lado del n-ágono.

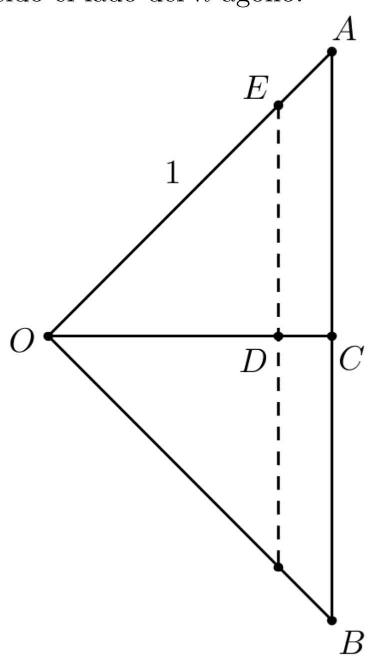


Figura 2.9.4

Para el caso del hexágono se tiene que:

$$OD = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad AB = t_6 \quad , \quad AC = \frac{1}{2}t_6$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ED}{OD} \text{ ,} como,\ ED = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}t_6 = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} \text{ ,ó } sea,\ t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Cálculos directos dan:

$t_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}154700$

$t_{12} = \frac{2\times 1{,}154700}{2+\sqrt{4+(1{,}154700)^2}} = 0{,}535898$

$t_{24} = \frac{2\times 0{,}535898}{2+\sqrt{4+(0{,}535898)^2}} = 0{,}263305$

$t_{48} = \frac{2\times 0{,}263305}{2+\sqrt{4+(0{,}263305)^2}} = 0{,}131087$

$t_{96} = \frac{2\times 0{,}131087}{2+\sqrt{4+(0{,}131087)^2}} = 0{,}065473$

Como: $96S_{96} < 2\pi < 96t_{96}$, entonces:

$$96 \times 0{,}065438 < 2\pi < 96 \times 0{,}065473$$

O sea:

$$3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$$

Como:

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857...$$

$$\frac{223}{71} = 3{,}140845...$$

Redondeando el valor de π a dos cifras decimales $\pi = 3{,}14$ podemos escribir

$$\pi = \frac{223}{71}\ ,\ \text{ó},\ \pi = \frac{22}{7}$$

Es perfectamente, entendible por qué tomar como π la fracción $\frac{22}{7}$ y no $\frac{223}{71}$.

CAPÍTULO 3

CONSTRUCCIONES NEUSIS

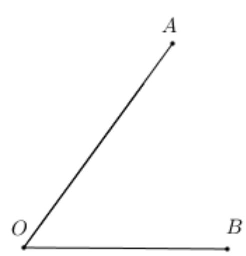
3.1. Trisección del ángulo.

La trisección de un ángulo es uno de los tres problemas clásicos de la matemática griega. Aunque, teóricamente es imposible trisectar un ángulo utilizando únicamnete regla y compás, si existen procedimientos que permiten hacerlo. Todas estas construcciones se logran dando un poco más de libertad en el uso de la regla y el compás. Se conocen con el nombre genérico de construcciones Neusis. En estas construcciones es permitido por ejemplo, usar la regla para medir, trasladar rectas, rotar rectas o colocarlas en una determinada posición.

Presentamos a continuación tres formas de trisectar un ángulo.

3.2. Trisección de Arquimedes.

La construcción es como sigue: AOB: ángulo dado.



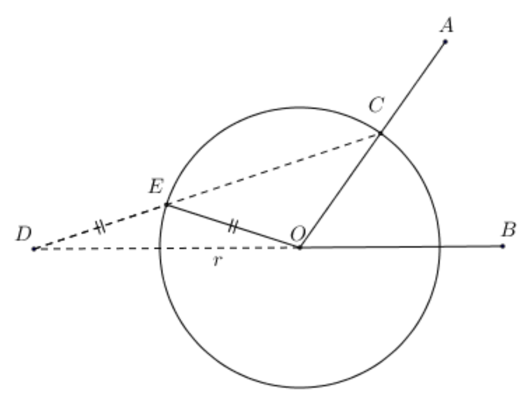


Figura 3.2.1

i) Prolongar el lado inicial OB, para obtener la recta DB.

ii) Trazar, con centro en O, una circunferencia de radio arbitrario r. Esta circunferencia corta al lado terminal del ángulo en un punto C.

iii) Con la regla, marque un segmento DE de longitud r.

iv) Coloque el segmento marcado en la regla $r = ED$ de tal manera que D quede en la prolongación de OB, E quede en la circunferencia y los puntos D, E y C sean colineales. El ángulo CDO es la tercera parte de AOB.

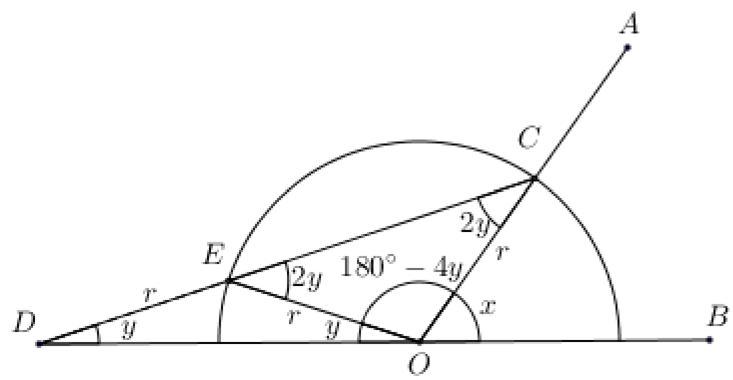


Figura 3.2.2

En efecto:

$$x = \angle AOB$$

$$y = \angle EDO$$

El triángulo EDO es isósceles, luego $\angle EOD = y$, El triángulo EOC es isósceles,luego $\angle CEO = \angle ECO$. Además: $\angle CEO = 2y$: en todo triángulo el suplemento de uno de sus ángulos es igual a la suma de sus otros dos ángulos.

Luego:

$$\angle EOC = 180^\circ - 4y$$

.

Finalmente: $y + 180^\circ - 4y + x = 180^\circ$ o sea $x - 3y = 0$, así que $y = \frac{1}{3}x$

3.3. Trisección usando el Tomahawk.

El Tomahawk es un instrumento diseñado exclusivamente para trisectar ángulos. Su nombre es tomado por su similitud con una herramienta usada por algunas tribus indígenas de Norteamérica en sus actividades cotidianas.

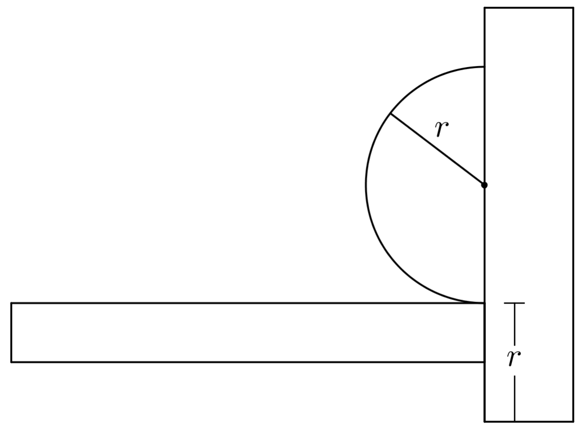


Figura 3.3.1

El Tomahawk consiste en un semicírculo de cualquier radio instalado en una escuadra fija en forma de T. El lado más largo de la escuadra hace las veces del mango o agarradera del Tomahawk; puede tener cualquier longitud y anchura. El lado más corto de la escuadra debe medir r, el radio de la circunferencia.

La trisección de un ángulo se logra de la siguiente forma:

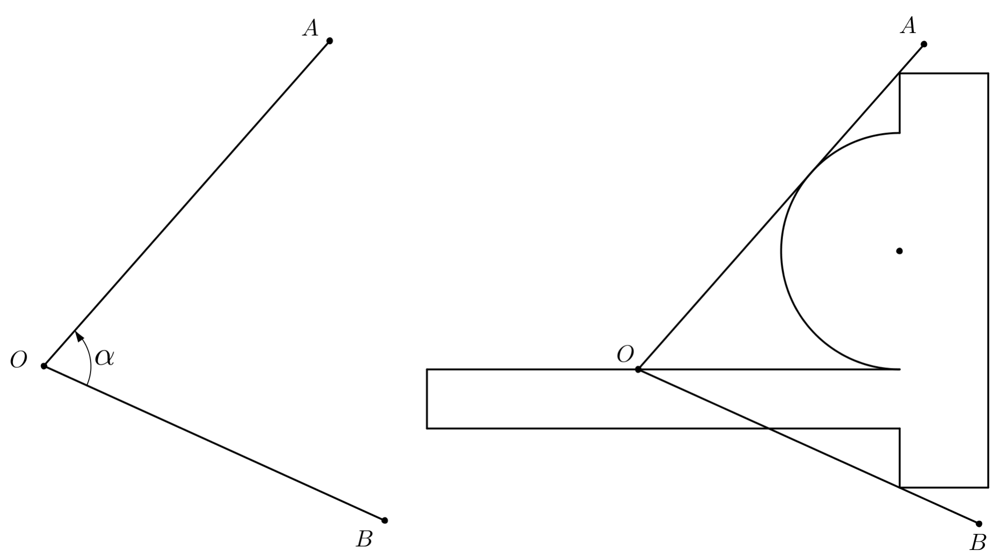


Figura 3.3.2

Sea AOB el ángulo que quiere trisectarse; colóquese el Tomahawk de tal manera que el borde superior de la agarradera pase por el vértice del ángulo, la parte circular sea tangente al lado OA y la parte inferior de la escuadra sea tangente al lado OB. El ángulo que forma el borde superior del mango con el lado OB es la tercera parte de α.

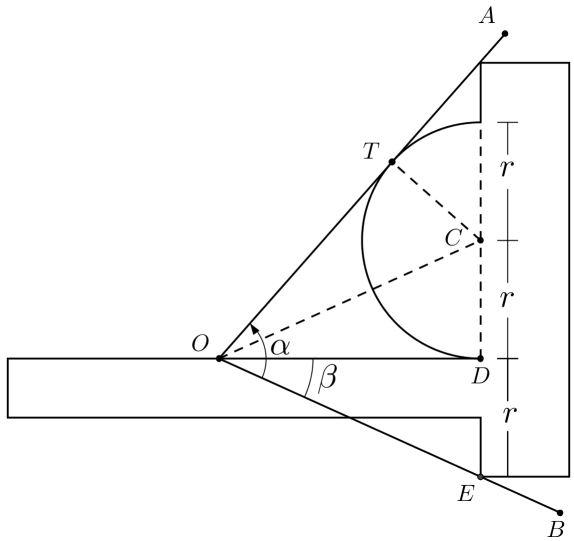


Figura 3.3.3

En efecto: trazamos la recta OC y la recta TC. El triángulo ODE es congruente con ODC porque ambos son rectángulos y sus catetos son iguales.

El triángulo ODC es congruente con OCT porque ambos son rectángulos y comparten la hipotenusa y un cateto.

En resumen los tres triángulos ODE, ODC y OCT son congruentes; luego:

$$\angle TOC = \angle COD = \angle DOE = \beta$$

Como $\alpha = \angle DOE + \angle COD + \angle TOC = \beta + \beta + \beta = 3\beta$, así que $\beta = \dfrac{1}{3}\alpha$.

3.4. Otra trisección Neusis de un ángulo: (Pappus)

Sea AOB el ángulo que quiere trisectarse.

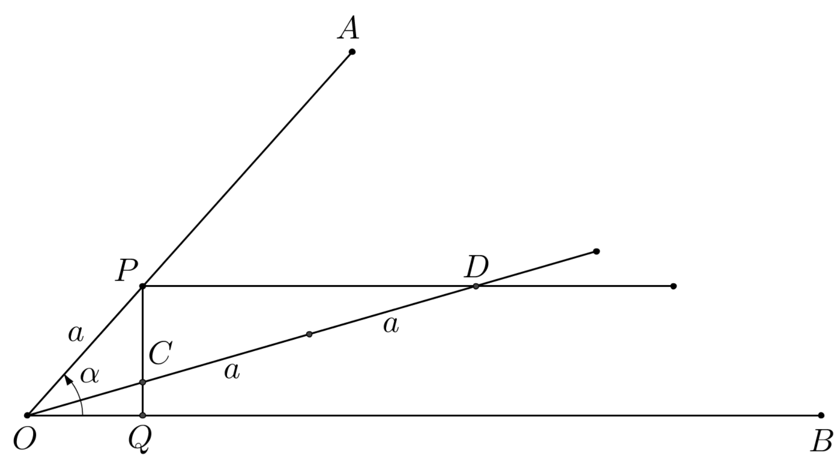


Figura 3.4.1

Escójase un punto P del lado OA y sea a la longitud de OP

Trácense por P una perpendicular y una paralela al lado OB. La perpendicular cortará al lado OB en un punto Q.

Márquese en una regla un segmento de longitud $2a$ y colóquelo entre la perpendicular y la paralela trazadas antes de manera que los extremos de este segmento y el vértice O del ángulo sean colineales. Esta construcción (Neusis) determina el segmento OD. El ángulo DOB es la tercera parte de α.

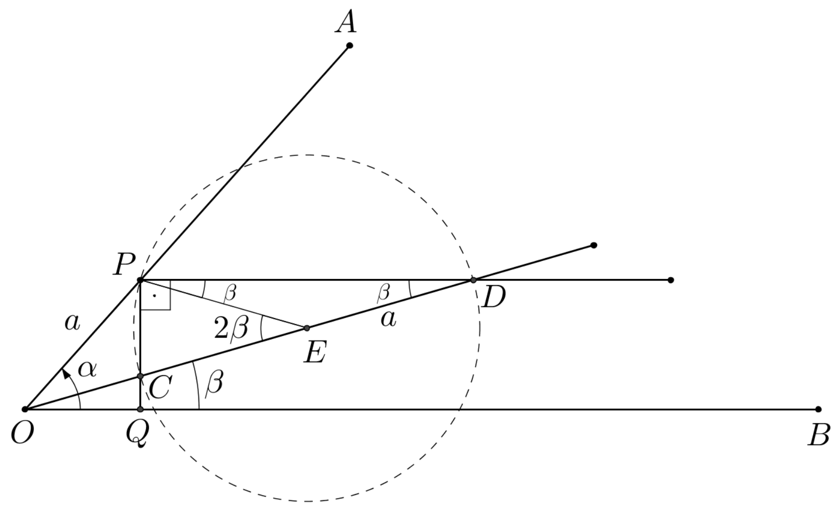


Figura 3.4.2

En efecto, con centro en E (punto medio de CD) trácese una circunferencia de radio a. Trácese también el segmento PE. Llamemos β al ángulo DOB.

Como CD es diámetro de la circunferencia y en P hay ángulo recto, P es un punto de circunferencia, así que el segmento EP vale a. Luego el triángulo PED es isósceles, como $\angle EOB = \angle PDE = \beta$, entonces $\angle DPE = \beta$, además $\angle PEC = \beta + \beta = 2\beta$. Como el triángulo POE es isósceles, entonces $\angle POE = 2\beta$, luego: $\angle AOB = \angle POE + \angle EOB$ o sea $\alpha = 2\beta + \beta = 3\beta$. Así que $\beta = \dfrac{1}{3}\alpha$.

3.5. Duplicación clásica del cubo.

La duplicación del cubo fue resuelta por los griegos a través de una armazón conformada por las siguientes partes, como se describe a continuación:

a) Una escuadra en forma de L digamos NZM, la cual debe estar provista de dos ranuras a lo largo de sus lados.

b) Una cruz en ángulo recto B, digamos VW y PQ. Uno de los brazos de la cruz debe tener una ranura central.

c) Dos varillas RS y TU, provistas de un dispositivo que les permita deslizarse a lo largo de los lados de la escuadra y perpendicularmente a ellos.

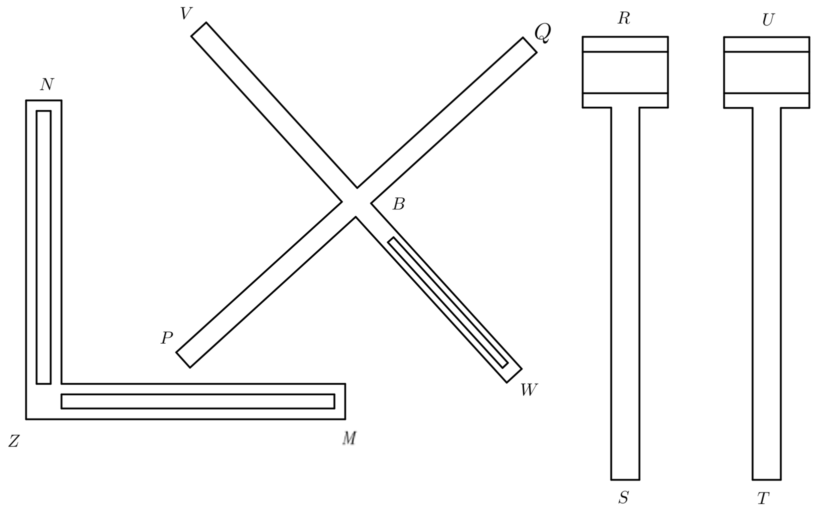


Figura 3.5.1

Dado el cubo de lado a, el cual quiere duplicarse, proceder de la siguiente forma:

i) Sobre el lado BP de la cruz marcar el segmento $BG = a$

ii) Sobre el lado BV de la cruz marcar el segmento $BE = 2a$

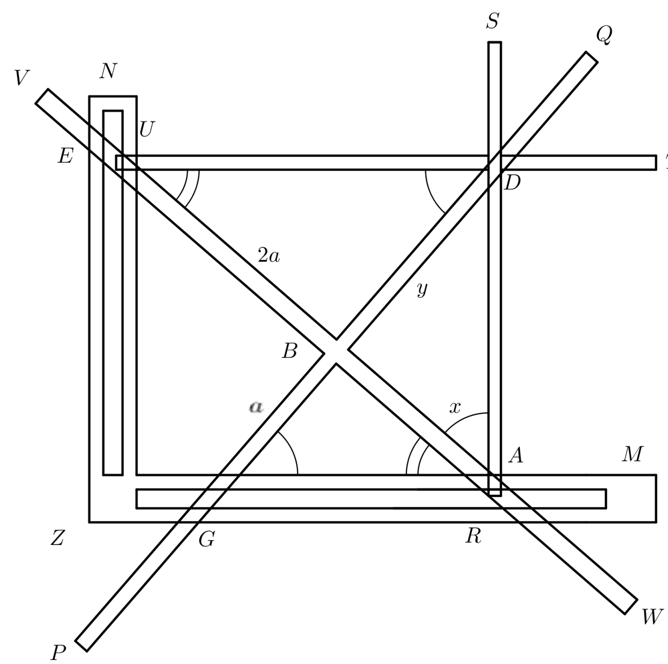


Figura 3.5.2

iii) Colocar la cruz de modo que los puntos E y G queden sobre los lados del ángulo recto (escuadra) y deslizando las varillas TU y RS la armazón completa puede situarse de manera que se obtenga el rectángulo $ADEZ$, por cuyos vértices pasan los brazos de la cruz. Esta posición siempre es posible conseguirla porque $2a > a$. Los ángulos BGR y EDB son iguales porque son alternos internos entre paralelas.

En conclusión: los triángulos rectángulos GBR, RBD y EBD son semejantes. Pueden por tanto escribirse las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

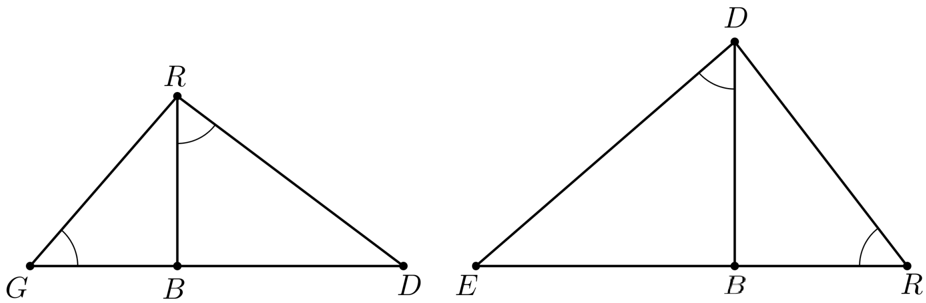


Figura 3.5.3

De las dos primeras, se obtiene $y = \frac{x^2}{a}$; de las dos últimas $y^2 = 2ax$. Luego: $2ax = \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = \frac{x^4}{a^2}$ ó sea $x^3 = 2a^3$, esta igualdad significa que x es el número que duplica el volumen de un cubo de lado a.

CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo de grado nos permite formular las siguientes conclusiones:

1. Las construcciones con regla y compás son fundamentales para el desarrollo no solo de la Geometría sino tambien de la Trigonometría y el Cálculo.

2. El trabajo pone de presente la posibilidad de llevar al aula de clase, en nuestro ejercicio profesional, algunas construcciones con regla y compás dentro de las actividades curriculares planteadas para la educación básica en geometría elemental.

3. Las construcciones con regla y compás permiten una conceptualización más asequible de nociones matemáticas que requieren un grado de abstracción considerable como son: número algebraico, construible, trascendente y extensión de cuerpos.

4. Es un hecho historicamente importante conocer como los propios griegos resolvieron los tres problemas clásicos, ante la imposibilidad de hacerlo solo con la regla y el compás sujetos a las restricciones que conocemos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Asger Aaboe., *Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.* Biblioteca de Matemática Contemporanea. Ed. Norma.

[2] C. H. Edwards Jr. , *The Historical Development of the Calculus* . Ed. Springer Verlag.New York, 1979.

[3] Charles H. Lehmann, *Geometría Analítica.* Ed. Limusa, México 2007.

[4] Howard E. Taylor, Thomas L. Wade, *University Calculus and Subsets of the Plane*

[5] H. Rademacher, O. Toeplitz, *Números y Figuras*, Alianza Editorial, Madrid, 1970.

[6] R. Courant, H. Robbins, *Qué es la Matemática?*, Ed. Aguilar, Madrid 1979.

[7] S. R. Clemens, *Geometría.* Ed. Pearson, México, 1998

[8] T.M. Apostol, *Calculus* , Ed. Reverté.