



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

La Yupana, como material didáctico en el desarrollo de operaciones básicas matemáticas en los grados segundo y tercero de educación básica primaria.

Arledy Yurany Aroca Escobar
Kelly Yohana Lasso Avilés

Neiva, Huila
2016



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en
Matemáticas

La Yupana, como material didáctico en el desarrollo de operaciones básicas matemáticas en los grados segundo y tercero de educación básica primaria.

Trabajo presentado como requisito para optar el título de:

Licenciada en Matemáticas

Arledy Yurany Aroca Escobar
2008172660

Kelly Yohana Lasso Áviles
2009181061

Asesor:
MSc. Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2016

CAPÍTULO 1

AGRADECIMIENTOS

Primeramente gracias a Dios, el creador de todas las cosas que nos ha dado fortaleza para continuar cuando a punto de caer hemos estado, gracias por permitirnos llegar a este momento tan especial en nuestras vidas.

Gracias a la Universidad Surcolombiana por abrirnos, las puertas y habernos hecho parte de ella para poder estudiar nuestra carrera profesional, así como también a los diferentes docentes que nos brindaron sus conocimientos y su apoyo para seguir adelante día a día.

Agradecemos al MGs Mauricio Penagos, nuestro asesor de trabajo de grado por darnos la oportunidad de recurrir a sus capacidades y conocimientos, de igual forma habernos tenido la paciencia para guiarnos durante todo el proceso del desarrollo del presente trabajo de grado, pues él ha inculcado en nosotras un sentido de seriedad, responsabilidad y perseverancia.

Inmensos agradecimientos a nuestra familia, especialmente a nuestros padres que nos han sabido formar con buenos sentimientos valores y hábitos, sus sacrificios para apoyarnos incondicionalmente fueron vitales para culminar esta etapa importante en nuestras vidas.

Para finalizar queremos agradecer a nuestros amigos, ya que gracias al equipo que formamos, rodeado de trabajo y momentos especiales, logramos llegar hasta final de este camino.

A ustedes nuestro mayor reconocimiento y gratitud.

1. Agradecimientos	3
2. Presentación	6
Presentación	6
Objetivos	8
Justificación	9
3. Formulación y descripción del problema	10
Formulación y descripción del problema	10
3.1. Antecedentes	11
4. Marco Teórico	13
Marco Teórico	13
4.1. Referente Teórico	13
4.2. Funciones del Material Didáctico	14
4.3. Importancia del Material Didáctico	14
4.4. La YUPANA	14
4.4.1. Etimología	14
4.4.2. Definición	15
4.4.3. Bases Históricas de la Yupana	16
4.4.4. Yupana en la Actualidad	17
4.4.5. Yupana y Quipus	18
4.5. Estándares básicos de competencias en matemáticas	19
4.5.1. Competencias para los grados segundo y tercero	20
4.5.2. Desempeños e indicadores de desempeños	21
5. Aplicaciones de la Yupana como material didáctico	23

Aplicaciones de la Yupana como material didáctico	23
5.1. El Modelo de la Yupana	23
5.2. Representación de números con la Yupana	24
5.3. Orden y comparación de números naturales	25
5.3.1. Números hasta al 99	27
5.3.2. Números hasta 999	27
5.3.3. Números hasta 9.999	28
5.3.4. Números hasta 99.999	28
5.3.5. Comparación de números de dos, tres, cuatro, cinco cifras en la Yupana.	29
5.4. OPERACIONES BÁSICAS (Adición, Sustracción, Multiplicación y División) .	29
5.4.1. Ejemplos de adiciones (<i>sin llevar</i>)	29
5.4.2. Ejemplos de adiciones (<i>llevando</i>)	32
5.4.3. Ejemplos de sustracciones (<i>sin prestar</i>)	34
5.4.4. Ejemplos de sustracciones (<i>prestando</i>)	35
5.4.5. Ejemplos de Multiplicación	37
5.4.6. Ejemplo de divisiones	40
6. Experiencias Significativas con la YUPANA	43
Experiencias Significativas con la YUPANA	43
6.1. Lectura y Escritura de Números	43
7. Recursos	60
Recursos	60
7.1. Recursos Humanos	60
7.2. Recursos Materiales	60
8. Conclusiones	61
Conclusiones	61
1. Anexos 1	62
Anexos 1	62
2. Anexos 2	70
Anexos 2	70
Bibliografía	78

CAPÍTULO 2

PRESENTACIÓN

Para la elaboración de este trabajo de grado se ha partido de la premisa que es evidente la necesidad que hay de utilizar insumos o materiales didácticos, ya que generan experiencias fundamentales para el desarrollo de nuevos conocimientos que se adquieren por medio de la práctica y que orientan al educando hacia los procesos de enseñanza-aprendizaje. Según Ausubel (1983), el aprendizaje significativo está basado en la experiencia, que depende de los conocimientos previos que se toman como punto de apoyo para construir nuevos conocimientos.

*“Entendemos como aprendizaje significativo la posibilidad de establecer relaciones sustantivas y no arbitrarias entre el nuevo material a aprender y lo que ya se sabe, lo que se encuentra presente en la estructura cognoscitiva de cada estudiante”*¹. En el área de matemáticas, se hace referencia a aquellos procesos significativos donde es necesario recurrir a los diversos materiales didácticos, con el objetivo de facilitar dicho aprendizaje. El material que el docente presente ante el educando debe estar enfocado en lo que se va a impartir, para que se logre dar una construcción de conocimientos a partir de conceptos previos que el niño debe poseer, y así, pueda comprender las nuevas nociones.

Por otro lado, los fines de la educación están cambiando. Actualmente, la educación tiene por objetivo el crecimiento integral del niño en diferentes aspectos como son el cognitivo, emocional y social, por ende, el currículo escolar como la metodología empleada tendrán que adecuarse a las características psicológicas del niño. En concreto, en el campo de las Matemáticas la enseñanza ha de ser lógica y razonada, muy lejos de ser mecánica y memorística como la enseñanza tradicional, (sin olvidar que se trata de una etapa de Educación Primaria), es por eso que “la Yupana” también conocida como “el ábaco Inca” proporciona al docente recursos que promueven los aprendizajes significativos en los estudiantes.

Por ende, con el presente trabajo se busca dar a conocer la Yupana como un material didáctico, con el cual se puede facilitar el desarrollo de habilidades matemáticas: representaciones, orden y comparación de números naturales, y las operaciones básicas en los grados segundo y tercero de primaria; pues permite aumentar la atención y la concentración, al promover el razonamiento lógico, imaginación, percepción, creatividad, lenguaje matemático,

¹David Ausubel, (1983). Teoría del aprendizaje significativo.

memorización; apoyar y fortalecer los hábitos de estudio en los niños de la escuela.

Para mejorar los métodos de enseñanza matemática es necesario buscar alternativas, explorar nuevos materiales didácticos, que se puedan construir desde casa. La Yupana es asequible a todo aquel que desee tenerla y darle un uso orientado en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que se puede elaborar en cartón, foami, madera o incluso en material reciclable, fácil de pegar, cortar y pintar; por tanto, es perfecta y útil si lo que se pretende es armonizar el entorno de enseñanza, generar espacios activos y de participación, donde interactúen el docente y el educando en la construcción de nuevos conocimientos.

Objetivo General

- Presentar la Yupana como un material didáctico de apoyo que permite potencializar en los estudiantes de los grados segundo y tercero de básica primaria, la realización de operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números naturales.

Objetivos Específicos

- Reconocer la Yupana como una herramienta didáctica que facilita la labor del docente en la clase de matemáticas.

- Conocer el manejo de la Yupana y aprender a realizar operaciones básicas como la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales, al igual que el valor posicional de los guarismos que componen un número natural.

- Mostrar a los docentes una guía de trabajo, utilizando la Yupana como herramienta didáctica en la clase de matemáticas, de manera que se fortalezca su desempeño en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

JUSTIFICACIÓN

En atención a lo anterior, con el desarrollo de este trabajo se quiere mostrar la utilización de este ábaco Inca para la enseñanza- aprendizaje de las operaciones básicas matemáticas. Es vital incluir la didáctica en la enseñanza de las matemáticas, pues muchas veces los docentes tienen la mejor intención de enseñar matemática pero no cuentan o desconocen materiales de apoyo pertinentes que les sirvan de guía para este proceso. Para corregir estas falencias, es importante y necesario hacer uso de materiales didácticos, con el fin de incentivar al niño en querer o “aceptar” la matemática y ayudar en su aprendizaje.

El trabajo que se desarrolla con los estudiantes inicia haciendo un recorrido por la historia de la Yupana, pasando por la construcción de la misma y culminando en el manejo operacional con el fin de desarrollar los contenidos mencionados anteriormente.

Se persigue que con la utilización adecuada de este ábaco Inca, como un material didáctico de enseñanza especificada en las operaciones básicas, los niños puedan aprender y desarrollar la motricidad y la lógica matemática para poder sobresalir en los aspectos académicos y laborales en un futuro y en su vida diaria.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Cuando se tiene la oportunidad de orientar a niños en un ambiente escolar, se puede evidenciar que la mayoría de ellos, le temen a la asignatura de matemáticas, pues desde temprana edad tienen la idea de que las matemáticas son complicadas y difíciles de aprender; por consiguiente, se encierran en la idea de no querer aprenderla, pierden el entusiasmo, y de esta manera la matemática se convierte en una meta a la cual los niños no quieren acceder, y lo que deberían ser espacios de aprendizaje gratos y atractivos; se vuelven martirizantes y dolorosos.

Las dificultades que experimentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas escolares dependen de lo que los rodea en su entorno institucional y familiar, del apoyo de sus padres y de cómo los maestros actúan ante estas dificultades, intereses y expectativas de los estudiantes. Sin embargo un alto grado de responsabilidad recae sobre la organización del sistema educativo.

¿Qué se debe hacer para que los estudiantes pierdan el miedo a esta asignatura? buscar alternativas que generen un cambio dentro del aula, pues aún existen docentes que ejercen su labor basados en procedimientos mecánicos y rutinarios, una opción sería que los docentes se apoyaran en recursos y materiales didácticos, ya que estos tipos de materiales hacen que las clases cotidianas muchas veces aburridas, monótonas y apáticas se conviertan en interesantes, con nuevos enfoques y procedimientos.

Por esta razón surge la necesidad de que el docente planifique sus clases con apoyo de materiales didácticos, dejando a un lado la educación tradicional, esto funcionaría como un plan de acción para fortalecer las habilidades matemáticas en los estudiantes, basándose en la ejecución de actividades motivadoras, ejercicios explicativos y didácticos, con el fin de superar las falencias que hayan sido detectadas y de esta manera lograr despertar en ellos la curiosidad, la inteligencia, el desarrollo del pensamiento lógico, permitiendo así exponer con naturalidad su potencial.

Al orientar la enseñanza de las operaciones básicas matemáticas indudablemente los docentes constituyen piezas fundamentales para que los estudiantes logren los propósitos establecidos, sin dejar a un lado el papel de la familia en el desarrollo de los mismos. En el presente trabajo se destacará la Yupana también conocida como el Ábaco Inca, como un material didáctico

eficiente para el aprendizaje de las operaciones básicas tales como la adición, sustracción, multiplicación y división, representación, orden y comparación de números naturales. El propósito de este trabajo, es dar a conocer el material didáctico la Yupana, con el fin de que los niños construyan el pensamiento matemático, específicamente en lo referente a las operaciones básicas, a partir de la manipulación, la observación y la experimentación. Basta resaltar que el uso este material posee diversos beneficios en el estudiante dentro del aula de clases, puesto que promueve el trabajo ordenado y reflexivo, estimula los sentidos y la creatividad, los invita a aprender a partir de experiencias de otros.

3.1. Antecedentes

A continuación relacionamos algunos trabajos e investigaciones que se han realizado acerca de este material didáctico y la enseñanza de las operaciones básicas matemáticas en los grados segundo y tercero de primaria:

- Los investigadores Darwin Enrique Mosquera Díaz y Luis Enrique Leiva Morantes realizaron el trabajo “*Estrategias didácticas para la enseñanza de la multiplicación y la división en el grado tercero de educación básica primaria*” que consistió en desarrollar y validar estrategias para la enseñanza- aprendizaje de la multiplicación y división en el grado tercero de primaria, en donde mostraron los diferentes materiales didácticos: la Yupana, las regletas de cuisenaire, el minicomputador de Papy, como materiales de apoyo en la enseñanza de la multiplicación y división. Este antecedente es de utilidad para el presente trabajo de grado porque destaca diferentes materiales didácticos, nombrados anteriormente, entre esos la Yupana que contribuyen a mejorar las habilidades de los estudiantes en el momento de resolver operaciones de multiplicación viéndola como una suma repetida y la división como un reparto.
- En Huacho Perú, Ricardo Vilches Chumacero realizó su tesis: “*Utilización de la Yupana como material didáctico en la enseñanza de matemática en alumnos segundo grado de primaria en instituciones educativas de huacho*” que consistió en hacer un arduo análisis y diseño del material didáctico la Yupana, utilizando el modelo de Radicati di Primeglio (1.979) en la representación de numerales y las operaciones de suma y resta, con alumnos de segundo grado de Educación Primaria y también la usabilidad de la Yupana en profesores de educación primaria. Para alcanzar uno de los objetivos del presente trabajo de grado, es importante conocer la historia del ábaco Inca la Yupana, y en su tesis Vilches Chumacero, realiza un análisis a fondo sobre el origen y la incidencia de este material didáctico en la cultura Inca.
- En Madrid, la investigadora Sonia Caballero Reales, realizó su tesis para optar el grado de Dra.: “*Un estudio transversal y longitudinal sobre los conocimientos informales de las operaciones aritméticas básicas en niños de educación infantil*” en donde analiza el paso del conocimiento informal, al conocimiento formal y los diferentes procedimientos de cuantificación, también se ocupó de discutir los errores que cometen los alumnos al desarrollar problemas de adicción, sustracción, multiplicación y división. Caballero (S.F), expone los errores comunes que se presentan cuando los estudiantes suman “llevandoz restan “prestando”. Sin embargo estos pueden superarse con el presente

trabajo de grado pues la Yupana es buena opción a la hora de aclararle a los estudiantes este tipo de dificultades.

- En Venezuela, las investigadoras Jessenia Lozzada Clelsey Ruiz y Mariela Sarmiento, presentan la tesis de grado para optar el título de licenciadas en educación matemática y física: “*Estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación y división en el primer año*”. Básicamente en la tesis, están incluidos los diseños de algunas estrategias de enseñanzas para aplicarlas a los alumnos de primer año de secundaria, con el fin de lograr que ellos superen las dificultades al resolver operaciones como multiplicación y división. Este antecedente es importante para el presente trabajo de grado, expone materiales didácticos de apoyo con el fin de mejorar el aprendizaje de la multiplicación y división. Entre los materiales se destacan el dominó matemático, bingo matemático, memorias multiplicativas y herramientas informáticas.

4.1. Referente Teórico

En el transcurrir del tiempo, el concepto de material didáctico se le ha llamado de diversos modos: apoyos didácticos, recursos didácticos, medios educativos, sólo por mencionar algunos; pero dentro de éstos, el más utilizado es el material didáctico.

Se entiende por material didáctico al conjunto de medios materiales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos materiales pueden ser tanto físicos como virtuales, asumen como condición, despertar el interés de los estudiantes, adecuarse a las características físicas y psíquicas de los mismos, además que facilitan la actividad docente al servir de guía y permite adecuarse a cualquier tipo de contenido.

La importancia del material didáctico radica en cómo influyen los estímulos que ejercen en los órganos sensoriales del educando estos recursos sirven para aplicar una técnica concreta en el ámbito de un método de aprendizaje determinado, entendiéndose por método de aprendizaje el modo, camino o conjuntos de reglas que se utiliza para obtener un cambio en el comportamiento de quien aprende, y de esta forma que potencie o mejore su nivel de competencia a fin de desempeñar una función productiva.

“Para que la elaboración del material didáctico se refleje en un buen aprendizaje, es necesario considerar algunas características específicas que se mencionan a continuación:

- Con respecto a los objetivos que se busca lograr; el material debe estar diseñado en la búsqueda de los mismos.
- Los contenidos deben estar sincronizados con los temas de la asignatura.
- Las características del diseñador del material didáctico: capacidades, estilos cognitivos, intereses, conocimientos previos, experiencia y habilidades requeridas para el uso de estos materiales.
- La característica del contexto. Debe tenerse en cuenta el contexto en el que se va a desarrollar y donde se piensa emplear dicho material, se debe tomar en cuenta los

recursos y temas que se desarrollan”.¹

En las estrategias didácticas se puede plantear la utilización del material, considerando lo siguiente: La secuenciación de los contenidos, el conjunto de actividades que se pueden proponer a los estudiantes, la metodología asociada a cada una, los recursos educativos que se pueden emplear, etc.

4.2. Funciones del Material Didáctico

Al momento de utilizar el material didáctico es importante tomar en cuenta al público al que va dirigido y la finalidad con que ese recurso se emplea, para que realmente sea de utilidad. La función principal del material didáctico es servir de mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues éste, facilita en los educandos la aprehensión de nuevos conocimientos con mayor eficacia y al mismo tiempo estimulando la función de los sentidos (tacto, olfato, gusto, vista), lo cual es un apoyo para que los estudiantes vinculen la información de una manera personal.

4.3. Importancia del Material Didáctico

El material didáctico tiene relación con el proceso de Enseñanza- Aprendizaje, pues es, el medio que facilitará al docente impartir los contenidos. Los alumnos, no solamente van a adquirir la información verbal sino que también van a poder relacionarla con experiencias donde manipulen, socialicen, interactúen para que el aprendizaje sea significativo. Los contenidos ya no serán tediosos y todo resulta más motivador.

La finalidad de utilizar los materiales didácticos es para convertir la información teórica, en algo más fácil y práctico, pues los materiales no solamente se observan, en ocasiones se manipulan, se prueban, se huelen o se escuchan, respecto a este punto, los materiales también van a ser de gran ayuda para la estimulación de todos los sentidos y no sólo de uno.

4.4. La YUPANA

4.4.1. Etimología

En su tesis de doctorado Vilches (S.F), describe brevemente el origen del término Yupana:

El término Yupana es un vocablo Quechua que ese deriva del verbo yupay = contar, Yupana es un sustantivo que además de designar a un objeto, ordena que para que sea totalmente útil es necesario contar. Asimismo el termino Yupana, con la acepción de “tablero de cálculo” resulta ser un neologismo tanto en quechua como en castellano. Es decir existe la raíz yupa que, aplicada como verbo significa “contar” en sentido de hacer cuentas, calcular. Al respecto Chambi (2003) refiere que: Yupa palabra aymara que significa el que empalma, el que enlaza algo con otro, y “na” subfijo en el lugar de...o de en el sitio de..., otros términos como yupan, yupanya, yupanki.

¹Pablo Alberto Morales Muñoz (2012). Elaboración de material didáctico. Red Tercer Milenio S.C.

Este instrumento como los Incas lo llamaron, consta de un tablero principal dividido en celdas cuadradas bidimensionales, donde las celdas sirven para depositar unidades de pequeñas piedrecillas, semillas u objetos similares como: granos de maíz, de frijol, lentejas y también canicas. La Yupana puede ser de piedra, madera e incluso tejido cuadrado.

4.4.2. Definición

Se define comúnmente como un ábaco utilizado para realizar operaciones aritméticas, el cual se remonta a la época de los Incas. La Yupana está formada por varias columnas. Cada una tiene un valor de acuerdo a su posición, así (empezando de derecha a izquierda): unidades, decenas, centenas, unidades de mil. Además, cada columna está representada por un color diferente y tiene diez huecos distribuidos por toda la columna. Este recurso se puede elaborar con los estudiantes en diferentes materiales como madera, cartón paja, foamy, icopor, entre otros. Este material se utiliza de la misma manera que se utiliza el ábaco, pero en vez de mover bolitas, se llenan los círculos de cada columna con diferentes semillas (fríjoles, lentejas, garbanzos, arvejas), dándole a cada grupo de semillas un valor: 1, 10, 100, 1000 (unidades, decenas, centenas, etc.)

En su tesis de doctorado Vilches (S.F), relaciona algunas propuestas sobre la definición de Yupana de reconocidos autores o fuentes:

Espinoza (2011) definió la Yupana como un tablero rectangular de cálculo de los matemáticos andinos, quienes se colocaban en la parte más alta de la tabla, al lado de los casilleros con más círculos para evitar movimientos innecesariamente largos. Lo usaban utilizando piedrecillas y granos (quinua, maíz), movilizándolos de unos hoyuelos a otros, según sus colores (blanco y negro). Con la Yupana llevaban a cabo operaciones de suma, resta, multiplicación y división.

En el 2007, Laurencich sostiene que la yupana era la representación de Pachamama, la Tierra antropizada, que permitía ordenar ya sea a la administración del territorio del Tahuantinsuyo, ya sea a sus dioses, antepasados y fuerzas sagradas (en forma de números sacros) transformándolos en huacas fijas en el territorio. Las Yupanas en forma de damero son un instrumento y un sistema de escritura al mismo tiempo, que con los demás sistemas de escritura andinos (quipu, capacquipu y tocapu), utilizan signos y materiales distintos, pero perfectamente integrados, también en sus reglas de práctica y lógicas que varían entre la lógica lineal y la lógica holística. En este trabajo usamos el término yupana referido a un tablero de cálculo para ser empleado como material de enseñanza de matemática en niños de colegios primarios. Existen muchas maneras de clasificar las yupanas.

Al respecto Radicati (1990) refiere: En relación con su uso, las tablas de escaques fueron interpretadas en tres maneras: como maquetas arquitectónicas, como yupanas o ábacos y como taptanas o tablas empleadas en el juego de azar, especialmente aquellos que se practicaban en cumplimiento de ciertos preceptos o ritos funerarios. Con el tiempo la hipótesis arquitectónica fue prácticamente abandonada y se impuso más bien la creencia de que los tableros sirvieron para la realización de operaciones de cálculo y fueron, por consiguiente, verdaderos contadores o ábacos. Creemos que después de haberse usado por cierto tiempo la tabla de juego, surgió la idea de ella podía ser empleada también con fines contables (p.231).

Moscovich (2006) considera las diferencias morfológicas entre los tableros de escaques,

taptanas, ábaco ancestral y la yupana de Guamán Poma son notables: los tableros de escaques y el ábaco ancestral tienen, en su mayor parte, varios niveles, escaques (cuadrados que dividen el tablero), un número de casillas variable, cuando a veces las casillas son hundidas y a veces están simplemente marcadas con líneas, y en general no se ven casillas de colores.

4.4.3. Bases Históricas de la Yupana

La administración estatal de los Incas fue desarrollada gracias a los Quipus y las Yupanas, pues los Incas sobresalieron por ser competentes en el momento de hacer cálculos. Ellos no solo construyeron hermosas edificaciones, sino que utilizaron esos recursos para el servicio del hombre. Además, lograron conocer determinadas leyes astronómicas. Tuvieron un sistema de pensamiento, vale decir, una filosofía que sólo orientaba su conducta y labro la base sobre la cual radicó toda su obra cultural. Es decir, que toda su acción transformadora se sustentaba, por una parte, en un sistema socioeconómico, y por otra, en un bien fundado sistema filosófico.

Los arqueólogos han comprobado que la formación de estados con una compleja diferenciación social y una jerarquía de poder van acompañadas de sistemas de notación. El estado inca se ajusta perfectamente a esta apreciación. Aparte de la compleja diferenciación social y jerárquica y política sabemos por las fuentes españolas y por los hallazgos arqueológicos que en tiempos de los incas hubo en la región andina dos conocidos sistemas de notación, que no tenían nada en común con la escritura alfabética europea ni con los soportes de ella. Se trata de los llamados tocapus y de los quipus, usados ampliamente. Un tercer sistema, la pintura de escenas, es poco mencionado en la literatura moderna porque en este caso sólo existen escasas referencias en las crónicas.

El sistema educativo en el imperio incaico que abarca escuelas, los cuatro maestros, la geometría y aritmética, sistemas de medición, ordenamiento demográfico, sistema de información es propuesto por diferentes autores. Garcilaso (2009) señala:

Inca Roca fue el primero que puso escuelas en la real ciudad del Cuzco, para que los amautas enseñasen las ciencias que alcanzaban a los príncipes Incas y a los de su sangre real y a los nobles de su imperio. Les enseñaban poesía, música, filosofía y astrología, eso poco que de cada ciencia alcanzaron. A los maestros llamaron amautas, los cuales eran tenidos en suma moderación (p.221).

El primer maestro enseñaba al principio la lengua del Inca, que era la particular que él hablaba, diferente de la quechua y de la aymara, que son las dos lenguas generales de este reino. Otro maestro les enseñaba a adorar los ídolos y sus huacas, a hacerles reverencia y las ceremonias. Al tercer año entraban a otro maestro, que les declaraba en sus quipus los negocios pertenecientes al buen gobierno y autoridad suya, y a las leyes y la obediencia que se había de tener al Inca y a sus gobernadores. El cuarto año, con otro maestro aprendían en los mismo cordeles y quipus muchas historias y sucesos antiguos, y trances de guerras acontecidas en tiempos pasados y las astucias de sus Incas y capitanes, y el modo con que conquistaron las fortalezas y vencieron a sus enemigos (Martín de Murua, 2001).

Los quipus constituyeron un sistema mnemotécnico basado en cuerdas anudadas, mediante las cuales se registraron todo tipo de información cuantitativa o cualitativa. En el caso de la información numérica, operaciones matemáticas eran realizadas previamente en ábacos o

Yupanas. Estos podían ser de piedra tallada o de barro, tenían casilleros que correspondían a las unidades decimales y se contaba con la ayuda de piedrecillas o granos de maíz o quinua. Para conocer la cantidad de trabajadores disponibles se precisaba de un sistema de contabilidad eficiente para censar a los habitantes del Incario. Es sorprendente constatar como los naturales lograron esas metas sin haber conocido la escritura, simplemente apelando a sus ábacos o yupanas y sus quipus, donde se registraban sus cálculos finales. Existieron unos especialistas en llevar la contabilidad llamados quipucamayoc. Ellos podían informar al Inca, en el momento deseado, acerca de las cifras poblacionales que existían en cada una de las regiones del Tahuantinsuyo. Además también llevaban la contabilidad de las reservas de productos que se encontraban almacenados en los depósitos estatales (Rostworowski, 2004).

4.4.4. Yupana en la Actualidad

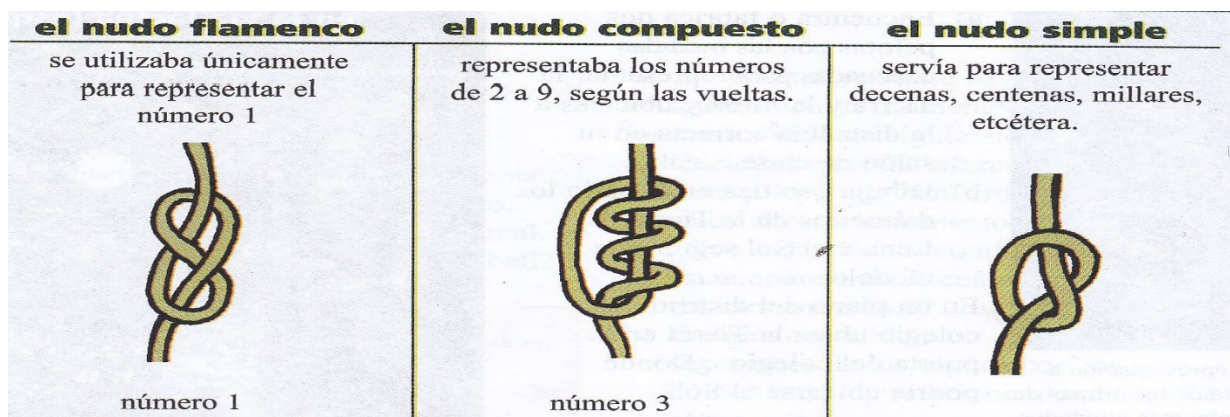
La yupana aún es empleada. Así lo plantean en su investigación Aitken-Soux y Ccama (1990).

Muchos pueblos de la antigüedad han desarrollado instrumentos que facilitan el cálculo matemático, como tenemos el ábaco chino y otros, en el caso del Perú se tiene la yupana tradicional y la calculadora ancestral. En algunas áreas remotas del que fuera la cultura incaica, aún subsiste el uso de estos instrumentos, y son usados para el cálculo de transacciones comerciales que realizan particularmente los pastores de llamas y alpacas. Un modelo de calculadora ancestral fue mostrado a los autores en el pueblo de Itujata, cantón de Santa Lucía, provincia de Frías, departamento de Potosí, Bolivia (p.267)

En Bolivia, en regiones aymaras como Italaque, Humanata, poblaciones de la provincia de Camacho del departamento de la Paz, el quipu y la yupana subsisten como sistemas para llevar la contabilidad, utilizan para los cálculos matemáticos, como auxiliares operativas. El cultivo de la matemática por parte de los amautas aymaras probablemente obligó a razonar de manera lógica, y segura, porque el encanto lógico que nos muestra la multiplicación en el sistema quipu-yupana, subraya la poesía de los números: la invención de este sistema ha posibilitado en su momento histórico, un poderoso método de análisis en el campo de los números.

4.4.5. Yupana y Quipus

Un material de cálculo utilizado por los incas a parte de la Yupana, fueron los quipus, un contador con hilos. Un quipu es una cuerda de la que cuelgan a manera de flecos, hilos donde hay nudos. La cuerda grande es la principal, llamada también cuerda madre y a ella se atan otras cuerdas de colores anudadas, dichos nudos de diferente tamaño y forma. Los quipus estaban fabricados de algodón.



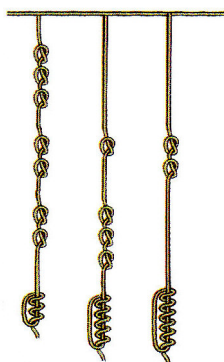
El uso de los quipus y las Yupanas son tan notables que se constituye una reciprocidad entre ambos instrumentos comparando simplemente las columnas de la Yupana con las cuerdas de los quipus, donde los nudos están organizados, igualmente las fichas en las casillas del ábaco, de acuerdo con una colocación por altura que les otorga su exacto valor. Cuando se realizaban los cálculos en la Yupana, se utilizaba el resultado para registrarlo en los quipus, y de esta manera agrupar una cantidad amplia de datos. Cuando en la Yupana o en los Quipus no habían semillas o nudos a lo largo de las cuerdas, se deducía que el resultado era el cero.



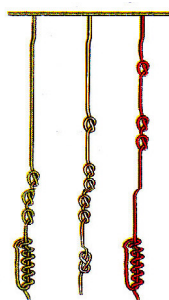
Figura 4.1: Dibujo de Guamán Poma con la representación de la Yupana incaica.

Para el quipu, esto significó indudablemente el peligro de que se confundieran las posiciones y se atribuyeran valores equivocados a los nudos. Este inconveniente se hubiera podido evitar fácilmente con la adopción de un signo especial que, como ocurre con nuestro $\ll 0 \gg$, determinase con exactitud la existencia del espacio vacío. Sabemos, sin embargo, que los incas no se valieron de este recurso, sino que prefirieron copiar fielmente el sistema del vacío de la Yupana.

En los Quipus, los nudos indicaban el objeto representado, por ejemplo el amarillo representaba el oro, el rojo los guerreros. Estos colores fueron posiblemente trece. Por ejemplo Observemos este Quipu. Aquí hay tres números 3223, y 135. En la última cuerda de la derecha, en ella no hay nudo en la posición 2 lo que indica la presencia del cero en las decenas. Por lo tanto el número es el 206.



En el siguiente ejemplo hay 3 cuerdas de izquierda a derecha. La primera representa al número 36, la segunda al número 141 (observa que el ultimo nudo es un nudo flamenco y representa a la unidad) y el tercero el número 1 206. Se observa un espacio entre nudos lo que indica la ausencia de cantidad, es decir el cero.



4.5. Estándares básicos de competencias en matemáticas

Con la Yupana se puede trabajar gran parte del pensamiento numérico en los grados segundo y tercero de primaria. Es por eso la importancia de tener en cuenta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, suministrados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como también es necesario incluir las competencias, desempeños e indicadores de

desempeños que se utilizarán:

Primero a tercero

Pensamiento numérico y sistemas numéricos:

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización, entre otros.)
- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Uso representaciones - principalmente concretas y pictóricas - para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.
- Uso representaciones - principalmente concretas y pictóricas - para realizar equivalencias de un números en las diferentes unidades del sistema de numeración decimal.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y transformación.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferente instrumento de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.)

4.5.1. Competencias para los grados segundo y tercero

- Explica los procesos usados en la solución de ejercicios relacionados con la composición, descomposición y el orden de números naturales hasta de seis cifras.
- Justifica la solución de situaciones problemáticas utilizando las operaciones aditivas (adición y sustracción) y multiplicativas (multiplicación y división) con números naturales.
- Plantea y resuelve problemas usando las operaciones aditivas (adición y sustracción) y multiplicativas (multiplicación y división) con números naturales.
- Plantea conclusiones a partir del análisis de situaciones cotidianas.

4.5.2. Desempeños e indicadores de desempeños

1. *Desempeño*

Reconoce la cantidad que representa un número hasta de cinco cifras.

Indicadores de desempeños:

- Ubica un número hasta de cinco cifras en la tabla de posición.
- Relaciona un número de cinco cifras con la cantidad que representa.
- Compone y descompone números hasta de cinco cifras.
- Lee y escribe números hasta de cinco cifras.

2. *Desempeño*

Establece relaciones de orden entre números hasta de cinco cifras.

Indicadores de desempeños:

- Ordena números de mayor a menor y viceversa.
- Escribe los símbolos $>$, $<$ o $=$ entre dos números.

3. *Desempeño*

Realiza adiciones entre números de seis cifras.

Indicadores de desempeños:

- Resuelve adiciones sin reagrupar
- Resuelve adiciones reagrupando
- Resuelve adiciones vertical y horizontalmente
- Identifica las propiedades de la suma.

4. *Desempeño*

Resuelve situaciones problemáticas en donde se usan operaciones aditivas (adición y sustracción).

5. *Desempeño*

- Identifica las estructuras de la adición (suma y resta) en una situación problemática.
- Resuelve problemas de adición.
- Resuelve problemas de sustracción.
- Resuelve problemas que involucren más de una operación.

6. Desempeño

Realiza multiplicaciones hasta por tres cifras.

Indicadores de desempeños:

- Escribe la adición de sumandos iguales en forma de multiplicación.
- Identifica los términos de la multiplicación.
- Encuentra el factor desconocido en una multiplicación.
- Realiza multiplicaciones abreviadas
- Resuelve expresiones con signos de agrupación utilizando la propiedad distributiva.
- Realiza multiplicaciones por una, dos y tres cifras.
- Propone problemas con estructura multiplicativa.

7. Desempeño

Reconoce la división como un reparto de cantidades en partes iguales.

Indicadores de desempeños:

- Reparte cantidades en partes iguales.
- Expresa un reparto como una división.

8. Desempeño

Aplica correctamente el algoritmo de la división.

Indicadores de desempeños:

- Identifica los términos de una división.
- Reconoce la relación entre división y multiplicación.
- Realiza la prueba de la división.
- Resuelve situaciones problemáticas que requieren el uso de la división.

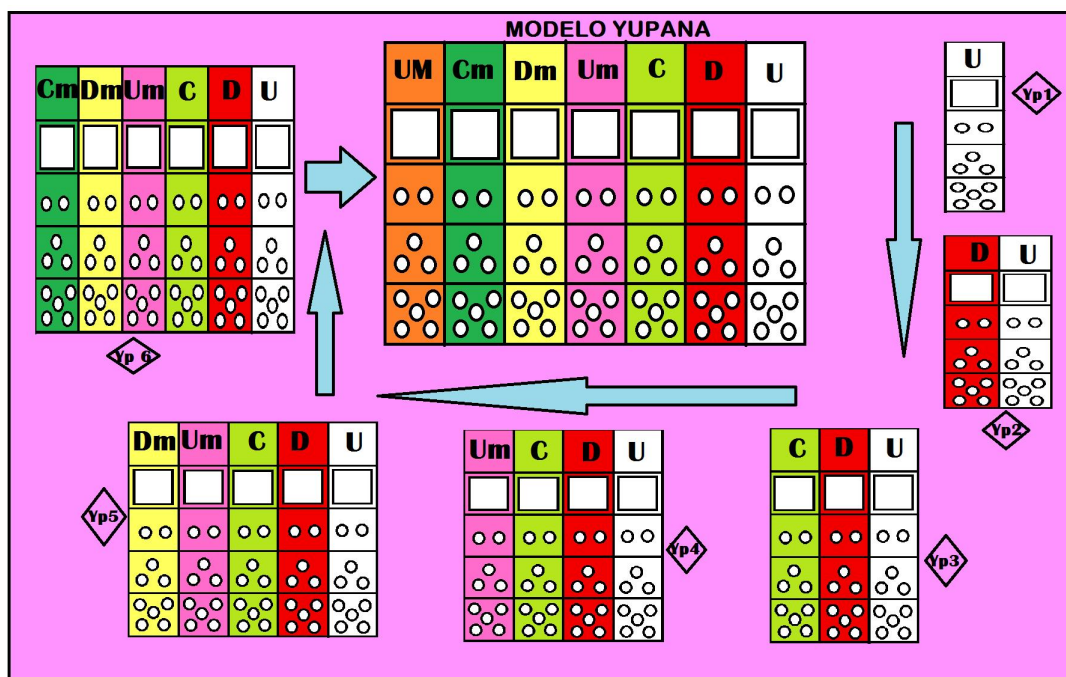


Figura 5.1: Ilustración 1

5.1. El Modelo de la Yupana

El modelo de la Yupana es establecido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Yupana} &= Yp_7 + Yp_6 + Yp_5 + Yp_4 + Yp_3 + Yp_2 + Yp_1 \\ &= UM + Cm + Dm + Um + C + D + U \end{aligned}$$

5.2. Representación de números con la Yupana

La Yupana puede utilizarse para descomponer un número en potencias de 10. Esta es una buena manera (o al menos diferente) para que los alumnos descubran los conceptos de unidad, decena, centena, unidad de mil, decena de mil y centena de mil. A nivel concreto y a nivel simbólico a través de un tablero de valor posicional de la siguiente manera:

La primera columna de derecha a izquierda corresponde a las unidades, la segunda a las decenas, la tercera a las centenas, la cuarta a las unidades de mil, la quinta a las decenas de mil y la sexta a las centenas de mil.

Ejemplo: Números del 0 al 9 con la Yupana Yp_1 .

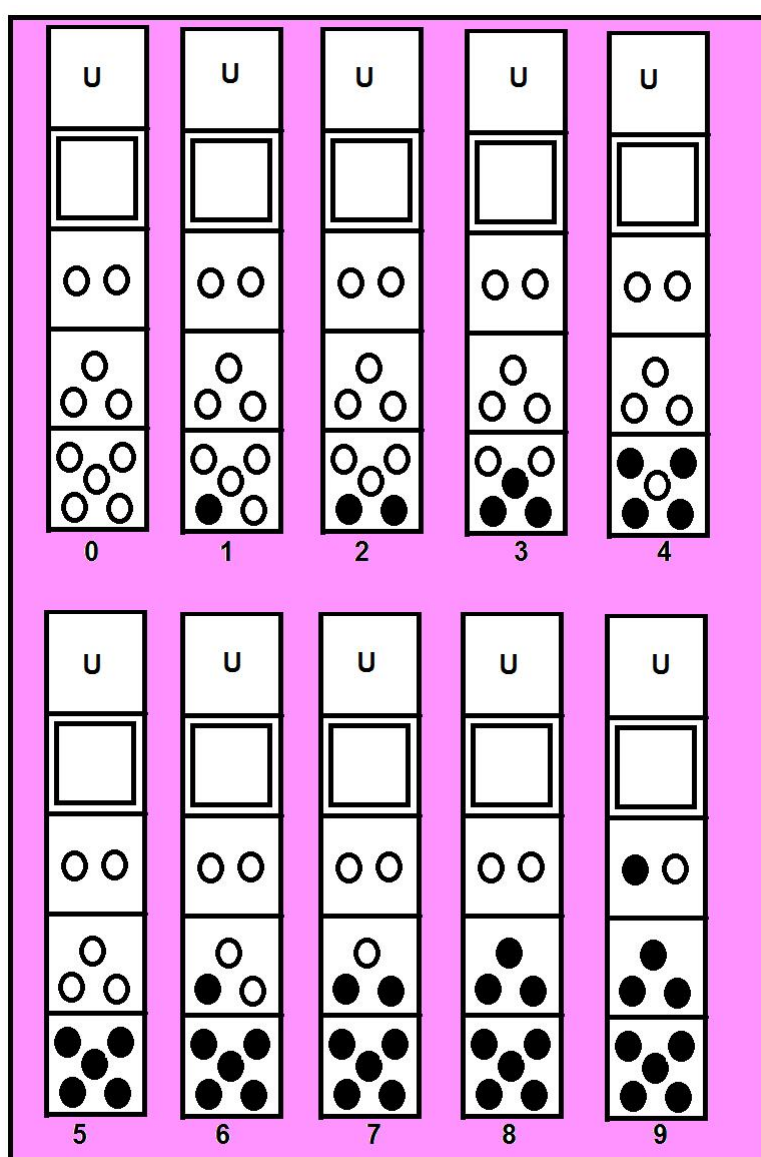


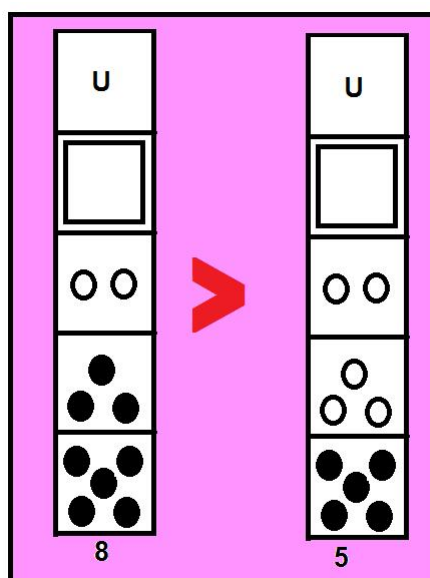
Figura 5.2: Representación de los numerales en la Yupana Yp_1 .

5.3. Orden y comparación de números naturales

El conjunto de números naturales es ordenado. Los símbolos que se utilizan para establecer la relación de orden entre dos números son:

Igual	Mayor que	Menor que
=	>	<
5 = 5	5 > 4	5 < 6

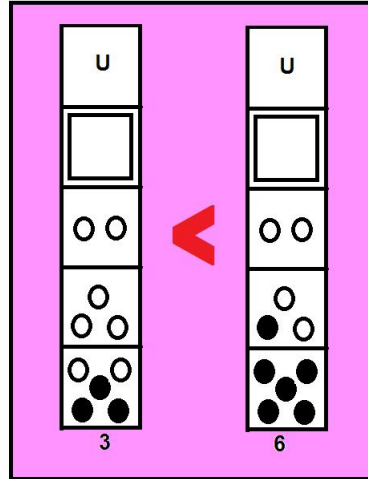
Ejemplo: El docente pide a dos estudiantes que representen en la Yupana dos números, uno de ellos el número 8 y el otro el número 5. A continuación uno de los estudiantes que ubica el símbolo $<$, $>$ ó $=$ según corresponda:



OCHO ES MAYOR QUE CINCO

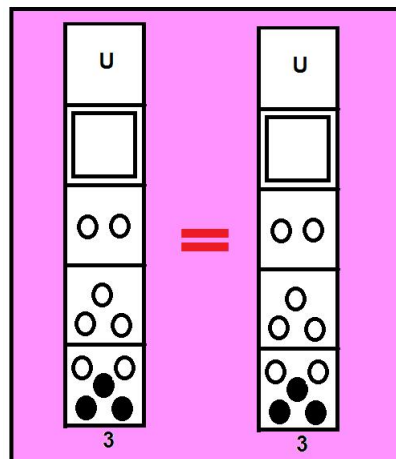
Figura 5.3: Representación de la desigualdad en la Yupana Yp_1 .

De igual manera, un estudiante representa el número 3 y otro estudiante el número 6, así:



TRES ES MENOR QUE SEIS

- Se pide a los estudiantes que representen el 3 en cada tablero:



TRES ES IGUAL A TRES

Figura 5.4: Representación de una igualdad en la Yupana Yp_1 .

5.3.1. Números hasta al 99

Un número de dos cifras se descompone en unidades (U) y decenas (D). Para representar algunos de estos números nos podemos apoyar en la Yupana.

Ejemplo: Representación de algunos números del 10 al 99 con Yp_2 .

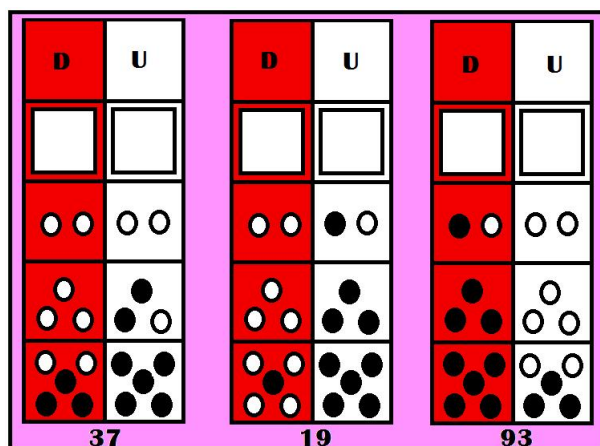


Figura 5.5: Representación de números de dos cifras en la Yupana Yp_2 .

5.3.2. Números hasta 999

Un número de tres cifras se descompone en unidades (U), decenas (D) y centenas (C). Igualmente nos apoyamos en la Yupana para hacer la representación.

Ejemplo: Representación de algunos números del 100 AL 999 usando Yp_3 .

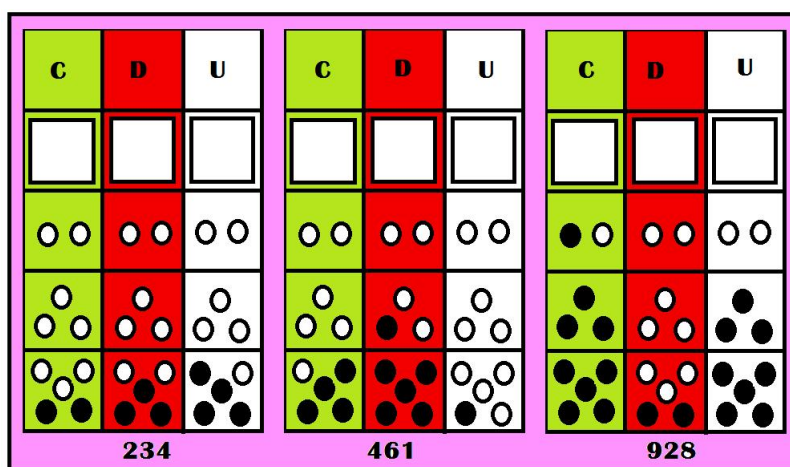


Figura 5.6: Representación de números de tres cifras en la Yupana Yp_3 .

5.3.3. Números hasta 9.999

Un número de cuatro cifras se descompone en unidades (U), decenas (D), centenas (C) y unidades de mil (UM). Continuamos apoyándonos en la Yupana para hacer la representación.

Ejemplo: Representación de algunos números del 1000 AL 9999 usando Yp_4 .

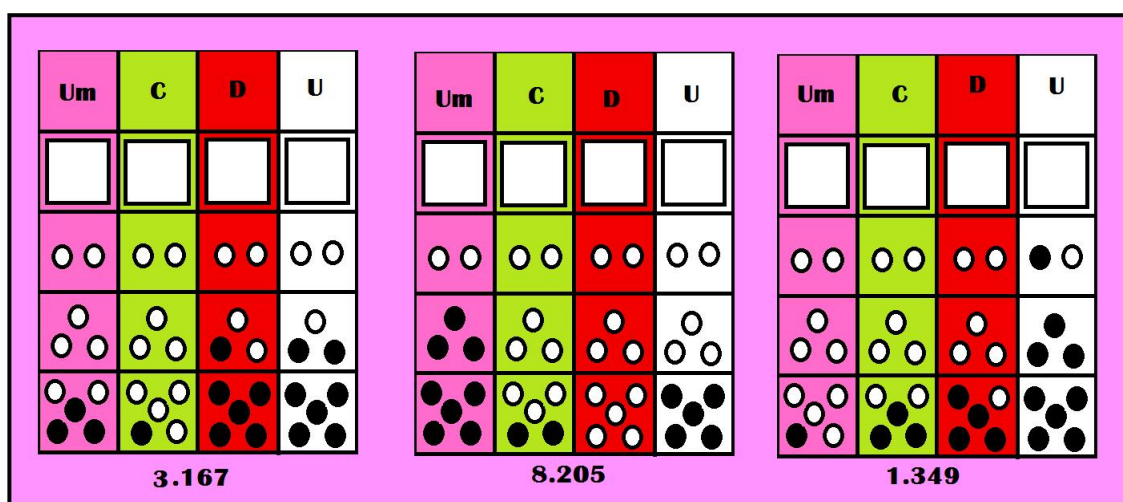


Figura 5.7: Representación de números de cuatro cifras en la Yupana Yp_4 .

5.3.4. Números hasta 99.999

Un número de cinco cifras se descompone en unidades (U), decenas (D), centenas (C), unidades de mil (UM) y centenas de mil (DM). Hacemos la representación en la Yupana, así:

Ejemplo: Representación de números del 10000 AL 99.999, usando Yp_5 .

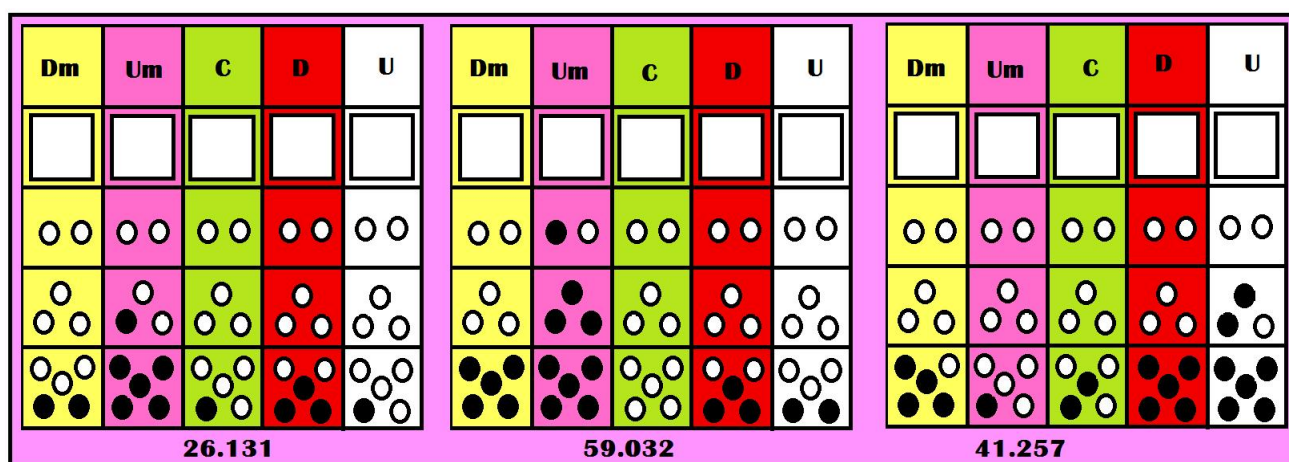
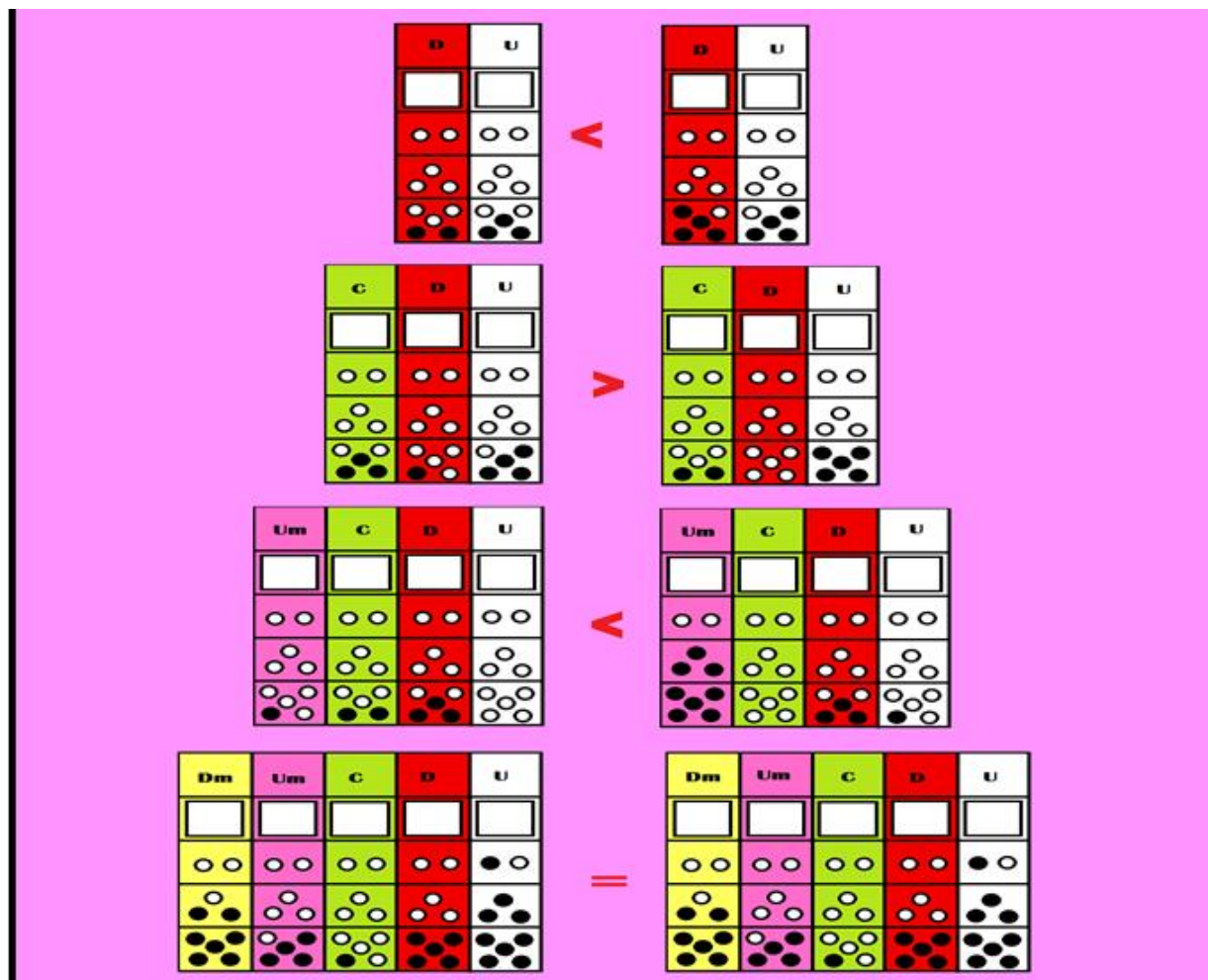


Figura 5.8: Representación de numerales de cinco cifras en la Yupana Yp_5 .

5.3.5. Comparación de números de dos, tres, cuatro, cinco cifras en la Yupana.

Ejemplos



5.4. OPERACIONES BÁSICAS (Adición, Sustracción, Multiplicación y División)

5.4.1. Ejemplos de adiciones (*sin llevar*)

Adición de números cuya suma es menor que 10.

Ejemplo 1

A continuación se presenta una adición, donde el primer sumando es 2 y el segundo sumando es 5. Se colocan las fichas del primer sumando en las unidades y las fichas del segundo sumando en la parte superior de la Yupana; luego se dejan caer por gravedad las fichas de la parte superior y el resultado será el número de fichas que haya en las casillas de las unidades.

Así:

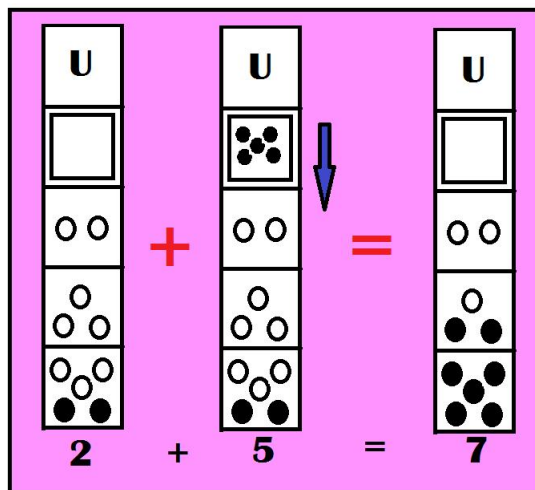


Figura 5.9: Adición de números cuya suma es menor que 100

Ejemplo 2

Se presenta una adición, en el primer sumando 32 y en el segundo sumando 26, se colocan las fichas del primer sumando en las unidades y decenas correspondientes, las fichas del segundo sumando se ubican en la parte superior de las del primer sumando, luego se dejan caer por gravedad; primero a la casilla de las unidades y luego a la casilla de las decenas ya por último el resultado será el número de fichas que hay en cada casilla.

Así:

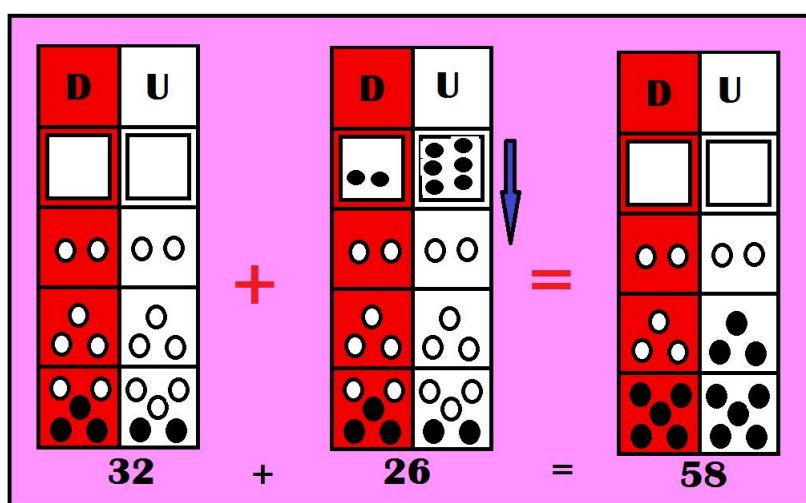


Figura 5.10: Adición de números cuya suma es menor que 1,000

Ejemplo 3

Se presenta una adición, en el primer sumando 124 y en el segundo sumando 231, se colocan las fichas del primer sumando en las unidades, decenas y centenas correspondientes, las fichas del segundo sumando se ubican en la parte superior de las del primer sumando, luego se dejan caer por gravedad; primero a la casilla de las unidades, luego a la casilla de las decenas, y por último la casilla de las centenas, el resultado de esta adición será el número de fichas que haya en cada casilla.

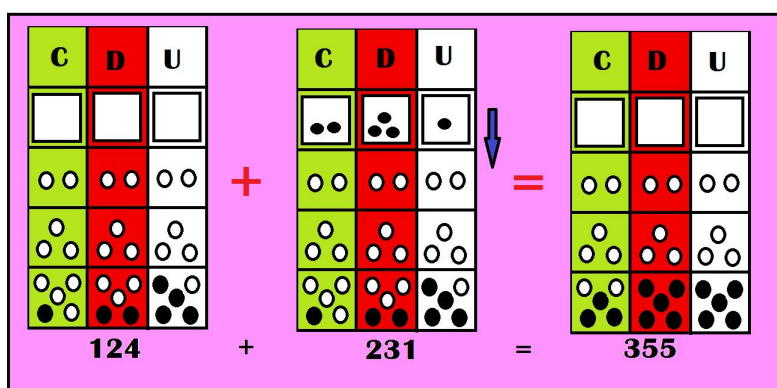
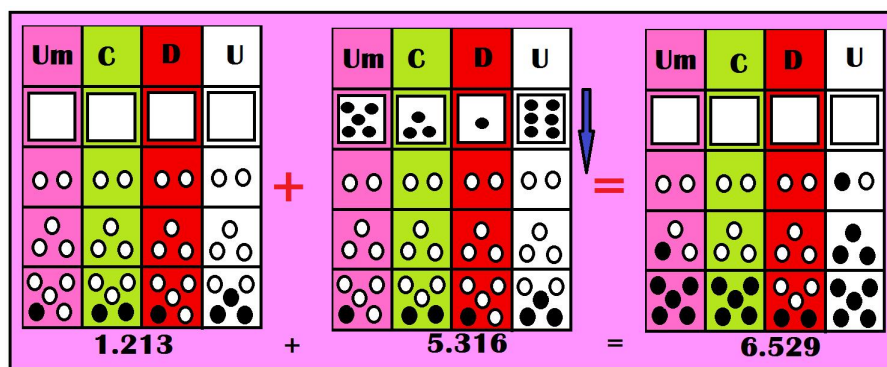


Figura 5.11: Adición de números cuya suma es menor que 10,000 adición

Ejemplo 4

Se presenta una adición, en el primer sumando 1,213 y en el segundo sumando 5,316, procedemos a colocar las fichas del primer sumando en las unidades, decenas, centenas y unidades de mil correspondientes, las fichas del segundo sumando se ubican en la parte superior de las del primer sumando, luego se dejan caer por gravedad; primero a la casilla de las unidades, luego a la casilla de las decenas, siguiendo con las centenas y por último la casilla de las unidades de mil, el resultado de esta adición será el número de fichas que haya en cada casilla.



5.4.2. Ejemplos de adiciones (*llevando*)

Adiciones de números cuyas sumas son menores que 100.000

Ejemplo 1

Se presenta una adición, en el primer sumando 25 y en el segundo sumando 5, se colocan las fichas del primer sumando en las unidades y decenas correspondientes, las fichas del segundo sumando se ubican en la parte superior de las del primer sumando, luego se dejan caer por gravedad; primero a la casilla de las unidades y luego a la casilla de las decenas ya por último el resultado será el número de fichas que hay en cada casilla.

Observación: Si las casillas de las unidades se llenan, reemplazas estas 10 fichas por una ficha en las decenas.

Así:

The diagram illustrates the addition of 25 and 5 using a base-ten block model. It is divided into two rows of blocks representing the tens (D) and units (U) columns.

Top Row (Initial Setup): Shows the addition of 25 and 5. The first block (25) has 2 tens and 5 units. The second block (5) has 5 units. A plus sign is between them. An arrow points to the next step.

Right Side (Carrying Over): A thought bubble says: "Recordemos: 10 U = 1 D ¡Reemplazamos las fichas de las unidades por una en las decenas!". The diagram shows that 10 units from the units column have been moved to the tens column, resulting in 3 tens and 5 units.

Bottom Row (Final Result): Shows the final result of 30. A thought bubble says: "Sumamos las decenas y finalmente el resultado es 30". The diagram shows 3 tens and 0 units.

Below the bottom row, the equation $25 + 5 = 30$ is written.

Ejemplo 2:

Se presenta una adición, en el primer sumando 254 y en el segundo sumando 584, se colocan las fichas del primer sumando en las unidades, decenas y centenas correspondientes, las fichas del segundo sumando se ubican en la parte superior de las del primer sumando, luego se dejan caer por gravedad; primero a la casilla de las unidades, luego a la casilla de las decenas, y por último la casilla de las centenas, el resultado de esta adición será el número de fichas que haya en cada casilla.

Observación: Si las casillas de las decenas se llenan, reemplazas estas 10 fichas por una ficha en las centenas.

Recordemos: reemplazamos las 10 fichas de las decenas por 1 ficha en las centenas y dejamos caer las restantes.

Ejemplo 3:

Se presenta una adición, en el primer sumando 46.817 y en el segundo sumando 32.313, procedemos a colocar las fichas del primer sumando en las unidades, decenas, centenas, unidades de mil y decenas de mil correspondientes, las fichas del segundo sumando se ubican en la parte superior de las del primer sumando, luego se dejan caer por gravedad; primero a la casilla de las unidades, luego a la casilla de las decenas, siguiendo con las centenas, las unidades de mil y por último las decenas de mil, el resultado de esta adición será el número de fichas que haya en cada casilla.

Observación: Debes tener en cuenta cada vez que se llenen algunas de las casillas, reemplazar ese valor por una ficha de la siguiente columna de derecha a izquierda.

5.4.3. Ejemplos de sustracciones (*sin prestar*)

Sustracción de números cuya diferencia es menor que 10

Ejemplo 1

A continuación se presenta una sustracción, el minuendo es 8 y el sustraendo es 5. Se colocan las fichas del minuendo en las unidades, y procedemos a quitar las fichas que nos indica el sustraendo para hallar la diferencia.

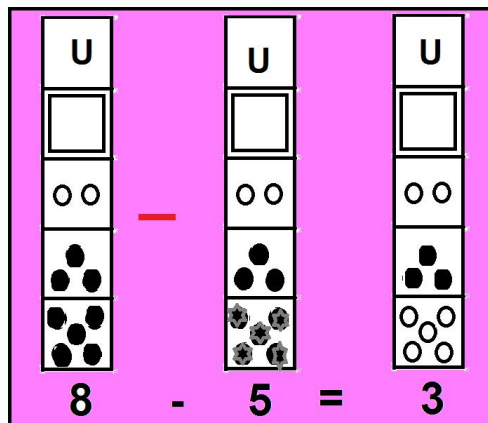


Figura 5.12: Sustracción de números cuya diferencia es menor que 100

Ejemplo 2

A continuación se presenta una sustracción, el minuendo es 26 y el sustraendo es 12. Se colocan las fichas del minuendo en las unidades y decenas, luego, procedemos a quitar las fichas que nos indica el sustraendo para hallar la diferencia.

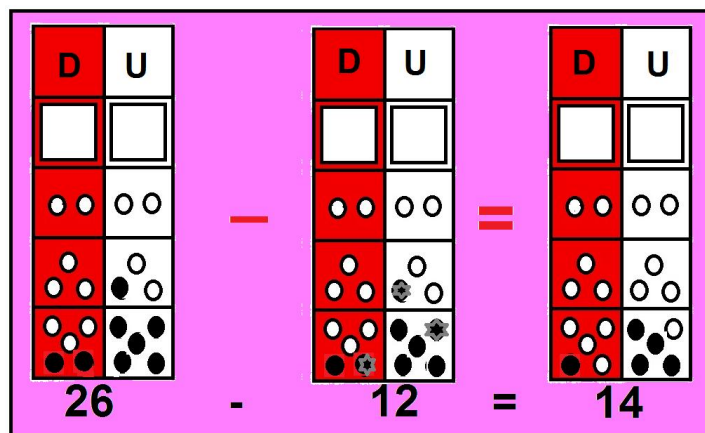
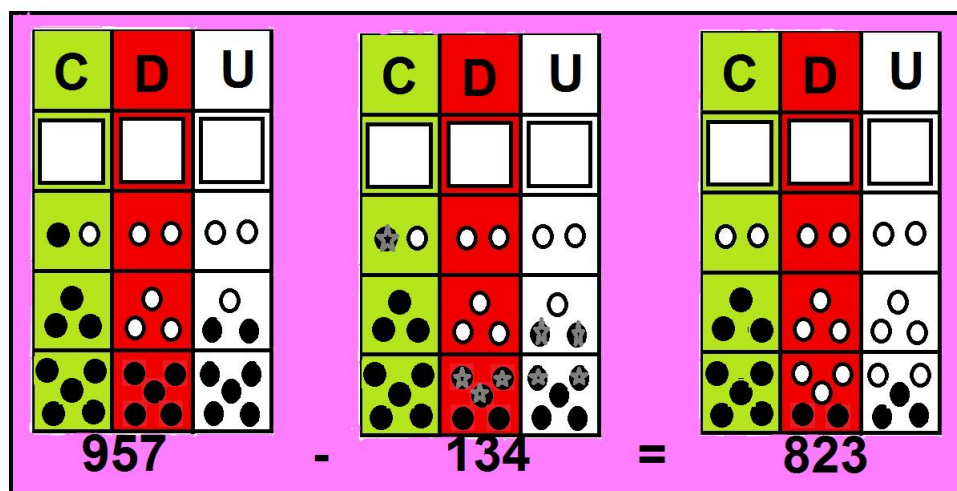


Figura 5.13: Sustracción de números cuya diferencia es menor que 1.000

Ejemplo 3

A continuación se presenta una sustracción, el minuendo es 957 y el sustraendo es 134. Se colocan las fichas del minuendo en las unidades, decenas y centenas correspondientes, luego, procedemos a quitar las fichas que nos indica el sustraendo para hallar la diferencia.



5.4.4. Ejemplos de sustracciones (*prestando*)

Ejemplo 1

A continuación se presenta una sustracción, el minuendo es 20 y el sustraendo es 16. Se colocan las fichas del minuendo en las unidades y decenas correspondientes, se debe tener en cuenta que la casilla de las unidades del minuendo es 0, entonces es necesario que la casilla de las decenas le preste 1D a las unidades y luego si procedemos a quitar las fichas que nos indica el sustraendo para hallar la diferencia.



Ejemplo 2

A continuación se presenta una sustracción, el minuendo es 1002 y el sustraendo es 649. Se colocan las fichas del minuendo en las unidades, decenas, centenas y unidades de mil correspondientes, se debe tener en cuenta que la casilla de las decenas y centenas del minuendo es 0, entonces es necesario que la casilla de las unidades de mil preste 1 Um a las Centenas, posteriormente las centenas le presta 1 C a las decenas y las decenas le preste 1D a las unidades; luego si procedemos a quitar las fichas que nos indica el sustraendo para hallar la diferencia.

Resuelve: 1002 - 649

Um	C	D	U

Recuerda: Si una de las cifras en las U, D, C, ...etc en el minuendo es menor que la cifra del sustraendo, la casilla antecesora le prestará 1 a la casilla correspondiente.
En este ejemplo, en las decenas tenemos 0, y en las centenas también, entonces es necesario prestar 1 Unidad de mil a las centenas, 1 centena a las decenas y 1 decena a las unidades.

Um	C	D	U

Um	C	D	U

=

Um	C	D	U

1 0 0 2

0 9 9 12

1002 - 649

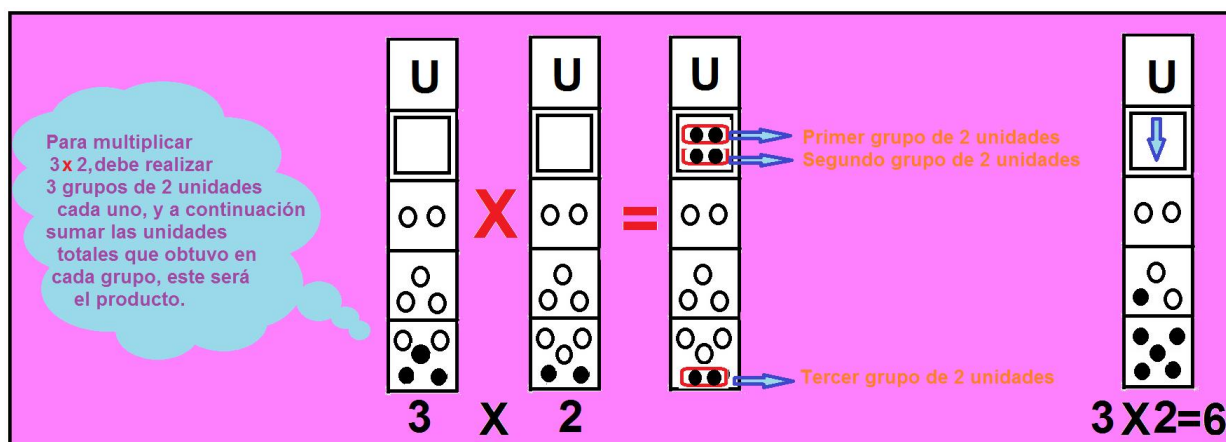
353

5.4.5. Ejemplos de Multiplicación

Multiplicaciones por una cifra

Ejemplo 1

El ejemplo nos presenta una multiplicación de una cifra, en donde debemos multiplicar 3×2 . Para resolverla, realizamos tres grupos de 2 unidades cada uno y los ubicamos en la parte superior de la Yupana (en el recuadro blanco) contando al grupo que ya está ocupando las casillas de la parte inferior, luego procedemos a sumar las fichas.



Ejemplo 2

El ejemplo nos presenta una multiplicación de una cifra, en donde debemos multiplicar 4×3 . Para resolverla, realizamos cuatro grupos de 3 unidades cada uno y los ubicamos en la parte superior de la Yupana (en el recuadro blanco) contando al grupo que ya está ocupando las casillas de la parte inferior, luego procedemos a sumar las fichas, teniendo en cuenta que al llenarse las casillas de las unidades, debemos reemplazar estas, por una en las decenas.

The diagram illustrates the multiplication 4×3 using a Yupana (a 4x2 grid with columns labeled 'D' for Decenas and 'U' for Unidades). The grid is divided into four rows, each representing a digit of the multiplicand (4, 3, 3, 3).

Initial State: The first column (D) has 4 units (white circles) in the bottom three rows. The second column (U) has 3 units (white circles) in the bottom three rows. Below the grid is the number 4 x 3.

Process: Three groups of 3 units are added to the top row (U column). Blue arrows point to these groups, labeled "Primer grupo de 3 unidades", "Segundo grupo de 3 unidades", and "Tercer grupo de 3 unidades".

Carrying: A blue arrow points to the top row (U column) labeled "Cuarto grupo de 3 unidades". A blue arrow points down from the top row (U column) to the second row (U column), indicating the carrying of 1 unit to the decenas column.

Final State: The first column (D) now has 1 unit (white circle) in the top row and 3 units (white circles) in the bottom three rows. The second column (U) has 3 units (white circles) in the bottom three rows. Below the grid is the number 12.

Text Box: "Recordar: 10 U = 1 D. ¡Reemplazamos las fichas de las unidades por una ficha en las decenas!"

Final Calculation: A vertical multiplication problem is shown:
$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$$

Ejemplo 3

El ejemplo nos presenta una multiplicación de una cifra, en donde debemos multiplicar 12×2 . Para resolverla, realizamos 12 grupos de 2 unidades cada uno y los ubicamos en la parte superior de la Yupana (en el recuadro blanco) contando al grupo que ya está ocupando las casillas de la parte inferior, luego procedemos a sumar las fichas, teniendo en cuenta que al llenarse las casillas de las unidades, debemos reemplazar estas, por una en las decenas.

The diagram illustrates the multiplication 12×2 using a Yupana (a 4x2 grid with columns labeled 'D' for Decenas and 'U' for Unidades). The process is shown in three stages:

- Initial Setup:** The first Yupana shows the number 12 (1 ten and 2 units) and the multiplier 2 (2 units). The second Yupana shows the multiplier 2 being added to the units column of the first number.
- Carrying Process:** The third Yupana shows the result of adding 12 groups of 2 units. The units column is full (12 units), and 11 groups of 2 units are shown in the decenas column. A label indicates "11 grupos de 2 unidades".
- Final Result:** The fourth Yupana shows the final result after carrying. The units column is empty, and the decenas column contains 12 units (1 ten and 2 units). A label indicates "1 grupo de 2 unidades" and "12 grupos de 2 unidades".

At the bottom, the text reads: "Dejamos caer las fichas y reemplazamos por decenas las necesarias" and the final equation is $12 \times 2 = 24$.

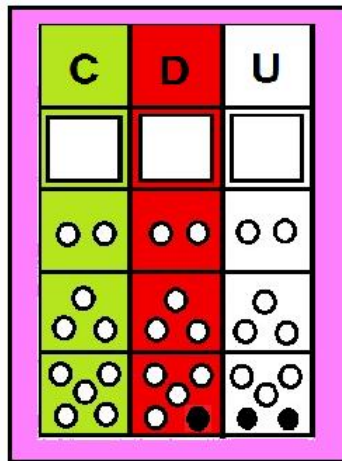
5.4.6. Ejemplo de divisiones

Divisiones por una cifra

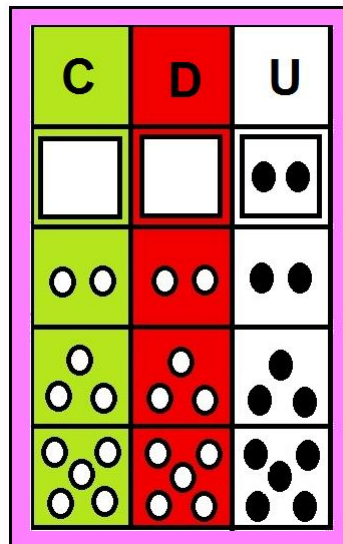
Ejemplo 1

Dividir 12 entre 4.

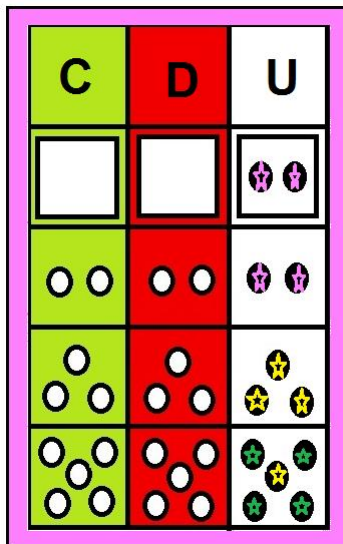
Se escribe en la Yupana el dividendo 12.



Se cambia la ficha de las decenas por diez en las unidades, sabiendo que llevamos dos unidades.



Se hacen grupos de a cuatro fichas, que es el divisor.

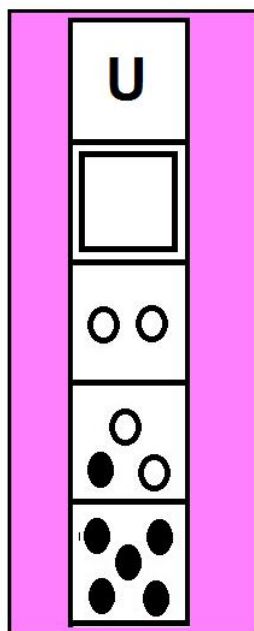


Por último se cuentan la cantidad de grupos formados, el resultado es el cociente de la división, en este caso son tres grupos, es decir, doce dividido cuatro es tres.

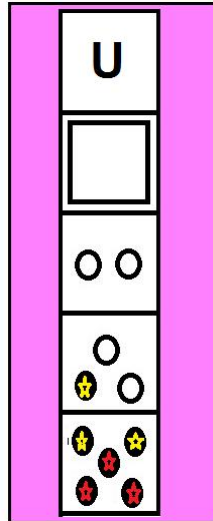
Ejemplo 2

Dividir 6 entre 3.

Se escribe en la Yupana el dividendo 6.



Se hacen grupos de a tres fichas, que es el divisor.



Por último se cuentan la cantidad de grupos formados, el resultado es el cociente de la división, en este caso son 2 grupos, es decir, seis dividido tres.

CAPÍTULO 6

EXPERIENCIAS SIGNIFICATIVAS CON LA YUPANA

Mediante el trabajo realizado se quiere dar a conocer la importancia que tienen los materiales didácticos en el momento de enseñar matemáticas.

Se abordaron los siguientes temas con niños de grado segundo y tercero de primaria, teniendo como material de apoyo la Yupana, ábaco Inca.

6.1. Lectura y Escritura de Números

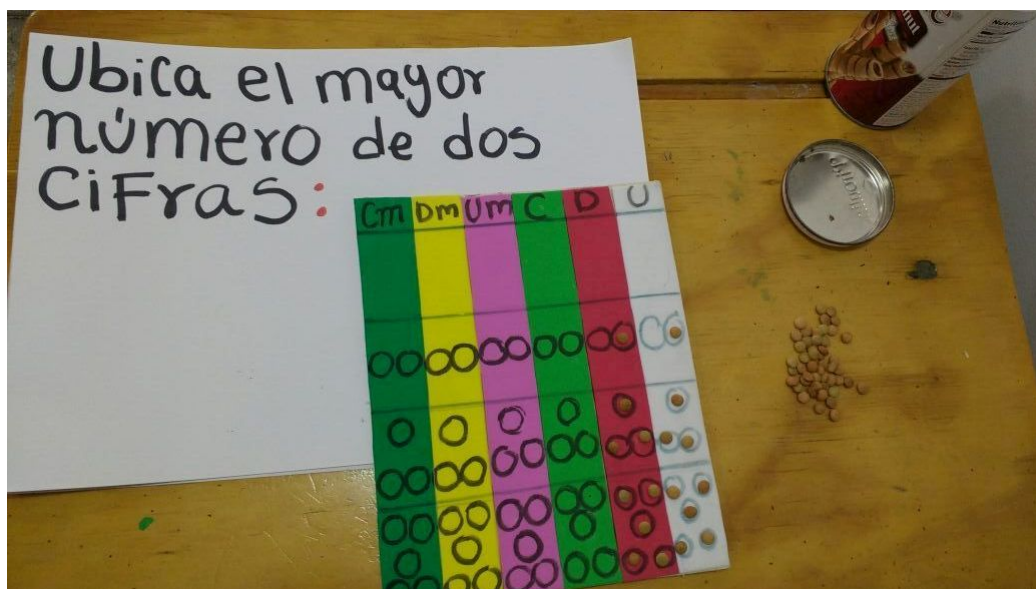


Figura 6.1: Ilustración 1. Representación de números

El niño comprende cuál es el número mayor que se puede escribir con cinco, cuatro, tres, dos y una cifra, del mismo modo, cuál sería el número menor y establece orden entre los números. Concluye que los números naturales son ordenados.

El estudiante logra representar concretamente en la Yupana el valor posicional en el sistema de numeración decimal.

Así mismo, la representación pictórica de los números contemplados en los Estándares Básicos de Competencias del MEN para este nivel.

Ejemplo 1

Se presenta el ejercicio a los niños.

Tema: Comparación de números naturales.

Números de una cifra.

Escribe los símbolos $<$, $>$, $=$ según corresponda.

a. 5 ___ 5

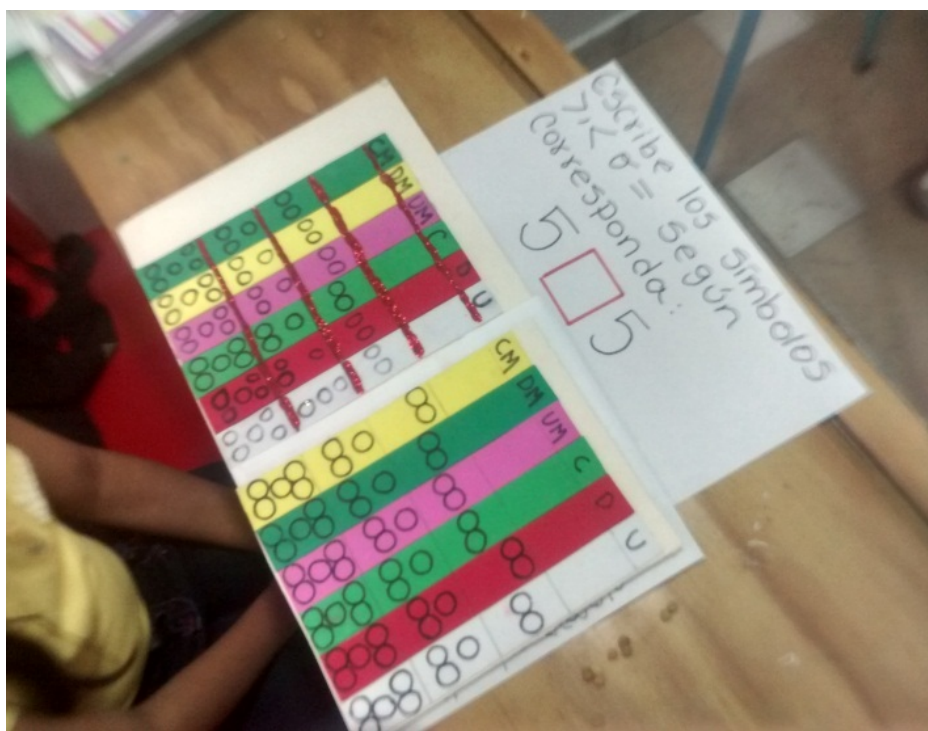


Figura 6.2: Ilustración 2. Comparación de números naturales.

La niña resuelve el ejercicio de comparación de números naturales de la siguiente manera:



Figura 6.3: Ilustración 3. Comparación de números naturales.

Entiende que debe ubicar los números en la primera casilla de cada Yupana, la que corresponde a las unidades, para concluir gráficamente que son cantidades iguales, pues necesita del mismo número de lentejas para representarlos.

b. $9 _ 7$



Figura 6.4: Ilustración 4. Comparación de números naturales.

Opera de la misma manera, compara cantidades y establece cuál es el número menor y cuál el mayor.

La estudiante representa los números de una cifra utilizando la casilla de las unidades, comprende el valor posicional de los números.

Números de dos cifras

Ejemplo 2:

Escribe los símbolos $<$, $>$, $=$ según corresponda

a. $11 _ 23$

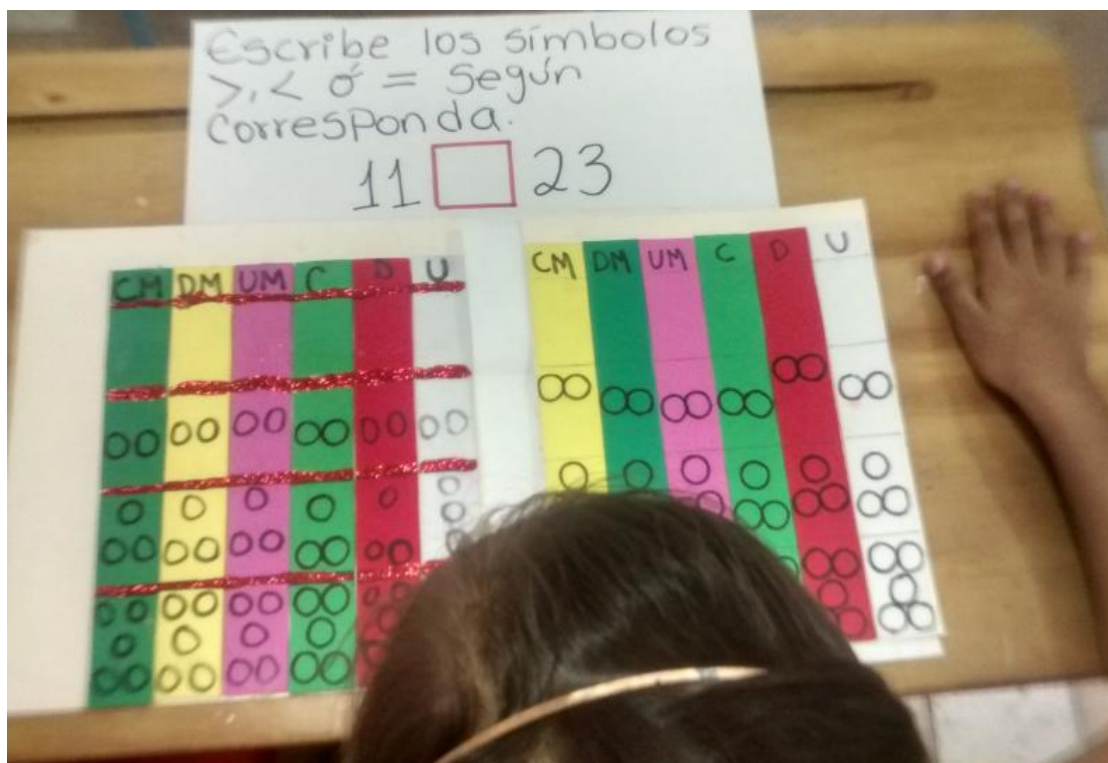


Figura 6.5: Ilustración 5. Comparación de números naturales.

Escribe cada uno de los números teniendo en cuenta que el número que ocupa la posición de las decenas equivale a 10 unidades.

Compara cantidades, inicialmente las que se representan en la decena, pues cada lenteja es 10 veces mayor a la de las unidades, como el número 1 que ocupa la posición de las decenas requiere de menos lentejas que el número 2 que igualmente está en la posición de las decenas, establece entonces que 11 es menor que 23.

b. 23 ___ 11

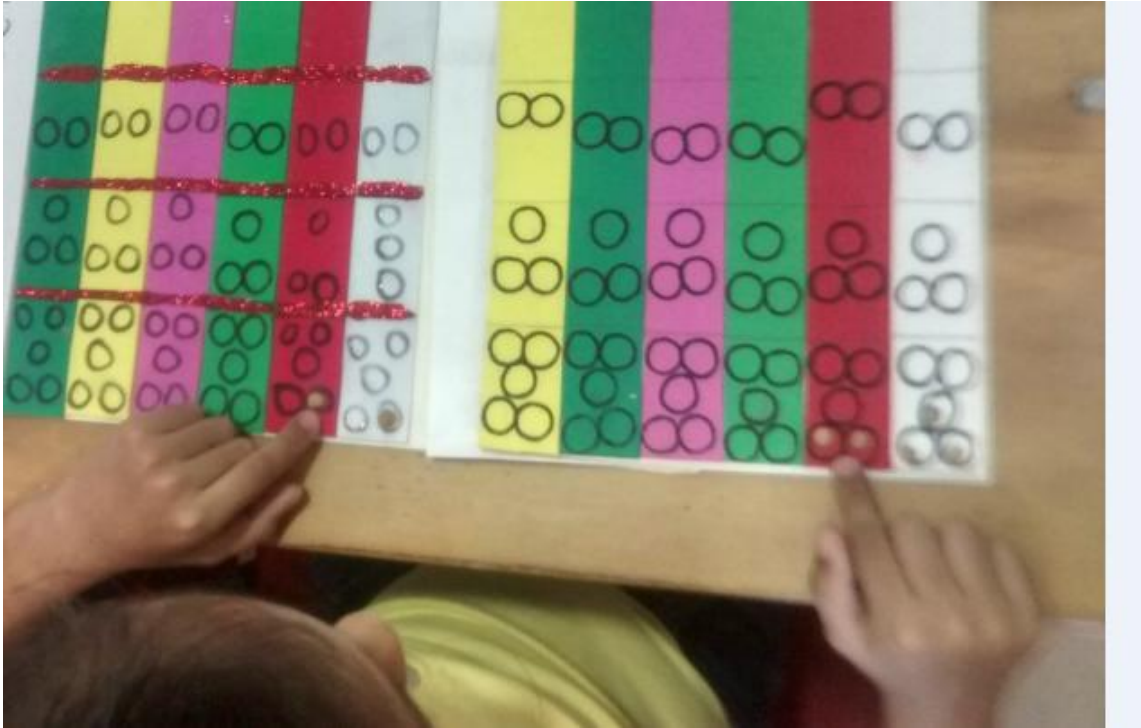


Figura 6.6: Ilustración 6. Comparación de números naturales.

Se pidió que realizara el ejercicio cambiando el orden de los números, nuevamente realiza el ejercicio y llega el mismo resultado, el número 23 es mayor que 11, dicho de otra forma, el 11 es menor que 13.

Si el primer número que se compara es menor que el segundo el signo correspondiente es “menor que”, si por el contrario, el primer número es mayor que el segundo, el signo que corresponde es “mayor que”.

Números de tres cifras

Ejemplo 2:

Escribe los símbolos $<$, $>$, $=$ según corresponda

a. 284 ___ 286

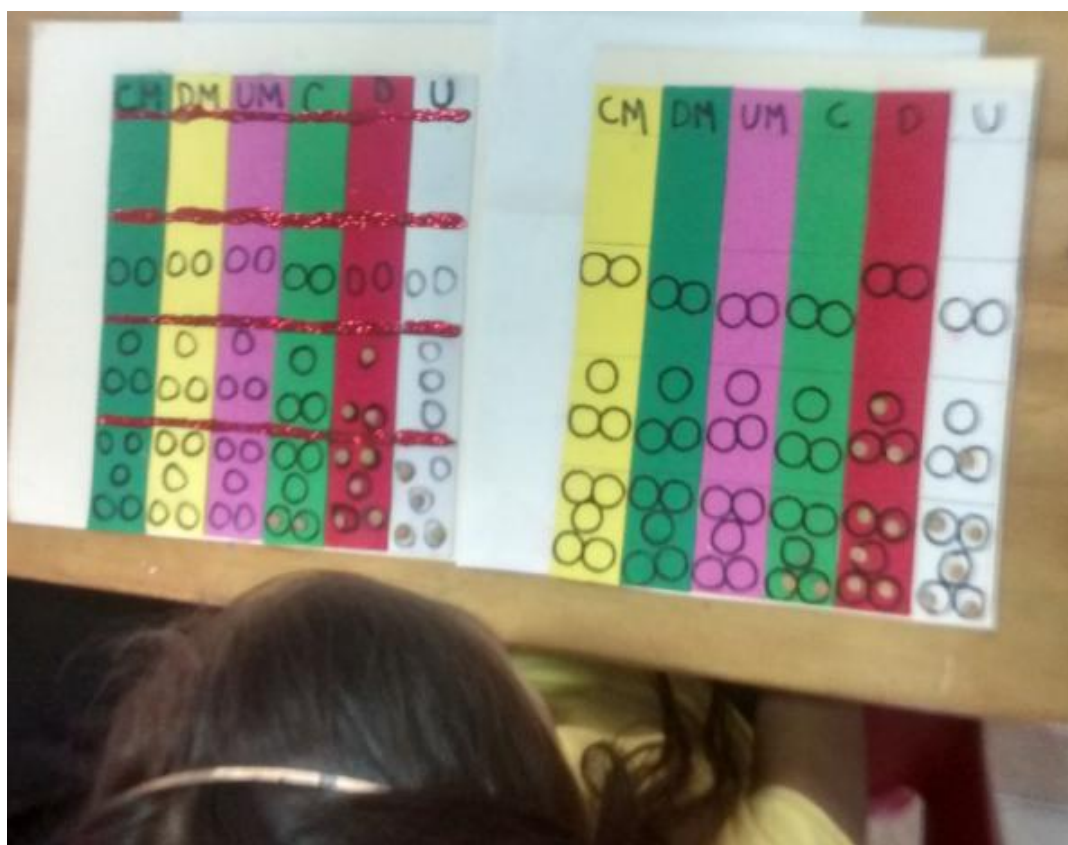


Figura 6.7: Ilustración 6. Comparación de números naturales.

Cuando la niña empezó a representar cada una de los números, sabía la posición que ocupaban las cifras que los componían. Ubicó las cantidades en la Yupana sin dificultad.

Luego comparó centenas con centenas, indicando que eran cantidades iguales, por lo que recurrió a las decenas que igualmente representaban el mismo número. Como las centenas y las decenas eran las mismas, observó y comparó las unidades, así pudo saber que el número mayor era el que tenía más lentejas en la casilla de las unidades.

Los ejercicios se fueron colocando con mayor grado de dificultad obteniendo los mismos resultados, la niña comparaba cantidades cuando las representaba en la Yupana.

En conclusión, se puede observar a la niña desarrollando distintos ejercicios. Ordena y compara números de hasta cinco cifras; Alcanza el Estándar Básico de las Competencias

en Matemáticas propuestos en el pensamiento numérico para grados de primero a tercero, donde el niño debe reconocer los significados que tiene el número en cuanto a comparación, conteo y codificación.

Se logra alcanzar los siguientes desempeños:

- Lee y escribe números hasta de cinco cifras.
- Reconoce la cantidad que representa un número hasta de cinco cifras.
- Establece relaciones de orden entre números hasta de cinco cifras.

Adición de números naturales reagrupando

Ejemplo: Se presenta el ejercicio a la niña.

La niña debe resolver una adición de números reagrupando.

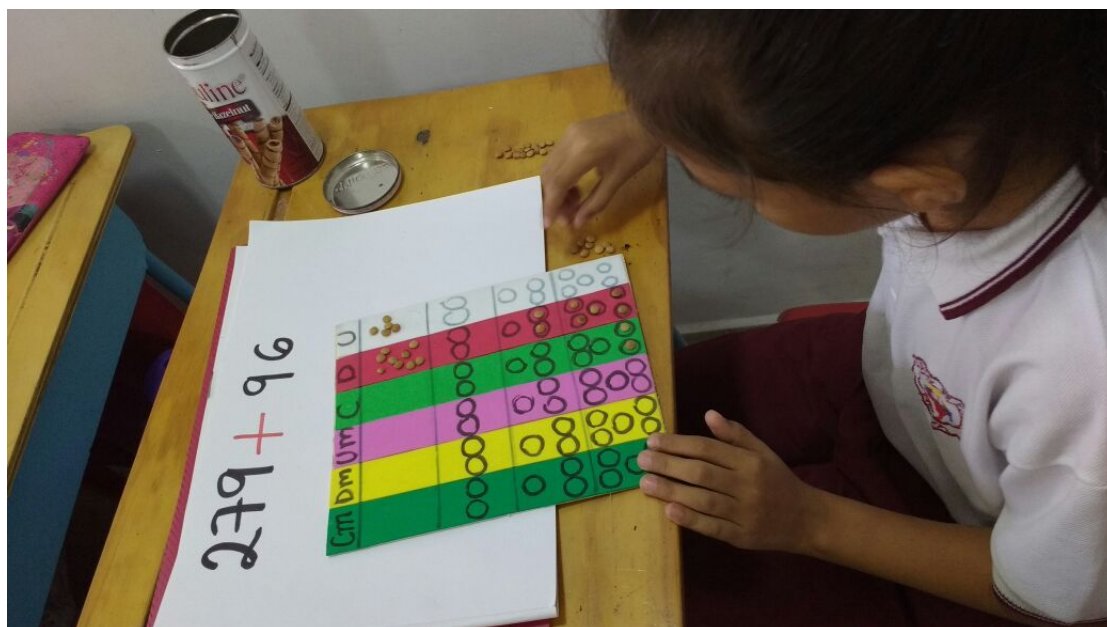


Figura 6.8: Ilustración 1. Adición reagrupando.

La niña inicia representando los sumandos en la Yupana.



Figura 6.9: Ilustración 2. Adición reagrupando.

La estudiante sabe que en el momento que la casilla de las Unidades se llene, debe reemplazar las 10 Unidades por una lenteja en las Decenas y posteriormente bajar las lentejas sobrantes de la parte superior. Lo mismo debe hacer con la casilla de las Decenas cuando se llene, reemplazar las 10 lentejas por una en las Unidades de Mil y bajar las lentejas sobrantes de la parte superior.

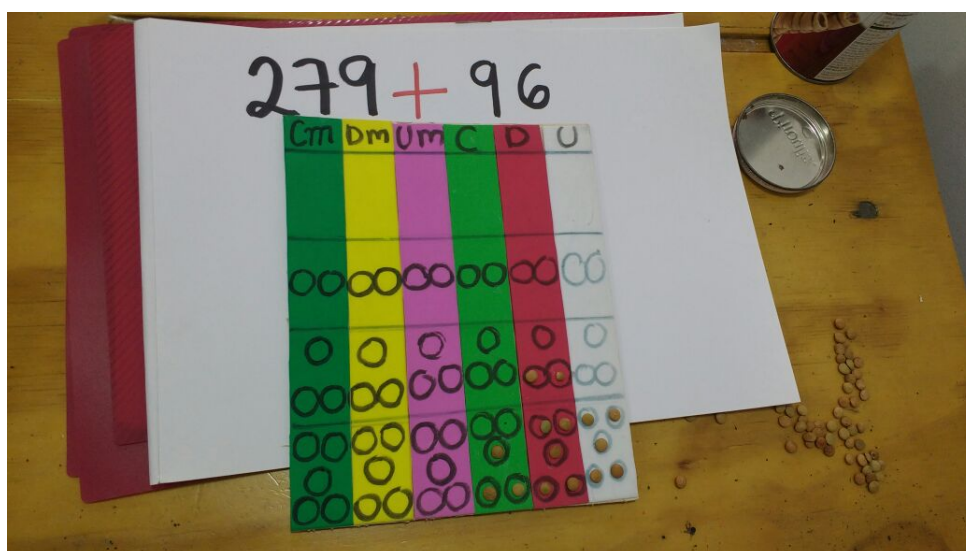


Figura 6.10: Ilustración 3. Adición reagrupando.

La respuesta es 375. Luego la estudiante con ayuda de la Yupana resuelve adiciones reagrupando, y comprende el verdadero significado de sumar llevando.

Ejemplo: Solución de Problemas:

Se hace entrega de un problema a una niña de grado tercero en donde se involucra la adición como solución del mismo.

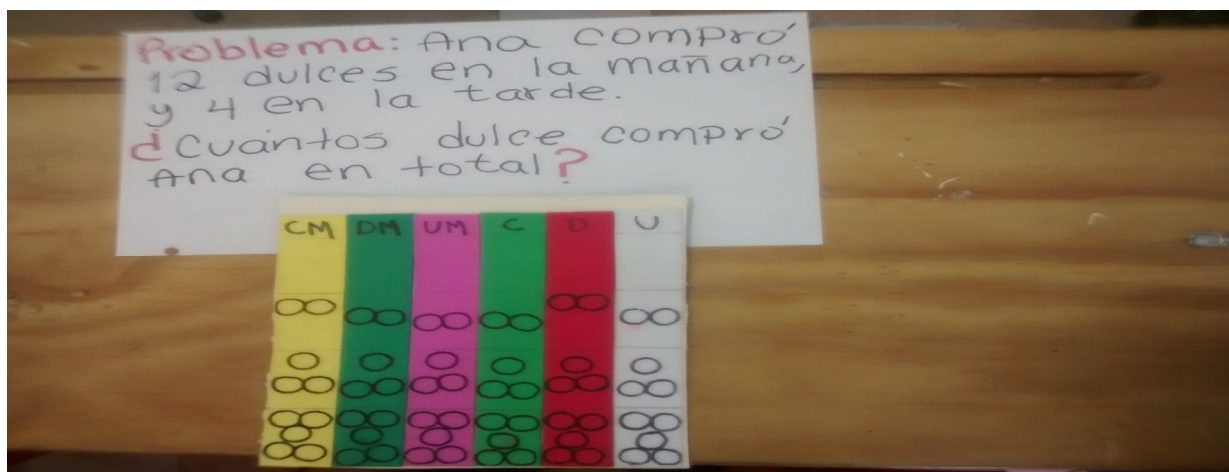


Figura 6.11: Ilustración 4. Solución problemas.

En la imagen se observa el planteamiento de un problema de la vida cotidiana relacionado con la adición, la niña debe resolverlo representando los sumandos en la Yupana así:

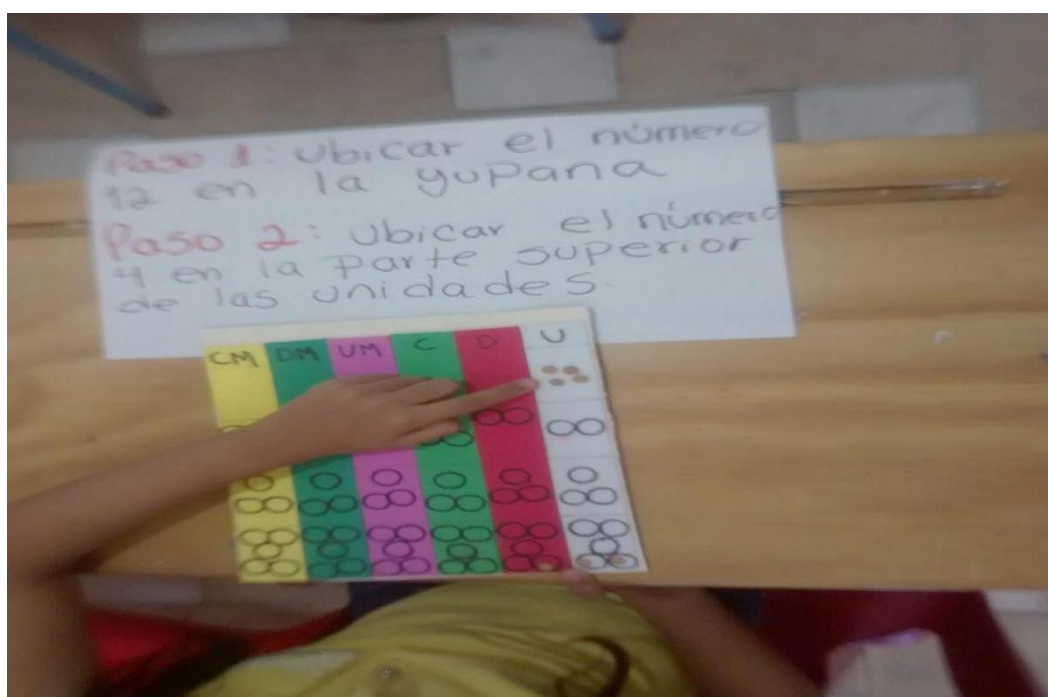


Figura 6.12: Ilustración 5. Solución problemas.

Ella representó en la Yupana el primer sumando 12 y en la parte superior el segundo sumando 4, luego la niña ya entiende que debe bajar las unidades de la parte superior para dar la solución al problema.



Figura 6.13: Ilustración 6. Solución problemas.

La respuesta es 16. En efecto, se justifica la solución de situaciones problemáticas utilizando las operaciones aditivas alcanzando así los desempeños mencionados con anterioridad.

Sustracción de números naturales

Ejemplo: Se presenta el ejercicio al estudiante.

El ejercicio consiste en resolver una sustracción prestando.

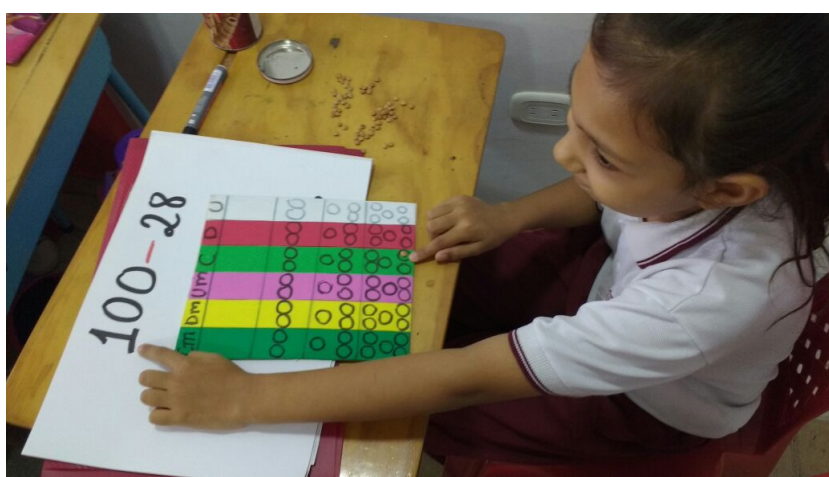


Figura 6.14: Ilustración 7. Sustracción de Números Naturales.

El niño inicia ubicando el minuendo en la Yupana.

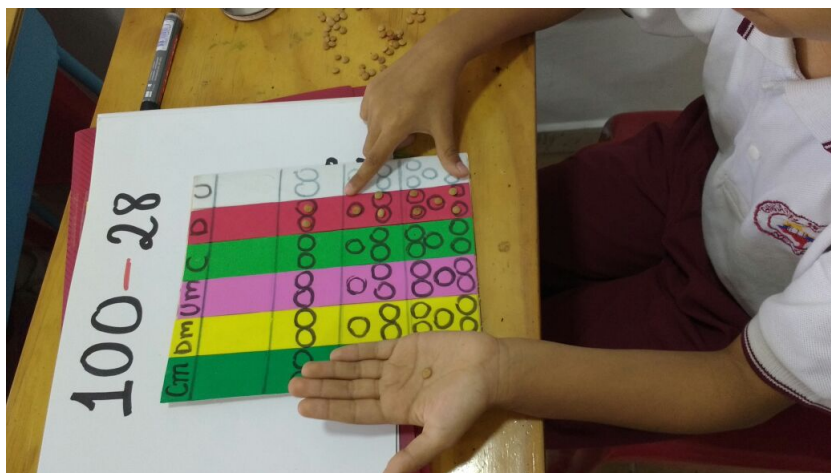


Figura 6.15: Ilustración 8. Sustracción de Números Naturales.

La niña inicia ubicando el minuendo en la Yupana, pero ya el entiende que como las unidades del minuendo son menores que las del sustraendo, debe reemplazar una lenteja de las decenas por 10 unidades para resolver la sustracción, pero también se da cuenta que en las decenas del minuendo la cifra es menor, entonces debe recurrir a las centenas. Las centenas le presta una lenteja que en realidad se convierten en 10 decenas.



Figura 6.16: Ilustración 9. Sustracción de Números Naturales.

Ya la niña toma una decena y la reemplaza por 10 lentejas en las Unidades, de esta manera ya puede retirar las cifras que le indica el sustraendo.

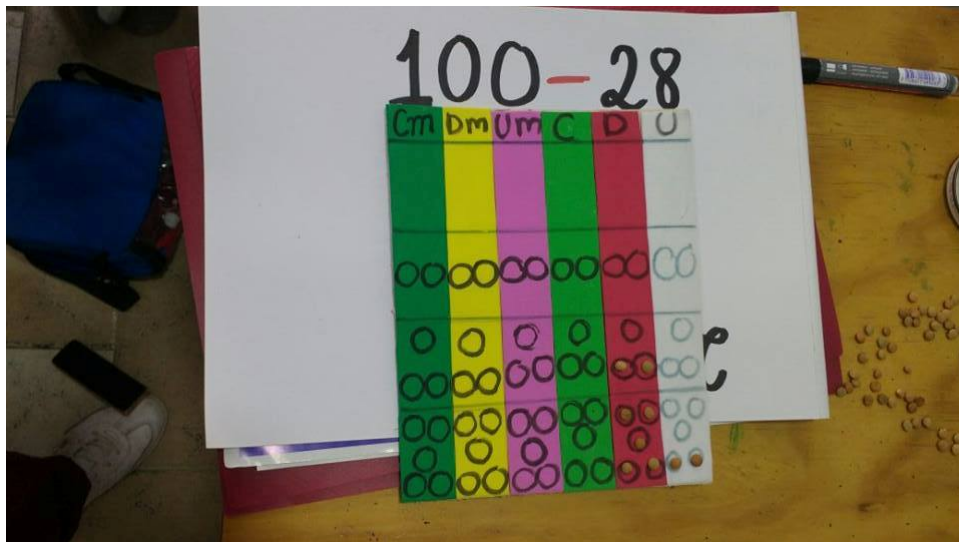


Figura 6.17: Ilustración 10. Sustracción de Números Naturales.

El resultado como se puede observar es 72. Aquí la niña entiende el verdadero significado de restar prestando, alcanzando así el desempeño mencionado que se refería a resolver operaciones que involucraran la sustracción.

Multiplicación de números naturales

Ejemplo:

Se presenta la siguiente situación problemática que involucra la multiplicación de números naturales:

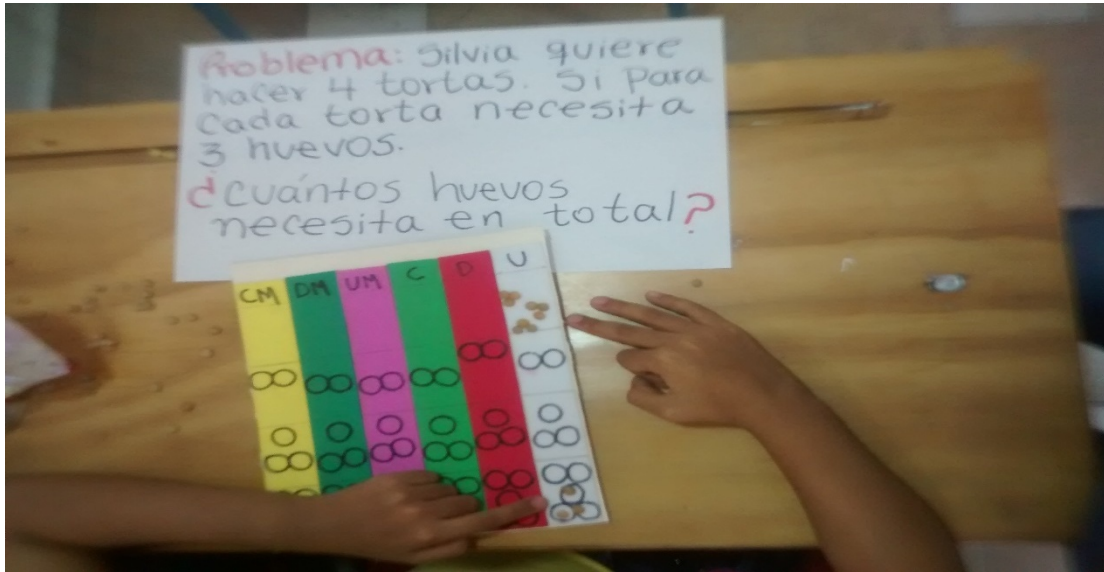


Figura 6.18: Ilustración 11. Multiplicación de Números Naturales.

La niña inicia formando 4 grupos de 3 lentejas cada uno, para luego sumar.

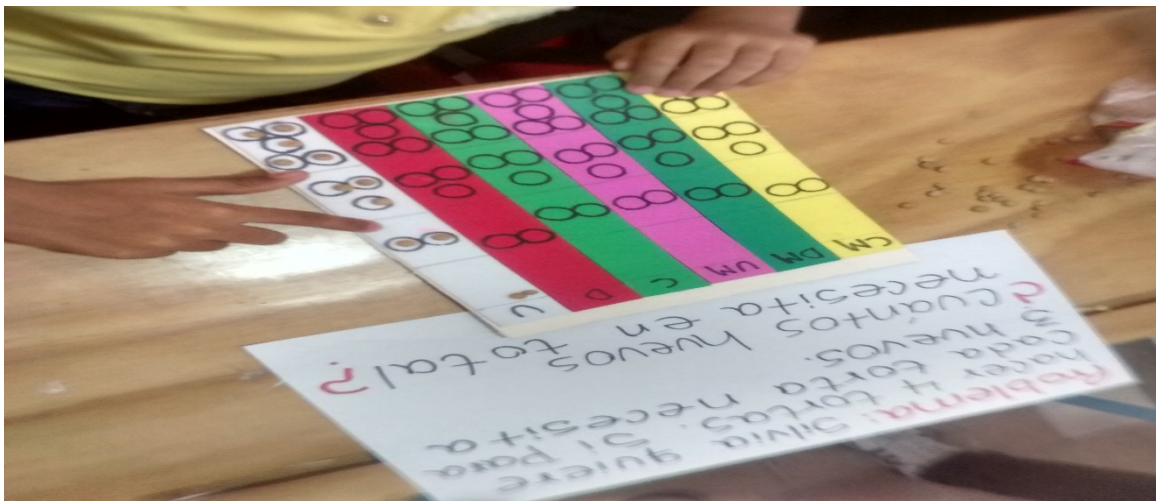


Figura 6.19: Ilustración 12. Multiplicación de Números Naturales.

Aquí se puede observar que la estudiante relaciona la multiplicación con la suma repetida. Luego, la niña resuelve la adición, para darle solución al problema.



Figura 6.20: Ilustración 13. Multiplicación de Números Naturales.

La respuesta obtenida gracias al apoyo de la Yupana fue 12. Así alcanza el estándar básico de competencia en donde el estudiante usa diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones multiplicativas.

División de números naturales

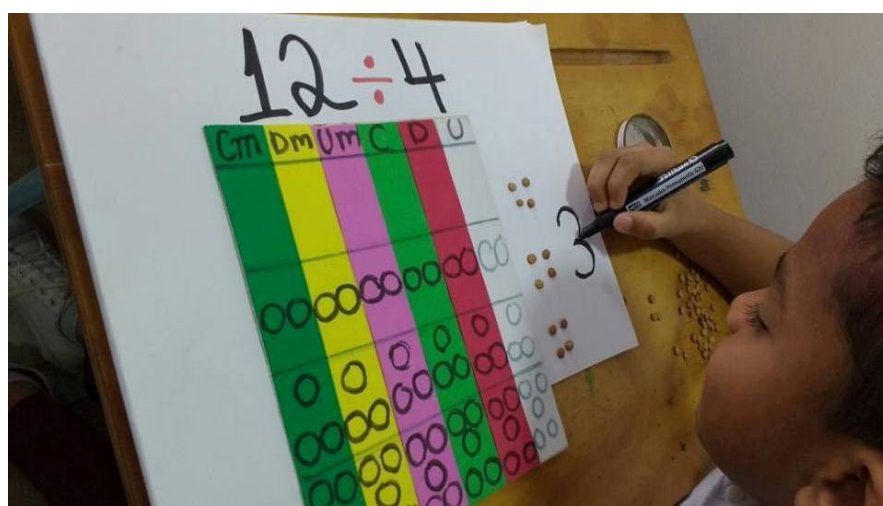
Ejemplo:

Se presenta una división de repartos iguales.



Figura 6.21: Ilustración 14. División de Números Naturales.

El niño inicialmente ubica el número 12 en la Yupana, pero ve la necesidad de tener todas las lentejas en las unidades, entonces toma la lenteja de las decenas y las convierte en 10 unidades, para poder realizar la repartición en cantidades iguales.



Al hacer la repartición el niño encontró que se pueden formar 3 grupos de 4 lentejas. De esta forma, se puede concluir que los niños reconocen patrones irregulares propios de la división, lo cual permite que cuando el estudiante se enfrente al algoritmo reconozca procedimientos que ya ha realizado con la Yupana, por lo tanto la comprende y la aplica de manera eficaz.

7.1. Recursos Humanos

- Asesor: MSc. Mauricio Penagos
- Estudiantes: Arledy Yurany Aroca Escobar, Kelly Yohana Lasso Avilés.
- Cooperador de Práctica Docente: Hugo Cantillo Higuera.

7.2. Recursos Materiales

- Computador portátil con acceso a internet.
- Impresora.
- Fotocopias.
- Vinilos de diferentes colores
- Memorias USB.
- Fichas ó canicas.
- Cartón, cartulina, o material reciclable para construcción de la Yupana.
- Libros de Consulta.
- Reuniones con el asesor.
- CDS.

- La Yupana sin duda es un ejemplo histórico de un material didáctico valioso en la actualidad, pues permite que los estudiantes adquieran o refuercen conocimiento de manera didáctica, y por ende, que el proceso enseñanza-aprendizaje sea significativo.
- La Yupana como material didáctico permite al docente la posibilidad de brindar a los niños una enseñanza práctica que los guíe y los oriente a comprender los procesos que se llevan a cabo en los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división.
- El trabajo de indagar sobre la utilización de materiales didácticos como este permite a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y futuros docente que puedan fortalecer aquellas falencias que tienen los educandos en el momento de operar ejercicios que requieren llevar cantidades, prestar y agrupar.
- La Yupana es un material didáctico que contribuye en la labor docente, pues le brinda la posibilidad de inducir al niño hacia el conocimiento, mientras él se divierte jugando y reconstruyendo los algoritmos de las operaciones básicas de la aritmética.
- Es necesario que el docente empiece a hacer uso de materiales didácticos como la Yupana, que contribuyen al mejoramiento de la calidad educativa, especialmente en el área de matemáticas y permite un aprendizaje que resulta dinámico y fácil de comprender.
- Las experiencias que se llevaron a cabo permitieron demostrar que el niño supera ciertas falencias que vemos presentes constantemente, en el aula de clase cuando queremos enseñar adiciones llevando y sustracciones prestando. Así mismo, que puedan ver la multiplicación como suma de un mismo número repetido varias veces, y la división como agrupaciones con igual número de elementos.

CONSTRUCCIÓN DE LA YUPANA

Materiales:

- Cartón
- Tijeras o bisturí.
- Pegamento.
- Vinilos de colores, amarillo, rosado, verde claro, verde oscuro, azul.
- Canicas, granos, piedrecillas, maíz (cualquier opción)
- Regla

Procedimiento de elaboración por pasos

Paso N° 1: Utilizar unas tijeras o un bisturí y recortar una pieza de cartón doble rectangular de 30 centímetros de largo por 20 centímetros de ancho.



Paso N° 5: Diferenciamos las casillas con vinilos así:

- Unidades, vinilo blanco.
- Decenas, vinilo rojo.
- Centenas, vinilo verde claro.
- Unidades, de mil vinilo rosa.
- Decenas de mil, vinilo amarillo.
- Centenas de mil, vinilo verde oscuro.
- Unidades de millón, vinilo naranja.

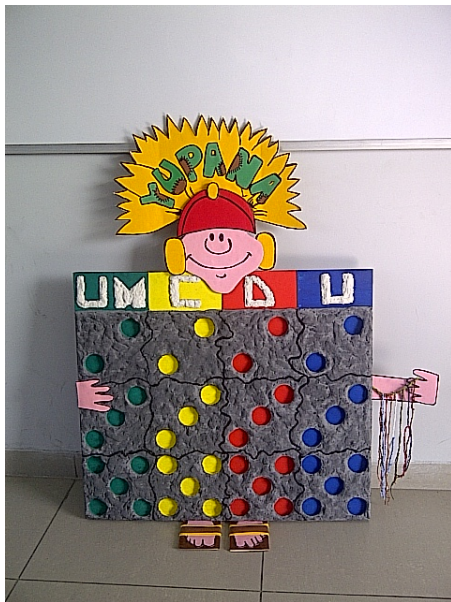
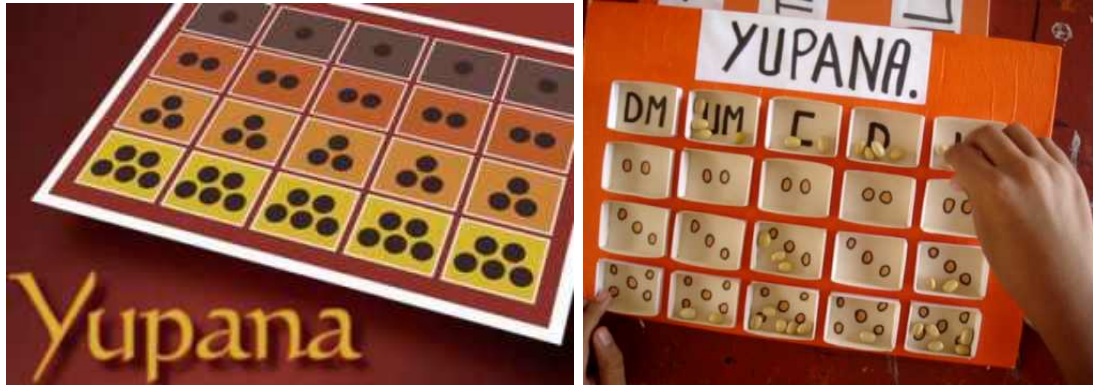
Cm	Dm	Um	C	D	U
••	••	••	••	••	••
•••	•••	•••	•••	•••	•••
••••	••••	••••	••••	••••	••••

fichas



- Se puede utilizar canicas, granitos de maíz, piedritas, lentejas, ... etc.

Fotografías de Yupanas



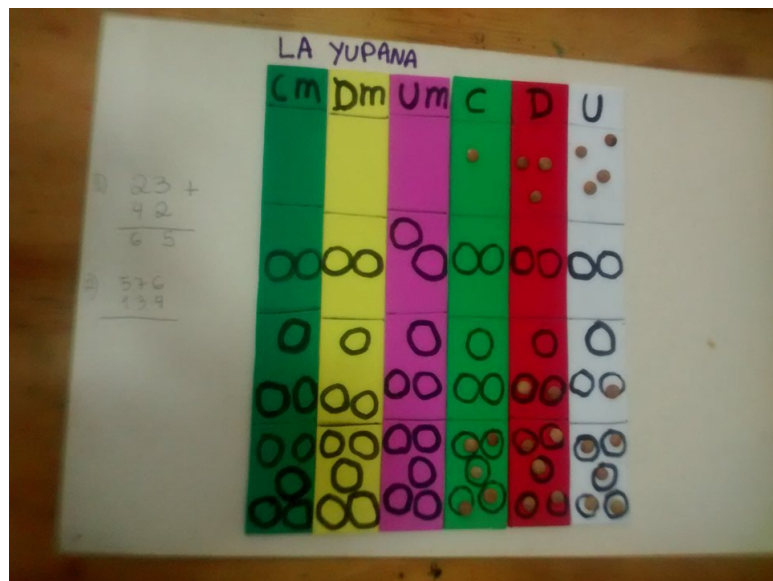


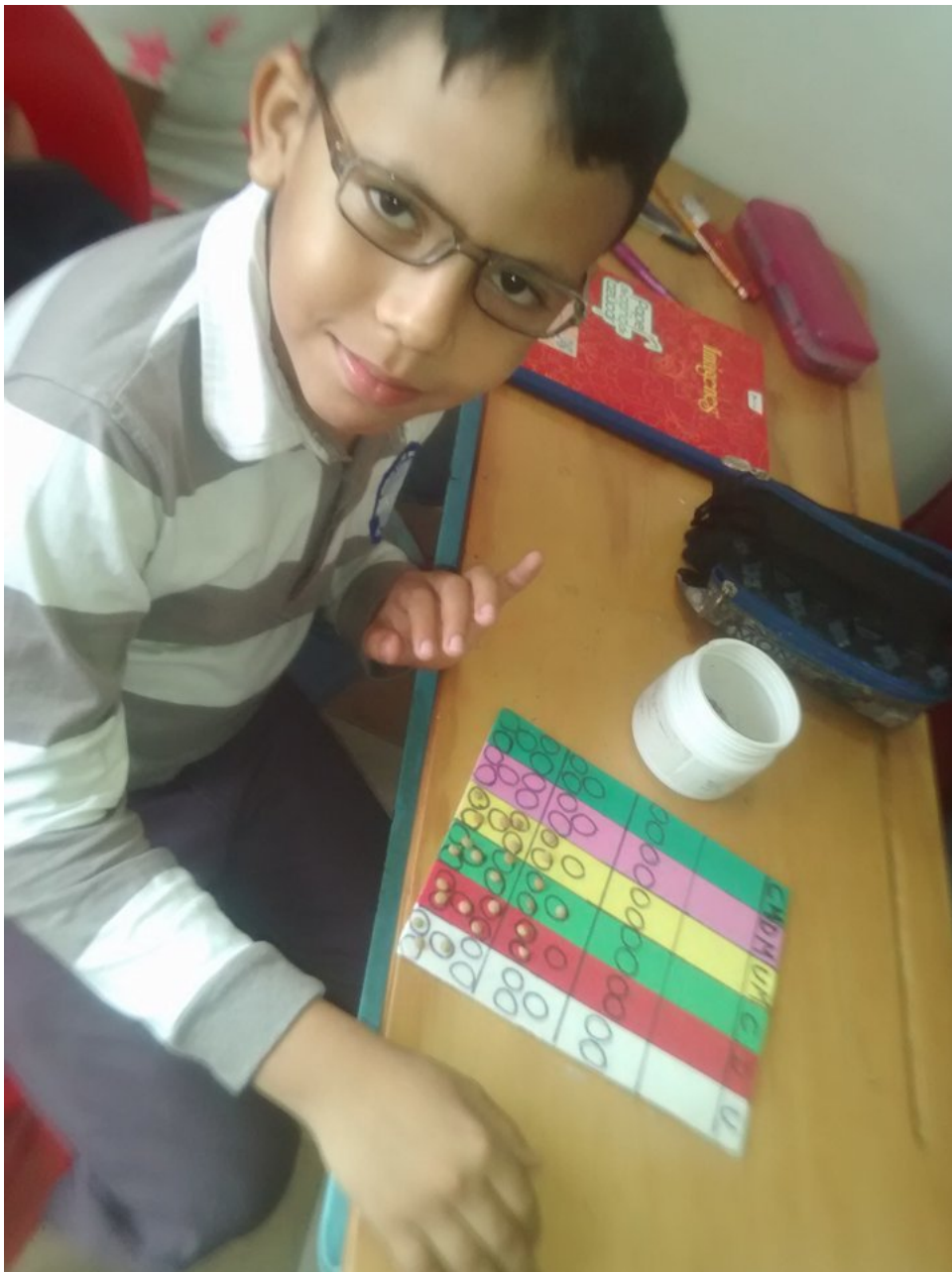
**EVIDENCIA FOTOGRÁFICA DE ESTUDIANTES UTILIZANDO LA
YUPANA**

Estudiantes de primaria, Instituto Técnico Superior Sede Los Mártires









TALLERES

TALLER LECTURA Y ESCRITURA DE NÚMEROS

Para realizar el siguiente ejercicio utilizaremos frijoles.

PARTE 1:

EN LA PRIMERA CASILLA DE LA YUPANA SE REPRESENTAN LAS UNIDADES:

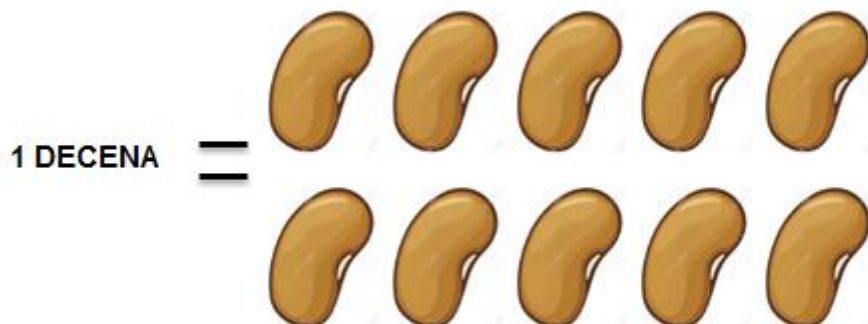
1. Representa en la Yupana todos los números de una cifra que se puedan escribir. Cada frijól representa la unidad y se coloca en un orificio de la casilla de las unidades de la Yupana.



Figura 2.1: Dibujo cómo se representan en la Yupana los números de una cifra.

PASAMOS A LA SEGUNDA CASILLA QUE CORRESPONDE A LAS DECENAS:

1 DECENA = 10 UNIDADES



2. Escribe números de dos cifras teniendo en cuenta que la casilla de las decenas representa 10 unidades. Es decir, cada fríjol en un orificio de las decenas es igual a 10 fríjoles.

2.1 Observa y responde:



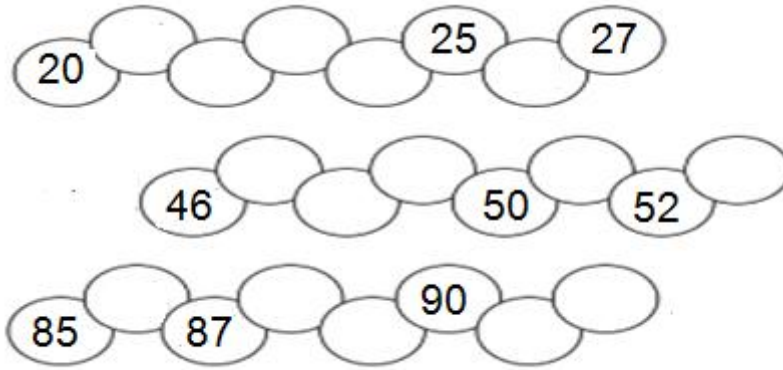
- a. ¿Cuál es el menor de los números de dos cifras que puedes escribir? _____
- b. ¿Cuál es el mayor de los números de dos cifras que puedes escribir? _____

2.2 Representemos los siguientes números en la Yupana.

11, 15, 25, 38, 56, 78, 96, 56.

2.3 Dibuja las Yupanas con cada uno de los números representados anteriormente.

2.4 Con ayuda de la Yupana completa las series en forma descendente.



2.5 Con ayuda de la Yupana, compara los siguientes números e indica con color azul el número más pequeño y con color rojo el número más grande:

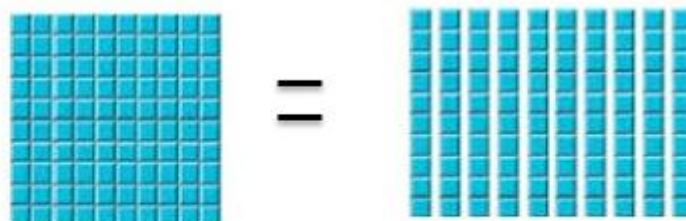
Ejemplo: 57, 56, 25, 19, 11

- a. 56, 23, 59, 10, 19
- b. 12, 89, 65, 72, 37
- c. 51, 22, 36, 67, 99
- d. 77, 87, 76, 66, 67

PARTE 2

LA TERCERA CASILLA REPRESENTA LAS CENTENAS:

1 CENTENA = 10 DECENAS = 100 UNIDADES.



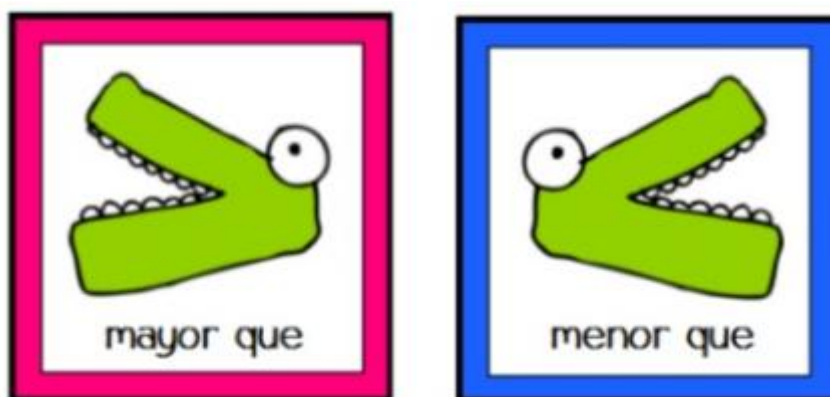
1 CENTENA = 10 DECENAS

3. Representemos los siguientes números con ayuda de la Yupana.

101, 152, 285, 738, 756, 178, 960, 556.

Compara con tus amigos cada representación.

3.1 Con ayuda de la Yupana, compara los siguientes números e indica con color verde el número mayor > y con color amarillo el número menor <.



- a. 343 _____ 661
 b. 456 _____ 677 _____ 801
 c. 106 _____ 109 _____ 123
 d. 742 _____ 327

e. 777 _____ 767

3.2 Completa las series, con ayuda de la Yupana:

Ascendente

602		604						610
						617		

Descendente

777	→	776	→	775	→		→		→		→		→	770
769	→		→		→		→		→		→		→	

3.3 Observa y responde:



- ¿Cuál es el menor de los números de tres cifras que puedes escribir? _____
- ¿Cuál es el mayor de los números de tres cifras que puedes escribir? _____

Analiza y responde:

- 1 Decena es igual a _____
- 1 Centena es igual a _____ decenas.
- 1 Centena es igual a _____ unidades.
- Si tengo 9 cajas de dulces y en cada una vienen 10 unidades. ¿Cuántos dulces tengo en total? Si 10 cajas vienen en un paquete, ¿Cuántos cajas tengo en 7 paquetes? ¿Cuántos dulces tengo en total en las diez cajas?

PARTE 3

LA CUARTA CASILLA DE LA YUPANA REPRESENTA LAS UNIDADES DE MILLAR

1 UNIDAD DE MILLAR = 10 CENTENAS = 100 DECENAS = 1.000 UNIDADES

4. Completa la serie, apóyate en la Yupana:

1.678				1.682	
		1.686			1.689

2.056				2.060	
		2.064		2.066	

5.699			5.702		
	5.706			5.709	

4.1 Con ayuda de la Yupana, compara los siguientes números e indica con color verde el número menor < y con color amarillo el número mayor >.



- a. 1.343 _____ 6.612
 b. 7.766 _____ 7.776 _____ 7.786
 c. 4.356 _____ 7.677 _____ 8.001
 d. 1.006 _____ 1.009 _____ 1.023
 e. 7.842 _____ 3.727
 f. 7.777 _____ 7.677

4.2 Observa y responde:

- a. ¿Cuál es el menor de los números de cuatro cifras que puedes escribir? _____
- b. ¿Cuál es el mayor de los números de cuatro cifras que puedes escribir? _____



4.3 Con ayuda de la Yupana descompón los siguientes números y escribe cómo se leen.

<p>6.345 = ___ Unidad de Millar + ___ Centenas + ___ Decenas + ___ Unidades</p> <p>_____ UM + _____ C + _____ D + _____ U</p> <p>_____ + _____ + _____ + _____</p> <p>6.345 se lee _____</p>
--

<p>7.677 = ___ Unidad de Millar + ___ Centenas + ___ Decenas + ___ Unidades</p> <p>_____ UM + _____ C + _____ D + _____ U</p> <p>_____ + _____ + _____ + _____</p> <p>7.677 se lee _____</p>
--

4.927 = ___ Unidad de Millar + ___ Centenas + ___ Decenas + ___ Unidades

_____ UM + _____ C + _____ D + _____ U

_____ + _____ + _____ + _____

4.927 se lee _____

9.081 = ___ Unidad de Millar + ___ Centenas + ___ Decenas + ___ Unidades

_____ UM + _____ C + _____ D + _____ U

_____ + _____ + _____ + _____

9.081 se lee _____

5.009 = ___ Unidad de Millar + ___ Centenas + ___ Decenas + ___ Unidades

_____ UM + _____ C + _____ D + _____ U

_____ + _____ + _____ + _____

5.009 se lee _____

TALLER

Tema: Problemas De Sumas Y Restas.

Utiliza la Yupana para resolver los siguientes problemas.



Rocío tiene tres manzanas en una mano
En la otra mano tiene cuatro más.
¿Cuántas manzanas tiene en total?

- ¿ De qué nos habla el problema ?

Nos habla de _____

- Dibuja en el recuadro lo que nos cuenta el problema

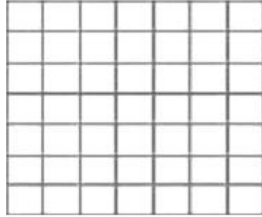
- ¿Cuál crees que será el resultado final? _____

COLOREA LA RESPUESTA

- ¿Qué nos pide que hagamos ?:

 juntar
 quitar

- Entonces tenemos que

 sumar
 restar
AHORA VAMOS A HACER LA CUENTA:

- Con el resultado que has logrado:

1.- Contesta la pregunta del problema

Tenemos _____

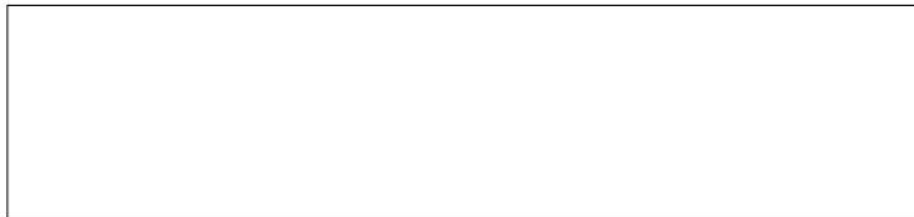
2.- ¿Acertaste antes de hacer la cuenta? SI NO

3.- ¿Te acercaste mucho o poco? MUCHO POCO

Una gallina tuvo doce pollitos y otra catorce. ¿Cuántos pollitos tuvieron entre las dos gallinas?

- ¿De qué nos habla el problema? _____

- Dibuja en el recuadro lo que nos cuenta el problema



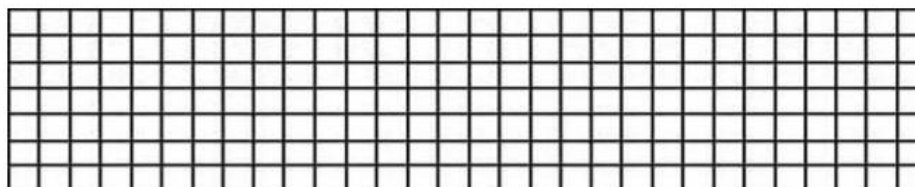
- ¿Qué nos pide que hagamos ?: (Tacha lo que no sea).

 juntar
 quitar

- Entonces tenemos que: (Tacha lo que no sea).

 sumar
 restar

- Vamos a hacer la cuenta:



- Ahora con el resultado vamos a contestar la pregunta:

Tenemos _____

Tema: Multiplicación Y División**Encierra la respuesta correcta:**

1. Una caja tiene 3 lápices. Cuántos lápices habrá en 61 cajas?
A) 300
B) 66
C) 56
D) 183
2. Una niña tiene 12 sacos de bolitas con 11 en cada saco, Cuántas tiene en total?
A) 20
B) 132
C) 92
D) 88

Resuelve:

3. Pepe tiene 973 bolitas y las quiere repartir entre 23 personas. Cuántas bolitas lleva cada una de las personas? Persona lleva 42 bolitas y sobran 7
4. Adrián tiene 20 pelotas de tenis las quiere repartir entre 10 personas. Cuántas pelotas lleva cada persona?

5. En mi jardín tengo 21 manzanos como este. Cuántas manzanas puedo recoger?



6. Gabriel quiere saber cuánto cuestan las zapatillas. El vendedor le ha dicho que cuestan el triple que los zapatos. Cuánto cuestan las zapatillas?



BIBLIOGRAFÍA

- [1] Matemáticas 2. Proyecto los caminos del saber, Editorial santillana, 2014.
- [2] Matemáticas 3. Proyecto los caminos del saber, Editorial santillana, 2014.
- [3] Carlos Radicatti (S.F) .El sistema contable de los incas “Yupana y quipu”. Sociedad peruana de historia.
- [4] David Ausubel, (1983). Teoría del aprendizaje significativo. Nueva York.
- [5] Ministerio de educación nacional. Estándares básicos de competencias en matemáticas.
- [6] Ministerio de educación nacional. Serie lineamientos curriculares de matemáticas.
- [7] Jessenta Lozzada y Clely Ruiz. Estrategias didácticas para la enseñanza de la multiplicación y división en los alumnos de 1er año. Abril de 2011. Trabajo de grado.
- [8] Darwin Mosquera y Luis Enrique Leyva. Estrategias didácticas para la enseñanza de la multiplicación y división en el grado tercero de educación básica primaria. Trabajo de Grado.
- [9] Vilchez Chumacero (S .F). Utilización de la Yupana como material didáctico en la enseñanza de la matemática en alumnos de segundo grado de primaria en instituciones educativas de Huacho. Tesis de Doctorado. Perú 2013.
- [10] Linda Droguett Latorre, Blog Matemática Andina. Doctora en Educación por la Universidad del País Vasco y Magister en Didáctica de la Matemática, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- [11] Aitken-Soux y Ccama (1990). “Abaco Andino”, instrumento andino ancestral de cómputo. Bolivia.
- [12] Laua Laurencich (2007). II ragnò nelle antiche culture andine: “un tratteggio”. Roma.
- [13] Viviana Moscovich. (2006). Yupana, tabla de contar inca. Revista Andina, 43, 93-127