GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS

CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO	**AP-BIB-FO-06**	**VERSIÓN**	**1**	**VIGENCIA**	**2014**	**PÁGINA**	**1 de 1**

Neiva, Septiembre 16 del 2016

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Las suscritas:

Lorena Chavarro Bermeo, con C.C. No. 1075270748 y Nohora Liliana Laiton Cuadrado, con C.C. No. 1079410044, autoras del trabajo de grado titulado Construcción de las Cónicas con Regla y Compás, presentado y aprobado en el año 2016 como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

• Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Nohora Liliana Laitón C.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Lorena Chavarro Bermeo

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Construcción de las Cónicas con Regla y Compás

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Chavarro Bermeo	Lorena
Laiton Cuadrado	Nohora Liliana

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutiérrez Hoyos	Hernando

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciada en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2016 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 39

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general _**X**_ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Regla	Rule	**6.** Geometría Analítica	Analytical Geometry
2. Compás	Compass	**7.** Secciones Cónicas	Conic Sections
3. Construcciones	Constructions	**8.** Demostraciones de Dadenlin	Dandelin's Demonstrations
4. Matemática Griega	Greek Mathematics	**9.** Sección de un Cono	Section of a Cone
5. Algebra Moderna	Modern Algebra	**10.** Propiedad Focal	Focal property

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Las construcciones con regla y compás hacen parte de las matemáticas clásicas griegas, temas de los cuales se ocuparon Arquímedes, Euclides, Hipócrates, Aristarco y Pappus entre otros. Estas dieron origen a los Tres Problemas Clásicos de la Matemática Griega, los cuales fueron resueltos, muchos siglos después de haber sido propuestos, gracias a la aparición de nuevas herramientas, métodos y procedimientos desarrollados en la rama de la Matemática que hoy se conoce como Algebra Moderna; poniendo en evidencia la imposibilidad de la realizar algunas construcciones con regla y compás

Para la realización de este trabajo es necesario poseer destreza manual en la utilización de instrumentos como la regla, el compás y la escuadra, la cual debe desarrollar el profesor de Matemáticas.

Las secciones Cónicas son un tema central de la Geometría Analítica tradicional. Una forma de comprender las propiedades intrínsecas de cada curva es conociendo las condiciones que definen cada una de ellas. Abordar su construcción con regla y compás hace un aporte significativo a este conocimiento.

Las demostraciones de Dandelin para las cónicas recurren a la definición primitiva de cónica (Sección de un Cono) para demostrar las propiedades focales de cada una de ellas.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

Constructions with ruler and compass are part of the classical Greek mathematics; these topics were addressed by Archimedes, Euclid, Hippocrates, Aristarchus and Pappus among others. They originated the three classical problems of Greek mathematics, which were resolved many centuries after they were proposed due to the creation of new tools, methods and procedures developed in the branch of mathematics known as Modern Algebra; evidencing the inability of ruler and compass in the creation of certain constructions.

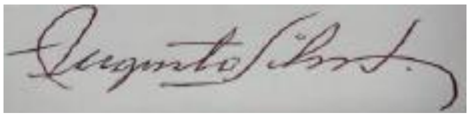
For the realization of this work it is necessary to have manual dexterity in the use of instruments such as rule, compass and square, which must developed by mathematics teacher.

Conic sections are a central subject of traditional analytic geometry. One way to understand the intrinsic properties of each curve is to know the conditions that define them. Addressing its construction with ruler and compass makes a significant contribution to this knowledge.

Dandelin’s demonstrations for conics are based on the primitive definition conical (section of a cone) to demonstrate the focal properties of each.

APROBACIÓN DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Augusto Silva Silva

Firma: 

Nombre Jurado: Hernando Gutiérrez Hoyos

Firma: 

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcción de las Cónicas con regla y compás

Nohora Liliana Laiton Cuadrado
Lorena Chavarro Bermeo

Neiva, Huila
2016

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Construcción de las Cónicas con regla y compás

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Nohora Liliana Laiton Cuadrado
20112107142
Lorena Chavarro Bermeo
20111100462

Asesor:
Profesor Augusto Silva Silva

Neiva, Huila
2016

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Septiembre de 2016.

AGRADECIMIENTOS

A punto de culminar una etapa importante de nuestras vidas, aprovechamos este espacio para agradecer a todas aquellas personas que con sus aportes contribuyeron a nuestra formación e hicieron posible el cierre de este ciclo, lo que es motivo de celebración para familiares, amigos y por supuesto para nosotras.

Agradecemos a nuestros padres por su apoyo, esfuerzo, dedicación, paciencia, por esa inmensa colaboración y por alentarnos a seguir adelante aún en los momentos con dificultades durante todo el tiempo de permanencia en la universidad.

Agradecemos a los profesores de la Licencitura en Matemáticas por sus enseñanzas y por contribuir a nuestra formación personal y profesional, especialmente al profesor Augusto Silva Silva por su paciencia, dedicación y en el tiempo invertido en la elaboración de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El Presente Trabajo de Grado, denominado Construcción de las Cónicas con regla y compás pretende hacer un aporte para rescatar en la educación media el olvidado tema del manejo, con cierto grado de habilidad, de la regla y el compás.

El trabajo consta de tres capítulos así:

- **Capítulo 1.** Construcciones Elementales: En el se hace una presentación de la temática en general, incluye una reseña breve de los tres problemas Clásicos de la Matemática Griega. Se presentan además las construcciones más elementales que son posibles con la regla y el compás como son: Punto medio y mediatriz de un segmento, perpendiculares y paralelas a una recta dada; suma, resta, multiplicación y división de segmentos y la raíz cuadrada. Por considerarlo de interés general se incluye al final del capítulo algunas construcciones relacionadas con el Número de Oro y los rectángulos Áureos.
- **Capítulo 2.** Construcción de las Cónicas: Es el capítulo central del trabajo, a éste capítulo se debe el nombre de trabajo. De cada Cónica se presentan varias construcciones. Para el caso de la elipse y de la hipérbola se incluye dos construcciones conocidas en la literatura sobre el tema como construcciones Neusis.
- **Capítulo 3.** Las demostraciones de Dandelin para las Cónicas: Como se sabe las secciones cónicas pueden concebirse como la intersección de un cono circular recto con cierto tipo de planos. A partir de ésta idea es posible demostrar la propiedad focal de cada cónica de una forma muy simple. Esta es la temática del último capítulo del trabajo.

OBJETIVOS

Objetivo General

- Recrear las orientaciones e instrucciones elementales necesarias y suficientes para construir con regla y compás las curvas genéricamente llamadas Cónicas: Parábola, Elipse e Hipérbola.

Objetivos Específicos

- Hacer una presentación general de la problemática de las construcciones con regla y compás incluyendo una breve reseña de los tres problemas Clásicos de la Matemática Griega.
- Presentar la forma de llevar a cabo algunas construcciones elementales con regla y compás: perpendiculares, paralelas, mediatrices, bisectrices, suma, resta, multiplicación y división de segmentos y de la raíz cuadrada.
- Presentar varias construcciones con regla y compás de las curvas: Parábola, Elipse e Hipérbola.
- Presentar las pruebas de Dandelin para las Cónicas como un apoyo didáctico adicional a la enseñanza de éste tema en la educación básica.

JUSTIFICACIÓN

La realización de este Trabajo de Grado se justifica por las siguientes razones:

1. Las construcciones con regla y compás hacen parte de las matemáticas clásicas griegas, temas de los cuales se ocuparon Arquimedes, Euclides, Hipócrates, Aristarco y Pappus entre otros.

2. Las construcciones con regla y compás dieron origen a los tres problemas clásicos griegos, los cuales fueron resueltos, muchos siglos después de haber sido propuestos, gracias a la aparición de nuevas herramientas, métodos y procedimientos desarrollados en la rama de la Matemática que hoy se conoce como Algebra Moderna; poniendo en evidencia la imposibilidad de algunas construcciones con regla y compás

3. El trabajo contempla para su realización el desarrollo de la destreza manual en la utilización de instrumentos como la regla, el compás, la escuadra y el transportador la cual debe desarrollar el profesor de Matemáticas.

4. Las secciones Cónicas son un tema central de la Geometría Analítica tradicional. Una forma segura para comprender las propiedades intrínsecas de cada curva es introducirlas insistiendo en la condición que define cada una de ellas. Abordar su construcción con regla y compás hace un aporte significativo en esta dirección.

5. Las pruebas de Dandelin para las cónicas es un tema que recurre a la definición primitiva de cónica (Sección de un Cono) para demostrar las propiedades focales de cada una de ellas.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIONES ELEMENTALES

1.1. Los Tres problemas Clásicos de la Matemática Griega

Las construcciones con regla y compás fueron una actividad privilegiada de los matemáticos griegos, razón por la cual han hecho presencia en el desarrollo de las matemáticas durante los siglos posteriores.
El uso de la regla y el compás estaban sujetas a restricciones muy severas, las cuales limitaban considerablemente las construcciones que podían hacerse.

Las restricciones son las siguientes:

1) La regla usada por los griegos, solo podía emplearse para trazar el segmento de recta que determina dos puntos. La regla no tenía marcas, luego no podía usarse para medir; la regla no podía deslizarse en el plano para trazar paralelas ni tampoco podía rotarse.

2) El compás solo se podía usar para trazar circunferencias (o arcos de circunferencia) con centro en un punto y cualquier radio. Tampoco podía usarse el compás para medir segmentos, ni para dividir segmentos, circunferencias o arcos en partes iguales.

Las anteriores restricciones dieron origen a tres problemas de construcción con regla y compás los cuales se conocen como Problemas Clásicos de la Matemática Griega. Ellos Son:

a) Duplicación del Cubo: Se conoce con el nombre de problema Deliano, por su relación con la antigua ciudad griega de Delfos, situada al pie del monte Parnaso, en donde se encontraba el más importante de los oráculos griegos puesto bajo el patrocinio de Apolo, divinidad griega, dios del día, de la poesía, de la música y de las artes.

El problema consiste, en construir con regla y compás la arista de un cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado.

b) Trisección del ángulo: Dado un ángulo cualquiera se trata de dividirlo en tres ángulos iguales usando solo la regla y el compás.

c) Cuadratura del círculo: Dado cualquier círculo, se trata de construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma área del círculo.

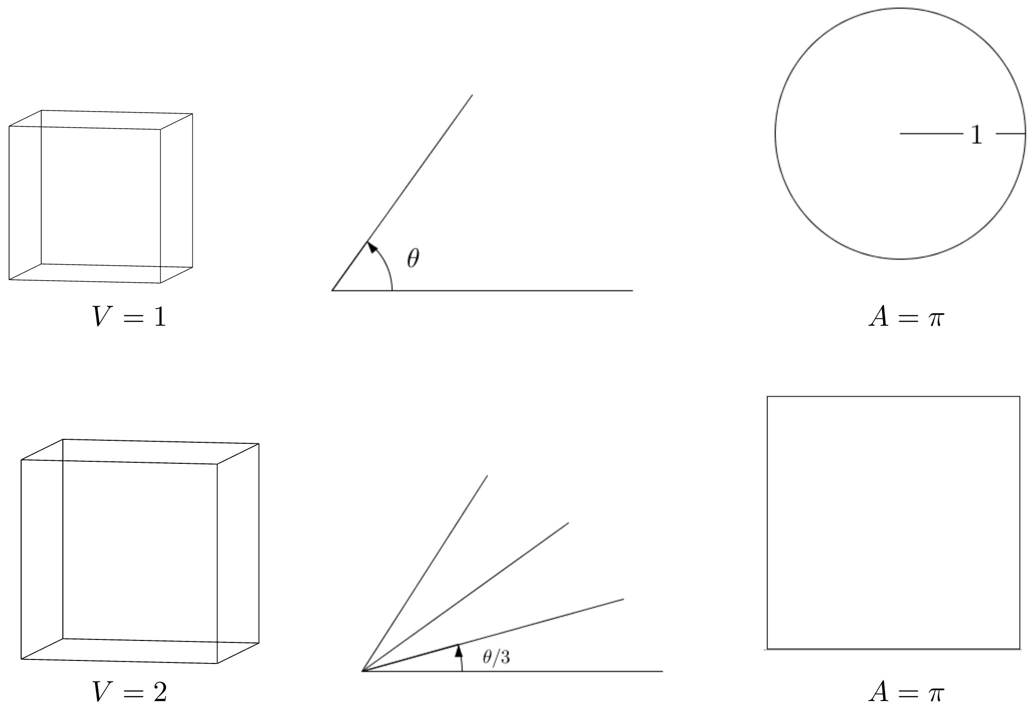


Figura 1.1

Los tres problemas clásicos griegos fueron motivo de controversia, debate y discusión entre la comunidad matemática por mas de dos mil años.

Ninguno de los tres se puede resolver por medio de construcciones con regla y compás en el sentido de la matemática griega.

La solución definitiva de éstos problemas debió esperar avances significativos de la matemática como son la Teoría de Grupos, de Anillos, de Cuerpos y la elaboración de una teoría consistente sobre números construibles, algebráicos y trascendetes; éstos temas son los que hoy se conocen con el nombre de Algebra Moderna.

Es de anotar que aunque los tres problemas no pueden resolverse con regla y compás, los mismos matemáticos griegos desarrollaron otras técnicas que les permitieron hallar soluciones para cada uno de ellos. Consisten fundamentalmente en darle a la regla y al compás otros usos como medir, alinear puntos, deslizar un segmento o en la elaboración de artefactos diseñados con propósitos específicos.

Estas Construcciones se conocen en la literatura sobre este tema como Construcciones Neusis; y, Arquímedes fué uno de los primeros en usarlas.

En el presente trabajo, usaremos la regla y el compás en la forma establecida por los griegos para las construcciones más elementales: Punto medio, mediatriz, perpendiculares, paralelas y bisectriz de un ángulo. Para otras construcciones como suma, resta, producto, cociente y raíz cuadrada usaremos también el compás para transportar segmentos.

1.2. Punto medio y Mediatriz de un segmento

Dado un segmento $\overline{AB}$ su punto medio y su mediatriz se construyen de la siguiente forma:

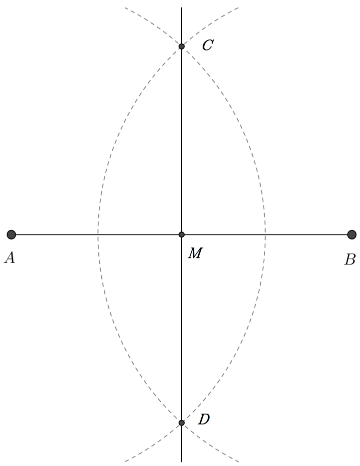


Figura 1.2

i) Con centro en A y en B y un radio conveniente se trazan arcos para determinar los puntos C y D.

ii) Trazar con la regla la recta CD.

El punto M donde esta recta corta al segmento $\overline{AB}$ es el punto medio y la recta determinada por C y D es la mediatriz. Es de anotar que todos los puntos de la mediatriz equidistan de A y B

1.3. Perpendicular a una recta por un punto exterior a ella

Dada una recta r y un punto A, fuera de ella, la perpendicular a r por el punto A se construye así:

i) Con centro en A y un radio conveniente se traza un arco que determine en r, los puntos P y Q.

ii) Con centro en P y Q, con un radio conveniente, se trazan arcos (con la misma abertura) para determinar el punto B.

La recta s determinada por A y B es la recta perpendicular deseada.

Una ligera modificacón de ésta construcción, permite trazar la perpendicular a r, sobre un punto A, que esté en r.

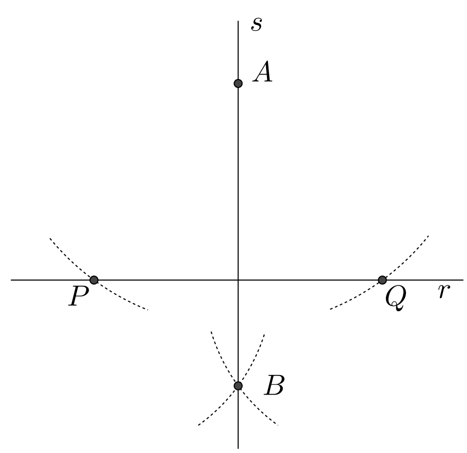
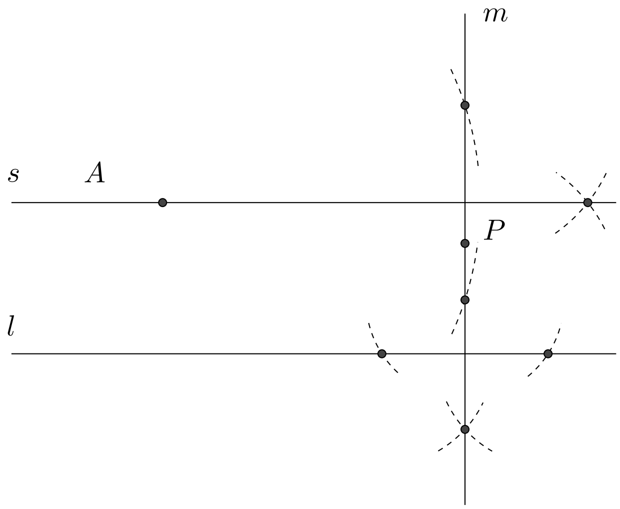


Figura 1.3

1.4. Paralela a una recta por un punto dado.

Dada una recta l y un punto A fuera de ella, la recta paralela a l y que pasa por A se construye así:



i) Escogemos un punto P, distinto de A y que no esté en l.

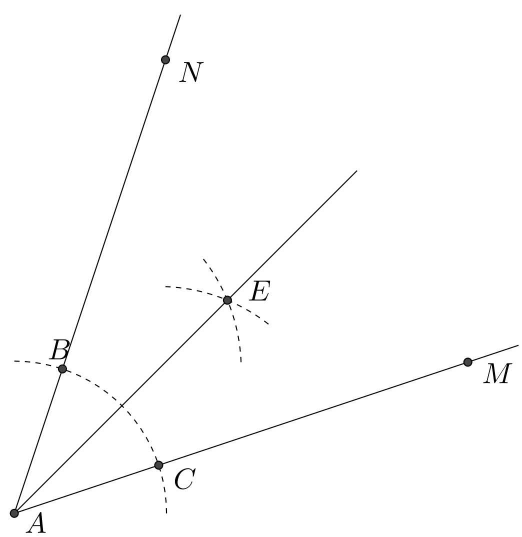
ii) Construimos la recta m perpendicular a l y que pase por P

iii) Luego construimos una recta s, perpendicular a m y que pase por A. La recta s es paralela a l.

Figura 1.4

1.5. Bisectriz de un ángulo.

Dado un ángulo NAM, su bisectriz se construye de la siguiente forma:



i) Con centro en el vértice A y cualquier radio se traza un arco para determinar los puntos B y C sobre los lados $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ del ángulo dado.

ii) Con centro en los puntos B y C se trazan arcos con la misma abertura para determinar el punto E.

iii) La recta determinada por A y E es la bisectriz del ángulo.

Figura 1.5

1.6. Construcción de un ángulo igual a uno dado.

Dado un ángulo AOB, la construcción de un ángulo igual al dado se hace así:

i) Se traza un recta s y sobre ella se ubica un punto O'

ii) Con centro en O y cualquier radio, se traza un arco para determinar los puntos P y Q sobre los lados del ángulo dado.

iii) Se transporta sobre s el segmento $\overline{OP}$, para obtener $\overline{O'P'}$ y con ese radio se traza un arco con centro en O'

iv) Sobre el arco trazado en *iii*) se transporta el segmento $\overline{PQ}$, a partir de P', para obtener el punto Q'

v) Se traza el segmento $\overline{O'Q'}$. El ángulo $Q'O'P'$ es igual al ángulo dado.

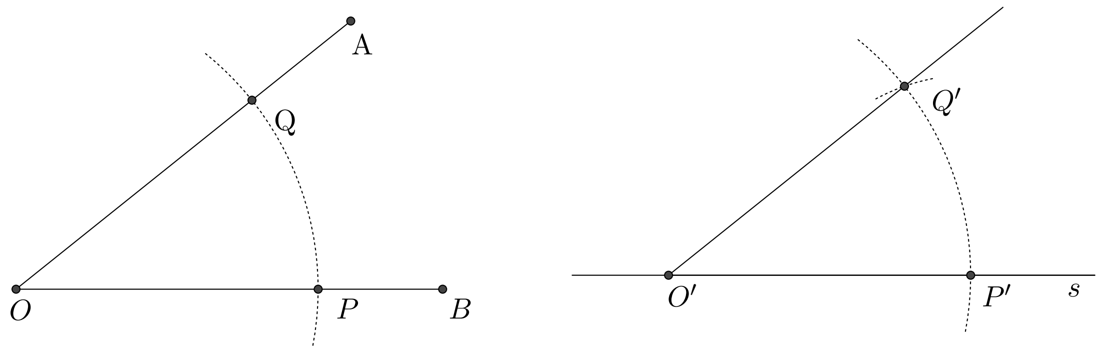


Figura 1.6

1.7. Construcción de un triángulo igual a uno dado

Dado un triángulo ABC, la construcción de un triángulo igual al dado se hace así:

i) Se traza una recta r y sobre ella se transporta el segmento $\overline{AB}$, para obtener el segmento $\overline{A'B'}$

ii) Se traza un arco con centro en A' y de radio el segmento $\overline{AC}$

iii) Se traza un arco con centro en B' y radio el segmento $\overline{BC}$

iv) El punto de intersección C' de los arcos anteriores es vértice del triángulo buscado.

El triángulo $A'B'C'$ es igual al triángulo dado.

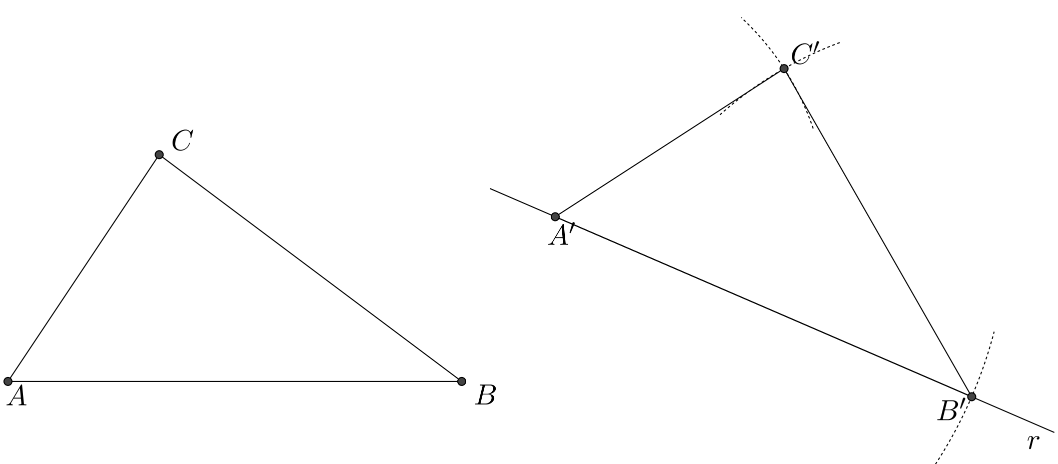


Figura 1.7

1.8. Construcción de un polígono igual a uno dado.

Dado un polígono $ABCDE$, la construcción de un polígono igual se hace así:

i) Se escoge un vértice, digamos A, del polígono dado y se trazan diagonales a los otros vértices.

ii) Se traza una recta l, sobre ella se transporta el lado $\overline{AB}$ del polígono dado para obtener el lado $\overline{A'B'}$

iii) Sobre el segmento $\overline{A'B'}$ se construye (con base en 1,7) el triángulo $A'B'C'$ igual al triángulo ABC, luego sobre $\overline{A'C'}$ se construye el triángulo $A'C'D'$ igual de ACD , y así sucesivamente.

El polígono $A'B'C'D'E'$ es igual al polígono dado.

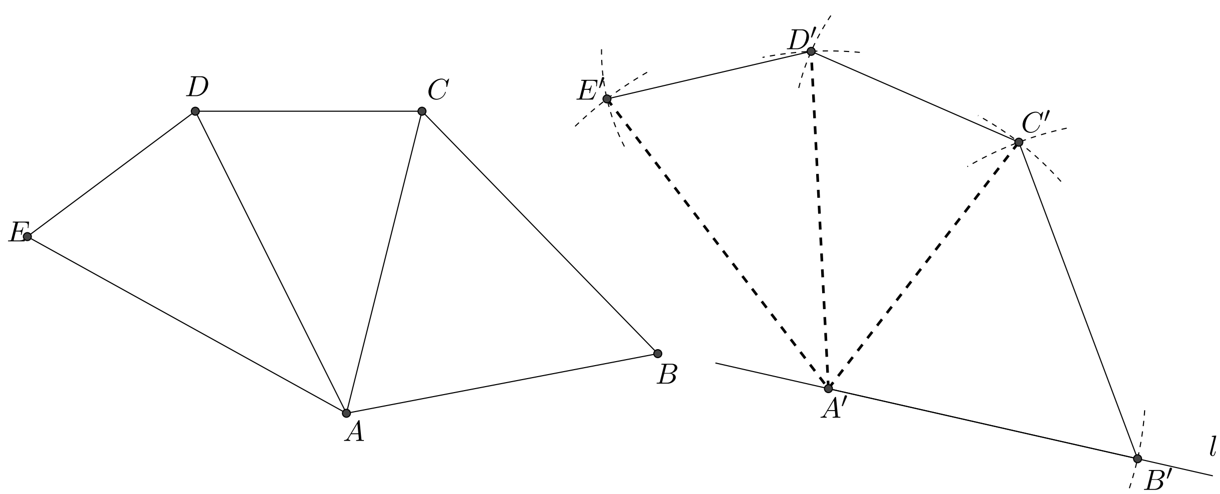
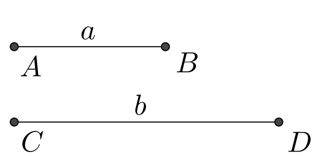


Figura 1.8

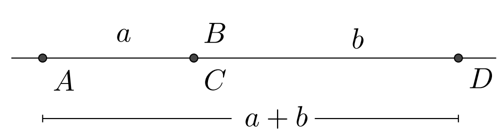
1.9. Construcción de la suma y la resta de dos segmentos

Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de longitudes a y b respectivamente la suma se construye así:



i) Sobre una recta s, transportamos el segmento $\overline{AB}$

ii) Sobre la misma recta s y a continuación de $\overline{AB}$, transportamos el segmento $\overline{CD}$.

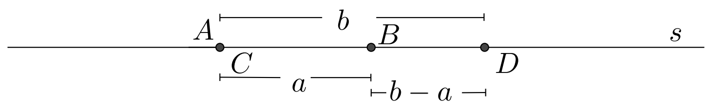


iii) El segmento $\overline{AD}$, de longitud $a+b$ es la suma de los segmentos.

La resta se construye de la siguiente manera:

i) Sobre una recta s transporte el segmento mayor $\overline{CD}$

ii) Sobre el segmento $\overline{CD}$, sobreponga el segmento $\overline{AB}$, haciendo coincidir C con A.



iii) El Segmento $\overline{BD}$ es $b-a$

1.10. La Multiplicación y la División mediante Construcciones con regla y compás

Para las construcciones hechas hasta el momento no se ha necesitado establecer una unidad de medida. Para las construcciones siguientes, es necesario de antemano establecer una unidad de medida, para tal efecto cualquier segmento puede escogerse como unidad de medida.

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, de longitudes a y b respectivamente y una unidad de medida, representada en el segmento $\overline{EU}$ el producto se construye así:

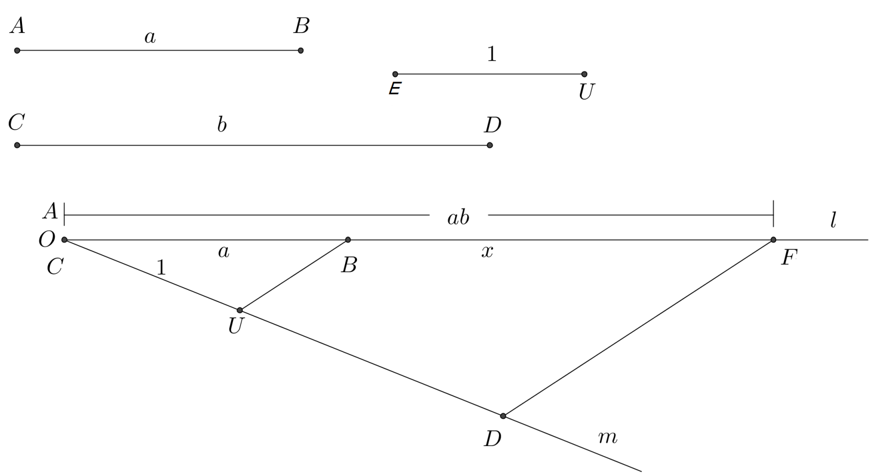


Figura 1.10.1

i) Trazamos dos rectas l y m partiendo de un punto común, digamos O

ii) Transportar sobre l el segmento $\overline{AB}$ de longitud a, de tal manera que A coincida con O.

iii) Transportar sobre m el segmento $\overline{CD}$ de longitud b, de tal manera que C coincida con O.

iv) Transportar sobre m el segmento unitario $\overline{EU}$, de tal manera que el punto E coincida con O.

v) Trazar la recta $\overline{UB}$.

vi) Trazar por D la paralela a $\overline{UB}$, para encontrar el punto F en la recta l.

vii) El segmento $\overline{AF}$ es el producto de los dos segmentos dados.

En efecto: Por semejanza de triángulos tenemos: $\dfrac{a}{1} = \dfrac{a+x}{b}$, luego: $a+x = ab$. Osea $\overline{AF}$ es el producto de dos segmentos. Obsérvese que el segmento unitario puede transportarse sobre la recta l, obteniéndose el mismo resultado.

Para construir la división de dos segmentos se procede igual que para la multiplicación hasta la instrucción *iv*).

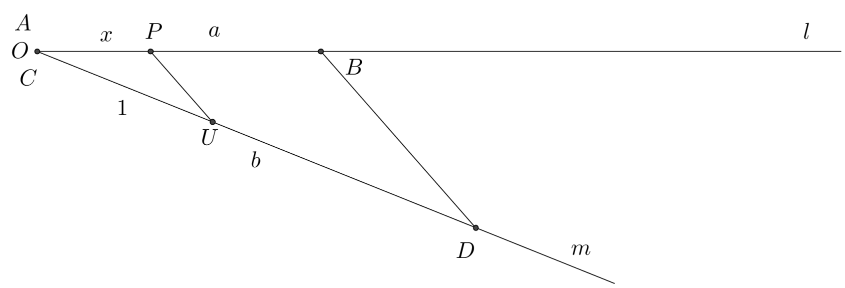


Figura 1.10.2

Seguidamente,

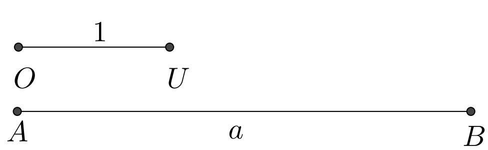
i) Trace el segmento $\overline{BD}$.

ii) Trazar por U, la paralela a $\overline{BD}$ para determinar sobre l el punto P. El segmento $\overline{AP}$ es el cociente entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

En efecto: Por semejanza de triángulos tenemos que: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{b}{a}$, luego $x = \dfrac{a}{b}$. Debemos observar que para construir $\dfrac{b}{a}$, debe transportarse la unidad sobre la recta l.

1.11. Construcción de la raíz cuadrada de un segmento.

Dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud a, su raíz cuadrada se construye de la siguiente forma:



i) Sobre una recta s, transportar el segmento $\overline{AB}$ y a continuación el segmento unitario $\overline{OU}$.

ii) Encontrar el punto medio M del segmento $\overline{AU}$.

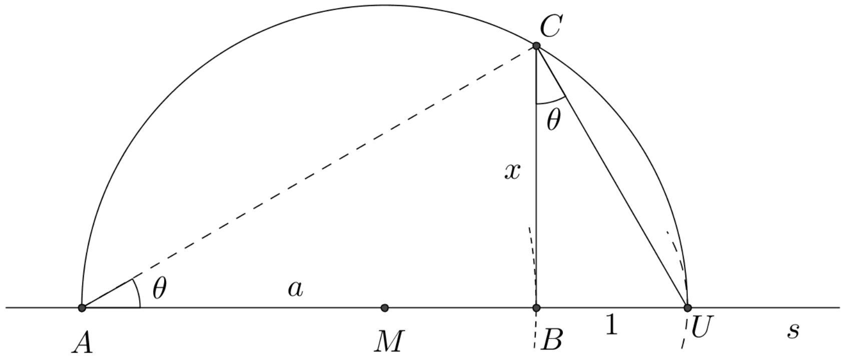


Figura 1.11

iii) Con centro en M, trazar un semicírculo de radio $\overline{AM}$.

iv) Construir la perpendicular a s por el punto B para determinar el punto C sobre el semicírculo.

v) Trazar el segmento $\overline{BC}$. Este segmento es la raíz cuadrada de $\overline{AB}$.

En efecto: los triángulos ABC y CBU son semejantes, luego sus lados correspondientes son proporcionales, o sea: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BU}}{\overline{BC}}$.

Luego: $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{x}$ ó sea $x^2 = a$, así que $x = \sqrt{a}$.

1.12. Construcción del Decágono regular y el Número de oro

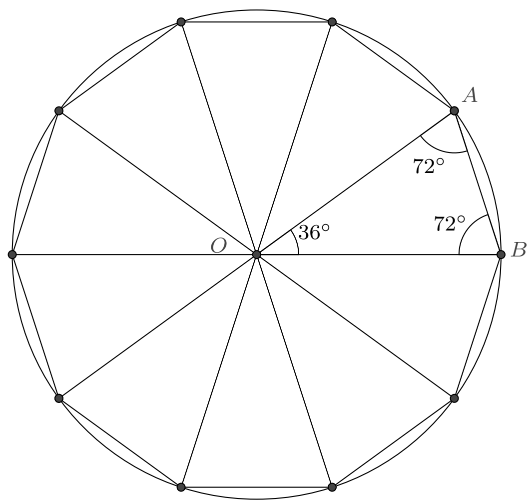


Figura 1.12.1

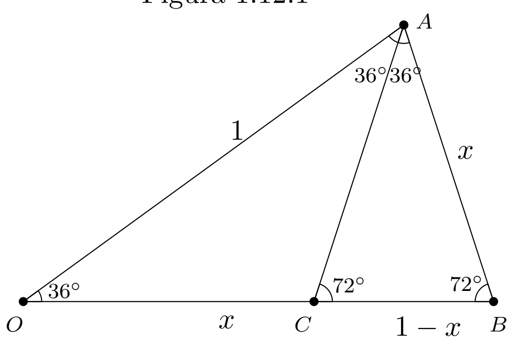


Figura 1.12.2

Una de las construcciones con regla y compás que tiene mucho interés es la del decágono regular.

Cada triángulo OAB de los diez, en que puede descomponerse el decágono tiene la particularidad de que los ángulos en los vértices A y B son cada uno, el doble del ángulo central: ellos miden $72°$ cada uno, mientras que el central mide $36°$. Lo anterior significa que al bisectar el ángulo A, se obtiene otro triángulo semejante con OAB. Adicionalmente el triángulo OAC es isósceles.(ver figura 1.12.2)

Si suponemos que la circunferencia circunscrita tiene radio 1 y si llamamos x al lado del decágono entonces: $\overline{AC} = \overline{OC} = x$; $\overline{CB} = 1 - x$; por la semejanza de los triángulos OAB y ABC podemos establecer las siguientes proporciones: (ver figura 1.12.2)

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \quad \text{ó sea} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Luego obtenemos: $x^2 = 1 - x$ ó $x^2 + x - 1 = 0$. Resolviendo ésta ecuación cuadrática, tenemos:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como x es el lado del decágono, debemos tomar

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

resultado que nos permite afirmar que el decágono regular es construible con regla y compás.

Para construir el pentágono regular, se unen los vértices del decágono regular dejando cada vez un vértice de por medio.

1.12.1. La Razón Áurea y el Número de Oro

Se cree que los antiguos griegos estaban sujetos a una proporción numérica específica, esencial para sus ideas de belleza y geometría. Se conoce con el nombre de razón Áurea, media Áurea o Divina Proporción. En el libro II de los elementos de Euclides se hace un estudio de dicha proporción.

Dados dos segmentos de longitudes distintas l y w, la media aritmética $m = \dfrac{l+w}{2}$, tiene la propiedad de que $l - m = m - w$ y se dice entonces que la media aritmética produce un equilibrio entre l y w.

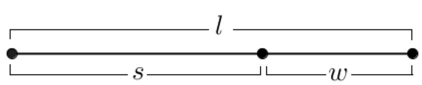
Los griegos buscaron una longitud s, la media geométrica, que produjera la iguadad

$$l \div s = s \div w$$

o sea: $\dfrac{l}{s} = \dfrac{s}{w}$, ó, $s^2 = l.w$, ó, $s = \sqrt{l.w}$

La divina proporción, aparece al partir un segmento de longitud l, en dos pedazos de longitudes s y $w = l - s$ de manera que s sea media geométrica entre l y $l - s$, o sea:

$$\frac{l}{s} = \frac{s}{l-s}$$



El cociente común, recibe el nombre de el **Número de Oro**. El punto de división del segmento es el que determina la divina proporción.

En el caso especial de tenerse $l = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{s} = \frac{s}{1-s}$$

Si denotamos éste cociente común con la letra griega φ, obtenemos

$$\varphi = \frac{1}{1-s} = \frac{1}{\frac{1}{s} - 1} = \frac{1}{\varphi - 1} \quad \text{ó} \quad \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \quad \text{ó} \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \text{ó sea } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Luego: $$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Aparecen dos valores para φ; por tratarse de segmentos debemos tomar

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

φ es el Número de Oro, con 9 cifras decimales su valor es:

$$\varphi = 1,618033989$$

Vale la pena resaltar el hecho de que en la construcción del Decágono Regular, la igualdad

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

es la Divina Proporción y el lado x Decágono es

$$x = \frac{1}{\varphi}$$

Rectángulos de Oro: Desde el punto de vista artístico los rectángulos en los cuales se verifica que el cociente entre el largo y el ancho es igual al Número de Oro, son los mejor proporcionados y agradables a la vista. Se les llama Rectángulos Áureos o de Oro.

Una forma de construir, directamente, Rectángulos de Áureos, y que fué usada por los griegos es la siguiente:

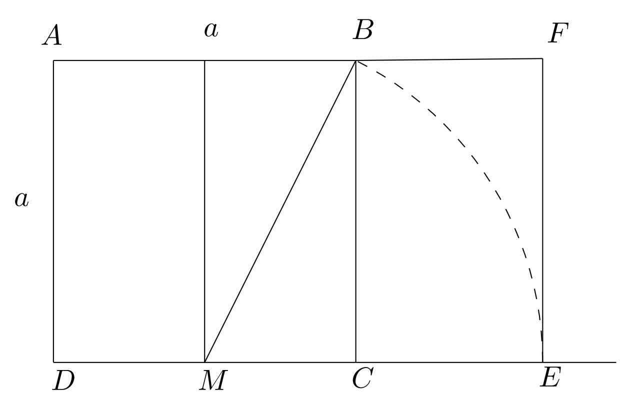
i) Constrúyase un cuadrado de lado a digamos $ABCD$.

ii) Prolónguese el lado $\overline{DC}$.

iii) Hállese el punto medio del lado $\overline{DC}$, digamos M.

iv) Constrúyase el segmento $\overline{MB}$.

v) Con radio $\overline{MB}$ y haciendo centro en M, trace un arco que corte a la prolongación de $\overline{DC}$ en el punto E.



vi) Constrúyase la perpendicular al lado prolongado $\overline{DC}$ en el punto E.

El rectángulo $ADEF$ es un rectángulo de Oro.
En efecto:

$$\overline{AD} = \overline{DC} = a \quad \text{y} \quad \overline{MC} = \frac{a}{2}$$

Luego: $$\overline{MB} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a$$

$$\overline{DE} = \overline{DM} + \overline{ME}; \quad \overline{DM} = \frac{a}{2}; \quad \overline{ME} = \overline{MB}$$

Así que,

$$\begin{aligned} \overline{DE} &= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a \\ &= a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

Las dimensiones del rectángulo son: Largo: $\overline{DE} = a\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; Ancho: $\overline{AD} = a$, entonces:

$\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = a\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \div a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$

1.12.2. Relación entre los lados del Pentágono, el Hexágono y el Decágono.

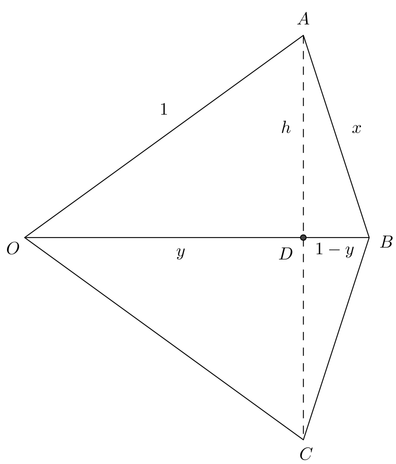


Figura 1.12.2.1

El pentágono se obtiene, como ya se dijo, uniendo los vértices del decágono dejando cada vez uno de por medio. Con respecto a la figura adjunta, x es el lado del decágono, $\overline{AC}$ el lado del pentágono; si hacemos $\overline{OA} = 1$; $\overline{AD} = h$; $\overline{OD} = y$ y $\overline{DB} = 1 - y$, podemos escribir las dos relaciones siguientes

$$\begin{aligned} 1 &= y^2 + h^2 \\ x^2 &= h^2 + (1-y)^2 \end{aligned}$$

Despejando h^2 obtenemos:

$$1 - y^2 = x^2 - (1-y)^2$$

Luego: $1 - y^2 = x^2 - 1 + 2y - y^2$ ó sea $2y = 2 - x^2$. Como $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; $x^2 = \dfrac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, entonces $2y = 2 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{4 - 3 + \sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Así que $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$; $y^2 = \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4 \cdot 4} = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{16}$, luego $y^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$. Finalmente $h^2 = 1 - y^2 = 1 - \dfrac{3+\sqrt{5}}{8} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$, por lo tanto $h = \dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$. El lado del pentágono regular es

$$\overline{AC} = 2h = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Cálculos directos muestran que los lados del hexágono, el decágono y el pentágono forman un triángulo rectángulo:

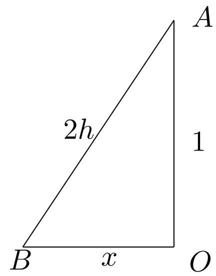


Figura 1.12.2.2

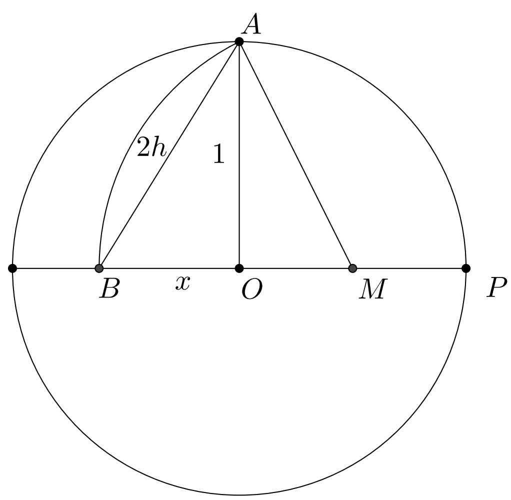
$\overline{OA} = 1$: Lado del hexágono.
$\overline{OB} = x$: Lado del decágono
$\overline{AB} = 2h$: Lado del pentágono

En efecto,

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} \\ &= \frac{4 + 5 + 1 - 2\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} \\ &= (2h)^2 \end{aligned}$$

El resultado anterior proporciona un método alternativo para, en una sola construcción, hallar el lado del decágono, el pentágono y el hexágono.

La construcción es como sigue:



i) Trazar un círculo de radio 1.

ii) Hallar el punto medio M, del radio $\overline{OP}$.

iii) Trazar el segmento $\overline{AM}$.

iv) Con centro en M y radio $\overline{AM}$ trazar un arco para determinar el punto B.

Figura 1.12.2.3

Cálculos directos muestran que, el segmento $\overline{BO} = x$ es el lado del decágono, $\overline{OA} = 1$, es el lado del hexágono y en consecuencia $\overline{AB}$ el lado del decágono. En efecto: Como $\overline{OM} = \frac{1}{2}$, entonces $\overline{AM}^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Además $\overline{BM} = x + \frac{1}{2} = \overline{AM}$, entonces $x = \overline{AM} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ que es el lado del decágono.

De acuerdo a los cálculos anteriores $\overline{AB} = 2h$ es el lado del Pentágono.

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIÓN DE LAS CÓNICAS

2.1. Construcción de la Parábola

Definición 2.1.1. *Una parábola es el lugar geométrico descrito por un punto del plano que se mueve de tal manera que su distancia a un punto fijo (el foco) es igual a su distancia a una recta dada (la directriz). La ecuación de una parábola de eje vertical y foco en* $(0, P)$ *es* $x^2 = 4py$*, mientras que una parábola de eje horizontal y foco en* $(P, 0)$ *tiene por ecuación* $y^2 = 4px$*.*

2.1.1. Primera construcción de la parábola

Dada una recta d del plano y un punto F por fuera de ella, la parábola con foco F y directriz d puede construirse de la siguiente forma:

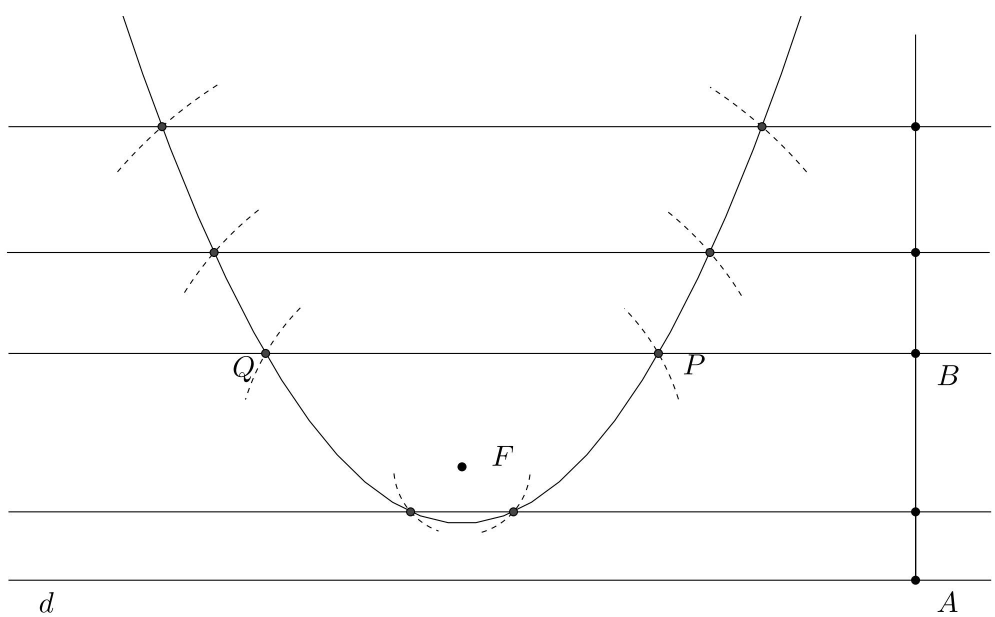


Figura 2.1.1

i) En un punto A de la directriz construya una perpendicular a ella.

ii) Dado un punto B de esta perpendicular trácese por B una paralela a la directriz.

iii) Con un radio de longitud $\overline{AB}$ y haciendo centro en F, trazar dos arcos. Los puntos donde esos arcos cortan a la paralela por B, son de la parábola.

Es claro que $d(F,P) = d(P,d)$ y entonces P es de la parábola.

Tomando otros puntos sobre la misma perpendicular repitiendo el proceso anterior pueden obtenerse más puntos de la parábola.

2.1.2. Segunda construcción de la parábola

Dada una recta l del plano y un punto F fuera de ella, la parábola con foco F y directriz l se construye así:

i) Escoger un punto P en la recta l.

ii) Trazar el segmento $\overline{FP}$.

iii) Construir la perpendicular a l en el punto P.

iv) Trazar la mediatriz del segmento $\overline{FP}$.

El punto Q donde la perpendicular construida en *iii*) corta a la mediatriz trazada en *iv*) es de la parábola.
En efecto: $d(F,Q) = d(Q,l)$ pues $\overline{PQ}$ es perpendicular a l y como Q es un punto de la mediatriz, $d(Q,F) = d(Q,P) = d(Q,l)$.
Tomando más puntos sobre l y repitiendo el proceso anterior, pueden obtenerse otros puntos de la parábola.

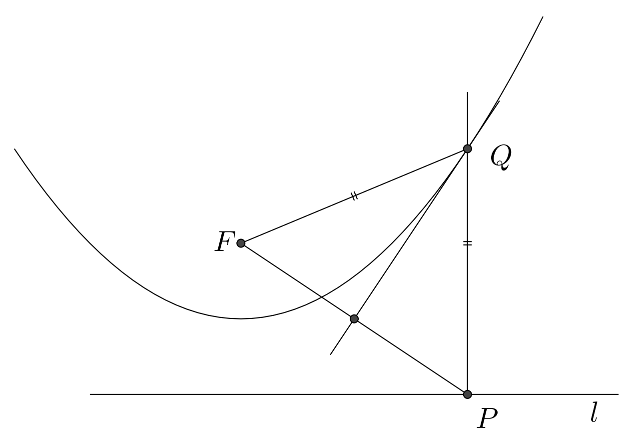


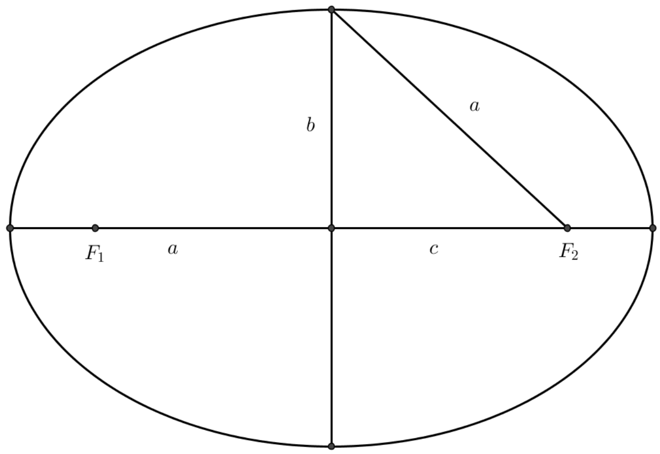
Figura 2.1.2

2.2. Construcción de la Elipse

Definición 2.2.1. *Una Elipse es el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve en el plano de manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) siempre es la misma. En un sistema coordenado cartesiano bidimensional, $x-y$, la ecuación de toda la elipse puede escribirse en la fomra*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los números a y b son las medidas de los semiejes mayor y menor respectivamente. La longitud del segmento determinado por los focos es $2c$.



La relación entre a,b,c está dada por la igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

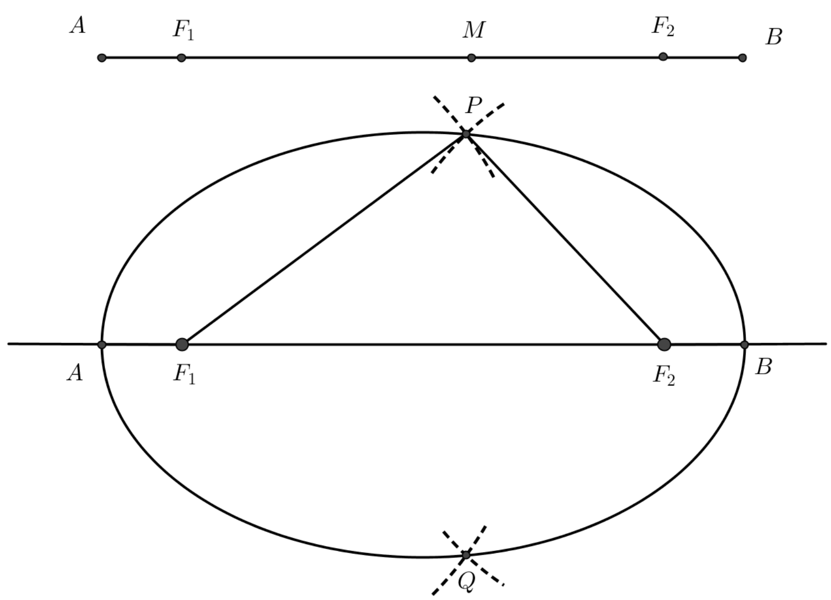


Figura 2.2

2.2.1. Primera construcción de la elipse

Dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud $2a$ y dos puntos F_1 y F_2 interiores del segmento, tales que $d(F_1, A) = d(F_2, B)$, su construcción es de la siguiente forma:

i) Escoger un punto M del segmento F_1F_2.

ii) Con radio $\overline{MB}$ y centro en F_1, trazar un arco, y, con radio $\overline{AM}$ y centro en F_2 construir otro arco. Las intersecciones de éstos dos arcos determinan dos puntos P y Q. Ambos son de la elipse.
En efecto:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = d(A, M) + d(M, B) = d(A, B) = 2a$$

Intercambiando los roles de F_1 y F_2 pueden obtenerse otros dos puntos de la elipse.

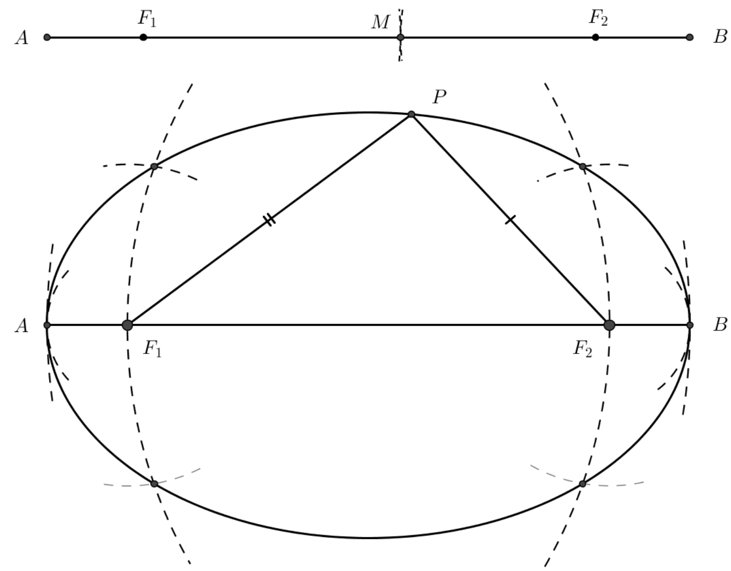


Figura 2.2.1

Escogiendo más puntos M en el segmento $\overline{F_1F_2}$, y repitiendo el proceso anterior pueden obtenerse otros puntos de la Elipse.

2.2.2. Segunda construcción de la elipse

Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ su construcción puede hacerse así:

i) En un sistema coordenado cartesiano bidimensional $x - y$ constrúyanse dos circunferencias concéntricas de radios a y b y centro en el origen.

ii) Trácese por el origen una recta l que corte a las circunferencias en los puntos P y Q respectivamente.

iii) Trácese por Q una recta paralela al eje Ox y por P una paralela al eje Oy.

iii) El punto R de la intersección de éstas dos rectas, es de la elipse.

En efecto: Si θ es el ángulo de inclinación de l, las coordenadas de P y Q son respectivamente

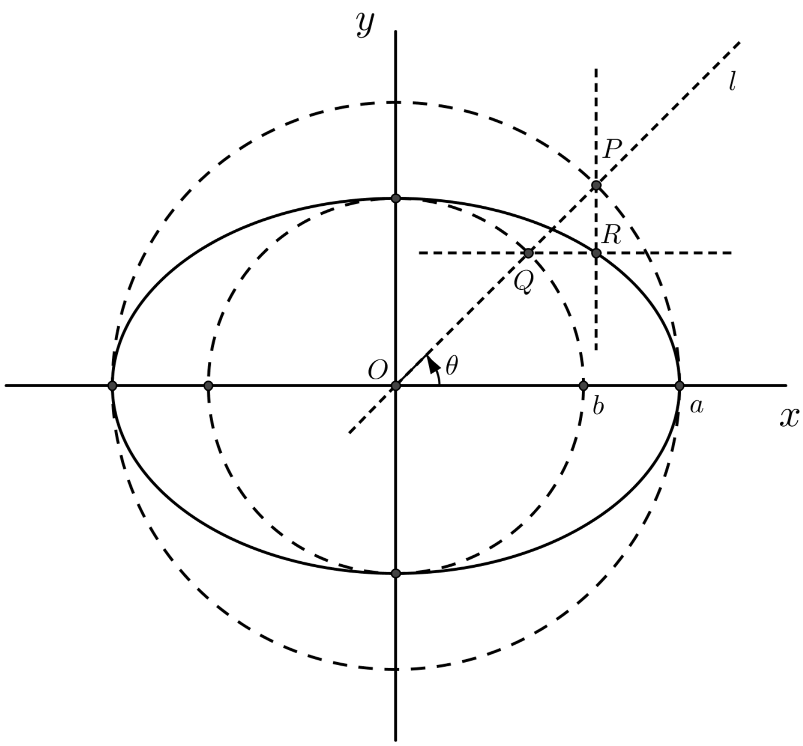


Figura 2.2.2

$$P(a\cos\theta, a\sin\theta)$$
$$Q(b\cos\theta, b\sin\theta)$$

Luego las coordenadas de R son

$$x = a\cos\Theta$$
$$y = b\sin\Theta$$

Luego: $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 = \cos^2(\theta)$, $\left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \sin^2(\theta)$, entonces $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y el punto $R(x, y)$ está en la curva.

Trazando otras rectas por el origen y repitiendo el proceso pueden obtenerse más puntos de la Elipse.
Las dos construcciones siguientes de la elipse corresponden a contrucciones Neusis, pues utilizan algunas instrumentos distintos de la regla y compás y/o procedimientos diferentes a los establecidos por los matemáticos griegos.

2.2.3. Tercera construcción de la elipse

Dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud $2a$ y dos puntos F_1 y F_2 interiores del segmento, tales que $d(F_1, A) = d(F_2, B)$, su construcción es de la siguiente forma:

i) Se instalan dos chinches ó clavos en los puntos F_1 y F_2.

ii) Se corta una cuerda de longitud $2a$, uno de sus extremos se fija en F_1 y el otro en F_2.

iii) Con un lápiz y manteniendo la cuerda tensa, se puede trazar la elipse, haciendo deslizar el lápiz a lo largo de la cuerda.

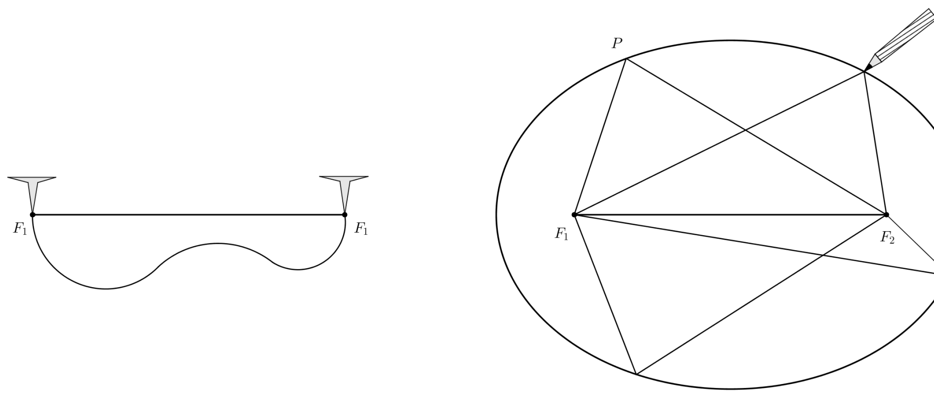


Figura 2.2.3

Es claro que para cualquier punto P de la curva se verifica que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

2.2.4. Cuarta construcción de la elipse

Dada la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, esta construcción requiere de una escuadra en forma de L y de una regla de longitud $a + b$.

Sobre la regla se marcan los números a y b que son los semiejes mayor y menor de la elipse respectivamente. Al punto de división lo llamamos P.

La construcción empieza colocando la regla ajustada al lado vertical de la escuadra, de manera que el punto P está en $(0, b)$ que es un punto de la elipse. Al deslizar la regla, manteniendo sus extremos en los lados dela escuadra, en el punto P describe la cuarta parte de la elipse. Al final del movimiento la regla estará ajustada al lado horizontal de la escuadra de manera que el punto P está en $(a, 0)$ que es otro punto de la elipse (un vértice)

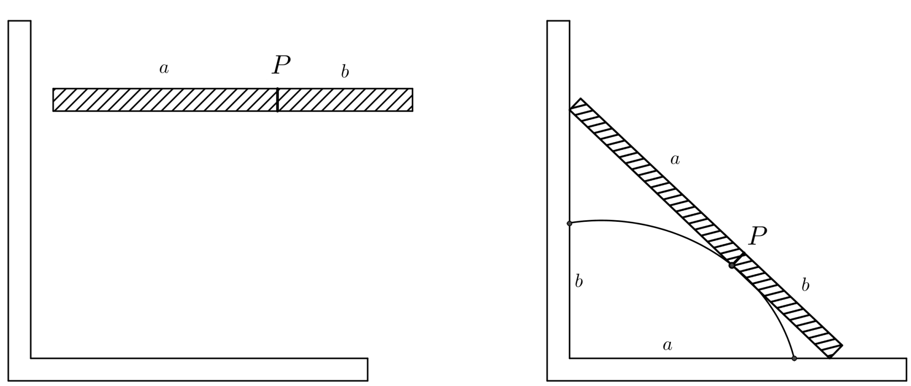


Figura 2.2.4

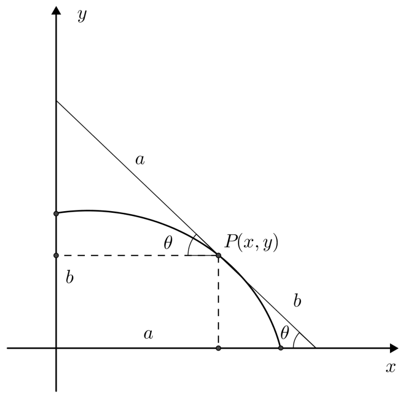


Figura 2.2.4.1

En efecto: si θ es el ángulo (agudo) formado por la regla que se desliza y el lado horizontal de la escuadra; y si x e y son las coordenadas de P, entonces:

$$\cos\theta = \frac{x}{a}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{b}$$

Luego: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, lo cual significa que el punto P es de la elipse.

2.3. Construcción de la Hipérbola

Definición 2.3.1. *Una Hipérbola, es el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve en el plano de manera que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (focos) siempre es la misma. En un sistema de coordenadas $x-y$, la ecuación de toda hipérbola puede escribirse en la forma*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Los números a y b son respectivamente el semieje transverso y semieje conjugado de la hipérbola. La longitud del segmento determinado por los dos puntos fijos $2c$.

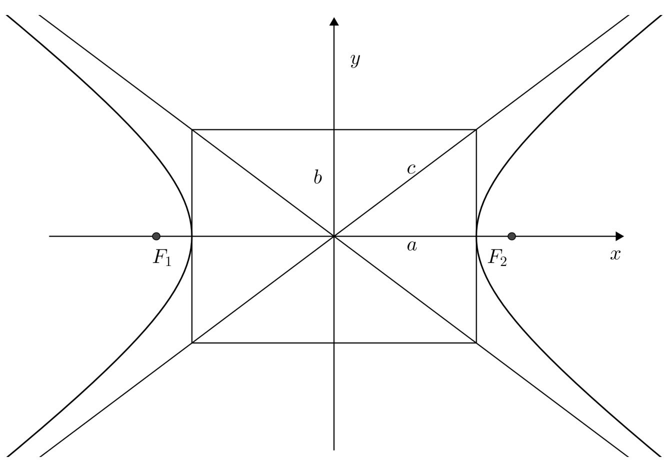


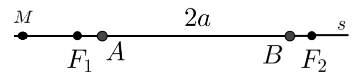
Figura 2.3

La relación entre a, b, c está dada por la igualdad

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2.3.1. Primera construcción de la hipérbola

Sobre una recta s ubique el segmento de longitud $2a$ y los puntos F_1 y F_2 de manera que $d(F_1, A) = d(F_2, B)$ y procede así:



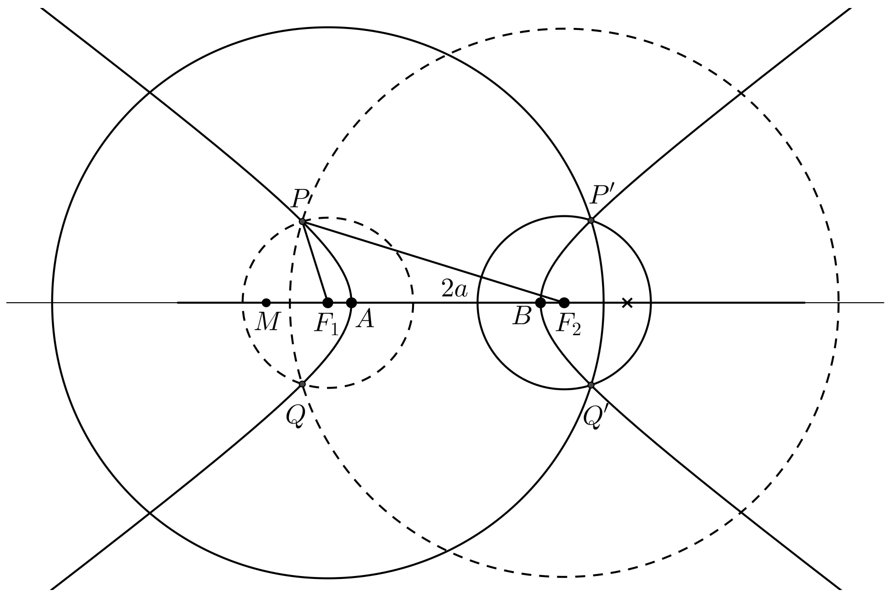


Figura 2.3.1

i) Escoger un punto arbitrario M por fuera del segmento $\overline{F_1F_2}$, sobre la recta F_1F_2.

ii) Con un radio igual a $\overline{MA}$ y con centro en F_1, trazar una circunferencia; y, con radio $\overline{MB}$ y centro en F_2 trazar otra circuferencia. (Circuferencias punteadas).

La intersección de estas dos circuferencias determinan dos puntos P y Q que son de la hipérbola.

En efecto: $d(P, F_2) - d(P, F_1) = d(M, B) - d(M, A) = 2a$.

Intercambiando los roles de los puntos fijos pueden obtenerse otros dos puntos P' y Q' de la hipérbola.(Circuferencias continuas)

Tomando más puntos por fuera del segmento $\overline{F_1F_2}$ sobre la recta F_1F_2y repitiendo el proceso anterior, pueden hallarse más puntos de la curva.

2.3.2. Segunda construcción de la hipérbola

Corresponde a una construcción Neusis. Para su elaboración se requiere de disponer de una regla que pueda fijarse en uno de sus extremos y de una cuerda de longitud l.

Sobre una recta s ubique el segmento de longitud $2a$ y los puntos F_1 y F_2 de manera que $d(F_1, A) = d(F_2, B)$ y procede así:

i) Disponer el segmento $\overline{AB}$ y los puntos fijos F_1 y F_2 como en la primera construcción.

ii) Marcar en la regla el segmento $2a$, amarrar en el otro extremo de la regla una punta de la cuerda y cortarla de manera que $2a + l$ dé la longitud de la regla.

iii) Fijar un extremo de la regla en uno de los focos, digamos F_2. El otro extremo de la cuerda debe fijarse en el otro foco F_1.

iv) Manteniendo tensa la cuerda y haciendo girar la regla en torno a F_2 se traza una rama de la hipérbola.

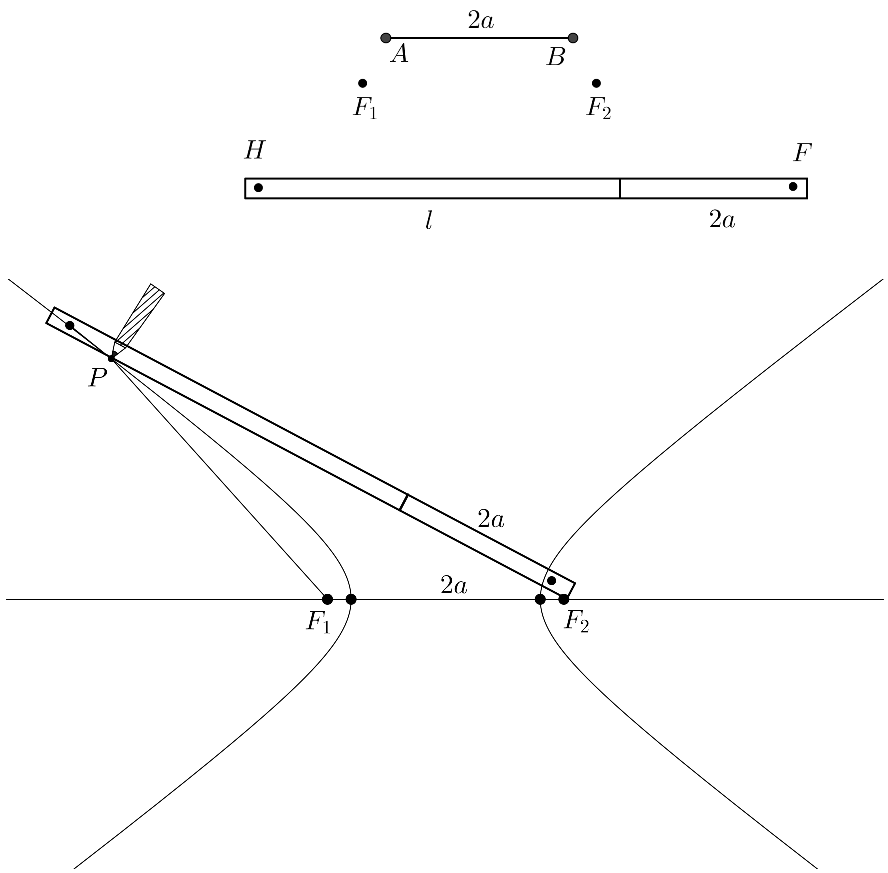


Figura 2.3.2

El punto P es de la Hipérbola.

En efecto:
$$\begin{aligned} d(P,F_2) - d(P,F_1) &= \overline{PF_2} + \overline{HP} - \overline{HP} - \overline{PF_1} \\ &= (\overline{PF_2} + \overline{HP}) - (\overline{HP} + \overline{PF_1}) \\ &= 2a + l - l \\ &= 2a \end{aligned}$$

Intercambiando los roles de F_1 y F_2 puede trazarse la otra rama de la hipérbola.

CAPÍTULO 3

LAS DEMOSTRACIONES DE DANDELIN PARA LAS CÓNICAS

3.1. Concepto de Cono

Sea E una recta en el espacio, V un punto de ella y α un ángulo fijo. La superficie generada por todas las rectas que pasan por V y forman con E un ángulo α es un cono circular recto de dos hojas. V es el vértice, E el eje y cada una de las rectas que lo generan un elemento del cono.

3.2. Secciones de un Cono.

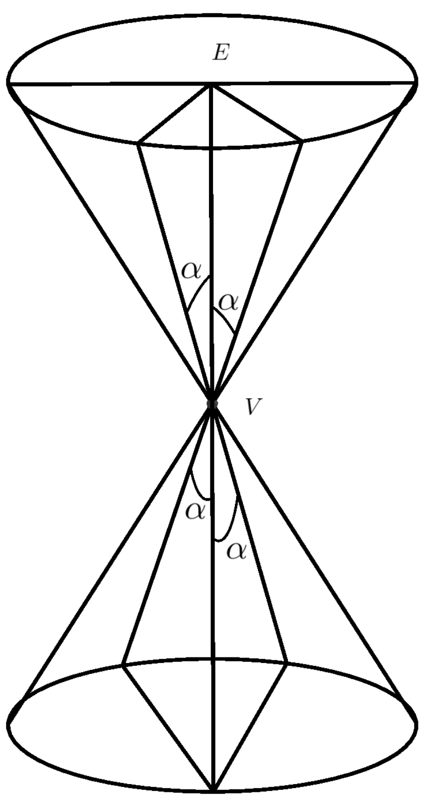


Figura 3.2

Cuando un plano del espacio se intersecta con un cono circular recto, existen varias opciones así:

a) Si el plano es perpendicular al eje y no pasa por el vértice, la intersección es una circuferencia.

b) Si el plano no es perpendicular al eje y no pasa por el vértice, se presentan las siguientes posibilidades:

i) Si el plano corta todos los elementos del cono a un solo lado del vértice, la intersección es una elipse.

ii) Si el plano corta todos los elementos del cono a ambos lados del vértice, la intersección es una hipérbola.

iii) Si el plano es paralelo a un elemento y corta a los demás elementos del cono, la intersección es una parábola.

c) Si el plano pasa por el vértice, la intersección ó es un punto, ó es una recta ó son dos rectas.

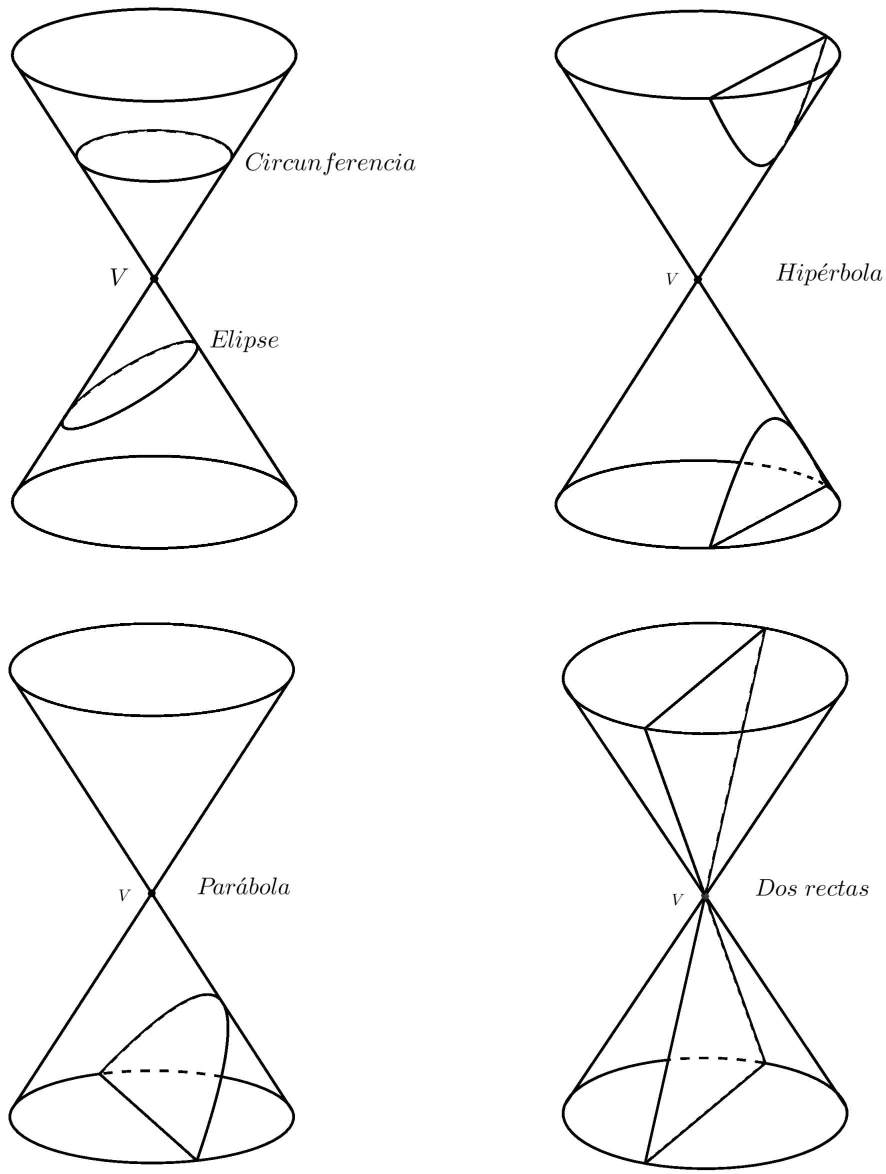


Figura 3.2.1

3.3. Definición Focal de las Cónicas

El Matemático belga, G.P. Dandelin (1794-1847) descubrió en 1822 que las propiedades focales de las cónicas son consecuencia de su definición como secciones de un cono circular recto.
En escencia las pruebas de Dandelin para las Cónicas consisten en lo siguiente: Dado un cono circular recto de vértice V, una vez intersectado con un determinado plano, instalar en el cono una o dos esferas que sean tangentes al plano de corte en un punto y al cono a lo largo de una circuferencia. El punto de tangencia del plano con la esfera es un foco de la cónica.

3.4. La Prueba de Dandelin para la Elipse:

Consideramos el plano π, que intersectado con el cono de vértice V determina una elipse. Colocamos en el cono dos esferas: E_1, de centro O_1, tangente al cono a lo largo de una circuferencia C_1, tangente al plano π en F_1; E_2, de centro O_2, tangente al cono a lo largo de la circuferencia C_2 y tangente al plano π en F_2. Dado un punto P de la elipse, el elemento del cono determinados por P, determina dos puntos Q_1 y Q_2: Q_1 en la circuferencia C_1 y Q_2 en la circuferencia C_2. Como P es un punto exterior a ambas esferas entonces:

$d(P, F_1) = d(P, Q_1)$, pues F_1 y Q_1 son puntos de E_1.
$d(P, F_2) = d(P, Q_2)$, pues F_2 y Q_2 son puntos de E_2.

Luego:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= d(P, Q_1) + d(P, Q_2) \\ &= d(Q_1, Q_2) \end{aligned}$$

Pero la distancia de Q_1 a Q_2 para todos los puntos de la elipse es la misma pues las circuferencias C_1 y C_2 son paralelas.

Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la elipse y la igualdad $d(P, F_1) + d(P, F_2) =$ Constante, es la propiedad focal de la elipse.

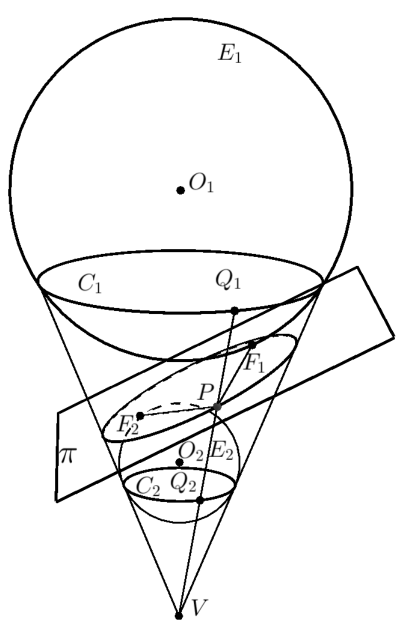


Figura 3.4

3.5. La Prueba de Dandelin para la Hipérbola:

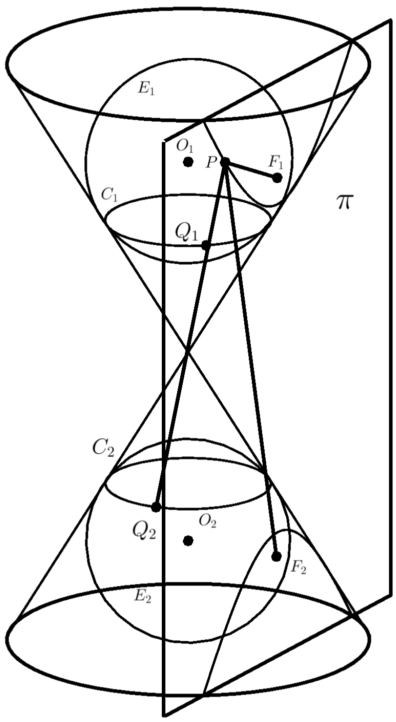


Figura 3.5

El plano π intersecta el cono para determinar la hipérbola. En la hoja superior del cono se coloca una esfera E_1, con centro O_1, tangente al cono a lo largo de una circuferencia C_1 y tangente al plano π en F_1; en la hoja inferior se coloca otra esfera E_2, con centro O_2, tangente al cono a lo largo de una circuferencia C_2 y tangente a π en F_2.

Dado un punto P de la hipérbola, el elemento del cono determinado por P, determina los puntos Q_1 y Q_2 en las circuferencias C_1 y C_2, respectivamente.

Claramente: $d(P, F_1) = d(P, Q_1)$
$d(P, F_2) = d(P, Q_2)$

Luego: d(P,F_2)- d(P,F_1) = d(P,Q_2)- d(P,Q_1)
= d(Q_1, Q_2)

La distancia $d(Q_1, Q_2)$ es igual para cualquier otra elección de P, pues representa la distancia entre las circuferencias C_1 y C_2 medida sobre un elemento del cono y como son paralelas, es constante.
Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola y la igualdad $d(P, F_2) - d(P, F_1) =$ Constante, es la propiedad focal de la hipérbola.

3.6. La Prueba de Dandelin para la Parábola:

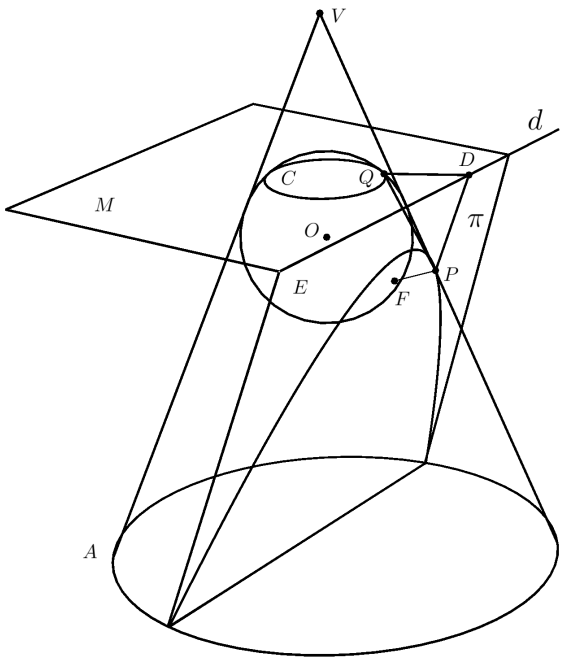


Figura 3.6

El plano π intersecta al cono para determinar la parábola, π se ha tomado paralelo al elemento AV del cono. Colocamos en el cono una esfera E, con centro en O, tangente al cono a lo largo de una circunferencia C, y tangente a π en un punto F.

La circuferencia C determina un plano M, perpendicular al eje del cono; la intersección de éste plano con el plano π es una recta d. Escogido un punto de la parábola, digamos P, el elemento del cono correspondiente a P, determina un punto Q sobre la circuferencia C. Contruyendo por P una perpendicular a d, determinamos el punto D de d.

Claramente: $d(P,F) = d(P,Q)$ y como el plano π es paralelo a AV, $d(P,Q) = d(P,D)$
Luego: $d(P,F) = d(P,D)$

Como podemos observar d es la Directriz de la parábola y la última igualdad corresponde a su propiedad focal.

CONCLUSIONES

1. Las cosntrucciones con regla y compás deben hacer parte de las actividades curriculares en al educación básica, pues aparte de ser un buen apoyo para el desarrollo de temas elementales de Geometría, son importantes en otras ramas de la Matemática especialemente en la Trigonometría y el Cálculo.

2. Cosntruir las Cónicas con regla y compás utilizando únicamente la definición de cada una de ellas facilita el desarrollo algebráico de cada una de esas curvas y contribuye significativamente a entender la propiedad focal de cada una de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Asger Aaboe, *Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.*Biblioteca de Matemática Contemporanea. Ed. Norma.

[2] Augusto Silva Silva , *Construcciones con Regla y Compás.* Taller *I* Coloquio Surcolombiano de Licenciatura en Matemáticas.U. Surcolombiana Mayo de 2016

[3] C. H. Edwards Jr, *The Historical Development of the Calculus.* Ed. Springer Verlag.New York, 1979.

[4] Charles H. Lehmann, *Geometría Analítica.* Ed. Limusa, México 2007.

[5] Howard E. Taylor, Thomas L. Wade, *University Calculus and Subsets of the Plane.* Ed. Jonh Wiley and sons, inc. New York, 1965.

[6] Jody L. Doran , *Las Matemáticas en la vida Cotidiana.* Ed. Addison-Wesley / Universidad Autonoma de Madrid 1999.

[7] Richard Courant , *¿Qué es la Matemática?.* Ed. Aguilar, Madrid 1979.

[8] T.M. Apostol, *Calculus* . Ed. Reverté.