Neiva, Abril 28 del 2017

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

JHON ALEXIS PLAZAS SALAZAR, con C.C. No. 1.082.775.238 y ALEXANDRA PERDOMO GOMEZ, con C.C. No. 1.075.247.797, autores del trabajo de grado titulado FUNDAMENTOS DE LÓGICA DIFUSA, presentado y aprobado en el año 2017 como requisito para optar al título de Licenciadas en Matemáticas; autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacional e internacional “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

• Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

• Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:	EL AUTOR/ESTUDIANTE:
Firma: Jhon A. Plazas S.	Firma: Alexandra Perdomo Gómez

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Fundamentos de Lógica Difusa

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Perdomo Gómez	Alexandra
Plazas Salazar	Jhon Alexis

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutiérrez Hoyos	Hernando
Quimbaya Torres	Juan Gabriel

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutierrez Hoyos	Hernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2017 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 51

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general _X_
Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___
Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros__

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Lógica Difusa	Fuzzy Logic	**6.** Pertenencia	Membership
2. Lógica Clásica	Classic Logic	**7.** Dominio	Domain
3. Probabilidad	Probability	**8.** Axioma	Axiom
4. Conjunto	Set	**9.** Matemáticas	Mathematics
5. Función	Function	**10**. Polivalente	Polyvalent

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

La Lógica Difusa es una generalización de la lógica clásica, que pretende ajustar interpretaciones ambiguas y vagas que posee el ser humano sobre el entorno que lo rodea. La lógica difusa es una lógica polivalente, es decir una lógica que maneja más de dos valores de verdad para calificar eventos. Está basada en la formación de conjuntos difusos, que a su vez se definen a partir de una función de pertenencia. Esta función de pertenencia es quien rige o determina los valores de verdad o grado de pertenencia a los elementos de un conjunto difuso. Los grados de pertenencia de dichos elementos varían en el intervalo cerrado [0,1], donde a mayor cercanía a 0 menor es la pertenencia al conjunto difuso, y a mayor cercanía a 1 mayor es la pertenencia al conjunto difuso.

La teoría de conjuntos difusos define las operaciones básicas entre conjuntos difusos (unión, intersección y complemento) que ayudan a formular y a desarrollar problemas en algún ámbito a tratar. Estas características han ejercido un valor importante en la teoría, debido a que permite establecer relaciones entre conjuntos y sus funciones, a su vez en las relaciones entre los elementos de los conjuntos difusos. Las relaciones aquí tratadas se definen como binarias, que analiza el comportamiento de los datos obtenidos, con características determinadas por el universo del dominio y el conjunto difuso. Estas relaciones llamadas relaciones binarias difusas también extienden las definiciones de relación reflexiva, simétrica y transitiva.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

The Fuzzy Logic is a generalization of the classic logic, which tries to adjust ambiguous and vague interpretations that the human being owns on the surrounding environment. Fuzzy logic is a polyvalent logic, that is, a logic that handles more than two truth values to qualify events. It is based on the formation of fuzzy sets, which in turn are defined from a membership function. This membership function is that which governs or determines the values of truth or degree of belonging to the elements of a fuzzy set. The degrees of membership of these elements vary in the closed interval [0,1], where the closest to 0 minor is the membership of the fuzzy set, and the greater the proximity to 1 the greater the membership of the fuzzy set.

The theory of fuzzy sets defines the basic operations between fuzzy sets (union, intersection and complement) that help to formulate and develop problems in some area to be treated. These characteristics have had an important value in the theory, because it allows to establish relations between sets and their functions, in turn in the relations between the elements of the fuzzy sets. The relationships treated here are defined as binary, which analyzes the behavior of the data obtained, with characteristics determined by the universe of the domain and the fuzzy set. These relations called diffuse binary relations also extend the definitions of reflexive, symmetric, and transitive relation.

APROBACIÓN DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado
HERNANDO GUTIÉRREZ HOYOS
Firma:

Nombre del jurado
JUAN GABRIEL QUIMBAYA
Firma:

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Fundamentos de Lógica Difusa

Alexandra Perdomo Gómez
Jhon Alexis Plazas Salazar

Neiva, Huila
2017

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Fundamentos de Lógica Difusa

Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Jhon Alexis Plazas Salazar
2010295781
Alexandra Perdomo Gómez
2010296153

Asesor:
Hernando Gutierrez

Neiva, Huila
2017

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Msc. Mauricio Penagos

Asesor

Msc. Hernando Gutierrez

Segundo Lector

Juan Gabriel Quimbaya Torres

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, abril de 2017

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la vida y a nuestros padres porque por su incondicional apoyo y acompañamiento día a día, a nuestros abuelos, hermanos y hermanas, a todas las personas que directa o indirectamente nos ayudaron de forma moral y económica para nuestra formación como seres humanos y profesionales. En respuesta a esto, entregamos nuestro trabajo de grado "***Fundamentos de Lógica Difusa*** " a todos aquellos lectores que están atentos siempre por contribuir en los avances matemáticos, científicos, tecnológicos y de la educación, para mejorar la calidad de nuestra región Surcolombiana.

A nuestro asesor "***Hernando Gutierrez*** " por habernos brindado su tiempo, su dedicación y sus conocimientos, haciendo de este triunfo un logro común. Por la forma en que guió nuestro proceso formativo con convicción y energía, sabemos que jamás tendremos la forma de agradecer su constante apoyo y confianza. A nuestros lectores esperamos que comprendan que nuestros ideales, esfuerzos y logros han sido también suyos.

Agradecemos a todo el cuerpo docente del Programa de Licenciatura en Matemáticas porque siempre estuvieron con nosotros inculcándonos conocimientos, ética, profesionalismo y sobre todo por tener la paciencia necesaria para que pudiéramos lograr esta meta y a la Universidad Surcolombiana en general por ser nuestra segunda casa.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Las concepciones ambiguas e imprecisas que los seres humanos poseemos a la hora de percibir o interpretar el entorno que nos rodea ha permitido que teorías como la Lógica Difusa traten de analizar matemáticamente eventos relacionados al concepto de incertidumbre, que permiten a otras ciencias poder acercarse a estas percepciones de manera clara y precisa, incluso que sea aplicable a la tegnología. Por ejemplo *la naranja esta medio madura* o *el pan esta ligeramente marrón*, son expresiones que poseen un nivel de incertidumbre ya que no se le puede otorgar un valor absoluto [1]. El uso de términos como *ligeramente* y *medio*, podrían ser seguidos o interpretados por los seres humanos sin ningún problema, pero la lógica clásica no es adecuada para procesar este tipo de reglas. Sin embargo, de esto si se ocupa la *Lógica Difusa*; proporcionando herramientas formales para su tratamiento, que permiten representar matemáticamente la incertidumbre y la vaguedad. La Lógica Difusa tiene aplicaciones en multitud de disciplinas como la medicina, ingeniería, derecho, educación, y en la inteligencia artificial se aplica en muchas áreas de trabajo, como por ejemplo: la visión por computador, procesamiento de la información, juegos y aprendizaje matemático. [1] [2]

Aunque las teorías sobre *Lógica Difusa* fueron formalizadas y presentadas al mundo como un elemento clave para la aplicación en la toma de decisiones y los sistemas electrónicos por Lofti A. Zadeh, sus raíces atraviesan épocas tan antiguas como las del filosofo griego Aristóteles, quien dio una primera visión de las denominadas Leyes del Pensamiento. Heráclito y Platón también registran aportes a las leyes lógicas de esta teoría, teniendo en cuenta que sus pensamientos se relacionaban con particularidades como la simultaneidad de la verdad y que el grado de verdad de la realidad puede variar.

La *Lógica Difusa* es una generalización de la lógica clásica, que pretende ajustar interpretaciones ambiguas y vagas que posee el ser humano sobre el entorno que lo rodea. La lógica difusa es una lógica polivalente, es decir una lógica que maneja más de dos valores de verdad para calificar eventos. Está basada en la formación de conjuntos difusos, que a su vez se definen a partir de una función de pertenencia. Esta función de pertenencia es quien rige o determina los valores de verdad o grado de pertenencia a los elementos de un conjunto difuso. Los grados de pertenencia de dichos elementos varían en el intervalo cerrado $[0,1]$, donde a mayor cercanía a 0 menor es la pertenencia al conjunto difuso, y a mayor cercanía a 1 mayor es la pertenencia al conjunto difuso. La teoría de conjuntos difusos también define propiedades que se verifican en teoría de conjuntos clásicos (asociatividad, conmutatividad y distributividad) y a su vez las operaciones básicas entre conjuntos difusos (unión, intersección y complemento) que ayudan a formular y a desarrollar problemas en algún ámbito a tratar. Estas características han ejercido un valor importante en la teoría, debido a que permite establecer relaciones entre conjuntos y sus funciones, pero, a su vez también las relaciones entre los elementos de los conjuntos difusos. Las relaciones aquí tratadas se definen como binarias, que analiza el comportamientos de los datos obtenidos, con características determinadas por el universo del discurso y el conjunto difuso. Estas relaciones llamadas relaciones binarias difusas también extienden las definiciones de relación reflexiva, simétrica y transitiva que están consignadas en la teoría de conjuntos clásicos, cada una basada en los componentes axiomáticos de la lógica difusa.

Es claro que para abordar este tipo de teorías se requiere de unos pre-conceptos básicos en lógica clásica, esto hace que el lector tenga una noción mínima sobre lógica, sin embargo, esta teoría se abre a muchos campos del saber matemático, lo que permite un entendimientos y un valor importante en las aplicaciones sobre otras ciencias.

PRESENTACIÓN

Este trabajo fue elaborado principalmente para estudiar los elementos básicos de la teoría de Lógica Difusa, teniendo en cuenta las relaciones y diferencias que existen con la Lógica clásica. El texto está constituido por tres capítulos principales, que presentan los conceptos básicos e introductorios para poder conocer esta teoría. Cabe resaltar que la Lógica Difusa, se abre campo en muchas ciencias del conocimiento, sin embargo, es importante reconocer los elementos matemáticos que aquí se presentan y que son los ejes fundamentales de la teoría.

En el capítulo uno se hace un recuento histórico sobre los personajes que influyeron durante siglos con su pensamiento filosófico y matemático a construir no solamente elementos teóricos de las diferentes ciencias, sino también, una explicación argumentada de la realidad, basada en las diferentes concepciones que tenían los seres humanos para la época. A su vez muestra relativamente los autores que representaron el inicio de la construcción de la Lógica Difusa; J. Lukasiewicz, Hugh MacColl, C. S. Peirce, quienes para los siglos XIX y XX, ya formalizaban algunas teorías basados en las lógicas polivalentes. Por supuesto que fue Lofti A. Zadeh quien para mediados de los sesenta introduce la Lógica Difusa como una teoría fundamentada en las concepciones imprecisas que tiene el ser humano de la realidad. Este capítulo muestra algunos modelos matemáticos que se han encargado del tratamiento de la incertidumbre, además, recoge a partir de los conceptos intuitivos la relación entre Lógica Difusa y Lógica Clásica, teniendo en cuenta las cercanías de la probabilidad y la Lógica Difusa al tratar de interpretar y explicar fenómenos que presentan un alto grado de incertidumbre.

El capítulo dos está desarrollado a partir de los componentes lógicos y los axiomas que formalizan la Lógica Difusa, además se presenta la función de pertenencia como principal factor en la construcción de un conjunto difuso. Este capítulo aborda esencialmente los conjuntos difusos, sus propiedades, características y las operaciones entre ellos. Es importante resaltar que las funciones de pertenencia hacen del conjunto difuso un cuerpo determinado sobre un universo de discurso o dominio, que pueden ser representadas de manera gráfica en forma de campana, triángular, trapezoidal o simplemente una curva. Se definen también elementos importantes como los cortes y subcortes alfa quienes determinan características y propiedades importantes en un conjunto difuso dado. El capítulo concluye con la definición de las aplicaciones T-normas, T-conormas y complementos difusos, que verifican la construcción de uniones, intersecciones y complementos difusos a partir de sus propios axiomas. El capitulo posee ejemplos que amplían la concepción básica de tema tratado.

El capítulo tres hace referencia a las relaciones entre conjuntos difusos y sus elementos, teniendo en cuenta la generalización de las relaciones entre conjuntos clásicos. Se define la relación difusa como el producto cartesiano de conjuntos clásicos, donde los elementos de la relación poseen grados de pertenencia según su función. Se puntualiza en las relaciones binarias difusas, teniendo en cuenta la relación existente entre elementos de un sólo conjunto. También a partir de las relaciones binarias se determina cuándo esta relación es reflexiva, simétrica o transitiva, y se muestra los esquemas gráficos que se pueden desarrollar para estas relaciones. Este capítulo también permite hacer un acercamiento sobre las aplicaciones que ha tenido esta teoría en el mundo actual, presentando un breve recuento de algunos sistemas tecnológicos que han apoyado su funcionamiento y desarrollo en esta teoría.

Este trabajo ha sido realizado bajo las lecturas de escritos, artículos y textos de autores colombianos y de otros países. Fué escrito y editado en formato TEX, en concordancia con las normas exigidas por el programa de Licenciatura en Matemáticas de la universidad Surcolombiana.

JUSTIFICACIÓN

La nuevas teorías matemáticas han determinado para el futuro de la humanidad cambios bruscos en su desarrollo, lo que ha significado evaluar constantemente los productos de investigación matemática en la modernidad. Esto ha permitido que las nuevas generaciones de estudiantes se involucren en el estudio de las ciencias que aportan a los cambios sociales y tecnológicos. Por lo anterior se hace necesario actualizar los conceptos teóricos por los cuales la ciencia matemática ha venido caminando rigurosamente, para así permitir al estudiante tener un amplio concepto de los avances científicos que ha tenido la humanidad en nuestra contemporaneidad.

Además, este trabajo busca promover el uso de argumentos lógicos diferentes a los establecidos, para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias, sabiendo que las teorías matemáticas existentes no abordan o explican los problemas planteados en su totalidad .

Por otro lado, este trabajo se ha desarrollado como un estudio que encierra aspectos conceptuales y operativos que apoyarán los procesos de búsqueda de soluciones a problemas significativos de la vida real, mediante modelos interpretativos del entorno que nos rodea y ajustando nuestra percepción a la hora de comunicarnos.

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- ⋆ Conocer los hechos históricos y las motivaciones teóricas que originaron la Lógica Difusa.
- ⋆ Reconocer y construir algunos elementos básicos de la teoría de Lógica Difusa.

Objetivos Específicos

- ⋆ Identificar las analogías básicas entre lógica difusa y lógica clásica.
- ⋆ Exponer el esquema axiomático que desarrolla la Lógica Difusa .
- ⋆ Reconocer e identificar la noción de función de pertenencia.
- ⋆ Construir conjuntos difusos especificando sus propiedades, operaciones y características.

CAPÍTULO 1

BREVES NOTAS HISTÓRICAS SOBRE EL DESARROLLO DE LA LÓGICA DIFUSA Y CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Historia

Intuitivamente la teoría de la lógica difusa se remonta a los tiempos del filósofo griego Aristóteles quien dio una primera visión de las denominadas Leyes del Pensamiento, la cual sirvió luego como plataforma para fomentar algunos de sus aportes teóricos mas importantes al mundo: la lógica formal y las matemáticas. Dentro de este pensamiento Aristóteles planteó la Ley del Tercero Excluido, Ley Básica del Pensamiento, que establece que: dados los enunciados A es x y A es diferente de x, sólo uno de los dos puede ser verdadero al mismo tiempo y dentro de la misma relación.

Fué Heráclito el primero en proponer la simultaneidad de la verdad, es decir, que las cosas pueden ser simultáneamente ciertas y falsas. Pero sería Platón quien pusiera el primer cimiento solido a una nueva lógica que apenas se estaba edificando. En su obra La República, el filósofo indica que hay una variedad de regiones donde el grado de verdad de la realidad varia. Pero, correspondiendo las dos secciones de lo inteligible a entes y conocimiento de mayor realidad y verdad que los entes de lo visible, hay sin embargo diferencia en grados de realidad, conocimiento y verdad entre ellas.

La primera formulación sistemática de una lógica polivalente diferente a la lógica formal planteada por Aristóteles fué formulada por J. Lukasiewicz entre 1917 y 1920. En la lógica trivaluada de Lukasiewicz si hay lugar para la tercera opción; un enunciado no tiene que ser aceptado o no aceptado, puede ser indeterminado (Gómez Marín, 2006). Lukasiewicz continuó explorando las teorías de la lógica polivalente y abrió la posibilidad de lógicas de más de tres valores, incluso lógicas infinito-valoradas, siendo estas últimas para él, las más interesantes desde el punto de vista de sus propiedades.

Paralelamente, otros autores contribuyeron a la exploración de nuevas teorías lógicas. El matemático escocés Hugh MacColl fundamenta toda la lógica en la lógica de proposiciones y establece un sistema de lógica proposicional en el que las proposiciones pueden tomar uno de los cinco valores de verdad siguientes: verdad, falsedad, certeza (siempre verdad), imposibilidad (siempre falsa) y variabilidad (contingencia).

C. S. Peirce (1839-1914) Se acerca a la lógica polivalente desde la problemática filosófica en torno a los futuros contingentes dentro del contexto Aristotélico. Hace referencia a una matemática tricotómica considerada como una matemática basada sobre una lógica de tres valores llegando a la elaboración del método de las tablas de verdad para una lógica trivalente.

El concepto de lógica difusa fue propuesto por primera vez por Lofti A. Zadeh[1] a mediados de los años sesenta en la Universidad de Berkeley (California), donde fue presentada como una forma de procesamiento de información en la que los datos podrían tener asociados un grado de pertenencia parcial a conjuntos.

La lógica difusa es una teoría formal bien fundamentada que propone una mirada matemática más próxima a la realidad humana, en donde se reconocen valores desiguales e intermedios entre los ordinarios de verdad o falsedad. La lógica difusa trata de matematizar el lenguaje común e impreciso del hombre. El ser humano se maneja usualmente con conceptos vagos, los cuales no se pueden representar de manera precisa con la matemática tradicional.

La lógica difusa en comparación con la lógica convencional permite trabajar con información que no es exacta para poder definir evaluaciones convencionales, contrario con la lógica tradicional que solo permite trabajar con información absoluta y precisa. La lógica difusa es una lógica de múltiples valores (multivaluada), que permite que sean definidos los valores intermedios entre las evaluaciones convencionales como verdadero ó falso, sí ó no, flaco ó gordo etc. Nociones como más alto o muy rápido pueden ser formuladas matemáticamente y procesadas por computadoras, a fin de tratar de representar el comportamiento humano en una computadora.

La lógica difusa se ha utilizado en muchas situaciones para explotar la tolerancia de la imprecisión, porque de esa manera permite a las compañías requerir sensores y dispositivos más baratos, lo que ha permitido desarrollar productos electrónicos de gran consumo. Esta novedosa teoría ha generado a su vez tanto entusiasmo como controversia en la comunidad científica al diferenciarse de la lógica clásica, la cual se basa en conjuntos bien delimitados, definidos por el criterio de pertenencia inequívoca de sus elementos.

Aproximadamente en 1985, el precursor de la lógica difusa introdujo una nueva idea: la de soft computing, una metodología híbrida que engloba la lógica difusa, las redes neurales, los algoritmos evolutivos y el razonamiento probabilista. Así, la lógica difusa entra a formar parte de los procesos de toma de decisión de los sistemas y de los ordenadores que de este modo son capaces de evaluar entre grados y tonalidades de la realidad.

La lógica difusa permite integrar elementos de perfiles imprecisos, como todo lo que tiene relación con grados y matices. Por ejemplo, en el caso de las lavadoras, esta técnica permite seleccionar un ciclo modulando su duración y velocidad con el nivel de suciedad de la ropa de una forma más económica que otros métodos. Otros campos similares son los buscadores de Internet, las cámaras de vídeo, la instrumentación médica, las plantas de tratamiento de aguas residuales o el control inteligente de motores para automóviles. Sin embargo, lo que hizo

[1](Azerí; Bakú, 4 de febrero 1921) matemático, ingeniero eléctrico, informático y profesor de la Universidad de Berkeley. Es famoso por introducir en 1965 la teoría de conjuntos difusos o lógica difusa. Se le considera asimismo el padre de la teoría de la posibilidad

especialmente famosa a la lógica difusa fue su contribución a la mejora de las técnicas en la conducción de metros y ferrocarriles.

En el año 2013, la Fundación Fronteras del Conocimiento del BBVA, otorgó el premio en la categoría Tecnologías de la Comunicación y la Información en su quinta edición a Lotfi A. Zadeh por su desarrollo de la lógica difusa. Premio obtenido por su aporte, pues ha sido un avance extraordinario que permitió a las maquinas trabajar con conceptos imprecisos de una manera aproximada a como lo hacen los humanos, permitiendo resultados mas eficientes y ajustados a la realidad.

Los avances a través de la historia se han reflejado también en el desarrollo de teorías y procesos que puedan explicar y tratar la incertidumbre, por lo que la existencia de numerosos eventos estrechamente relacionados con la incertidumbre han generado algunos métodos para poder tratarla. En la actualidad la probabilidad es uno de los métodos más utilizados en este tratamiento, pues ha permitido verificar si algún evento puede darse o no. Sin embargo se debe tener en cuenta que los procesos basados en Lógica difusa son uno de los métodos mas aproximados no probabilísticos que proporciona un tratamiento a la incertidumbre. [2]

1.2. La incertidumbre

Los primeros estudios que se basaron en el tratamiento de la incertidumbre se dieron a principio del siglo XIX, lo que significaba un tratamiento puramente probabilístico. Para finales del siglo XIX, en los años 70, estos sistemas modelaron el conocimiento con un enfoque netamente lógico. Generaciones siguientes emplearon técnicas probabilistas que arrojaban mejores resultados, sin embargo se presentaban dificultades con el crecimiento exponencial de las probabilidades necesarias para calcular la distribución conjunta de la probabilidad cuando el numero de variables aumentaba. En consecuencia surgieron algunas de las siguientes aproximaciones:

1.2.1. Métodos no Numéricos

Las aproximaciones no numéricas que utilizan un razonamiento mas cercano al humano (*cualitativo*) y que son arduamente estudiadas dentro de este énfasis es el razonamiento por Defecto, que trata las conclusiones de los sistemas de reglas como validas hasta que se encuentre una razón mejor para creer en alguna otra cosa. Otros ejemplos de aproximaciones no numéricas que tratan la incertidumbre son las redes cualitativas y los sistemas de mantenimiento de coherencia.

1.2.2. Métodos Numéricos

Dentro de los métodos numéricos se destacan los métodos con énfasis probabilistas que asocian un valor numérico (*grado de creencia*) entre 0 y 1 para compendiar la incertidumbre de las proposiciones. Es decir, un grado de 0,7 no implica el 70 % de veracidad de la oración, sino un grado de aceptación o de creencia del 70 % de la oración. Las creencias obedecen a las percepciones recibidas, que constituyen las evidencias sobre las que se hacen las afirmaciones sobre probabilidad. Cuando se adquiere mas evidencia las probabilidades pueden cambiar.

Podemos distinguir algunas familias de técnicas probabilistas con métodos exactos como las Redes Bayesianas[2], Diagramas de influencia, entre otros. También se destacan los métodos probabilistas aproximados como las Redes Bayesiana subjetivas y Factores de Certeza. Entre los métodos numéricos no probabilistas para el tratamiento de la incertidumbre esta La Teoría de Dempster-Chafer [3] que utiliza grados de creencias dados por intervalos de valores para representar el conocimiento. De igual forma uno de los métodos de razonamiento aproximado no probabilista es la Logica Difusa, que se define como una extensión de la lógica clásica, en el marco de las lógicas multivaluadas y facilita enormemente el modelado de información cualitativa de un forma muy aproximada.

1.2.3. Orden de la incertidumbre

Basados en los conceptos del razonamiento humano y su estrecha relación con lo sistemas difusos, se puede ordenar la incertidumbre de menor a mayor, según su campo de incertidumbre: el determinismo, la aleatoriedad, la ambigüedad o no especificidad, la vaguedad y la confusión.

El determinismo

Con su menor grado de incertidumbre el determinismo corresponde con el conocimiento perfecto de los resultados y la ocurrencia de los eventos, dejando de lado la incertidumbre sin tomarla en consideración y determinando su no existencia.

La aleatoriedad

En el segundo grado de incertidumbre, la aleatoriedad se presenta cuando los posibles resultados eventuales de un experimento son conocidos. También puede resultar en eventos de conflicto cuando las afirmaciones pueden tener valores de aceptación verdadero o falso. La incertidumbre aleatoria se ha relacionado o tiene bastante cercanía con la teoría de la probabilidad, aunque sus resultados deban darse de manera empírica o subjetiva basados al margen de rangos en lugar de valores absolutos o aproximaciones, es decir dentro de intervalos donde no se precisa el valor absoluto.

La ambigüedad o no especificidad

Cuando existen diferentes significados de una palabra, suceso o expresión, proporciona valores que generan ambigüedad. Para el caso de la lógica difusa se presenta cuando los eventos no están bien definidos o no son claros, por lo que puede corresponder a la falta de conocimiento de la información y se da cuando existe una relación de uno a muchos.

[2] Es una red gráfica que representa las relaciones de causalidad probabilísticas entre variables y permite obtener soluciones a problemas de decisiones bajo incertidumbre.

[3] La teoría de Dempster-Chafer es una extensión en la teoría de la probabilidad para describir incertidumbre en la evidencia. Se centra en la credibilidad que se asigna a que un evento pueda ocurrir,desde el punto de vista y de acuerdo a la experiencia de la persona que toma las decisiones.

La vaguedad

La vaguedad imposibilita verificar o refutar un evento o una información, es decir no se puede determinar un valor de verdad. A diferencia de la ambigüedad establecer una mayor cantidad de datos no ayuda a la solución o simplificación del problema.

La confusión

Es un tipo de incertidumbre de alto conflicto y con una mínima opción de aproximación se presenta en particularidades tanto ambiguas como vagas.

Al encontrarse con un tipo de incertidumbre aleatoria desde un punto objetivista de la probabilidad, en la mayoría de los casos los problemas de incertidumbre se pueden tratar asignando probabilidades a los diferentes eventos a través de la frecuencia relativa o análisis estadístico, siempre optando por un tratamiento probabilista; lo que determina una clara definición de los resultados, obteniendo un medida precisa de la probabilidad de que los eventos ocurran. No obstante, si esto no ocurre, desde lo subjetivo se puede considerar a la probabilidad como una medida personal de la incertidumbre o de creencia sobre un evento, lo que implicaría que la probabilidad no existe como algo bien definido. Es decir, la probabilidad puede estipularse con base en la creencia de las personas sobre la ocurrencia de un evento, por ejemplo, dos personas al mirar el cielo puede dar juicios distintos acerca si eventualmente va o no a llover.

En muchos casos la incertidumbre puede ser tratada con la teoría subjetivista de la probabilidad, permitiendo así la reducción de la imprecisión de los eventos. Por lo que es posible fijar las probabilidades de una manera muy práctica, sin la necesidad de definir con precisión o de una manera numérica esa probabilidad. En particular, para la ambigüedad y la vaguedad en donde no es posible definir un valor de verdad sobe una afirmación, el tratamiento de la incertidumbre se desarrolla con la teoría de *Lógica Difusa*, que permite establecer a través de funciones especificas grados de validez de una manera muy objetiva.

1.3. Concepto intuitivo de Lógica Difusa

La *Lógica Difusa* fue concebida en principio como un método para formalizar operaciones del razonamiento sobre conceptos imprecisos, que son comúnmente utilizados en el pensamiento humano y que no son tomados en cuenta o concebidos por la lógica convencional o aristotélica. Con el desarrollo de la *Lógica Difusa* se pueden trabajar conceptos cualitativos tan vagos e imprecisos como *muy, más o menos, demasiado, etc.* Este nuevo desarrollo de la lógica surge como una extensión de la lógica clásica que utiliza grados de pertenencia diferentes a los absolutos verdadero/falso. Es decir la lógica clásica se puede considerar como un caso particular de la *Lógica Difusa.* [2] [6]

Un conjunto convencional o clásico se basa en la pertenencia o no pertenencia de los elementos sobre el conjunto, por ejemplo: 2 *pertenece al conjunto de los números naturales* ($\mathbb{N}$) *o la letra a pertenece al conjunto de las vocales en el alfabeto de la lengua española.* Sobre estos elementos no podemos percibir ningún tipo de incertidumbre o imprecisión, dado que los datos tienen un grado de pertenencia precisa, por lo que de esta manera podemos expresar una función de pertenencia para un conjunto A convencional de la siguiente forma:

$$\mu_A = \begin{cases} 0, & \text{Sí el elmento no pertenece al conjunto A} \\ 1, & \text{Sí el elemento pertenece al conjunto A} \end{cases}$$

Entendiendo el término básico de pertenecia, existen otros conceptos que no son tan precisos como el ejemplo anterior, por lo que conjuntos como el de *las personas adultas*, *las personas altas* o similarmente *los carros veloces*, son conjuntos que no tienen un grado de pertenencia preciso o una frontera clara de clasificación, por lo que se puede establecer una gradación continua del valor de verdad en el intervalo $[0,1]$, donde 0 es totalmente falso y 1 es totalmente cierto, indicando el grado de verdad del conocimiento representado. [1] [2]

La *Lógica Difusa* se basa en la teoría de los conjuntos difusos y para definir un conjunto difuso se debe estrictamente establecer una función caracteística o de pertenencia, siendo esta la que le asigna a cada elemento del conjunto un grado real de pertenencia dentro del intervalo $[0,1]$, donde los valores más grandes determinan un grado de pertenencia mayor y los valores más pequeños implican un grado de pertenencia menor, en tal sentido si **A** es un conjunto dentro de un universo de discurso o dominio, a un elemento dentro dicho universo y $\mu(A)$ la función de pertenencia de **A**, entonces, si $0 < \mu(a) < 1$ a posee un grado de pertenencia parcial al conjunto **A**, si $\mu(a) = 0$ a no pertenece al conjunto **A** y si $\mu(a) = 1$ a posee el grado mayor de pertenencia al conjunto **A**. [2]

Usualmente se nota la función de pertenencia de un conjunto difuso de la siguiente manera:

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

donde **X** es el universo del dominio, **A** es el conjunto difuso definido a partir de la función de pertenecía μ_A que fija una correspondencia de grado de valor a los $a \in \mathbf{X}$ entre el intervalo $[0,1]$.

1.4. Probabilidad y lógica difusa

Existe una relación estrecha entre los conceptos utilizados en la lógica difusa y la probabilidad, sin embargo son diferentes. La probabilidad se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso pueda ocurrir o si es más probable que otro. Por otro lado, la Lógica Difusa permite a través de su función de pertenencia otorgarle un grado de validez a un elemento de algún conjunto y así poder verificar su viabilidad como se muestra en el próximo ejemplo. Sin embargo, es normal que cuando se aborda o se estudia la Lógica Difusa se tenga una relación muy compacta con la probabilidad o se asocie de una manera muy equitativa.

Teniendo en cuenta los conceptos ya mencionados podemos ver en el ejemplo siguiente cómo se manifiesta la Lógica Difusa en la toma de decisiones de los profesionales o en las empresas.

Ejemplo: *un médico necesita inyectar un medicamento a un paciente que sufre de la tensión. Después de hacer su consulta, el profesional tiene dos posibilidades de droga etiquetadas de la* *siguiente manera: La droga* ***A difusa*** *se encuentra con un grado de pertenencia del* 0,9 *de que si se inyecta no se corre el riesgo de desarrollar problemas cardíacos. La droga* ***B probabilista*** *tiene una probabilidad del* 0,9 *de no desarrollar problemas cardíacos. ¿ Que tipo de droga debería inyectar el médico a su paciente?*

Figura 1.1: Imagen referente al ejemplo de la droga difusa y probabilista

El grado de pertenencia de la droga **A** nos indica que en el intervalo de 0 a 1 esta droga pose un grado de pertenencia de 0,9 altamente conveniente para no desarrollar problemas cardíacos. El porcentaje de la droga **B** indica que el 90 % de las veces en que se inyecta la droga no produce problemas cardíacos, pero ¿Qué pasará con el otro 10 % de la droga probabilista? En estas ocasiones la droga si produce problemas cardíacos, por lo tanto, hay una posibilidad del 10 % de que se desarrolle un problema del corazón. Es de decir, el grado de pertenencia de la droga **A** permite saber que es una de las drogas que no causan problemas cardíacos, o por lo menos, es más confiable por tener un grado mayor de pertenencia al conjunto de estas drogas.

¿Qué decisión debería tomar el médico si cada una de las drogas estuviera etiquetada con 0,5 respectivamente?

En este caso la droga **A** no seria tan confiable, ya que su grado de pertenencia al conjunto de las drogas que no producen problemas cardíacos no es tan alto y lo que podría pasar es que al inyectarse se desarrolle un problema del corazón en cualquiera de los pacientes. Por lo tanto, para la droga **B**, existe una posibilidad grande del 50 % de no desarrollar un problema cardíaco (una total incertidumbre), pero por lo menos hay una probabilidad de que de cada 100 personas que se les inyecta la droga 50 de ellas no desarrolla problemas cardíacos.

Numerosos ejemplos se pueden presentar en muchos aspectos de las ciencias, donde la ambigüedad dificulta el tratamiento, por lo que es más complejo desarrollar procesos matemáticos que analicen y expliquen este tipo de eventos, debido a que la matemática ha trascendido bajo fundamentos teóricos de la lógica clásica. Sin embargo, el hombre siempre ha querido reflejar la realidad humana en sus propias creaciones haciendo de los desarrollos matemáticos una base. La lógica difusa bajo su desarrollo ha permitido algunos avances en diferentes campos del saber proyectando la eficiencia y eficacia a la tecnología, la economía, entre otras. Uno de sus grandes avances fue su utilización en el desarrollo de los sistemas involucrados en las trayectorias de los trenes eléctricos de Japón, que determinó el protocolo y el algoritmo para que estos trenes tuvieran el funcionamiento adecuado en la red de tránsito y estaciones de servicio, de tal manera que no hubieran saltos bruscos en la disminución y aceleración en su velocidad y funcionamiento de los sistemas electrónicos.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DE LÓGICA DIFUSA

2.1. Componentes Lógicos y Teoría de Conjuntos Difusos

La simbología que se utiliza en las estructuras teóricas de la Lógica Difusa son en gran medida la misma que se utiliza en la teoría de la Lógica Clásica. Para la teoría de Lógica Difusa es necesario la utilización de proposiciones y conectivos lógicos, que implique un lenguaje propio y claro para expresar las ideas fundamentales. Haciendo un análisis mas exhaustivo sobre esta teoría nos damos cuenta que la Lógica Difusa se ve como una extension de la Lógica Clásica.

Los fundamentos axiomáticos de Lógica Difusa se basan en la teoría aximática de la probabilidad y se construyen a partir de una red o *reticle* [2] que consiste en los siguientes puntos o *nodes*:

1. X, universo del discurso.
2. M, elemento máximo de X.
3. m, elemento mínimo de X.
4. $\wedge$, conjunción.
5. $\vee$, disyunción.

Los elementos $M.m \in X$ adquieren la mayor y la menor valorización dentro del universo del discurso determinado. Como veremos mas adelante dichos valores no son únicos. [2]

La red la podemos expresar de de la siguiente manera:

$$R(X, M, m, \wedge, \vee.)$$

Para $x, y, z \in X$, se satisfacen:

Axioma 1: *Idempotencia. Para todo $x \in R$, se tiene que:*

$$x \wedge x = x \vee x = x$$

Axioma 2: *Conmutatividad. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$x \wedge y = y \wedge x$$
$$x \vee y = y \vee x$$

Axioma 3: *Asociatividad. Para todo $x, y, z \in R$, se tiene que:*

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$
$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

Axioma 4: *Absorción. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$

Axioma 5: *Distributividad. Para todo $x, y, z \in R$, se tiene que:*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Axioma 6: *Elemento Máximo y elemento mínimo. Para todo $x \in R$, se tiene que:*

$$x \wedge M = x \text{ y } x \vee M = M$$
$$x \wedge m = m \text{ y } x \vee m = x$$

Axioma 7: *Relación de orden. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$x \preceq y \; si \; existe \; z \in R, \; tal \; que \; y = x \vee z$$

Para todos los elementos de la red se puede aplicar una función de valoración que indica el valor de pertenencia o valor de verdad sobre el intervalo $[0,1]$. La función de valoración se denotara con la siguiente expresión:

$$p : R \to [0,1]$$

La función de valoración está sujeta a las siguientes condiciones:

Axioma 8: $p(m) = 0$ y $p(M) = 1$

Axioma 9: *Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$Si \; x \preceq y \; entonces \; p(x) \leq p(y)$$

Axioma 10: *Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$p(x \wedge y) + p(x \vee y) = p(x) + p(y),$$
$$\text{donde } p(x \wedge y) \leq \text{mín}(p(x), p(y)) \leq \text{máx}(p(x), p(y)) \leq p(x \vee y)$$

Axioma 11: *Equivalencia. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$x \leftrightarrow y, \; si \; p(x \wedge y) = p(x \vee y)$$

Los anteriores axiomas son comunes a las diferentes lógicas.

Axioma 12: *Distancia. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$d(x, y) = p(x \vee y) - p(x \wedge y)$$

Axioma 13: *Medida de equivalencia. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$p(x \leftrightarrow y) = 1 - d(x, y)$$

Axioma 14 *Implicación. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$x \to y,\ si\ (x \wedge y) \leftrightarrow x$$

Axioma 15: *Implicación estricta. Para todo $x, y \in R$, se tiene que:*

$$p(x \to y) = 1 \text{ ó } p(y \to x) = 1$$

Axioma 16: *Negación. Para todo $x \in R$, se tiene que:*

$$p(\neg x) = p(x \leftrightarrow m) = 1 - p(x) = 1 - d(x, m)$$

2.2. Consecuencias inmediatas

i. $0 = d(x, x)$

ii. $0 \leq d(x, y) \leq 1$

iii. $p(x \leftrightarrow y) = 1 - [p(x \vee y) - p(x \wedge y)]$

Proposición 1. $x \to y,\ si\ p(x \wedge y) = p(x)$ *Para todo $x, y \in R$.*

Demostración. $x \to y,\ si\ (x \wedge y) \leftrightarrow x,$ luego:

$$\begin{aligned} si\ (x \wedge y) \leftrightarrow x \quad & \to \quad p(x \wedge y) = p[x \vee (x \wedge y)] \\ & \to \quad p(x \wedge y) = p(x) \end{aligned}$$

Proposición 2. $p(x \to y) = 1 - d(y, (x \vee y))$ *Para todo $x, y \in R$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} p(x \to y) &= p(x \leftrightarrow (x \wedge y)) \\ &= 1 - d(x, (x \wedge y)) \\ &= 1 - [p(x) - p(x \wedge y)] \\ &= 1 - p(x) + p(x \wedge y) \\ &= 1 - p(x) + [p(x) + p(y) - p(x \vee y)] \\ &= 1 + [p(y) - p(x \vee y)] \\ &= 1 - d(y, (x \vee y)) \end{aligned}$$

Es de resaltar que la función de valoración $p : R \to [0,1]$ expuesta anteriormente se desarrolla de manera más rigurosa en la siguiente sección.

2.3. Función de Pertenencia

En la sección (1,3) asociamos a cada conjunto difuso una función de pertenencia $\mu_A : X \to [0,1]$ que a cada elemento del conjunto su valor de verdad o de pertenencia en el intervalo [0,1]. De esta manera la **función de pertenencia** o función de valoración es en su totalidad el fundamento de cada elemento del conjunto difuso y a su vez del mismo conjunto. Luego esta función de pertenencia debe ser una función continua, acotada y cerrada, que posee algunas propiedades esenciales.[2] [6] [8]

Definición 1. Sea X un universo de dominio, A un subconjunto de X, notaremos como μ_A una función de X en el intervalo $[0,1]$ y la denominaremos la función de pertenencia asociada al conjunto A.

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

De igual manera al conjunto A lo denominaremos conjunto difuso o conjunto borroso.

Proposición 3. $0 \leq \mu_A(x) \leq 1, \forall x \in X.$

Demostración. En efecto por definición de elemento máximo y mínimo $m \leq x \leq M$, por lo que $\mu_A(m) \leq \mu_A(x) \leq \mu_A(M)$ y en virtud del *axioma 7*, $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$.

2.4. Conjuntos difusos

Una generalización de la teoría de conjuntos clásicos se refleja en la teoría de conjuntos difusos, tratando de producir resultados exactos basados en datos imprecisos. Esta generalización se establece bajo la necesidad de otorgar un estado de pertenencia a algunos objetos o apreciaciones del ser humano que presentan una relación de incertidumbre o vaguedad bajo un dominio. Podemos expresar este tipo de incertidumbres a partir de las siguientes apreciaciones: *las personas altas, los números mucho más grandes que 1 o los autos muy veloces.* Así nos damos cuenta que la representación de las anteriores apreciaciones sobre algún conjunto determinado clásico, tiende a ponerse de una manera complicada por los estados de incertidumbre que se presentan en cada una de ellas. Las expresiones *mucho, muy* determinan de muchas maneras su vaguedad, es decir, podría ser impreciso determinar desde qué número podemos concebir cuáles son los más grande que 1 o a que velocidad podemos concebir a los autos muy veloces, etc. [6] [4]

Un conjunto difuso se caracteriza por el grado de pertenencia que se le otorga a los elementos de su dominio. Este grado de pertenencia se verifica a través de una función continua sobre el intervalo [0,1]. La teoría de conjuntos difusos nos permite determinar la pertenencia parcial de elementos a varios conjuntos en diferentes grados.

Un conjunto difuso **A** sobre un dominio **X**, está definido por los pares ordenados $(x, \mu_A(x))$, donde μ_A es la función de pertenencia de x en el conjunto A, que asocia a cada elemento x del dominio X un grado o valor de pertenencia en el intervalo cerrado entre 0 y 1. [6]

El valor de la función se interpreta como el grado de pertenencia de dicho objeto al conjunto **A**, es decir, para números más cercanos a 0 indican poca pertenencia al conjunto, en el caso de que el valor de la función de pertenencia sea igual a 0 indica la no pertenencia. Para valores más próximos a 1 indica una mayor pertenencia al conjunto **A**, en el caso de que el valor de la función de pertenencia sea igual a 1, esto indica la pertenencia absoluta [2]. Las funciones de pertenencia más utilizadas son las de forma de campana, de tipo triangular y trapezoidal .

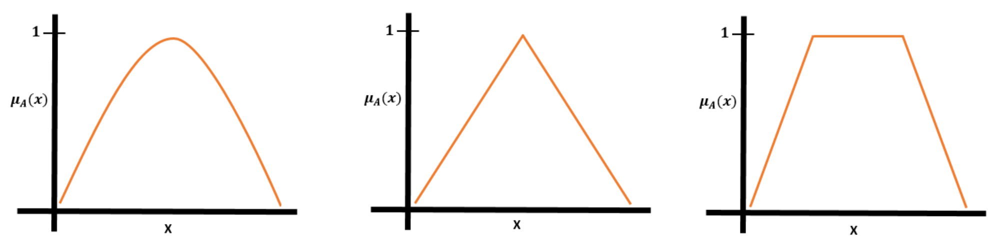

Figura 2.1: Funciones de pertenencia de forma de campana, triangular y trapezoidal .

Definición 2. *Conjunto Difuso. Sea X un universo de dominio dado y μ_A una función de pertenencia, un conjunto difuso A se define como:*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in X\}$$

Ejemplo: Supongamos que queremos representar en conjuntos las etapas de la vida de una persona teniendo en cuenta cuando una persona es niño, adolescente, joven, adulto y anciano. Para este ejemplo vamos a graficar individualmente ($figura\, 2,2\ y\ 2,3$) cada una de las etapas, donde el eje vertical represente el grado de pertenencia al conjunto de la etapa y el eje horizontal las edades.

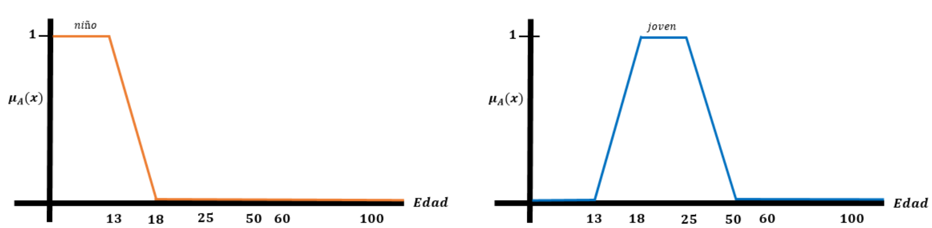

Figura 2.2: Etapas niño y joven.

La figura $(2,4)$ representa las relaciones que hay entre las etapas y muestra que en la medida que se avanza en la linea del tiempo se va pasando de etapa a etapa progresivamente.

Con este tipo de ejemplos podemos verificar la imprecisión que tenemos al hablar, por lo que los conjuntos difusos se asemejan de una manera real a la forma en que nos expresamos.

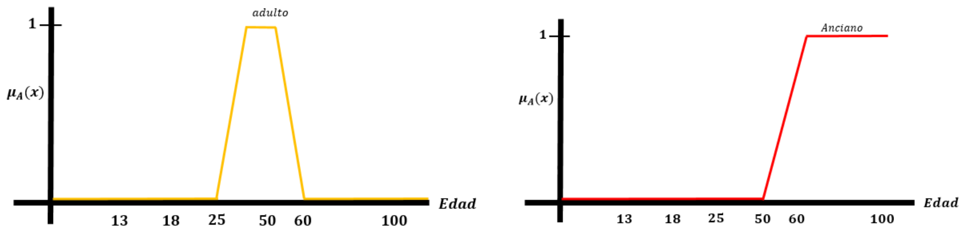

Figura 2.3: Etapas adulto y anciano.

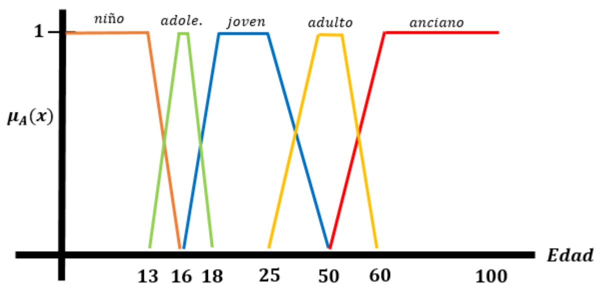

Figura 2.4: Representación gráfica para función de pertenencia de los conjuntos difusos de las etapas de la vida de una persona

La función de pertenencia se establece de una manera arbitraria, basándose en la experiencia del individuo sobre el universo del discurso.

Para todo conjunto difuso A en un universo de dominio X se cumple las siguientes propiedades:

i) Un conjunto difuso A es vacío si y solo si su función de pertenencia es cero en todo su dominio X.

$$A = \emptyset \; si \; y \; solo \; si \; \mu_A(x) = 0, \; \forall x \in X$$

ii) Un conjunto difuso A es normal si existe $x \in A$ tal que $\mu_A(x) = 1$.

iii) Decimos que dos conjuntos difusos A y B son equivalentes si y sólo si para todo elemento del dominio los valores de las funciones de pertenencia de A y B son los mismos.

$$A = B \; si \; y \; solo \; si \; \mu_A(x) = \mu_B(x), \; \forall x \in X \; (\mu_A = \mu_B)$$

iv) Decimos que un conjunto difuso A está contenido en otro conjunto difuso B ($A \; es \; subconjunto \; de \; B$) si y sólo si para todo elemento del dominio su valor de pertenencia al conjunto difuso A es menor o igual que su valor de pertenencia al conjunto difuso B.

$$A \subseteq B \; si \; y \; solo \; si \; \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \; \forall x \in X \; (\mu_A \leq \mu_B)$$

Definición 3. *Corte alfa y alfa estricto. Dado un conjunto difuso A definido en X y cualquier número $\alpha \in [0,1]$, el corte alfa, denotado como A^{α} y el corte alfa estricto denotado como $A^{+\alpha}$, son los conjuntos clásicos de la siguiente forma:*

$$A^{\alpha} = \{x/\mu_A(x) \geq \alpha\}$$
$$A^{+\alpha} = \{x/\mu_A(x) > \alpha\}$$

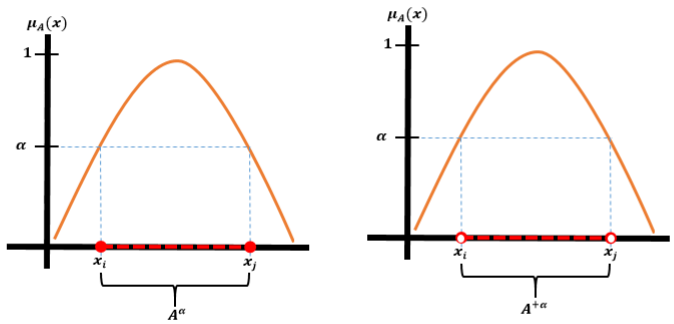

Figura 2.5: Corte alfa y corte alfa estricto .

Los cortes alfa (A^{α}) y alfa estricto $(A^{+\alpha})$ definen conjuntos clásicos, de tal manera, que estos son conjuntos donde se encuentran contenidos todos los elementos x del universo de discurso X, cuyo grado de pertenencia es mayor que o igual que al valor especifico de α. [2]

Por lo anterior se definen las siguientes propiedades para cualquier conjunto difuso A y para $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$, tal que $\alpha_1 < \alpha_2$, se tiene:

i) $A^{\alpha_1} \cap A^{\alpha_2} = A^{\alpha_2},\ A^{\alpha_1} \cup A^{\alpha_2} = A^{\alpha_1}$

ii) $A^{+\alpha_1} \cap A^{+\alpha_2} = A^{+\alpha_2},\ A^{+\alpha_1} \cup A^{+\alpha_2} = A^{+\alpha_1}$

Definición 4. *Sub-corte alfa y sub-corte alfa estricto. Dado A^{α} y $h \in [\alpha, 1]$ se define un sub-corte (hA^{α}) y un sub-corte estricto $(hA^{+\alpha})$ como:*

$$hA^{\alpha} = \{x/h \geq \mu_A(x) \geq \alpha\}$$
$$hA^{+\alpha} = \{x/h > \mu_A(x) > \alpha\}$$

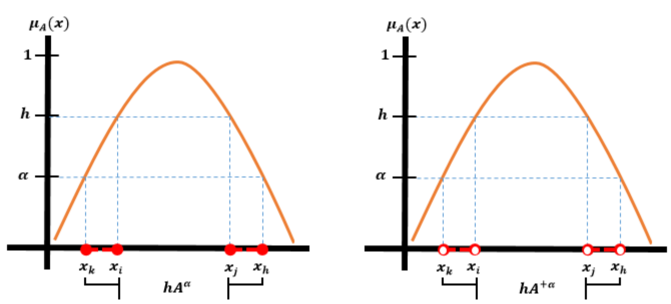

Figura 2.6: Sub-corte alfa y sub-corte alfa estricto .

Por *definición 3* y *definición 4* se verifica que todos los (A^{α}) y todos los $(A^{+\alpha})$ definen dos familias diferentes de conjuntos clásicos, donde se caracteriza la contenencia de uno sobre otro y se deducen las siguientes proposiciones:

iii) $hA^{\alpha} = \{x/\mu_A(x) = \alpha\}\ si\ h = \alpha$

iv) $h_1 A^{\alpha} \cup h_2 A^{\alpha} = h_2 A^{\alpha},\ con\ h_1 \leq h_2$

v) $h_1 A^{+\alpha} \cup h_2 A^{+\alpha} = h_2 A^{+\alpha},\ con\ h_1 < h_2$

vi) $h_1 A^{\alpha} \cap h_2 A^{\alpha} = h_1 A^{\alpha},\ con\ h_1 \leq h_2$

vii) $h_1 A^{+\alpha} \cap h_2 A^{+\alpha} = h_1 A^{+\alpha},\ con\ h_1 < h_2$

viii) $A^{\alpha} = hA^{\alpha},\ si\ h = 1$

Demostración

iv) $h_1 A^{\alpha} \cup h_2 A^{\alpha} = h_2 A^{\alpha},\ con\ h_1 \leq h_2$. Para demostrar que se cumple esta proposición debemos verificar la doble contenencia de estos conjuntos.

Sea $x \in (h_1 A^{\alpha} \cup h_2 A^{\alpha})$, *entonces* $x \in h_1 A^{\alpha}$ *o* $x \in h_2 A^{\alpha}$, *esto implica por definición de* hA^{α} *que* $h_1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$ *o* $h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$.

Luego como $h_2 \geq h_1$ *lo que a su vez cumple que* $h_2 \geq h_1 \geq \alpha$, *entonces por distributividad de la conjunción con respecto a la disyunción tenemos que* $(h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha \wedge h_2 \geq h_1 \geq \alpha) \vee (h_1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha \wedge h_2 \geq h_1 \geq \alpha)$.

Por lo que $(h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha) \vee (h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha)$, *por lo tanto podemos concluir que* $h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$, *entonces* $x \in h_2 A^{\alpha}$.

Ahora supongamos un $x \in h_2 A^{\alpha}$, *entonces se cumple que* $h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$ *y* $h_2 \geq h_1 \geq \alpha$, *donde se debe tener en cuenta lo siguiente:*

que $h_2 \geq h_1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha \vee h_2 \geq \mu_A(x) \geq h_1 \geq \alpha$, *en efecto:*

$h_1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha \vee h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$, *por lo tanto* $x \in (h_1 A^{\alpha} \cup h_2 A^{\alpha})$, *que es lo que queríamos demostrar.*

Luego como $(h_1 A^{\alpha} \cap h_2 A^{\alpha}) \subseteq h_1 A^{\alpha}$ y $h_2 A^{\alpha} \subseteq (h_1 A^{\alpha} \cap h_2 A^{\alpha})$, entonces $(h_1 A^{\alpha} \cup h_2 A^{\alpha}) = h_2 A^{\alpha},\ con\ h_1 \geq h_2$.

vi) $h_1 A^{\alpha} \cap h_2 A^{\alpha} = h_1 A^{\alpha},\ con\ h_1 \leq h_2$. Para demostrar que se cumple esta condición debemos verificar la doble contenencia de estos conjuntos.

Sea $x \in (h_1 A^{\alpha} \cap h_2 A^{\alpha})$ entonces, $x \in h_1 A^{\alpha} \wedge x \in h_2 A^{\alpha}$, entonces, $x \in h_1 A^{\alpha}$. Por lo tanto como se cumple que $x \in h_1 A^{\alpha}$ podemos concluir que $(h_1 A^{\alpha} \cap h_2 A^{\alpha}) \subseteq h_1 A^{\alpha}$.

Ahora $Sea\ x \in h_1 A^{\alpha} \longrightarrow h_1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha \wedge h_2 \geq h_1 \geq \alpha$

Por un lado tenemos que $(h_2 \geq h_1) \wedge h_1 \geq \mu_A(x) \longrightarrow h_2 \geq \mu_A(x)$

Ahora como $\mu_A(x) \geq \alpha \wedge h_2 \geq \mu_A(x) \longrightarrow h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$

Luego tenemos que $h_1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha \wedge h_2 \geq \mu_A(x) \geq \alpha$, esto implica que por definición de sub-corte alfa $x \in (h_1 A^\alpha \cap h_2 A^\alpha)$

Por lo que podemos decir $h_1 A^\alpha \subseteq (h_1 A^\alpha \cap h_2 A^\alpha)$.

Luego como $(h_1 A^\alpha \cap h_2 A^\alpha) \subseteq h_1 A^\alpha$ y $h_1 A^\alpha \subseteq (h_1 A^\alpha \cap h_2 A^\alpha)$, entonces $(h_1 A^\alpha \cap h_2 A^\alpha) = h_1 A^\alpha,\ con\ h_1 \geq h_2$.

viii) $A^\alpha = hA^\alpha,\ si\ h = 1$. Igual que las anteriores demostraciones es necesario demostrar la doble contenencia de los conjuntos.

$$\begin{aligned} Sea\ x \in hA^\alpha &\longrightarrow h \geq \mu_A(x) \geq \alpha \\ &\longrightarrow h \geq \mu_A(x)\ \wedge\ \mu_A(x) \geq \alpha \\ &\longrightarrow \mu_A(x) \geq \alpha \\ &\longrightarrow x \in A^\alpha \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} Sea\ x \in A^\alpha &\longrightarrow \mu_A(x) \geq \alpha\ \wedge\ 1 \geq \mu_A(x) \geq 0 \\ &\longrightarrow 1 \geq \mu_A(x) \geq \alpha\ \wedge\ h = 1 \\ &\longrightarrow h \geq \mu_A(x) \geq \alpha \\ &\longrightarrow x \in hA^\alpha \end{aligned}$$

Por lo anterior podemos decir que $hA^\alpha \subseteq A^\alpha$ y $A^\alpha \subseteq hA^\alpha$, por lo tanto $A^\alpha = hA^\alpha,\ si\ h = 1$.

Es claro que determinar este tipo de conjuntos y sus propiedades abre la concepción de la teoría de conjuntos difusos ya definidos anteriormente. Se debe recordar al lector que la base fundamental de un conjunto difuso es la función de pertenencia dada por la *definición 1*. De esta manera, debemos definir las partes de una función de pertenencia y que ayudara al lector a tener más claridades sobre la teoría de conjuntos difusos.

Definición 5. *Núcleo. El núcleo de una función de pertenencia de un conjunto difuso **A** es la región del universo de dominio que se caracteriza por la total pertenencia de sus elementos al conjunto [2] . Este es el conjunto clásico notado y determinado por:*

$$Núcleo(A) = \{x / \mu_A(x) = 1\}$$

El núcleo de un conjunto difuso A se nota por A^1.

Definición 6. *Soporte. El soporte de una función de pertenencia de un conjunto difuso **A** es la región del universo de dominio que se caracteriza por tener un grado de pertenencia al conjunto A mayor que cero [2]. Este es el conjunto clásico notado y definido por:*

$$Soporte(A) = \{x / \mu_A(x) > 0\}$$

El soporte de un conjunto difuso A se puede notar por A^{+0} (corte alfa estricto en cero).

Definición 7. *Frontera. La frontera de una función de pertenencia de un conjunto difuso* ***A*** *es la región del universo de dominio que se caracteriza por tener un grado de pertenencia al conjunto A mayor que cero y menor que uno [2]. Este es el conjunto clásico notado y definido por:*

$$Frontera(A) = \{x / \ 0 < \mu_A(x) < 1\}$$

La frontera de un conjunto difuso A se puede obtener y denotar por la diferencia de los conjuntos clásicos A^{+0} y A^1, es decir $A^{+0} - A^1$.

Definición 8. *Altura. La altura $h(A)$ de una función de pertenencia de un conjunto difuso* ***A*** *es el mayor grado de pertenencia obtenido por algún elemento en el conjunto dado [2]. Este es el conjunto clásico definido por:*

$$Altura: \ h(A) = máx\{\mu_A(x) / x \in X\}$$

Definición 9. *Conjunto nivel. El conjunto de todos los $x \in X$, tal que $\mu_A(x) = \alpha$, para algún $\alpha \in [0,1]$. Es decir, el conjunto clásico definido por:*

$$Nivel: \ N(A) = \{x \in X / \mu_A(x) = \alpha, \ \textit{para algún } \alpha \in [0,1]$$

2.5. Operaciones sobre conjuntos difusos

Las tres operaciones básicas de de los conjuntos clásicos (unión, intersección y complemento) también se definen en la teoría de conjuntos difusos teniendo en cuenta las relaciones de grado de pertenencia de los elementos de cada conjunto que están determinados por la función de pertenencia. [1] [2] [6]

Definición 10. *Unión. Para dos conjuntos difusos A y B se define las unión $A \cup B$ de la siguiente manera:*

$$A \cup B = \{(x, \mu(x)) / \mu(x) = máx\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$$

Definición 11. *Intersección. Para dos conjuntos difusos A y B se define la intersección $A \cap B$ de la siguiente manera:*

$$A \cap B = \{(x, \mu(x)) / \mu(x) = mín\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}$$

Definición 12. *Complemento. El complemento A' para un conjunto difuso A para todo $x \in X$ esta dado por el siguiente conjunto:*

$$A' = \{(x, \mu(x)) / \mu(x) = 1 - \mu_A(x)\}$$

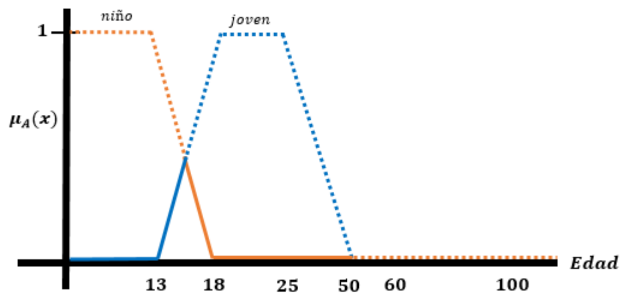

Figura 2.7: La linea punteada muestra la unión entre los conjuntos difusos niño y joven.

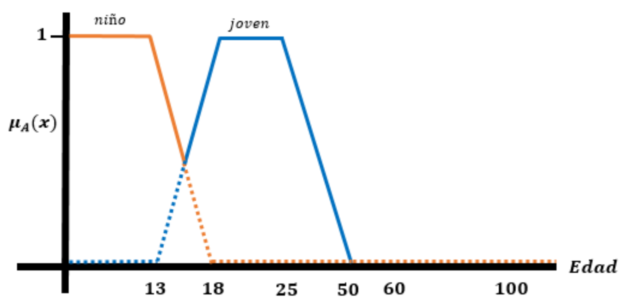

Figura 2.8: La linea punteada muestra la intersección entre los conjuntos difusos niño y joven.

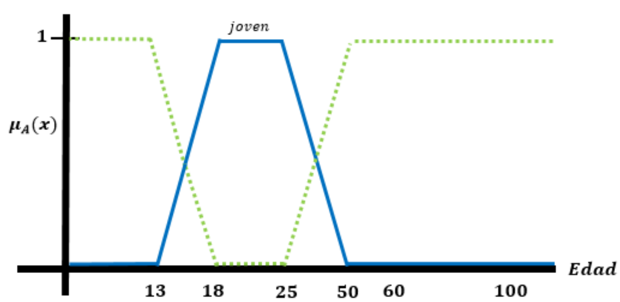

Figura 2.9: La linea punteada muestra el complemento para el conjunto difuso joven.

Las tres operaciones definidas anteriormente para conjuntos difusos cumplen con las propiedades básicas de conjuntos clásicos, la asociatividad, la conmutatividad, la distributuvidad y las leyes de Morgan. Sin embargo, no cumplen con la ley del tercero excluido y la ley de contradicción, donde el incumplimiento de éstas leyes por un conjunto clásico permite verse como un conjunto difuso.

Veamos por ejemplo para la ley de contradicción; es decir para un conjunto difuso A, $A \cap A' \neq \emptyset$ como lo muestra el siguiente gráfico:

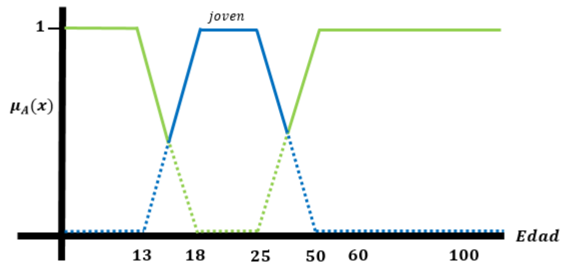

Figura 2.10: La linea punteada muestra $A \cap A'$ para el conjunto difuso joven.

Veamos ahora para la ley del tercero excluido; es decir para un conjunto difuso A, $A \cup A' \neq U$, siendo U el universo del dominio. El siguiente gráfico muestra la unión entre A y A'.

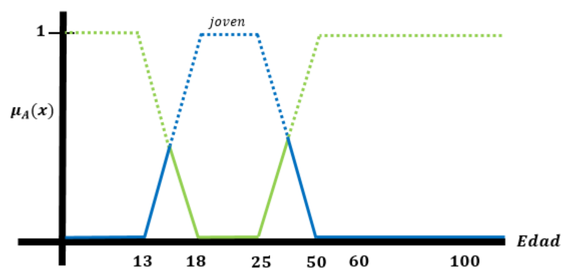

Figura 2.11: La linea punteada muestra $A \cup A'$ para el conjunto difuso joven.

Definición 13. *Cardinal de un conjunto difuso A. El cardinal $card(A)$ de un conjunto difuso A en un universo de discurso finito X es el número de elementos contenidos en el conjunto A.*

El cardinal de un conjunto difuso se utiliza para resolver cuestiones como conocer el número de personas que pertenecen al conjunto difuso finito joven, adulto o anciano según su grado de pertenencia. Debido a esto el cardinal de un conjunto difuso juega un papel importante en su aplicabilidad a las bases de datos y los sistemas de información.

Ejemplo: Se puede definir una posible función de pertenencia para el conjunto difuso de los números cercanos a cero [6] como:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+10x^2}, \text{ para todo } \; x \in \mathbb{R}$$

Veamos esta función en la figura (2,12) para todo $x \in [-3,3]$, donde el universo del discurso son los números reales.
Para esta función de pertenencia se deducen los siguientes elementos:

a. Se determina el conjunto difuso $A = \{(x, \mu_A(x)) \ / \ \mu_A(x) = \frac{1}{1+10x^2}\}$.

b. Se determina el conjunto Núcleo $N = \{0\}$.

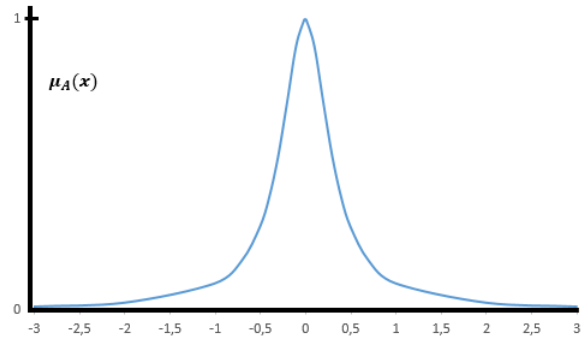

Figura 2.12: Representación gráfica para La función de pertenencia $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+10x^2}$. para $x \in [-3,3]$.

c. Se determina el conjunto Soporte $S = \{-3 \leq x \leq 3\}$, debido a que para todo $x \in [-3,3]$ la expresión $1+10x^2 \neq 0$.

d. Se determina el conjunto Frontera F como los $x \in [-3,0) \cup (0,3]$.

e. La altura $h(A) = 1$.

f. El complemento de $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+10x^2}$. para $x \in [-3,3]$, dado por la figura 2,11.

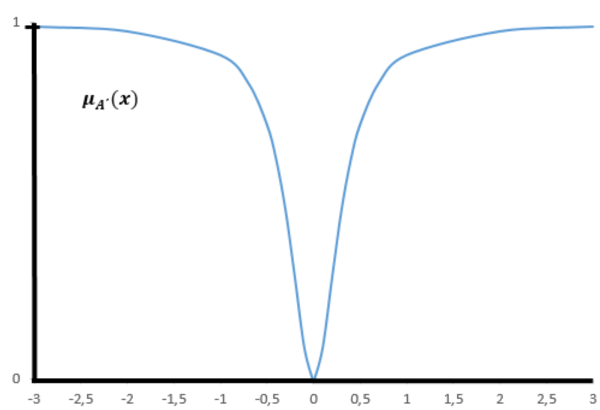

Figura 2.13: Representación gráfica del complemento $\mu_{A'}(x)$ para la función de pertenencia $\mu_A(x) = \dfrac{1}{1+10x^2}$. para $x \in [-3,3]$.

Es importante resaltar las operaciones básicas sobre conjuntos difusos definidas anteriormente, debido, a que es un avance importante en esta teoría, sin embargo, se debe entender que no son las únicas en este tipo. Sobre las tres operaciones existe una serie extensa de funciones que se se pueden definir como uniones e intersecciones y complementos difusos diferentes a las ya definidas.

En la siguiente sección se definen tres clases de funciones que responden a sus propias características axiomáticas, resaltando la validez de su desarrollo. Entre estas funciones califican las llamadas o conocidas *conormas-T* (conormas triangulares) que puede determinar un tipo de uniones difusas y las *normas-T* (normas triangulares) que determinan intersecciones difusas.

2.5.1. Uniones difusas o conormas-T

Las uniónes difusas o conormas-T ($conormas\ triángulares$) se utilizan para calcular los valores de pertenencia de una unión de dos o más conjuntos difusos. Estas uniones difusas representan una clase de operadores generales para realizar la unión de conjuntos difusos semejante a la unión básica definida por la condición $máx\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.[8]

Una unión difusa o conormas-T de dos conjuntos difusos A y B se determina en general por una operación binaria en el intervalo $[0,1]$ y esta dada por una función u de la siguiente manera:

$$u : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

Donde se toma el grado de pertenencia de algún elemento x en el conjunto difuso A y el grado de pertenencias del mismo elemento x en el conjunto difuso B, luego esta función devuelve el grado de pertenencia de los elementos hacia el conjunto difuso $A \cup B$ [2] [8], es decir:

$$(A \cup B)_x \ = \ u[\mu_A(x), \mu_B(x)], \ \forall x \in X$$

Para ser u una función aceptada como unión difusa, debe esta operación binaria en el intervalo $[0,1]$ satisfacer los axiomas enunciados a continuación .

Para todo $a, b, c \in [0,1]$:

i. $u(a,0) = a$ (Limite condicional de la unión). Es decir que para cada valor de pertenecía a en el intervalo $[0,1]$ operado según la función u con el valor de pertenencia 0, debe dar como resultado el mismo elemento a. Esto se da debido a que según la definición de unión de un conjunto difuso, el elemento máximo para $a \neq 0$ es a. [8]

ii. $Si\ b \leq c\ implica\ u(a,b) \leq u(a,c)$ (Monoticidad de la unión). [8]

iii. $u(a,b) = u(b,a)$ (Conmutatividad de la unión). El orden en que se opere los elementos según la función u no altera del valor de pertenencia para la unión. [8]

iv. $u(a, u(b,c)) = u(u(a,b), c)$ (Asociatividad de la unión). [8]

Los cuatro axiomas anteriores son la base fundamental para las uniones difusas, sin embargo los siguientes axiomas son un complemento para el desarrollo intuitivo de las uniones difusas.

v. *u es continua* (Continuidad de la unión)

vi. $u(a,a) > a$ (Superidempotencia de la unión)

vii. $a_1 < a_2\ y\ b_1 < b_2\ implica\ u(a_1,b_1) < u(a_2,b_2)$ (Monotonía estricta de la unión)

Teorema 1. Para todo $a, b \in [0,1]$ $se\ cumple\ que\ 1 \ \geq \ u(a,b) \ \geq \ máx(a,b)$

Demostración. Por definición de conorma-T se tiene que $1 \ \geq \ u(a,b) \ \geq \ 0$. Por el axioma (i) tenemos que $u(a,0) = a$ y como $0 \leq b$, por el axioma (ii) tenemos que $u(a,0) = a \ \leq u(a,b)$. Ademas por el axioma (ii) y (iii) tenemos que $u(b,0) = b \leq u(b,a) = u(a,b)$ pues $0 \leq a$. De esta manera si $a \geq b$ entonces $u(a,b) \ \geq a = máx(a,b)$, de igual forma si $b \geq a$ entonces

$u(a,b) \geq b = máx(a,b)$, por lo tanto $1 \geq u(a,b) \geq máx(a,b)$.

Para comprender de una mejor manera las conormas-T valgámonos de un ejemplo. Para esto veamos los conjuntos difusos $A = niño$ y $B = joven$, formados por los siguiente elementos:

$$A = \{(10\ ,\ 1)\ ;\ (13\ ,\ 1)\ ;\ (15\ ,\ 0{,}5)\ ;\ (16\ ,\ 0{,}4)\ ;\ (18\ ,\ 0)\}$$
$$B = \{(10\ ,\ 0)\ ;\ (13\ ,\ 0)\ ;\ (15\ ,\ 0{,}5)\ ;\ (16\ ,\ 0{,}6)\ ;\ (18\ ,\ 1)\}$$

y veamos la conorma-T definida por la ecuacion $u(a,b) = a + b - a \cdot b$ para algún x en el universo de dominio, donde $a = \mu_A(x)\ y\ b = \mu_B(x)$.

Ahora se debe verificar si la conorma-T cumple con los 4 axiomas principales para ser una unión difusa.

i. Para $a = \mu_A(16) = 0{,}4$, $u(a,0) = u(0{,}4\ ,\ 0) = 0{,}4 + 0 - 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}4$. Lo que verifica el axioma (*i*).

ii. Dados $a = \mu_A(16) = 0{,}4$, $b = \mu_B(16) = 0{,}6\ y\ c = \mu_A(10) = 1$, como $b < c$, entonces $u(a,b) = u(0{,}4\ ,\ 0{,}6) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}76 < u(a,c) = u(0{,}4\ ,\ 1) = 0{,}4 + 1 - 0{,}4 \cdot 1 = 1$, donde se cumple el axioma (*ii*).

iii. Para $a = \mu_A(18) = 0\ y\ b = \mu_B(18) = 1, u(a,b) = u(0\ ,\ 1) = 1 = u(1\ ,\ 0) = u(b,a)$, verificando el axioma (*iii*).

iv. Dados $a = \mu_A(16) = 0{,}4$, $b = \mu_B(16) = 0{,}6\ y\ c = \mu_B(10) = 0$, en efecto $u(b,c) = u(0{,}6\ ,\ 0) = 0{,}6$, entonces $u(a,u(b,c)) = u(0{,}4\ ,\ 0{,}6) = 0{,}76$, luego $u(a,b) = u(0{,}4\ ,\ 0{,}6) = 0{,}76$, entonces $u(u(a,b),c) = u(0{,}76\ ,\ 0) = 0{,}76$, por lo que se cumple el axioma (*iv*).

2.5.2. Intersecciones difusas o normas-T

Así como las uniones difusa o conormas-T se definen tambien las intersecciones difusas o normas-T ($normas\ triángulares$), que se utilizan para calcular los valores de pertenencia de una intersección de dos o más conjuntos difusos. Estas intersecciones difusas representan una clase de operadores generales para realizar la intersección de conjuntos difusos semejante a la intersección básica definida por la condición $mín\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$. [8]

La intersección difusa o norma-T de dos conjuntos difusos A y B se define paralelamente a las uniones difusas y también esta dada por la función i de la siguiente manera:

$$i : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

Donde se toma el grado de pertenencia de algún elemento x en el conjunto difuso A y el grado de pertenencias del mismo elemento x en el conjunto difuso B, luego esta función devuelve el grado de pertenencia de los elementos hacia el conjunto difuso $A \cap B$ [2], es decir:

$$(A \cap B)_x = i[\mu_A(x), \mu_B(x)],\ \forall x \in X$$

Una intersección difusa o norma-T es una operación binaria en el intervalo $[0,1]$ que también debe satisfacer los siguientes axiomas:

Para todo $a,b,c \in [0,1]$:

i. $i(a,1) = a$ (Limite condicional de la intersección)[8]

ii. $si\ b \leq c\ implica\ i(a,b) \leq i(a,c)$ (Monoticidad de la intersección)[8]

iii. $i(a,b) = i(b,a)$ (Conmutatividad de la intersección) [8]

iv. $i(a,i(b,c)) = i(i(a,b),c)$ (Asociatividad de la intersección) [8]

El cuerpo axiomático de las intersecciones difusas o T-normas están dadas por los axiomas anteriores. Es evidente que con los axiomas $(i),(ii)$ y (iii) fija que la intersección difusa ya definida se vuelve intersección clásica cuando A y B son clásicos, teniendo en cuenta que $i(0,1) = 0$ y $i(1,1) = 1$ debido al limite condicional, luego $i(1,0) = 0$ por conmutatividad y $i(0,0) = 0$ por el axioma de monotonía. [2] [8]

La monotonicidad y la commutatividad expresan la relación de que una disminución en el grado de pertenencia de miembros de los conjuntos A o B no puede producir un aumento en el grado de pertenencia en la intersección. La commutatividad fija la simétrica de la intersección difusa, que difiere del orden en que los conjuntos se pueden combinar. La asociatividad determina que la intersección se da para cualquier número de conjuntos en diferente orden y con parejas arbitrarias, lo que permite desarrollar el funcionamiento de la intersección difusa a más de dos conjuntos. [2] [8]

Muchas veces se debe restringir la clase de intersecciones difusas o normas-T, considerando varios requisitos adicionales. Las tres restricciones fundamentales en este sentido se dan a conocer a continuación:

v. *i es continua* (Continuidad de la intersección)

vi. $i(a,a) < a$ (Subidempotencia de la intersección)

vii. $a_1 < a_2\ y\ b_1 < b_2\ implica\ i(a_1,b_1) < i(a_2,b_2)$ (Monotonía estricta de la intersección)

Estos axiomas permiten verificar el comportamientos de los elementos en los conjuntos difusos y las intersecciones difusas, por ejemplo el axioma de continuidad evita que exista discontinuidad en el grado de pertenencia de $A \cap B$ presentado por los pequeños cambios de los grados de pertenencia de los conjuntos difusos A o B. El axioma de subidempotencia expresa el requisito de que el grado de la función de pertenencia $A \cap B$ en este caso no debe exceder a. [8]

Teorema 2. Para todo $a,b \in [0,1]\ se\ cumple\ que\ 0 \leq i(a,b) \leq mín(a,b)$

Demostración. Por definición de norma-T se tiene que $0 \leq i(a,b) \leq 1$. Por el axioma (i) tenemos que $u(a,1) = a$ y como $b \leq 1$, por el axioma (ii) tenemos que $i(a,b) \leq u(a,1) = a$. Ademas por el axioma (iii) tenemos que $i(a,b) = i(b,a) \leq i(b,1) = b$ pues $a \leq 1$. De esta manera si $a \leq b$ entonces $i(a,b) \leq a = mín(a,b)$, de igual forma si $b \leq a$ entonces $i(a,b) \leq b = mín(a,b)$, por lo tanto $0 \leq i(a,b) \leq mín(a,b)$. [8]

Veamos un ejemplo para representar una intersección difusa o norma-T. Consideremos los mismos conjuntos utilizados en el ejemplo de conorma-T definidos por $A = niño$ y $B = joven$, formados de la siguiente manera:

$$A = \{(10\ ,\ 1)\ ;\ (13\ ,\ 1)\ ;\ (15\ ,\ 0{,}5)\ ;\ (16\ ,\ 0{,}4)\ ;\ (18\ ,\ 0)\}$$
$$B = \{(10\ ,\ 0)\ ;\ (13\ ,\ 0)\ ;\ (15\ ,\ 0{,}5)\ ;\ (16\ ,\ 0{,}6)\ ;\ (18\ ,\ 1)\}$$

tomemos ahora la norma-T definida por la ecuación $i(a,b) = a \cdot b$ para algún x en el universo de dominio, donde $a = \mu_A(x)$ y $b = \mu_B(x)$ y vamos a verificar si se puede considerar como una intersección difusa con los 4 principales axiomas.

i. Para $a = \mu_A(16) = 0{,}4$, $i(a,1) = i(0{,}4\ ,\ 0) = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4$. Lo que verifica el axioma *i.*

ii. Dados $a = \mu_A(16) = 0{,}4$, $b = \mu_B(16) = 0{,}6$ y $c = \mu_A(10) = 1$, como $b < c$, entonces $i(a,b) = i(0{,}4\ ,\ 0{,}6) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24 < i(a,c) = i(0{,}4\ ,\ 1) = 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4$, donde se cumple el axioma *ii.*

iii. Para $a = \mu_A(18) = 0$ y $b = \mu_B(18) = 1, i(a,b) = i(0\ ,\ 1) = \ 0\ = i(1\ ,\ 0) = u(b,a)$ verificando el axioma *iii.*

iv. Dados $a = \mu_A(16) = 0{,}4$, $b = \mu_B(16) = 0{,}6$ y $c = \mu_B(10) = 0,$, en efecto $i(b,c) = i(0{,}6\ ,\ 0) = 0$, entonces $i(a,i(b,c)) = i(0{,}4\ ,\ 0) = 0$, luego $i(a,b) = i(0{,}4\ ,\ 0{,}6) = 0{,}24$, entonces $i(i(a,b),c) = i(0{,}24\ ,\ 0) = 0$, por lo que se cumple el axioma *iv.*

A continuación presentamos Algunos ejemplos de uniones difusas (conormas-T) e intersecciones difusas (normas-T). [8]

1. **Producto y suma de Hamacher**

$$i(a,b) = \frac{a \cdot b}{a + b - a \cdot b}$$

$$u(a,b) = \frac{a + b - 2a \cdot b}{1 - a \cdot b}$$

2. **Producto y suma Eisteniana**

$$i(a,b) = \frac{a \cdot b}{2 - (a + b - a \cdot b)}$$

$$u(a,b) = \frac{a + b}{1 + a \cdot b}$$

3. **Producto y suma Acotada**

$$i(a,b) = máx\{0,\ a + b\ - 1\}$$

$$u(a,b) = mín\{1,\ a + b\}$$

2.5.3. Complementos Difusos

Por definición de función de pertenencia $\mu_A(x)$ establece el grado de pertenencia para todo $x \in X$ sobre el conjunto A. Sea cA un complemento difuso de A, entonces $c\mu_A(x)$ es interpretado como el grado de pertenencia de x con respecto a cA y como el grado de no pertenencia de x con respecto a A [8]. Igualmente $\mu_A(x)$ puede interpretarse como el grado de no pertenencia de x con respecto a cA.

Luego podemos definir los complementos de A por medio de la funcione de la forma:

$$c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

Donde se le asigna un valor $c(\mu_A(x))$ a cada grado de pertenencia $\mu_A(x)$ para culquier conjunto difuso A. El valor de $c(\mu_A(x))$ se interpreta del mismo modo que $c\mu_A(x)$, de esta forma $c(\mu_A(x)) = c\mu_A(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, dado un conjunto difuso A, se obtiene cA aplicando la función c a los valores $\mu_A(x)$ para todo $x \in X$. [2] [8]

Es fundamental que la función c cumpla estrictamente con los siguientes axiomas para que se puedan producir los complementos difusos.

i. *Si c representa el complemento difuso entonces* $c(0) = 1$ *y* $c(1) = 0$. (Limite condicional de los complementos)

ii. *Sea c el complemento difuso, entonces para todo* $a, b \in [0,1]$ *se cumple:* $a < b \longrightarrow c(a) > c(b)$. (Monotonía de los complementos)

iii. *Si c es el complemento difuso, entonces c es una función continua.* (Continuidad de los complementos)

iv. *Si c es el complemento difuso, entonces para todo* $a \in [0,1]$ $c(c(a)) = a$. (Involutividad de los complementos)

Por el axioma de complementos (*i*) los conjuntos clásicos deben estar formados correctamente por los complementos que la función c debe producir. Por el axioma *ii* verificamos ademas que si los grados de pertenencia de a con respecto a A aumentan los complementos difusos tienden a disminuir o por lo menos permanecer estables.[8] [2] [8]

Veamos un ejemplo de complemento difuso para comprobar los axiomas anteriores.

Sea $A = \{(10\ ,\ 1)\ ;\ (13\ ,\ 1)\ ;\ (15\ ,\ 0{,}5)\ ;\ (16\ ,\ 0{,}4)\ ;\ (18\ ,\ 0)\}$ y el complemento difuso definido por $c(a) = \dfrac{1-a}{1+ra}$ con $r \in (-1, \infty)$, $a = \mu_A(x)$ y x en el universo del dominio.

Para $r = 1$, $c(a) = \dfrac{1-a}{1+a}$, ahora verifiquemos los axiomas:

i. $c(0) = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$ y $c(1) = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$ Lo que verifica el axioma *i*.

ii. Como $\mu_A(16) = 0,4 < 0,6 = \mu_A(16), c(0,4) = \dfrac{1-0,4}{1+0,4} = 0,42$ y $c(0,6) = \dfrac{1-0,6}{1+0,6} = 0,25$ por lo que $c(0,4) > c(0,6)$. Lo que verifica el axioma *ii*.

iii. Como $c(0,4) = \dfrac{1-0,4}{1+0,4} = 0,42$ el $c(0,42) = \dfrac{1-0,42}{1+0,42} = 0,4$ por lo que $c(c(a)) = a$. Lo que verifica el axioma *iv*.

iv. Como $c(a) = \dfrac{1-a}{1+ra}$ esta restringida para $r \in (-1, \infty)$ y $a \in [0,1]$, la función $c(a)$ es continua en todo su dominio. Esto verifica el axioma *iii*.

Con el ejercicio de verificación de los axiomas de complementos difusos hemos mostrado que $c(a) = \dfrac{1-a}{1+ra}$ con $r \in (-1, \infty)$ es un complemento difuso.

A continuación presentamos algunos complementos difusos. [8]

1. $c(a) = (1 - a^r)^{1/r}$ con $r \in (0, \infty)$
2. $c(a) = \dfrac{r^2(1-a)}{a + r^2(1-a)}$ con $r \in (0, \infty)$
3. $c(a) = 1 - (1 - (1-a)^{1/r})^r$ con $r \in (0, \infty)$

Este tipo de funciones han demostrado que los conjuntos difusos y sus operaciones tienen diversas características y propiedades que han facilitado su tratamiento en la lógica difusa junto con sus aplicaciones. [8]

CAPÍTULO 3

RELACIONES DIFUSA

Los fenómenos imprecisos en los que siempre están inmersos los seres humanos han reflejado la continuidad de diferentes teorías que tratan de explicar o modelar su comportamiento. La lógica difusa ha permitido conocer intuitivamente que es posible determinar grados de validez y de refutación a interpretaciones humanas de la realidad. Dentro del campo matemático la lógica difusa relaciona diferentes tipos de imprecisiones con modelos matemáticos tratando de dar un grado de pertenencia dentro de un conjunto, lo que permite verificar y entender el comportamiento de dichos fenómenos y poder tomar decisiones referente a lo estudiado. las relaciones difusas determinan un avance al desarrollo de los conceptos difusos y que abordan de igual manera algunos conceptos definidos dentro de la teoría de conjuntos de la lógica clásica.

Definición 14. *Relación Difusa. Una relación difusa* $\Re$ *es un conjunto difuso definido por el producto cartesiano de conjuntos clásicos* $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$*, donde las n-uplas* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *pueden tener grados diferentes de pertenencia en la relación* .[6]

$$\Re(X_1, X_2, X_3, ..., X_n) = \{((x_1, x_2, ..., x_n), \mu_{\Re}(x_1, x_2, ..., x_n))/(x_i, x_j) \in X_i \times X_j\}$$

Los grados de pertenencia son representados normalmente con un número real que se encuentra contenido en el intervalo $[0, 1]$ e indica el grado de relación presentada entre los elementos de las n-uplas y/o parejas.

Ejemplo: Veamos la relación $\Re(X, Y)$ definida por la expresión *lejos* y representada por la ecuación $\Re(X, Y) = \frac{|x-y|}{5}$, donde $Y = \{1, \frac{1}{2}, 4\}$ y $X = \{0, 2\}$.

A continuación se presentan los resultados de cada relación:

$$\begin{aligned}
\Re(1,2) &= \Re(2,1) = 0,2 \\
\Re(1,0) &= \Re(0,1) = 0,2 \\
\Re(1/2,2) &= \Re(2,1/2) = 0,3 \\
\Re(1/2,0) &= \Re(0,1/2) = 0,1 \\
\Re(4,2) &= \Re(2,4) = 0,4 \\
\Re(4,0) &= \Re(0,4) = 0,8
\end{aligned}$$

$\Re$	0	2
1	0,2	0,2
1/2	0,1	0,3
4	0,8	0,4

Cuadro 3.1: Grados de pertenencia para $\Re(X,Y) = \frac{|x-y|}{5}$.

La tabla $(3,1)$ nos muestra que la relación $\Re(X,Y) = \frac{|x-y|}{5}$ define una distancia de mayor grado de pertenencia para $\Re(4,0) = 0,8$, es decir la distancia entre 4 y 0 no es $0,8$, (definición de distancia en cálculo) este valor determina que en una escala del intervalo $[0,1]$ hay más distancia entre 4 y 0, que entre los demás elementos que pertenecen a X e Y.

3.1. Relaciones binarias difusas

Definición 15. *Relaciones binarias. Toda relación $\Re$ entre dos conjuntos X e Y se le denomina binaria para todo $x \in X$ y $y \in Y$.*

$$\Re(X,Y) = \{((x,y),\mu_{\Re}(x,y))/(x,y) \in X \times Y\}$$

Es de aclarar que una relación binaria de un conjunto difuso no es un subconjunto difuso de $X \times Y$, debido a que $\mu_{\Re}(x,y)$ no pertenece a $X \times Y$.

La representación gráfica de una relación $\Re$ se puede dar través de una matriz de pertenencia o a través de un diagrama sagital. [6]

3.2. Relaciones binarias difusas sobre un sólo conjunto

Definir una relación binaria entre dos conjuntos diferentes es de la misma manera como se define una relacion $\Re$ entre los elementos de un solo conjunto X. Esta relación la podemos denotar como $\Re(X)$. [6]

Así como en las relaciones generales las relaciones binarias $\Re(X)$ pueden representarse gráficamente con diagramas sagitales o matrices, sin embargo, podemos hacerlo con una serie de diagramas más simples que cumplan con las siguientes características:

a. Cada elemento del conjunto X se representa por un único nodo.

b. Las lineas o conexiones que unen los nodos, muestran la paridad entre los elementos del conjunto X, con un grado de pertenencia en $\Re$ diferente de cero.

a. En los diagramas las lineas o conexiones están denominados por el grado de pertenencia del par en la relación $\Re$.

A partir de las propiedades de una relación de equivalencia clásicas, podemos definir relaciones reflexivas, simétricas y transitivas en la teoría de relaciones difusas.

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & x_3 & x_2 & x_3 \\
\hline
x_1 & 0 & 0,1 & 1 \\
x_2 & 0,2 & 0,5 & 0,9 \\
x_3 & 0 & 0 & 0,8
\end{array}
$$

Figura 3.1: Matriz de pertenencia.

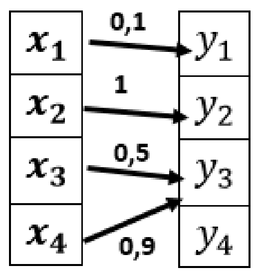

Figura 3.2: Diagrama sagital.

3.3. Relaciones de equivalencia difusas

Definición 16. *Relación reflexiva difusa. Una relación difusa* $\Re(X,X)$ *es reflexiva, si y sólo si,* $\mu_{\Re}(x,x) = 1$ *para todo* $x \in X$. *Si este no es el caso para por lo menos algún* $x \in X$ *la relación se denomina irreflexiva* . [6]

Definición 17. *Relación simétrica difusa. Una relación difusa* $\Re(X,X)$ *es simétrica, si y sólo si,* $(x,y) \in \Re$, *entonces* $(y,x) \in \Re$ *para todo* $x, y \in X$.[6]

Definición 18. *Relación transitiva difusa. Sobre la teoría difusa la relación transitiva o relación max-min se define de la siguiente manera: Una relación* $\Re(X,X)$ *es transitiva, si y sólo si,* $\mu_{\Re}(x,z) \geq max_{y\in Y}\, min\left[\mu_{\Re}(x,y), \mu_{\Re}(y,z)\right]$ *para todo* $x, y \in X$, *para todo par* $(x,z) \in \mu_{\Re}(X,X)$.[6]

Si esta inecuación no se cumple para algún $x \in X$ la relación se llama no transitiva.

Ejemplo: Dada una relación difusa $\Re(X,X)$ definida sobre el conjunto de ciudades *muy cerca* y teniendo en cuenta las anteriores definiciones, la relación $\Re(X,X)$ cumple lo siguiente:

a. Ya que se puede verificar la distancia que hay de una ciudad consigo misma se cumple que $\mu_{\Re}(x_1,x_1) = 1$, por lo tanto la relación $\Re$ es reflexiva.

b. Si la distancia de la ciudad x_1 a la ciudad x_2 tienen un grado de pertenencia $0,8$ por ejemplo, entonces se puede verificar que la distancia de la ciudad x_2 esta a una distancia de x_1 con grado de pertenencia igual. Por lo anterior podemos decir que $\mu_{\Re}(x_1,x_2) = \mu_{\Re}(x_2,x_1)$, lo que implica su simetría.

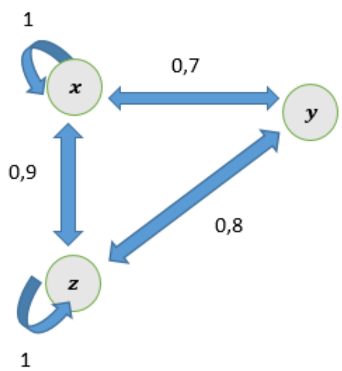

Figura 3.3: Representación gráfica para la relación *lejos*.

c. Si por ejemplo la ciudad x se encuentra *muy cerca* de la ciudad y a un grado de pertenencia $0,8$, e y esté *muy cerca* de la ciudad z a un grado de pertenencia por ejemplo de $0,8$, puede ocurrir que x esté *muy cerca* de z a un grado de pertenencia de $0,9$, por lo tanto la relación $\Re(X,X)$ es no transitiva. Para el caso contrario puede ocurrir que x esté *muy cerca* de z a un grado de pertenencia de $0,6$, por lo tanto la relación $\Re(X,X)$ es no transitiva.[6]

3.4. Operaciones sobre relaciones binarias difusas

Las operaciones básicas entre conjuntos difusos las podemos aplicar a las relaciones binarias difusas ya que $\Re$ es un conjunto difuso.

Definición 19. *Sea $\Re_1$ y $\Re_2$ relaciones difusas definidas por el producto cartecino $A \times B$ y las operaciones básicas unión, intersección y complemento de conjuntos difusos [6], entonces se define:*[6]

1. La unión de relaciones difusas esta dada por el conjunto difuso $\Re_1 \cup \Re_2$ de la siguiente manera:

$$\Re_1 \cup \Re_2 = \{(\ (x,y)\ ,\ \mu_{\Re}(x,y)\ )/\mu_{\Re}(x,y) = máx\{\mu_{\Re_1}(x,y)\ ,\ \mu_{\Re_2}(x,y)\}\}$$

2. La intersección de relaciones difusas esta dada por el conjunto difuso $\Re_1 \cap \Re_2$ de la siguiente manera:

$$\Re_1 \cap \Re_2 = \{(\ (x,y)\ ,\ \mu_{\Re}(x,y)\ )/\mu_{\Re}(x,y) = mín\{\mu_{\Re_1}(x,y)\ ,\ \mu_{\Re_2}(x,y)\}\}$$

3. El complemento de una relación difusa esta dada por el conjunto difuso $\Re_1 \cup \Re_2$ de la siguiente manera:

$$\Re' = \{(\ (x,y)\ ,\ \mu_{\Re}(x,y)\ )/\mu_{\Re}(x,y) = 1 - \mu_{\Re}(x,y)\}$$

Ejemplo: Veamos la relación $\Re_1(X,Y)$ definida por la expresión *lejos* y representada por la ecuación $\Re_1(X,Y) = \frac{|x-y|}{5}$, donde $Y = \{1, \frac{1}{2}, 4\}$ y $X = \{0,2\}$. EL conjunto difuso de $\Re_1(X,Y)$ esta formado por las parejas $((x,y), \mu_{\Re}(x,y))$, donde $\mu_{\Re_1}(x,y) = \frac{|x-y|}{5}$. entonces :

$$\Re_1(X,Y) = \{((1,2)\ ,\ 0,2); ((1,0)\ ,\ 0,2);; ((1/2,\ 2)\ ,\ 0,3); ((1/2,\ 0)\ ,\ 0,1); ((4,2)\ ,\ 0,4); ((4,0)\ ,\ 0,8)\}$$

Ahora definamos $\Re_2(X,Y)$ definida por la ecuación $\Re_2(X,Y) = \frac{x+y}{6}$, donde $Y = \{1, \frac{1}{2}, 4\}$ y $X = \{0,2\}$. EL conjunto difuso de $\Re_2(X,Y)$ esta formado por las parejas $((x,y), \mu_{\Re_2}(x,y))$, donde $\mu_{\Re_2}(x,y) = \frac{x+y}{6}$. entonces :

$$\Re_2(X,Y) = \{((1,2)\ ,\ 0,5); ((1,0)\ ,\ 0,1);; ((1/2,\ 2)\ ,\ 0,4); ((1/2,\ 0)\ ,\ 0); ((4,2)\ ,\ 1); ((4,0)\ ,\ 0,6)\}$$

De esta manera ya podemos desarrollar las operaciones entre relaciones binarias difusas para $\Re_1$ y $\Re_2$, entonces:

1. $\Re_1 \cup \Re_2 = \{((1,2)\ ,\ 0,5); ((1,0)\ ,\ 0,2); ((1/2,\ 2)\ ,\ 0,4); ((1/2,\ 0)\ ,\ 0,1); ((4,2)\ ,\ 1); ((4,0)\ ,\ 0,8)\}$
2. $\Re_1 \cap \Re_2 = \{((1,2)\ ,\ 0,2); ((1,0)\ ,\ 0,1); ((1/2,\ 2)\ ,\ 0,3); ((1/2,\ 0)\ ,\ 0); ((4,2)\ ,\ 0,4); ((4,0)\ ,\ 0,6)\}$
3. $\Re_1' = \{((1,2)\ ,\ 0,8); ((1,0)\ ,\ 0,8);; ((1/2,\ 2)\ ,\ 0,7); ((1/2,\ 0)\ ,\ 0,9); ((4,2)\ ,\ 0,6); ((4,0)\ ,\ 0,2)\}$

3 $\Re_2' = \{((1,2)\ ,\ 0,5); ((1,0)\ ,\ 0,9);; ((1/2,\ 2)\ ,\ 0,6); ((1/2,\ 0)\ ,\ 1); ((4,2)\ ,\ 0); ((4,0)\ ,\ 0,4)\}$

De esta manera nos damos cuenta que:

$(\Re_1 \cup \Re_2) \cup (\Re_1 \cap \Re_2) = \Re_1 \cup \Re_2$

$(\Re_1 \cap \Re_2) \cup (\Re_1 \cap \Re_2) = \Re_1 \cap \Re_2$

La operaciones entre relaciones difusas permiten verificas lar relaciones que hay entre los conjuntos de cada relación y su grados de pertenencia para los conjuntos X y Y.

Durante todo el trabajo se ha podido estudiar los diferentes eventos que presentan ambigüedad o incertidumbre tratando de modelar operaciones y propiedades que cumplan los diferentes axiomas, sin embargo, es importante hacer un estudio a fondo de las aplicaciones de la lógica difusa debido a que han permitido el desarrollo de sistemas hacia el mejoramiento y desarrollo de la tecnología entre otras ciencias. Este trabajo no fundamenta el estudio de estas aplicaciones porque es condición necesaria tener conocimientos más avanzados en electrónica, informática, incluso de la medicina, por ende, se hace un recuento de algunas a aplicaciones que han sobresalido en la materia y su aplicabilidad a su desarrollo.

3.5. Algunas aplicaciones

Aplicar la recién formalizada Lógica difusa al *control* [3], fue uno de sus primeros avances en su desarrollo práctico. Debido a que aborda un trabajo de naturaleza cualitativa, se puede utilizar controladores sobre diferentes sistemas sin realizar muchos cambios. Cientificamente, se aprecian en el desrrollo aplicativo de la lógica difusa en el control de ascensores (Toshiba), sistemas de diagnóstico de golf (Maruman Golf), video cámaras (Sony/Canon), lavadoras (Matsushita), aspiradoras (Matsushita), calentadores de agua (Matsushita), aire acondicionado (Mitsubishi), inversiones (Yamaichi Securities), etc. De la misma manera se plantean conjuntos difusos como error y velocidad que se utilizan en modelos no lineales aproximados para la regulación de posición de dispositivos. Es también utilizado para la adquisición de datos en tiempo real utilizando Software como Lab View enlazado por Script con la simulación del controlador borroso a través del Toolbox de Matlab. [6]

La robótica ha presentado recientemente una aplicación práctica de la lógica difusa, debido a que es una herramienta útil en el tratamiento de la incertidumbre que presentan los los móviles en sus movimientos y comportamientos según el entorno. Esto se ve reflejado en evitar obstáculos fijos, seguir un contorno, evitar obstáculos móviles, cruzar puertas, seguir una trayectoria, empujar o cargar un objeto, las Geometrías, las Topologías, la Navegación, la percepción y el aprendizaje. [7]

Desde lo particular, un problema básico en robótica es la planificación de los movimientos para resolver alguna tarea ya especificada, y el control del robot mientras ejecuta las órdenes necesarias para lograr unos objetivos. Para una máquina, la clasificación de rostros, datos médicos o reconocimiento de letras son tareas difíciles, más que para un ser humano, y necesita del aprendizaje de estructuras difusas, donde el asunto consiste en adaptar los parámetros de un sistema, en este caso artificial, para obtener la respuesta deseada. Para ello basta modelar: los Comportamientos a través del diseño de Comportamientos, Coordinación de Comportamientos, Fusión de comportamientos, y Arbitraje de comportamientos. [6] [7]

La Geometría y la Topología, a través de la constitución de regiones denominadas segmentos difusos de posibilidad, que definen las fronteras de un espacio georeferenciado. La Navegación, desde la información recogida a través de los conjuntos difusos se representa la incertidumbre en la localización real de los objetos al ejecutar un conjunto de reglas de inferencia borrosas y defuzzificar los resultados. La Percepción a través de la detección de características del entorno (luz del ambiente, complejidad del entorno) mediante un sistema de visión, por ejemplo, una cámara de video de cuyo producto se trata la imagen en tiempo real. El Aprendizaje sobre una población de reglas difusas, por el cual se aprenden a coordinar los comportamientos produciendo meta-reglas difusas que determinan el contexto en el que será activado cada comportamiento. [6] [7]

CONCLUSIONES

Este trabajo de grado como propuesta de estudio de la ***Lógica Difusa***:

- ⋆ Permite comparar la Lógica Clásica y otras teorías con la Lógica Difusa, según sus definiciones, operaciones y propiedades.
- ⋆ Amplía el concepto general de la lógica teniendo en cuenta la trayectoria histórica de la Lógica Difusa.
- ⋆ Permite modelar percepciones y conceptos de incertidumbre a partir de un término matemático.
- ⋆ Determina la Lógica Difusa como un avance matemático moderno en función de los desarrollos tecnológicos.
- ⋆ Refleja la impresición con la que el ser humano se comunica, comporta y percibe según los modelos matemáticos.
- ⋆ Ayuda a comprender conceptos intuitivos y vagos de los cuales la lógica clásica no se ha ocupado.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Zadeh, Lotfi . Advances in fuzzy set theory and aplications. Academic press: New York, 1.978.

[2] Reina, Daniel. Fundamentos de Matemática Difusa, Fundación Universitaria Konrad Lorenz (Junio 2008)

[3] Rodríguez Medina, Wilches Olivo Álvaro, Tovar Garrido Luis. Lógica Difusa: Introducción a la lógica difusa y al control difuso, Edwin , Universidad de San Buenaventura (Diciembre 2009).

[4] Muñoz Quevedo, José Maria. Introducción a la teoría de conjuntos. Universidad Nacional de Colombia: Santafé de Bogotá, 1.983.

[5] Mariño Sarmiento, Rafael, teoría de conjuntos. Universidad nacional de Colombia: Santafé de Bogotá, 1.978.

[6] Pantoja Benavides, Jaime Francisco , Vacca González Harold. Los conjuntos borrosos, modelación cualitativa de la realidad en ingeniería, Visión Electrónica, Vol. 2, Núm. 2 (2008).

[7] Martín F., Matellán V., Barrera P., Localización basada en lógca difusa y filtros de Kalman para robots con patas. Grupo de Robótica, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, 2004.

[8] Salazar Morales, Omar y Soriano Méndez, Jóse Jairo. leyes del tercero excluido y contradicción como valores límite en lógica difusa. Universidad Distrital Francisco Jóse de Caldas, Facultad de Ingeniería, Colombia, 2011.