Neiva, 03 de Mayo de 2017

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El (Los) suscrito(s):

Jairo Andrés Castillo Buitrago______________________, con C.C. No. 1075222832____________,

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado o ____

Titulado: Desarrollo Histórico de las Funciones Logarítmicas y Exponenciales________________

Presentado y aprobado en el año __2017__ como requisito para optar al título de

Licenciado en Matemáticas____;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: ____

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Desarrollo Histórico de las Funciones Logarítmicas y Exponenciales.

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Castillo Buitrago	Jairo Andrés

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Gutiérrez Hoyos	Hernando

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Silva Silva	Augusto

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2017 **NÚMERO DE PÁGINAS: 102**

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas___ Fotografías___ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos_x_ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros _x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Ninguno

MATERIAL ANEXO: Ninguno

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

	Español	Inglés		Español	Inglés
1.	Logaritmo	Logarithm	6.	Funciones	Functions
2.	Logarítmicas	Logarithmic	7.	Historia	History
3.	Exponencial	Exponential	8.	Histórico	Historical
4.	Cuadratura	Cuadrature	9.	Natural	Natural
5.	Función	Function	10.	Hipérbole	Hyperbole

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En el presente trabajo de grado se abordan los aspectos históricos que enmarcaron la construcción de los conceptos de función logaritmo y función exponencial, así como también el desarrollo de algunas aplicaciones básicas en otros campos de la ciencia.

Durante el primer capítulo se establece la importancia entre las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas, progresiones que al ser comparadas generaban el hecho de simplificar la multiplicación en una suma y la división en una resta; hecho que fue tomado por John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo. En el transcurso del segundo capítulo se muestran las diferentes interpretaciones que se le hacen al número *e*, por medio de la fórmula del interés compuesto estudiada por Jacob Bernoulli. Así como también al determinar la cuadratura de la curva $Y=X^{-1}$ (función Hipérbole equilátera), expuesto por Gregory Saint Vincent. De igual forma con el concepto de logaritmo de John Napier, donde se establecería como la base de los logaritmos naturales o neperianos.

Durante el tercer capítulo se menciona la importancia que ha tenido el termino función para llegar a los conceptos de logaritmo y exponencial como dos funciones básicas para el desarrollo del cálculo. Al definir los conceptos de función Logaritmo y función exponencial se presentan una serie de aplicaciones que involucran su utilidad en la realización de

cálculos. Es por ello que en el cuarto capítulo se presentan algunas aplicaciones de estas funciones en los diferentes campos de la ciencia.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

In the present grade work there are tackled the historical aspects that framed the construction of the concepts of function logarithm and exponential function, as well as also the development of some basic applications in other fields of the science.

During the first chapter the importance is established between the arithmetical progressions and the geometric progressions, progressions that, on having been compared, were generating the fact of simplifying the multiplication in a sum and the division in a subtraction; fact that was taken by John Napier, who introduced the logarithm concept. In the course of the second chapter there appear the different interpretations that are done to the number and, by means of the formula of the compound interest studied by Jacob Bernoulli. As well as also on having determined the quadrature of the curve (function equilateral Hyperbole), exhibited by Gregory Saint Vincent. In the same way with the concept of logarithm of John Napier, where it would be established like the base of the natural logarithms or Neperianos.

During the third chapter there is mentioned the importance that has had the term function to come to the logarithm concepts and exponentially like two basic functions for the development of the calculation. After Logarithm and exponential function define the function concepts there appears a series of applications that involve its utility in the calculations achievement. It is for it that in the fourth chapter some applications of these functions appear in the different fields of the science.

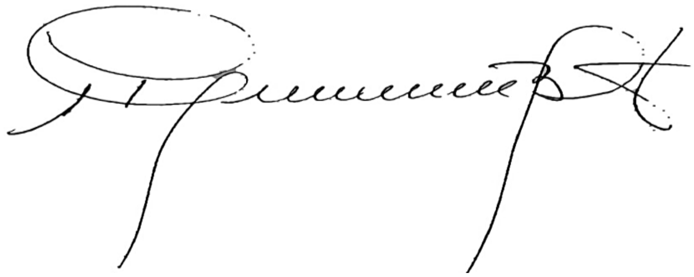
APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: Augusto Silva Silva

Augusto Silva.

Firma:

Nombre Jurado: Hernando Gutiérrez Hoyos



Firma:

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Desarrollo Histórico de las Funciones Logarítmicas y Exponenciales.

Jairo Andrés Castillo Buitrago

Neiva, Huila
Abril 2017

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Desarrollo Histórico de las Funciones Logarítmicas y Exponenciales.

Trabajo presentado como requisito para optar el título de:
Licenciado en Matemáticas

Jairo Andrés Castillo Buitrago
2006135075

Asesor:
Profesor. Hernando Gutiérrez Hoyos

Neiva, Huila
Abril de 2017

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Segundo Lector

Neiva, Abril de 2017.

AGRADECIMIENTOS

Con gran motivación doy gracias a Dios y a la Santísima Virgen, por brindarme un apoyo espiritual y darme la fortaleza para cumplir con mis propósitos, por permitirme vivir cada día y disfrutar de todas las capacidades que tengo como persona, en especial porque pusieron en mi camino personas para que me apoyen y orienten en la construcción de mi proyecto de vida.

A mis padres, les agradezco enormemente, por haberme brindado la vida, educarme en el seno de una familia llena de principios y valores, por su entrega y cariño en cada uno de los momentos que transcurrieron desde mi nacimiento, por darme la educación necesaria para cumplir mis metas y propósitos, por ser mi apoyo en las dificultades y en los buenos momentos, así como también a mis hermanos por brindarme su apoyo y compartir conmigo sus experiencias de vida.

Le agradezco al profesor **Hernando Gutierrez Hoyos** por manifestar su interés y dirigir este proyecto de grado, por su confianza, colaboración y apoyo durante este proceso con sus grandes capacidades, tanto intelectuales como personales, orientándome adecuadamente y siempre estando dispuesto a apoyarme tanto a nivel académico como en lo personal, convirtiéndose en un ejemplo a seguir como docente e investigador.

A todos los docentes que me compartieron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que mi formación profesional se resuma en lograr siempre hacer cosas nuevas, muchas gracias por la confianza y apoyo que me brindaron.

A mis amigos y compañeros, quienes trabajaron conmigo hombro a hombro, poniendo lo mejor de su energía y empeño por el bien de mi formación profesional, a quienes compartieron su confianza, tiempo y los mejores momentos que viví durante esta etapa como estudiante de pregrado.

ÍNDICE GENERAL

Pagina

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado recrea los conceptos de función Logarítmica y Exponencial, a través de un recorrido histórico que se inició a finales del siglo XV y se extendió hasta bien avanzado el siglo $XVIII$, sin desconocer los elementos básicos de la aritmética y la geometría provenientes de culturas tan antiguas como la Babilonia y Egipcia, pasando por los grandes matemáticos de la Griega Clásica.

Probablemente en el transcurso de nuestra vida hemos escuchado sobre los conceptos de Logaritmo y Exponencial, y en algunos casos hemos realizado ejercicios que involucran su uso, pero, para aprender a manejar estos conceptos es necesario establecer las diferencias y relaciones que hay entre función Logaritmo, función Logaritmo Natural, función Exponencial y función Exponencial Natural desde el punto de vista histórico. En tal sentido, se espera que a partir del presente trabajo aprendamos a diferenciar cada uno de estos conceptos, utilizando las notaciones actuales y aplicando las propiedades básicas correspondientes.

Al analizar los hechos históricos y problemáticas sobre estas dos funciones vemos que sus características principales están asociadas a la facilidad con la que se pueden hacer diferentes cálculos ligados a las ciencias humanas como la matemática, la física, la astronomía, economía y geometría, aportando soluciones fundamentales a hechos presentes en fenómenos naturales, estudios de crecimiento, estudios financieros, entre otros que mencionaremos en el presente proyecto de grado con el desarrollo de algunos ejercicios propuestos en los libros de cálculo.

RESUMEN

En el presente trabajo de grado se abordan los aspectos históricos que enmarcaron la construcción de los conceptos de función logaritmo y función exponencial, así como también el desarrollo de algunas aplicaciones básicas en otros campos de la ciencia.

Durante el primer capítulo se establece la importancia que tiene el desarrollo de las progresiones aritméticas y geométricas interpretadas en las tablillas de arcilla escritas por los Egipcios y Babilonios. La comparación de estas dos progresiones hechas por Arquímedes y Stifel proporcionan las ideas básicas para desarrollar operaciones de tal forma que se pueda obtener una multiplicación por medio de una suma, y una división por medio de una resta. Esto hizo más sencilla la realización de cálculos matemáticos, hecho que fue tomado por el matemático John Napier quien propuso el primer concepto del logaritmo relacionado con los movimientos realizados entre dos partículas, una de ellas en movimiento uniforme y la otra en movimiento uniformemente acelerado. A su vez Henry Briggs propuso un trabajo sobre los logaritmos Vulgares o de base diez, diferenciando su utilidad con los logaritmos Neperianos.

En el transcurso del segundo capítulo se muestran las diferentes interpretaciones que se le hacen al número e. Partiendo de la interpretación por medio de la fórmula del interés compuesto estudiada por Jacob Bernoulli donde se puede llegar al número e. Así como también al construir la curva $Y = X^{-1}$, (Función Hipérbole Equilátera) y al realizar su cuadratura es posible determinar la relación que tiene con el numero e, resultado que fue expuesto por Gregory Saint Vincent. De igual forma se puede llegar al número e partiendo del concepto de logaritmo de John Napier, donde se establecería como la base de los logaritmos naturales o Neperianos.

Durante el tercer capítulo se menciona la importancia que ha tenido el termino función para llegar a los conceptos de logaritmo y exponencial como dos funciones básicas para el desarrollo del cálculo, teniendo en cuenta que Leonard Euler fue el matemático más representativo en este tema, puesto que, recogió los conceptos escritos e introdujo una definición de función logaritmo y función exponencial.

Al definir los conceptos de función logaritmo y función exponencial se presentan una serie de aplicaciones que involucran su utilidad en la realización de cálculos. Es por ello que en el cuarto capítulo se presentan algunas aplicaciones de estas funciones en los diferentes campos

de la ciencia como lo son: la economía, la biología, las ciencias sociales, la física, entre otras, donde se utilizan modelos matemáticos relacionados con los temas desarrollados a través del presente trabajo de grado.

ABSTRACT

In the present grade work there are tackled the historical aspects that framed the construction of the concepts of function logarithm and exponential function, as well as also the development of some basic applications in other fields of the science.

During the first chapter the importance of the development of the arithmetic and geometric progressions interpreted in the clay tablets written by the Egyptians and Babylonians is established. The comparison of these two progressions made by Archimedes and Stifel provide the ideas for operations of such form that a multiplication can be obtained by means of a division by means of a subtraction. This made it easier to perform mathematical calculations, a fact that was taken by the mathematician John Napier Who proposed the firs concept of the logarithm related to the movements made between two particles, one in uniform motion and the other in uniformly accelerated motion, to his Henry Briggs proposed a paper on vulgar or base ten logarithms. Differentiating its utility with the Neperian Logarithms.

In the course of the second chapter there appear the different interpretations that are done to the number e. Departing from the interpretation by means of the formula of the compound interest studied by Jacob Bernoulli where it is possible to come to the number e. As well as also on having constructed the curve $Y = X^{-1}$, (function Hyperbole equilateral) and in making its quadrature it is possible to determine the relation that has with the number e, result that was exposed by Gregory Saint Vincent. In the same way one can arrive at the number e starting from the concept of logarithm of John Napier, where it would be established as the base of the natural or Neperian logarithms.

During the third chapter there is mentioned the importance that has had the term function to come to the logarithm concepts and exponentially like two basic functions for the development of the calculation, bearing in mind that Leonard Euler was the most representative mathematician in this topic, since, he gathered the written concepts and introduced a definition of function logarithm and exponential function.

when defining the concept of Logarithm function and exponential function there appears a series of applications that involve its utility in the realization of calculations It is for it that in the fourth chapter some applications of these functions appear in the different fields of the science such: the economy, the biology, the social sciences, the physics, between others, where

there are used mathematical models related to the topics developed across the present work of grade.

PRELIMINARES

Planteamiento del problema

Los conceptos históricos han tenido siempre gran trascendencia para el desarrollo del conocimiento humano; por ello, se busca establecer como a través del tiempo se han construido los conceptos de función logaritmo y función exponencial teniendo en cuenta los aportes realizados por los matemáticos más representativos y versados sobre estos temas.

De esta forma se busca lo siguiente:

- Aclarar los conceptos históricos que se le presentan a los estudiantes de las diferentes áreas del conocimiento en cuanto a estas dos funciones.
- Ampliar los conceptos teóricos sobre las funciones logarítmicas y exponenciales.
- Mostrar algunas de las aplicaciones que involucra el uso de los conceptos del logaritmo y la exponencial.

Pregunta de investigación

Con base en lo anterior se propone la siguiente pregunta de investigación.

¿Cuáles son y cómo han evolucionado históricamente los conceptos que han llevado a la construcción de la función logaritmo y función exponencial?

Objetivos

Generales

- Ampliar los conceptos que se tienen sobre las funciones logarítmicas y exponenciales, partiendo de los hechos históricos para así mejorar la interpretación que hacen los estudiantes al utilizar dichas funciones teniendo en cuenta la utilidad que han tenido en los diferentes campos del conocimiento humano.

Específicos

- Ampliar los conceptos de las funciones logarítmicas y exponenciales partiendo de los hechos históricos y las notaciones actuales.
- Presentar e ilustrar propiedades de las funciones logarítmicas y exponenciales para dar una mejor interpretación a los conceptos y definiciones.
- Utilizar los conceptos en la solución de ejercicios y problemas planteados en los libros de cálculo, logrando así mostrar la utilidad que tienen estos en los diferentes campos de la ciencia humana.

JUSTIFICACION

Debido a la gran importancia que tienen las funciones logaritmo y exponencial, surge la necesidad de hacerle seguimiento histórico a la evolución de estos conceptos. Con el objetivo de mejorar la interpretación que hacen los estudiantes al utilizar estas funciones, teniendo en cuenta la utilidad que ha tenido cada concepto como alternativa a la solución de problemas en las diferentes ciencias del conocimiento humano.

Partiendo de los conceptos que a lo largo de la historia se han propuesto para interpretar las progresiones aritméticas y geométricas, se realizara un contraste entre estas progresiones para llegar a la construcción del concepto de logaritmo y exponencial. Basados en este hecho se establecerá su definición de acuerdo a la base indicada, para así determinar las diferentes relaciones y diferencias al utilizar dichos conceptos.

Se motiva al estudiante para acceder a los conocimientos teóricos e históricos sobre los conceptos de logaritmo y exponencial que se manejan en diferentes momentos de la actividad académica, proporcionándole de esta forma una herramienta de consulta, de tal forma que al momento de abordar sobre estos temas se facilitará su comprensión. Al complementarse con la solución de diferentes problemas propuestos en los libros de cálculo será de mucha utilidad práctica.

CAPÍTULO 1

PRIMEROS PASOS EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DEL LOGARITMO

La conceptualización del logaritmo está ligada al desarrollo de las progresiones. Una progresión es una secuencia, en la cual cada termino está relacionado con el inmediatamente anterior o el inmediatamente siguiente ya sea sumándolo o multiplicándolo por un número constante o fijo. En el primer caso tenemos una progresión aritmética y en el segundo caso una progresión geométrica, por ejemplo, los números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... corresponden a una progresión aritmética y los números 1, 4, 16, 64, 256, ... corresponden a una progresión geométrica. "El simbolismo empleado en la representación de las progresiones surge desde la época de los egipcios y babilonios"[1] , quienes introducen una manera de registrar números y hacer cálculos con ellos.

La Matemática utilizada por los Egipcios entre la época de 3150 a.C. y 31 a.C. se reducía a "solucionar problemas de contaduría, hacer mediciones, predecir eclipses o registrar los movimientos del planeta júpiter en la noche"[2]. Los símbolos empleados por los egipcios para representar las primeras seis potencias de 10, evidencian el uso de los exponentes y la escritura de "secuencias progresivas"tal como se puede observar en la imagen 1.1 [3]

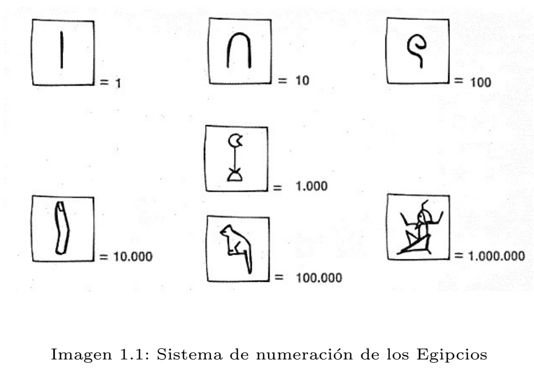
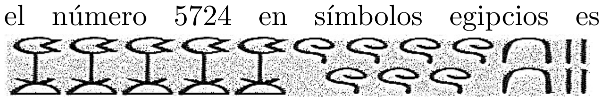


Imagen 1.1: Sistema de numeración de los Egipcios

En la escritura de los símbolos Egipcios solo se permite escribir un símbolo máximo nueve veces, puesto que al valor que le corresponde una potencia de 10 se le asignaba un símbolo diferente, así como por ejemplo, el número 5724 en símbolos egipcios es:



[1]Nicolas Bourbaki, Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universitaria, 1972, pág. 215
[2]Ian Stewart, Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años, Critica Barcelona, pág. 21
[3]Ian Stewart, Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años, Crítica Barcelona, pág. 19

Ilustremos cómo la potenciación nos permite encontrar en la escritura de los símbolos egipcios utilizando las notaciones actuales, el patrón $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, determinando a_1 como el primer término de la progresión, r como la razón y a_n la representación genérica de cualquier término de la progresión geométrica. Para los números Egipcios tomaremos $a_1 = 1$ y $r = 10$ así:

$a_1 = 1 \cdot 10^{1-1} = 1 \cdot 10^0 = 1 \cdot 1 = 1$
$a_2 = 1 \cdot 10^{2-1} = 1 \cdot 10^1 = 1 \cdot 10 = 10$
$a_3 = 1 \cdot 10^{3-1} = 1 \cdot 10^2 = 1 \cdot 100 = 100$
$a_4 = 1 \cdot 10^{4-1} = 1 \cdot 10^3 = 1 \cdot 1000 = 1000$
$a_5 = 1 \cdot 10^{5-1} = 1 \cdot 10^4 = 1 \cdot 10000 = 10000$
$a_6 = 1 \cdot 10^{6-1} = 1 \cdot 10^5 = 1 \cdot 100000 = 100000$
$a_7 = 1 \cdot 10^{7-1} = 1 \cdot 10^6 = 1 \cdot 1000000 = 1000000$

De lo anterior cabe notar la importancia de la potencia de un mismo número y su relación con las progresiones geométricas. Por ejemplo, los números 2, 6, 18, 54, 162, ... forman una progresión geométrica, cuyo primer elemento es 2, y su razón es 3. Recurriendo a la potenciación, se trata del "producto de un mismo número varias veces", en consecuencia tenemos que:

$a_1 = 2 \cdot (3^0) = 2 \cdot 1 = 2$
$a_2 = 2 \cdot (3^1) = 2 \cdot 3 = 6$
$a_3 = 2 \cdot (3^2) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
$a_4 = 2 \cdot (3^3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$
$a_5 = 2 \cdot (3^4) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$
$\vdots$
$a_n = 2 \cdot (3^{n-1}) = 2 \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}_{n-veces}$

Los babilonios (3000 a.C.) utilizaron una escritura llamada "*cuneiforme*"[4] -forma de cuñas- registrada en tablas de arcilla. El hallazgo de más de un millón de tales tablillas sugirió interpretaciones sobre la forma en la que utilizaban la aritmética. El sistema numérico de los babilonios se empleaba para llevar las cuentas del comercio, la contabilidad diaria y, en especial, para realizar los registros de sus observaciones astronómicas en cuanto al movimiento de los planetas. En una de estas tablillas descubierta por Edward Hincks [5] (Uno de los descifradores de la escritura cuneiforme en Mesopotamia) en 1854, está el registro en magnitudes de la iluminación de la luna cada día durante la luna llena, dicho registro puede interpretarse de la siguiente manera:

"Las partes iluminadas de la luna durante los cinco primeros días se registran en la serie 5, 10, 20, 40, 1.20 que conforman una progresión geométrica"[6], observando la progresión notamos el número 1.20 que corresponde al número 80 en nuestro sistema decimal base diez escrito en base sexagesimal. $80 = 60 + 20$ donde 60 equivale a 1 separado por un punto del número 20. Esto nos lleva a determinar que estos números tienen una relación con las progresiones geométricas, donde el primer término es 5 y el factor de progresión es 2.

[4]Ian Stewart, Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años, Critica Barcelona, pág. 15
[5]Florian Cajori, A history of mathematical notation, Dover publications, 1993, página 2
[6]Florian Cajori, A history of mathematical notation, Dover publications, 1993, página 2

Continuando con el registro consignado en la tablilla de arcilla, los números que siguen conforman la serie, "1.36, 1.52, 2.8, 2.24, 2.40, 2.56, 3.12, 3.28, 3.44, 4"[7] que corresponden a una progresión aritmética. Recordemos que una progresión aritmética es una secuencia de números tales que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera es constante, esta constante recibe el nombre de razón de progresión. Para escribir los términos en general de una progresión aritmética nos orientaremos por el patrón $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ donde a_1 es el primer término y d es la razón. De acuerdo a esto, los términos 1.36, 1.52, 2.8, 2.24, 2.40, 2.56, 3.12, 3.28, 3.44, 4 escritos en nuestra terminología actual o sistema de base diez son los siguientes:

$1{,}36 = 60 + 36 = 96$	$2{,}56 = (2 \times 60) + 56 = 176$
$1{,}52 = 60 + 52 = 112$	$3{,}12 = (3 \times 60) + 12 = 192$
$2{,}8 = (2 \times 60) + 8 = 128$	$3{,}28 = (3 \times 60) + 28 = 208$
$2{,}24 = (2 \times 60) + 24 = 144$	$3{,}44 = (3 \times 60) + 44 = 224$
$2{,}40 = (2 \times 60) + 40 = 160$	$4 = (4 \times 60) = 240$

Veamos ahora que los números corresponden a una progresión aritmética. Identifiquemos el primer término y hallemos la diferencia entre dos números consecutivos de la secuencia, tomemos $a_1 = 96$ y $a_2 = 112$, cuya diferencia es 16, la llamaremos razón (112 - 96 = 16). Si ilustramos este hecho mediante la expresión general de la progresión aritmética tendremos lo siguiente:

$$a_1 = 96 + [(1-1) \times 16] = 96 + 0 = 96$$
$$a_2 = 96 + [(2-1) \times 16] = 96 + 16 = 112$$
$$a_3 = 96 + [(3-1) \times 16] = 96 + 32 = 128$$
$$a_4 = 96 + [(4-1) \times 16] = 96 + 48 = 144$$
$$a_5 = 96 + [(5-1) \times 16] = 96 + 64 = 160$$

De esta forma vemos que los términos escritos en base diez cumplen con el patrón establecido de una progresión aritmética, luego la secuencia de números interpretados en la tablilla de arcilla escrita por los babilonios también es una progresión aritmética.

Gracias al sistema sexagesimal propuesto por los babilonios y los avances en su interpretación hoy en día podemos hablar de expresiones como grados, minutos, segundos, además que su escritura cuneiforme fue la base de diferentes culturas para realizar sus cuentas y operaciones matemáticas, en especial para las investigaciones sobre geometría y astronomía.

1.1. Los orígenes en la construcción del concepto de Logaritmo

La idea del concepto de logaritmo se debe en gran parte a los griegos que no fueron indiferentes a esta terminología utilizada por los Egipcios y los babilonios, entre ellos Euclides de Alejandría y Arquímedes de Siracusa. El matemático y geómetra griego Euclides de Alejandría (325 a.C. - 265 a.C.) de quien muy poco se conoce sobre su vida, pero sus aportes fueron de gran interés para la matemática en general. Euclides es reconocido por una colección de 13 libros en los que recopila y sistematiza los conocimientos matemáticos de su época bajo el nombre de "los

[7] Florian Cajori, A history of mathematical notation, Dover publications, 1993, página 2

Elementos".

Así por ejemplo, en el libro $VIII$ se ocupa de una serie de números en proporción continua y en progresión geométrica, concepto y noción que no quedaron plenamente definidos. Del libro IX podemos rescatar una serie de proposiciones que involucran a las progresiones y a la potenciación, una de ellas es la Proposición 11, que dice lo siguiente "*Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, el menor mide al mayor según uno de los números que se encuentran entre los números proporcionales*"[8], analizando detenidamente esta proposición, en la terminología moderna empleada profusamente corresponde al siguiente enunciado $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ [9], donde $a \in \mathbb{R}, m$ y n son enteros positivos, la cual conocemos como la propiedad del producto de potencias de igual base. Esta propiedad enunciada por Euclides está vinculada a uno de los matemáticos y astrónomos de Asia menor (Turquía), se trata de Eudoxo de Cnidos [10] (390 a.C.- 337 a.C) que trabajo sobre la "Teoría de la proporcionalidad", comprendida con los números y las cantidades continuas.

En la evolución y desarrollo tanto del concepto, como de la interpretación y notación de las progresiones geométricas y aritméticas encontramos los referentes básicos para construir el concepto del Logaritmo. Arquímedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.), comparo estas dos progresiones mediante la siguiente proposición, "Cuando varios números están en proporción continua a partir de la unidad, y algunos de estos números se multiplican entre sí, el producto estará en la misma progresión, alejado del más grande de los números multiplicados tantos números como el más pequeño de los números multiplicados lo está de la unidad en la progresión, y alejado de la unidad la suma menos uno de los números de lugares que los números multiplicados están alejados de la unidad". [11]

Para interpretar la proposición mencionada por Arquímedes, tomemos la progresión aritmética de expresión general $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1$ y la progresión geométrica de expresión general $b_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ comparándolas como se ilustra en el siguiente cuadro:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512

Los términos de la parte superior corresponden a una progresión aritmética y los de la parte inferior a una progresión geométrica. La multiplicación de dos términos en progresión geométrica produce un término dentro de la misma progresión, este término se puede hallar de forma más sencilla sumando los correspondientes números sobre cada término ubicados en la progresión aritmética y ubicando el total sobre la misma progresión aritmética. Este hecho ilustra una de las propiedades de la potenciación utilizadas actualmente y que se relaciona a la expresión $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, veamoslo con el siguiente ejemplo:

[8] $www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm$
[9] Nicolas Bourbaki, Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universitaria, 1972, pág. 215
[10] $https://es.m.wikipedia.org/wiki/eudoxio_de_Cnido$
[11] Teresa González, Segmentos de la historia: la función logaritmo, Enseñanza Universitaria, 2007, pág. 129

3	$+$	6	$=$	9
8	$\times$	64	$=$	512

Si vamos a realizar el producto entre los números 8 y 64 ubicados en progresión geométrica, bastaría con realizar la suma de los números 3 y 6 en la progresión aritmética. De acuerdo a la suma tendremos que $3 + 6 = 9$, correspondiente al número 512 en progresión geométrica.

Otro de los hechos que podemos ilustrar es la división de los términos en la misma progresión geométrica, que se relaciona con la expresión $a^n \div a^m = a^{n-m}$ cuyo exponente corresponde a la sustracción de los números en progresión aritmética, por ejemplo:

9	-	7	$=$	2
512	$\div$	128	$=$	4

La proposición hecha por Arquímedes de Siracusa facilito la realización de las operaciones realizadas por los calculadores de la época, teniendo en cuenta que solamente se utilizaba para exponentes enteros mayores que cero.

1.2. El retorno en la construcción del concepto de Logaritmo

Luego de que la matemática estuviera inactiva desde el siglo IV d.C. los árabes se encargaron de traducir las escrituras hechas por los griegos y guardar estos aportes científicos por muchos años. Terminando la edad media (comprendida entre los siglos V y XV) aparecen los matemáticos Nicolas de Oresme (1323-1382) y Nicolas Chuquet (1445-1488), quienes retoman el concepto de potencia con exponentes fraccionarios y exponentes negativos respectivamente, más adelante Michael Stifel (1487-1567) retoma la proposición de Arquímedes de Siracusa comparando la progresión aritmética y la progresión geométrica ampliando su concepto a las potencias de un mismo número con exponente racional y exponente negativo.

Stifel llama "exponentes" a los términos de la progresión aritmética y "potencia" a los términos de la progresión geométrica, "da la primera tabla comparativa entre las dos progresiones de una forma rudimentaria, contiene solo los números enteros desde -3 hasta 6 y sus correspondientes potencias de dos"[12], ilustrada así:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

En la anterior tabla observamos el número cero en los exponentes y número 1 en las potencias, esta forma de escribirla es semejante a la propiedad actual de $a^0 = 1$ proposición que fue expuesta principalmente por Chuquet. Uno de los libros más representativos de Stifel es "Arithmetica integra"donde escribe sus observaciones en cuanto a la comparación de estas dos progresiones. Entre ellas tenemos:

[12]Francisco Tapia, Apuntes de la historia de las matemáticas: historia de los logaritmos, 2003, pág. 06

a La adición en la aritmética, corresponde a multiplicación en la geométrica.

b La sustracción en la aritmética, corresponde a la división en la geométrica.

c La multiplicación en la aritmética, corresponde a la multiplicación por si mismo (potenciación) en la geométrica.

d La división en la aritmética, corresponde a la extracción de la raíz en la geométrica.

Stifel argumenta que se puede escribir un libro sobre las propiedades maravillosas de estos números, pero decide hacer solamente unos pocos aportes. Ilustremos los literales c y d, teniendo en cuenta que con anterioridad nombramos y escribimos ejemplos sobre los literales a y b en la página 18.

La multiplicación en la aritmética, corresponde a la multiplicación por sí mismo (potenciación) en la geométrica. Se encuentra similar a la propiedad actual de potencia de una potencia donde $(a^n)^m = a^{nm}$. Por ejemplo, si multiplicamos los términos 2 y 3 $(2 \cdot 3 = 6)$ en la progresión aritmética corresponde al número 64 en la progresión geométrica, a su vez:

2	$\times$	3	$=$	6
4				64

De lo anterior podemos concluir que $4^3 = 64$, lo cual corresponde a la multiplicación por sí mismo del número 4.

Otra forma de obtener como potencia a 64 es multiplicar los términos 1 y 6 $(1 \cdot 6 = 6)$ en la progresión aritmética, que corresponde a multiplicar seis veces el número dos en la progresión geométrica $(2^6 = 64)$

1	$\times$	6	$=$	6
2				64

La división en la aritmética, corresponde a la extracción de la raíz en la geométrica. Se encuentra similar a la propiedad actual de potencia con exponente racional, donde $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$. Por ejemplo, si dividimos los números 6 y 3 $(6 \div 3 = 2)$ en la progresión aritmética corresponde al número 4 en la progresión geométrica, en consecuencia:

6	$\div$	3	$=$	2
64				4

De lo anterior tenemos que la raíz cubica de 64 es 4 $(\sqrt[3]{64} = 4)$

Estas propiedades fueron acogidas en la astronomía, porque simplificaban el cálculo con expresiones numéricas muy grandes, facilitando la labor de los calculadores, pero con el tiempo este tipo de propuestas no tomo la fuerza necesaria puesto que hacía falta algo muy importante en la realización de los cálculos aritméticos, se trataba de las fracciones decimales. Este tipo de cálculos se volvió a popularizar en el siglo XVI con los aportes de John Napier y Jobst

Bürgi en la construcción de tablas de cálculo y en especial la introducción del concepto de logaritmo.

1.3. La invención del Logaritmo por John Napier

Napier de Merchiston (1550-1617) conocido también como Neper y perteneciente a la baja nobleza escocesa, fue el inventor de la palabra Logaritmo (del griego "Logos" Razón, y "arithmos" número) [13] que hace alusión al "número de razones", en otras palabas es la medida del "número"de veces que la acción "razón"ha ocurrido. Napier tuvo en cuenta dos aspectos fundamentales que incidieron en la creación del logaritmo, fueron los métodos de Prosthaphaeresis y el resultado de un estudio de un problema de mecánica, lo cual facilito el trabajo de los astrónomos, navegantes, matemáticos y físicos que realizaban cálculos muy extensos.

A principios del siglo XVI se hicieron populares en Europa las identidades trigonométricas utilizadas desde la topografía, la navegación y en especial la astronomía. Los cálculos que se realizaban mediante fórmulas trigonométricas eran bastante tediosos, para tratar de simplificarlos se introdujeron algunas técnicas que empleaban identidades trigonométricas, "Entre dichas técnicas o reglas se encuentra la de Prosthaphaeresis que convierte el producto de funciones circulares en una suma o diferencia" [14], este recurso fue bastante utilizado en los observatorios astronómicos.

Desde Dinamarca llegó a Napier una propuesta muy interesante de los matemáticos Wittich y Clavius en relación con su obra "Astrolabio"(que solamente se hizo pública hasta el año de 1593). Dicha propuesta se basaba en aplicar las tablas trigonométricas mediante el uso de las formulas del seno y del coseno por medio de la suma de dos ángulos para reducir los cálculos, partiendo desde esta perspectiva Napier decide realizar sus investigaciones tanto que "la sugerencia puede muy bien haber llegado a él de su familiaridad con la bien conocida formula trigonométrica:

$$\sin A \cdot \sin B = \tfrac{1}{2}\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\}$$

que expresa el producto de dos senos en términos de la suma y la diferencia de los ángulos" [15], hecho que sirvió de inspiración a Napier para que propusiera un método más practico al momento de multiplicar los senos de ángulos por una suma más sencilla, propuesta que fue bien aceptada por los astrónomos Tycho Brahe y Johann Kepler. La presentación de los libros "Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio" en 1614 y su obra póstuma "Mirifici Logarithmorum Canonis constructio" en 1619 dieron a conocer su idea en la construcción de los logaritmos.

Napier realizaba los cálculos por medio de la trigonometría esférica, "utilizando Logaritmos de senos, su idea principal consistía en conseguir que los términos de una progresión geométrica

[13] M. O. Francisco Javier Tapia, Historia de los logaritmos, apuntes de historia de las matemáticas (2003), pág. 7

[14] Teresa González, Segmentos de la historia: la función logaritmo, Enseñanza Universitaria, 2007, pág. 131

[15] Lord Moulton, Napier Tercentenary Memorial, The Invention of Logarithms, its genesis and growth (1915), pág. 6

formada por las potencias enteras de un número dado estuvieran muy próximas unas a otras"[16] por la cual fue necesario utilizar una razón próxima a uno. La razón utilizada por Napier es $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ que está bastante cercana a uno, como para esta época los números decimales no se trabajan, para evitar el uso de estos decidió multiplicar esta razón por 10^7, de esta forma mejoraba las falencias presentes entre los términos de una progresión haciéndolos más pequeños. De acuerdo a esto las progresiones geométricas y aritméticas asociadas a esta razón son:

0	1	2	3	4	...	L
$(1-10^{-7})^0$	$(1-10^{-7})^1$	$(1-10^{-7})^2$	$(1-10^{-7})^3$	$(1-10^{-7})^4$	...	$(1-10^{-7})^L$
1	0.9999999	0.9999998	0.9999997	0.9999996	...	

Al multiplicar la razón por 10^7, se obtiene:

0	1	2	3	4	...	L
$10^7 \cdot (1-10^{-7})^0$	$10^7 \cdot (1-10^{-7})^1$	$10^7 \cdot (1-10^{-7})^2$	$10^7 \cdot (1-10^{-7})^3$	$10^7 \cdot (1-10^{-7})^4$	...	$10^7 \cdot (1-10^{-7})^L$
10000000	9999999	9999998	9999997	9999996	...	

A los términos de esta progresión geométrica se les llama números de Napier (N), donde $N = 10^7 \cdot (1-10^{-7})^L$, a los temimos en progresión aritmética se le asignó la letra L. De esta forma se le llama a L como el logaritmo de N, y se nota así Nog N = L, donde Nog corresponde en homenaje a Napier, a lo que actualmente se conoce como Log.

De acuerdo a lo anterior, a estos términos de la progresión geométrica se les hace la asignación correspondiente de $N \to Nog\ N = L$, tenemos que:

$Nog\ N = Nog\ 10^7 \cdot (1-10^{-7})^L = L$

Al dividir la correspondencia $N \to Nog\ N = L$ entre 10^7 se retoma el uso de las cifras decimales obteniendo la expresión $\frac{N}{10^7} \to \frac{Nog\ N}{10^7} = \frac{L}{10^7}$, veamos lo siguiente:

$\frac{N}{10^7} = \frac{10^7 \cdot (1-10^{-7})^L}{10^7} = (1-10^{-7})^L$

Si $L = 10^7$, tendremos que $\frac{N}{10^7} = 0{,}367879422923665$

Haciendo una comparación con

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = 0{,}367879441171442\ldots$$

encontramos que $\frac{N}{10^7}$ se aproxima a

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} = 0{,}367879441171442\ldots$$

, de esta forma tenemos que $\frac{N}{10^7} \to \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right) \approx \frac{L}{10^7}$, en efecto:

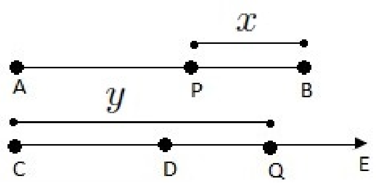
[16] Teresa González, Segmentos de la historia: la función logaritmo, Enseñanza Universitaria, 2007, pág. 131

$$\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right) = \frac{10^7\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)\right]}{10^7} = \frac{\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)\right]^{10^7}}{10^7} = \frac{\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{10^7\cdot(1-10^{-7})^L}{10^7}\right)\right]^{10^7}}{10^7} = \frac{\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(1-10^{-7}\right)^L\right]^{10^7}}{10^7} =$$
$$\frac{\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(1-10^{-7}\right)^{10^7}\right]^L}{10^7} = \frac{L\cdot\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(1-10^{-7}\right)^{10^7}\right]}{10^7} \approx \frac{L\cdot\left[\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{1}{e}\right)\right]}{10^7} \approx \frac{L\cdot 1}{10^7} \approx \frac{L}{10^7}$$

Como se puede observar corresponde a la versión aritmética del logaritmo utilizando las propiedades actuales del Logaritmo y la definición del número de Euler o también llamada constante de Napier.

Por otro lado tenemos el concepto de Logaritmo explicado por John Napier de forma geométrica así: "Sea el segmento AB y una semirrecta CDE, sea un punto P que parte de A y se mueve a lo largo de AB con velocidad variable que decrece en proporción a su distancia B; supongamos que un punto Q parte al mismo tiempo de C y se mueve a lo largo de la semirrecta CDE con velocidad uniforme igual a la velocidad inicial del punto P, a lo anterior Napier determino a la distancia CQ como el logaritmo de PB"[17]. Analicemos detenidamente este concepto.

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



Con ayuda de las operaciones y definiciones actuales evidenciemos el concepto de logaritmo presentado cinematicamente.

En efecto: Las siguientes ecuaciones representan la velocidad de los puntos P y Q descritos en el enunciado, tomando la distancia de $AB = 10^7$ y la velocidad inicial desde A como 10^7.

$\frac{dx}{dt} = x$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dt} = 10^7$

Comparamos la distancia x del segmento AB con la distancia y de la semirrecta CDE:

$dx = xdt$ y $dy = 10^7 dt$

$\frac{dy}{dx} = \frac{10^7 dt}{xdx} = \frac{10^7}{x}$, tenemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{10^7}{x}$ luego $\frac{dy}{10^7} = \frac{dx}{x}$

Integramos a ambos lados de la igualdad,

$$\int \frac{dy}{10^7} = \int \frac{dx}{x} \qquad \text{Integral planteada}$$
$$\frac{y}{10^7} = \ln x + \ln c \qquad \text{Solución de la integral}$$

[17]Teresa González, Segmentos de la historia: la función logaritmo, Enseñanza Universitaria, 2007, pág. 134

$$y = 10^7 (\ln xc) \qquad \text{Logaritmo de un producto}$$

Notación: si $x = 10^7$, luego y=0. teniendo en cuenta las condiciones enunciadas, tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= 10^7 \left(\ln 10^7 c\right) && \text{Remplazando los datos}\\
0 &= \ln 10^7 c && \text{Dividir por } 10^7\\
e^0 &= e^{\ln 10^7} c && \text{Propiedad de la igualdad (multiplicar por } e)\\
1 &= 10^7 c &&\\
c &= \frac{1}{10^7} &&
\end{aligned}$$

Teniendo el valor de c podemos continuar con la ilustración:

$$\begin{aligned}
y &= 10^7 \left(\ln x \frac{1}{10^7}\right) && \text{Sustitución del valor de c}\\
y &= 10^7 \left(\ln \frac{x}{10^7}\right) && \text{Producto entre fraccionarios}\\
y &= 10^7 \left(\frac{x}{10^7}\right) &&\\
y &= 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right) && \text{Relación entre logaritmo de Napier y logaritmo de base } \tfrac{1}{e}\\
\frac{y}{10^7} &= \log_{\frac{1}{e}} \left(\frac{x}{10^7}\right) && \text{Propiedad de la igualdad (cociente)}\\
y &= Nog\ x &&
\end{aligned}$$

De acuerdo con la interpretación cinemática del concepto de logaritmo, podemos representar la situación al comparar la distancia recorrida por dos partículas, que partiendo con una misma velocidad inicial, una se mantiene constante y otra varía de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida, para concluir que la distancia recorrida en movimiento rectilíneo uniforme es igual al logaritmo de la distancia recorrida en movimiento rectilíneo uniformemente retardado en cada instante t del movimiento.

1.4. El concepto de Logaritmo por Jobst Bürgi

El matemático suizo Jobst Bürgi (1552-1632) quien se desempeñaba como constructor y reparador de relojes e instrumentos astronómicos dice haber concebido la idea de logaritmo en el año 1586 antes de que Napier tuviera la idea propuesta. Bürgi tomo como referencia el pensamiento de Stifel y el “libro de cálculo”de Simón Jacob[18], así como también las conocidas reglas de prostaféresis (Prosthaphaeresis), tuvo la experiencia de trabajar en el observatorio astronómico de Praga con Johannes Kepler durante ocho años (1603-1611) ayudando en las observaciones y en la simplificación de cálculos, donde confecciono su tabla de logaritmos, pero no anuncio su pensamiento antes que Napier, puesto que acostumbraba a guardar sus propuestas. Teniendo los conocimientos suficientes lanza su obra en 1620 con el nombre de

[18]M. O. Francisco Javier Tapia, Historia de los logaritmos, apuntes de historia de las matemáticas (2003), pág. 9

"Arithmetische und geometrische progress tabulen"[19] donde propuso sus tablas logarítmicas.

Bürgi tiene ideas similares en cuanto al concepto de logaritmo propuesto por Napier, para la serie aritmética Bürgi toma como razón $r = 10$, el término $n - \acute{e}simo$ en progresión aritmética está dada por la expresión general $a_n = 10n$, a estos términos los denomino números rojos o logaritmos. A los términos en progresión geométrica toma como razón un número cercano a uno $r = 1 + 10^{-4} = 1{,}0001$, obteniendo así la expresión general para hallar el $n - \acute{e}simo$ término $a_n = (1+10^{-4})^n$. Nuevamente se tiene el inconveniente de las cifras decimales que aún no se manejaban en este siglo y decide multiplicar su expresión por el numero 10^8 quedando la expresión general $a_n = 10^8 \cdot (1 + 10^{-4})^n$, a estos términos los llamo números negros, "la tabla hecha por Bürgi solo llegaba hasta el número 10^9"[20]; de ésta se puede escribir la tabla de logaritmo propuesta por Bürgi así:

Logaritmo	0	10	20	30	...	$n \cdot 10$
	$10^8 \cdot (1+10^{-4})^0$	$10^8 \cdot (1+10^{-4})^1$	$10^8 \cdot (1+10^{-4})^2$	$10^8 \cdot (1+10^{-4})^3$	...	$10^8 \cdot (1+10^{-4})^n$
Anti-logaritmo	100000000	100010000	100020001	100030003	...	

"La propuesta hecha por Bürgi permite verificar que $\log m > \log n$ si $m > n$, se acerca más al sistema actual de logaritmo, puesto que en la proposición de Napier $\log m < \log n$, se cumple cuando $m > n$"[21], en el sistema de Bürgi no se especifica una base utilizada, se toma como alusión muy cercana a la expresión:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Una de las características más notables en los sistemas propuestos por Napier y Bürgi en cuanto al concepto de logaritmo es su gran cercanía al número e (Euler) que no era mencionado por ellos pero se deduce de los cálculos realizados por ellos, puesto que Napier utiliza el número que conduce a la base $\frac{1}{e}$ y Bürgi utiliza un número que conduce a la base e.

1.5. Ampliación al concepto de Logaritmo

El profesor saviliano de geometría de Oxford, Henry Briggs (1561-1630) fue uno de los más interesados en ampliar el concepto del logaritmo, Briggs tuvo la gran oportunidad de visitar a Napier para mostrarle los adelantos de la investigación que estaba llevando a cabo sobre el concepto de logaritmo y así acordar ciertas modificaciones al método propuesto por Napier, dentro de las modificaciones Briggs propuso realizar tablas utilizando potencias de diez, a su vez concluyen el hecho de expresar el logaritmo de uno igual a cero ($\log_{10} 1 = 0$) y el logaritmo de diez igual a uno ($\log_{10} 1 = 0$). De esta forma en 1617 Briggs construye la tabla de logaritmos conocida como logaritmos vulgares o logaritmos de Briggs (Logaritmos de base 10, donde $L = \log_{10} x$) en su libro "Logarithmorum chilias prima"que contiene logaritmos de uno

[19] María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 136

[20] Oscar Forner, Manuel Forner y Ma Consuelo Domínguez, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume, (2012), Pág. 29

[21] María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 136

hasta mil con una cantidad de catorce cifras decimales. En 1624 publica el libro "Aritmética logarítmica" que contiene los logaritmos de 1 a 20000 y de 90000 a 100000 con una cantidad de catorce cifras decimales[22], a su vez menciona en esta obra la palabra característica (parte entera) y mantisa (parte decimal).

Al mismo tiempo que Briggs, el profesor de matemáticas inglés John Speidell publica una obra en 1619 llamada "New Logarithmes" donde ajusta los logaritmos de Neper introduciéndolos a partir de funciones trigonométricas; por otro lado el matemático William Oughtred[23] (1574-1660) anuncia de forma más explícita las propiedades de los logaritmos descritas a continuación:

Su demostración se ha realizado con la ayuda de las operaciones actuales.

$\log(m \cdot n) = \log m + \log n$

Demostración de $\log_a m \cdot n = \log_a m + \log_a n$

$$\begin{aligned}
&\mathit{Sea}\ p = \log_a (m \cdot n);\ \mathit{entonces}\ a^p = m \cdot n\\
&s = \log_a m;\ \mathit{entonces}\ a^s = m\\
&t = \log_a n;\ \mathit{entonces}\ a^t = n\\
&\mathit{como}\ a^p = m \cdot n;\ \mathit{entonces}\ a^p = a^s \cdot a^t = a^{s+t}\\
&\log_a a^p = \log_a a^{s+t};\ \mathit{entonces}\ p \cdot \log_a a = (s+t)\log_a a \qquad \log_a a = 1\\
&p = s + t\\
&\mathit{Luego}: \log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n
\end{aligned}$$

$\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$

Demostración de $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

$$\begin{aligned}
&\mathit{Sea}\ p = \log_a \frac{m}{n};\ \mathit{entonces}\ a^p = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}\\
&s = \log_a m;\ \mathit{entonces}\ a^s = m\\
&t = \log_a \frac{1}{n};\ \mathit{entonces}\ a^t = \frac{1}{n},\ \mathit{tenemos\ que}\ a^{-t} = n, \qquad \mathit{luego}\ -t = \log_a n,\\
&\qquad\qquad \mathit{de\ esta\ forma}\ t = -\log_a n\\
&\mathit{como}\ a^p = m \cdot \frac{1}{n};\mathit{entonces}\ a^p = a^s \cdot a^t = a^{s+t}\\
&\log_a a^p = \log_a a^{s+t};\mathit{entonces}\ p \cdot \log_a a = (s+t)\log_a a \qquad \log_a a = 1\\
&p = s + t\\
&\mathit{Luego}: \log_a \frac{m}{n} = \log_a m + (-\log_a n)
\end{aligned}$$

[22] Ian Stewart, Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años, Critica Barcelona, pág. 86

[23] María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 138

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$\log x^n = n \cdot \log x$

$$\begin{aligned}
&\text{Demostración de } \log_a x^n = n \cdot \log_a x \\
&Sea\ p = \log_a x^n;\ entonces\ a^p = x^n \\
&s = \log_a x;\ entonces\ a^s = x \\
&como\ a^p = x^n;\ entonces\ a^p = (a^s)^n \\
&\log_a a^p = \log_a (a^s)^n; entonces\ p \cdot \log_a a = (s \cdot n)\log_a a \\
&p = n \cdot s \\
&Luego : \log_a x^n = n \cdot \log_a x
\end{aligned}$$

La propuesta hecha por Briggs en cuanto a utilizar 10 como la base del logaritmo acerco cada vez más a la definición actual de logaritmo. Leonard Euler (1707-1783) en 1728 toma a la logaritmación como una de las operaciones inversas a la potenciación. En 1742 el matemático William Jones (1675-1749) expone una definición de logaritmo y la incluye en la introducción del libro "Table of Logarithms" de William Gardiner. En el manuscrito de Leonard Euler Opera póstuma II escribe la definición del logaritmo de un numero positivo como "el exponente al que hay que elevar la potencia, cuya base es el numero prefijado"[24], de esta forma se introduce al concepto actual de logaritmo que ha servido para simplificar los cálculos realizados por los calculadores, matemáticos, físicos y navegantes del siglo $XVII$, pues con la ayuda de las tablas logarítmicas y las propiedades se hacía más sencillo realizar productos de números muy grandes y bastante dispendiosos para la época.

1.6. Tabla de Logaritmos vulgares o Logaritmos de Briggs

En las obras de Briggs se ofrecía una tabla que comparaba las progresiones aritméticas y geométricas[25], para realizar esta comparación hay que tener en cuenta que la base tomada por Briggs es diez (10), es decir, no se hacía necesario multiplicar a la progresión geométrica con un número, con el fin de evitar las cifras decimales como se hacía anteriormente en las tablas propuestas por Napier y Bürgi, el acuerdo hecho entre Briggs y Napier fue claro en tomar como referencia las expresiones $\log_{10} 1 = 0$ y $\log_{10} 10 = 1$, de acuerdo a las propuestas hechas de escribir el logaritmo como la operación inversa de la potenciación tenemos que $\log_{10} N = L$ corresponde a $10^L = N$, utilizadas actualmente en nuestros cálculos, veamos la construcción en la siguiente tabla:

[24] María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 138

[25] M Consuelo Domínguez, Manuel Forner y Oscar Forner, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume (2012), Pág. 30

$\log N = L$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
N	$\cdots$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	$\cdots$
		0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	

Las condiciones iniciales se hicieron con potencias de exponentes enteros, pero se hacía necesario ampliar el concepto a las potencias de exponentes fraccionarios. Con el objetivo de disminuir las falencias o huecos presentes en las tablas de Logaritmos se recurre a las potencias fraccionarias de base diez, para este proceso es necesario el uso de las interpolaciones de los medios aritméticos y medios geométricos.

La interpolación de medios aritméticos da como resultado otra progresión aritmética que se halla entre dos números dados. Si queremos hallar la otra progresión aritmética hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Hallar la razón aritmética mediante la expresión $r = \frac{U-a}{n-1}$ donde U es el último término de la progresión, a es el primer término de la progresión y n es el número de medios que se van a interpolar más los extremos de la progresión.
- Esta razón aritmética se le suma al (1^{er}) primer término para obtener el (2^{do}) segundo término, luego al (2^{do}) segundo término se le suma la razón aritmética para obtener el (3^{er}) tercer término y así sucesivamente.

La interpolación de medios geométricos da como resultado otra progresión geométrica que se halla entre dos números dados. Si queremos hallar la otra progresión geométrica hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Hallar la razón geométrica mediante la expresión $r = \sqrt[m+1]{\frac{U}{a}}$ donde U es el último término de la progresión, a es el primer término de la progresión y m es el número de medios que se van a interpolar.
- Esta razón geométrica se multiplica al (1^{er}) primer término para obtener el (2^{do}) segundo término, luego al (2^{do}) segundo término se le multiplica la razón geométrica para obtener el (3^{er}) tercer término y así sucesivamente.

Ilustración de los desarrollos anteriores.

Construyamos una tabla de logaritmos interpolando los siete medios aritméticos y geométricos teniendo en cuenta las condiciones dadas por Napier y Briggs. Tomemos la serie aritmética con primer término 0 y último término 1, la serie geométrica con primer término 1 y último término 10, cumpliendo con las notaciones $log_{10}\ 1 = 0$ y $log_{10}\ 10 = 1$, de manera que la razón aritmética obtenida es $r = \frac{1-0}{9-1} = \frac{1}{8}$ y la razón geométrica es $r = \sqrt[7+1]{\frac{10}{1}} = \sqrt[8]{10} = 10^{\frac{1}{8}}$, teniendo estos datos obtenemos la siguiente tabla por medio de las interpolaciones:

$\log N = L$	0	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,75	0,875	1
N	1	1,33352	1,77828	2,37137	3,16228	4,21696	5,62341	7,49894	10

Los términos de la primera fila corresponden a la serie aritmética y los de la segunda fila corresponden a los de la serie geométrica, tal como se puede observar se han construido aproximando los valores obtenidos que pueden ser comprobados actualmente por medio de una calculadora o una computadora.

Si queremos hallar el valor de $\log_{10} 4$, nos podemos ayudar con los valores obtenidos en la anterior tabla de valores, donde $\log_{10} 3{,}16228 = 0{,}500$ y $\log_{10} 4{,}21696 = 0{,}625$ que son los valores más cercanos a cuatro, de esta forma interpolemos los siete medios aritméticos y geométricos, teniendo que la razón aritmética es $r = \frac{0{,}625-0{,}500}{9-1} = \frac{0{,}125}{8} = 0{,}15625$ y la razón geométrica es $r = \sqrt[7+1]{\frac{4{,}21696}{3{,}16228}} = \sqrt[8]{1{,}33352} = 1{,}03663$, con esta información podemos obtener la siguiente tabla de logaritmos utilizando la interpolación de términos:

$\log N = L$	0,5	0,515625	0,53125	0,546875	0,5625	0,578125	0,59375	0,609375	0,625
N	3,16228	3,27812	3,39821	3,52269	3,65174	3,78552	3,92419	4,06794	4,21697

Como se puede observar en la tabla 4.06794 está bastante aproximado a 4, aunque en la tabla el valor de $\log_{10} 4{,}06794 = 0{,}609375$ esta próximo al valor real de $\log_{10} 4 = 0{,}602059991$, si continuamos haciendo las interpolaciones entre los términos próximos a cuatro (4) en la serie geométrica, notaremos que cada vez está más cerca de las cifras decimales de su logaritmo, este método de interpolaciones requiere de hacer extensivos cálculos matemáticos que durante el siglo XVI eran bastante tediosos.

Briggs tomo una alternativa diferente a la mencionada anteriormente, "utilizo como base una tabla con las raíces sucesivas del número 10 y las raíces sucesivas del número cuyo logaritmo deseaba calcular, hasta obtener como resultado un número que se aproximara con bastante exactitud a una potencia de 10"[26], por medio de una computadora ilustraremos este hecho hallando el valor del logaritmo de cuatro con una aproximación de 14 cifras decimales.

Hallemos las raíces sucesivas de base 10 con exponente fraccionario $\frac{1}{2^n}$ con $n \in N$.

Numero	Raíz	Logaritmo
$10^{\frac{1}{1}}$	10,00000000000000	1,00000000000000
$10^{\frac{1}{2}}$	3,16227766016838	0,50000000000000
$10^{\frac{1}{4}}$	1,77827941003892	0,25000000000000
$10^{\frac{1}{8}}$	1,33352143216332	0,12500000000000
$10^{\frac{1}{16}}$	1,15478198468946	0,06250000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^{\frac{1}{536870912}}$	1,00000000428890	0,00000000186265
$10^{\frac{1}{1073741824}}$	1,00000000214445	0,00000000093132

Hallemos las raíces sucesivas de base 4 con exponente fraccionario $\frac{1}{2^n}$ con $n \in N$.

[26]M Consuelo Domínguez, Manuel Forner y Oscar Forner, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume (2012), Pág. 30

Numero	Raíz
$4^{\frac{1}{1}}$	4,00000000000000
$4^{\frac{1}{2}}$	2,00000000000000
$4^{\frac{1}{4}}$	1,41421356237309
$4^{\frac{1}{8}}$	1,18920711500272
$4^{\frac{1}{16}}$	1,09050773266526
$\vdots$	$\vdots$
$4^{\frac{1}{536870912}}$	1,00000000258217
$4^{\frac{1}{1073741824}}$	1,00000000129109

Busquemos un valor en las raíces de cuatro que este cercano a dos valores de las raíces sucesivas de diez (Sombreados), de esta forma tenemos que:

$$10^{\frac{1}{536870912}} < 4^{\frac{1}{536870912}} < 10^{\frac{1}{1073741824}}$$

Realizamos la comparación entre los valores de las raíces de diez y de cuatro (están en negrilla), y sus respectivos logaritmos, teniendo en cuenta que vamos a hallar el logaritmo de cuatro [27].

Numero	Raíz	Logaritmo
$10^{\frac{1}{536870912}}$	1,00000000428890	0,00000000186265
$4^{\frac{1}{536870912}}$	1,00000000258217	x
$10^{\frac{1}{1073741824}}$	1,00000000214445	0,00000000093132

Haciendo la interpolación tenemos:

$$\frac{x - 0{,}0000000093132}{0{,}00000000186265 - 0{,}0000000093132} = \frac{1{,}00000000258217 - 1{,}00000000214445}{1{,}00000000428890 - 1{,}00000000214445}$$
$$\frac{x - 0{,}0000000093132}{0{,}000000000931} = \frac{0{,}00000000043772}{0{,}00000000214445}$$
$$x = (0{,}204119969 \cdot 0{,}000000000931) + 0{,}0000000093132$$
$$x = 0{,}00000000112142$$

De esta forma obtenemos la expresión:

$$\log 4^{\frac{1}{536870912}} = 0{,}00000000112142$$

Utilizando las propiedades actuales de logaritmos tenemos que:

$$\frac{1}{536870912} \log 4 = 0{,}00000000112142$$

[27] M Consuelo Domínguez, Manuel Forner y Oscar Forner, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume (2012), Pág. 30, procedimiento tomado de la presente bibliografía aplicándola a un número diferente.

$$\log 4 = \frac{0{,}00000000112142}{\frac{1}{536870912}}$$
$$\log 4 = 0{,}60205998462166$$

Como se ha observado esta es la forma más exacta de hallar el valor del logaritmo de cualquier número, la construcción de las tablas logarítmicas fue uno de los hechos más importantes, se daban resultados de manera más rápida a cálculos complicados. El esfuerzo realizado por los matemáticos y tantos años dedicados en la construcción del concepto de logaritmo proporcionan hoy en día una herramienta tan práctica que se ha podido incorporar en los diferentes campos de la ciencia y de la tecnología.

CAPÍTULO 2

EL SURGIMIENTO DEL NUMERO 2,718281...

La presencia del número e esta ligado, por lo menos, a cuatro momentos históricos en el desarrollo del conocimiento matemático. El primero corresponde a su relación con la denominada matemática comercial, a través del cálculo de las ganancias obtenidas mediante la práctica de la usura. La segunda inclusión como base de los denominados logaritmos naturales partiendo de la idea planteada por John Napier. La tercera como el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, finalmente, un cuarto momento (tal vez el más fecundo) la definición de la función exponencial de base e.

Veamos porque y de qué manera el numero $e = 2{,}718281\ldots$ se ha vinculado a estos cuatro momentos.

2.1. Relación entre el interés compuesto y el numero e

Respecto al primer momento, hay evidencia de que antiguas prácticas comerciales análogas a las actuales, como los créditos en dinero y en especies se ven afectados por los intereses por medio de la usura. Según Marc Van de Mierop (2005), "los primeros vestigios de préstamos tienen un origen sumerio"[1], este tipo de préstamos con intereses data desde el periodo 3000 a.C. El interés era considerado en muchas ocasiones, como una usura; debido a esto "los gobernantes de la época se vieron obligados a colocar un límite hasta de 33 % en el grano y 20 % en el dinero"[2]. En el código de Hammurabi se hace alusión a varios aspectos que regulan a la sociedad y a los prestamistas. A su vez, también existía una fecha para borrar la pizarra financiera de babilonia donde se declaraba una amnistía a todo tipo de deudas con excepción de los préstamos comerciales, hecho que se realizaba durante el festival de fin de año, donde el gobernante supervisaba la "ruptura de las tablillas"[3], es decir se eliminaba cualquier registro

[1] M Consuelo Domínguez, Manuel Forner y Oscar Forner, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume (2012), Pág. 6, procedimiento tomado de la presente bibliografía aplicándola a un número diferente.

[2] M Consuelo Domínguez, Manuel Forner y Oscar Forner, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume (2012), Pág. 6, procedimiento tomado de la presente bibliografía aplicándola a un número diferente

[3] elespiritudeltiempo.org/blog/el-origen-de-los-intereses-seguramente-permanecera-desconocido/ sexto párrafo

de deudas o prestamos con intereses para darle un nuevo comienzo al año que llegaba.

Aunque la evidencia sobre estas prácticas, en gran parte se ha perdido, en el museo de Louvre se encuentra una tablilla Mesopotámica de 1700 a.C. donde se propone el siguiente problema:

"¿Cuánto tiempo tomara para que una suma de dinero doble la cantidad de dinero si se invierte a una tasa de interés del 20 % anual compuesto?"[4]

"La respuesta en la tableta de Louvre dada como 3; 47,13,20, que en sistema sexagesimal significa $3 + 47/60 + 13/60^2 + 20/60^3$, o aproximadamente 3,7870"[5]. Tengamos en cuenta que en la época de los babilonios se utilizaba el sistema sexagesimal y los procedimientos para hallar este valor eran bastante extensos al realizar interpolaciones.

Veamos como hallar este valor utilizando interpolaciones en nuestro sistema decimal y con las notaciones actuales. Por ejemplo, Si hacemos una inversión de \$500000 pesos en una cuenta que tiene un interés del 20 % anual compuesto, y queremos saber cuánto tiempo tomara obtener el doble de la cantidad inicial invertida. Lo primero es hallar el valor del interés anual, se obtiene de la siguiente forma $(500000 \times 20\,\%) = \left(500000 \times \frac{20}{100}\right) = \frac{10000000}{100} = 100000$, quiere decir que al término de un año tendremos \$100000 en intereses, más la cantidad invertida sería un total de \$600000 en un año.

Si comparamos el valor obtenido al cabo de un año con el valor inicial, obtendremos la razón $r = \frac{600000}{500000} = 1{,}2$ lo cual nos servirá de base para plantear la ecuación $1{,}2^x = 2$, donde x representa el tiempo que debe pasar para hallar el doble de la cantidad inicialmente invertida.

Para utilizar interpolaciones tomamos los valores de $1{,}2^3 = 1{,}728$ y $1{,}2^4 = 2{,}0736$, lo cual, quiere decir que el doble de la cantidad inicial estará entre los tres y cuatro años.

Nota 1. Entre más términos medios se tomen, mejor será la aproximación que resulte a través de interpolaciones. En este caso se ha tomado ocho que corresponde a una buena aproximación.

Nota 2. Para hallar tanto los medios aritméticos y geométricos tomemos la serie aritmética con primer término 3 y último término 4, la serie geométrica con primer término 1.728 y último término 2.0736, cumpliendo con las notaciones $\log_{1,2} 1{,}728 = 3$ y $\log_{1,2} 2{,}0736 = 4$, la razón aritmética obtenida es $r = \frac{4-3}{10-1} = \frac{1}{9}$ y la razón geométrica es $r = \sqrt[8+1]{\frac{2{,}0736}{1{,}728}} = \sqrt[9]{1{,}2} = (1{,}2)^{\frac{1}{9}}$, obteniendo los siguientes datos:

[4]Eli Maor, e-historia de un número, editora Record (2008), tema 3, Las cuestiones financieras.
[5]Eli Maor, e-historia de un número, editora Record (2008), tema 3, Las cuestiones financieras.

$\log N = L$	N
3	1,728
3,11111111	1,76336272
3,22222222	1,79944912
3,33333333	1,83627401
3,44444444	1,8738525
3,55555556	1,91220002
3,66666667	1,95133231
3,77777778	1,99126542
3,88888889	2,03201574
4	2,0736

Cuadro 2.1:

Los números más cercanos al doble de esta cantidad están resaltados con sombra en el cuadro 2.1, a partir de estos datos construimos nuevamente las interpolaciones obteniendo los siguientes cuadros.

$\log N = L$	N
3,77777778	1,99126542
3,79012346	1,99575257
3,80246914	2,00024984
3,81481481	2,00475724
3,82716049	2,00927480
3,83950617	2,01380253
3,85185185	2,01830047
3,86419753	2,02288864
3,87654321	2,02744705
3,88888889	2,03201574

Cuadro 2.2

$\log N = L$	N
3,79012346	1,99575257
3,79149520	1,99625177
3,79286694	1,99675109
3,79423868	1,99725054
3,79561043	1,99775011
3,79698217	1,9982498
3,79835391	1,99874936
3,79972565	1,99924957
3,80109739	1,99974964
3,80246914	2,00024984

Cuadro 2.3

$\log N = L$	N
3,80109739	1,99974964
3,80124981	1,99980521
3,80140223	1,99986079
3,80155464	1,99991636
3,80170706	1,99997194
3,80185947	2,00002751
3,80201189	2,00008309
3,80216430	2,00013867
3,80231672	2,00019426
3,80246914	2,00024984

Cuadro 2.4

El numero 3.7870 planteado en la tabla de arcilla es bastante similar al valor real del cuadro 2.4, donde $x \approx 3{,}80185947$, lo cual nos indica que para obtener el doble de la cantidad inicial tardaría aproximadamente 3 años, $(0{,}80185947 \times 12 = 9{,}62231364)$ 9 meses y $(0{,}62231364 \times 31 = 19{,}2917)$ 19 días, En el libro de Eli Maor se concluye que el problema planteado sobre la tabla de arcilla ubicada en el museo de Louvre “fue creado para hacer frente a un problema específico que involucra el interés compuesto y no para uso general”[6].

Uno de los matemáticos interesados en abordar sobre el tema del interés compuesto fue Jacob Bernoulli (1654-1705) en 1683 [7] quien profundizo en la identificación, construcción y conceptualización del número que actualmente llamamos e. Hoy en día se conoce el problema abordado por Jacob Bernoulli, utilizando notaciones actuales, así:

[6]Eli Maor, e-historia de un número, editora Record (2008), tema 3, Las cuestiones financieras.

[7]El número e, Luz Mirian Echeverry, APUNTES CIENTÍFICOS UNIANDINOS N°6, Diciembre de 2005, página 50

"Se invierte una suma B a interés compuesto, con una tasa de intereses del 100 %, por un cierto periodo ¿Que sucede si se calcula el interés en intervalos cada vez más cortos?"[8]

Simplificando con recursos simbólicos actuales el problema propuesto tenemos que al término de un año: B es la cantidad invertida y $(B \times 100\,\%)$ corresponde a la cantidad en intereses, con lo cual tendremos la expresión $B + (B \times 100\,\%) = B + B = 2B$ al cabo de un año.

Cuando disminuimos los periodos de tiempo para la aplicación del interés tendremos lo siguiente:

- Los intereses 2 veces en el año (semestral) son:

  En el primer semestre será $\left(B + \frac{B\times 100\,\%}{2}\right) = B\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

  En el segundo semestre será

  $B\left(1+\frac{1}{2}\right) + \left[B\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\right] = B\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = B\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

- Los intereses 4 veces en el año (trimestral) son:

  En el primer trimestre sera

  $\left(B + \frac{B\times 100\,\%}{4}\right) = B\left(1 + \frac{1}{4}\right)$

  En el segundo trimestre será

  $B\left(1+\frac{1}{4}\right) + \left[B\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\right] = B\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = B\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$

  En el tercer trimestre será

  $B\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 + \left[B\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4}\right] = B\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right) = B\left(1+\frac{1}{4}\right)^3$

  En el cuarto trimestre será

  $B\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 + \left[B\left(1+\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{4}\right] = B\left(1+\frac{1}{4}\right)^3\left(1+\frac{1}{4}\right) = B\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$

Repitiendo este proceso, podemos hallar la relación que nos permite calcular los intereses mensualmente a lo largo de un año. En este caso se obtiene $B\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$.

Si los intereses se distribuyen n veces en el año tendremos la expresión $B\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donde $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ equivale al valor del interés compuesto. A partir de la expresión para el interés compuesto Jacob Bernoulli trata de calcular el límite cuando el número de periodos tiende al infinito, obteniendo la expresión

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

[8]El número e, Luz Mirian Echeverry, APUNTES CIENTÍFICOS UNIANDINOS N°6, Diciembre de 2005, página 50

de esta forma apareció por primera vez al número que actualmente llamamos e mediante un límite en el campo de las finanzas. De hecho, una de las primeras y más importantes definiciones de e se hace a través de este límite.

Jacob Bernoulli utilizo el teorema del binomio para mostrar que el valor del límite estaría entre dos y tres, veamos cómo determinar este valor con ayuda de la notación actual a través del teorema del binomio:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right) + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots \binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$= \left(\frac{n!}{(n-0)!\cdot 0!}\right)(1)^n + \left(\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}\right)(1)\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}\right)(1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots \left(\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\right)(1)\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots \frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$= 1 + 1 + \frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots \frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$= 2 + \frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots \frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$

De acuerdo a la expresión podemos establecer que:

$2 < 2 + \frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots \frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ [1]

Notemos que:

$\left(\frac{n-1}{2!}\right)\frac{1}{n} = \frac{n}{2!n} - \frac{1}{2!n} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2!n} \leq \frac{1}{2!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{(n-1)(n-2)}{3!n^2} = \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \leq \frac{1}{3!}(1)(1) \leq \frac{1}{3!}$

Por otro lado tenemos que,

$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots \leq 1$

En efecto,

$2^{n-1} \leq n!$ Para $(n \geq 2)$

El reciproco de esta expresión es,

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ Para todo $n \geq 2$

De acuerdo a lo anterior tendremos lo siguiente:

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} \cdots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}\cdots<\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=1$$

De acuerdo a esto tenemos

$\frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\leq 1$

Luego,

$\frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}<1$

Adicionando dos en ambos lados en la desigualdad notaremos que

$2+\frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}<1+2$

$2+\frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}<3$ [2]

Por transitividad entre [1] y [2] concluimos

$2<2+\frac{(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots\frac{n(n-1)(n-2)\cdots((n-k)+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}<3$

$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$

En otras palabras el valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ esta entre 2 y 3, si realizamos los cálculos en la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ recorriendo con n los números naturales de manera creciente, vemos surgir la expresión 2,718281… que corresponde al famoso número e, estos valores están reflejados en los cuadros 2.5; 2.6; 2.7 y 2.8

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037037
4	2,44140625
5	2,48832
6	2,52162637
7	2,5464997
8	2,56578451
9	2,58117479
10	2,59374246

Cuadro 2.5

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
100	2,10481383
200	2,71151712
300	2,71376516
400	2,71489174
500	2,71556852
600	2,71602005
700	2,71634274
800	2,71658485
900	2,71677321
1000	2,71692393

Cuadro 2.6

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10000	2,71814593
20000	2,71821387
30000	2,71823653
40000	2,71824785
50000	2,71825465
60000	2,71825918
70000	2,71826241
80000	2,71826484
90000	2,71826673
100000	2,71826824

Cuadro 2.7

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1000000	2,71828047
2000000	2,71828115
3000000	2,71828138
4000000	2,71828149
5000000	2,71828156
6000000	2,7182816
7000000	2,71828163
8000000	2,71828166
9000000	2,71828168
10000000	2,71828169

Cuadro 2.8

Tal como se indica el numero 2,718281 . . . pudo partir de la idea del interés compuesto, debido a que los resultados obtenidos por medio del teorema del binomio tienen grandes aproximaciones a este número. De hecho, ya está demostrado que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

.

2.2. Relación entre el área bajo la hipérbole equilátera y el numero e

El problema de hallar áreas de regiones que tienen como fronteras curvas distintas de las líneas rectas ha ocupado el interés de los matemáticos desde épocas muy antiguas. Este tema ha trascendido en la matemática con el nombre de cuadratura de curvas y estuvo en la base de la creación del cálculo integral. En el siglo XVI y $VXII$ cobró significativa importancia en relación con el estudio del movimiento. De hecho, "Galileo (1564 -1642) en su escrito de - Las dos nuevas ciencias (1638) - se ocupó del tema al demostrar que la distancia recorrida por una partícula en un tiempo determinado, es igual al área bajo la curva de la velocidad"[9]. Hechos como este despertaron un notable interés por el estudio de las cuadraturas, a la cual se dedicaron matemáticos como Cavalieri, John Wallis y Pierre Fermat (1601-1665) que en el año de 1629 avanzo en el estudio del área bajo la curva $Y = X^n$, con n tomando valores naturales, fraccionarios, negativos, "excepto el valor de $(n = -1)$ que genero dificultades y puso buena resistencia a su cuadratura".[10].

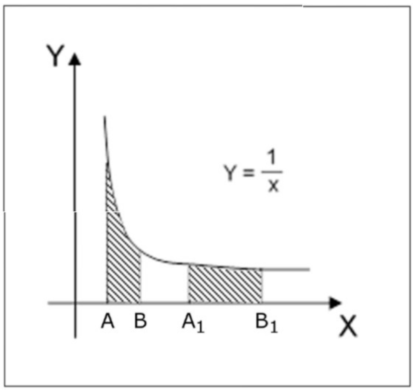
Se atribuye a Gregoire Saint Vincent (1584-1667) haber resuelto este problema de la expresión $Y = X^n$ para $n = -1$. Halló el área bajo esta curva, que actualmente se denomina hipérbole equilátera, hecho que quedo registrado en el libro (Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni)[11] en 1630, obra que fue publicada hasta el año de 1647, donde demostró que

[9]Consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media, OSCAR GACHARMA LEON, Universidad Nacional de Colombia, 2012, página 30

[10]María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 139

[11]J. L. Colidge de Harvard University, The number e, the mathematical Monthly, Vol. 57, N° 9 (Nov 1950), pág 591-602

"si las abscisas de dos puntos cualesquiera A y B son respectivamente proporcionales a las abscisas A1 y B1 en la misma curva, entonces las áreas bajo la curva entre los segmentos [A,B] y [A1,B1] son iguales"[12] (Gráfica 2.1). La expresión indicaba, que si las abscisas están en progresión geométrica, las áreas están en progresión aritmética.

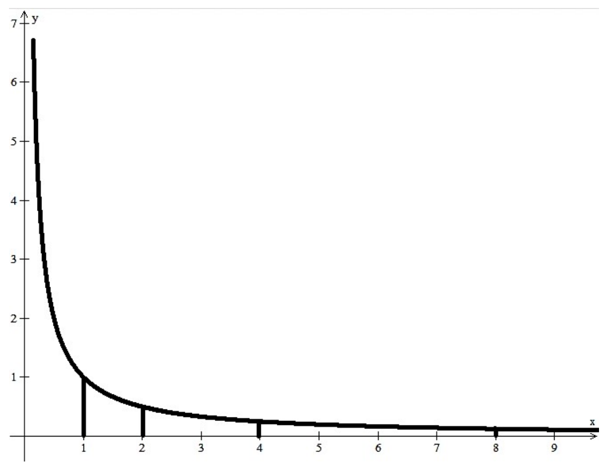


Gráfica 2.1[13]

El resultado propuesto por St. Vincent puso al descubierto una "relación con los logaritmos, cuyo defensor fue el jesuita Sarasa (1618-1687)"[14]. Utilicemos notaciones actuales para ejemplificar este hecho, tomemos la función $y = \frac{1}{x}$, asignemos valores para la variable x que estén en progresión geométrica, para ello tomemos la formula general $a^n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$, donde $a_1 = 1$ y $r = 2$. De esta forma obtendremos los datos escritos en el cuadro 2.9:

x	1	2	4	8	16	32	64	128	$\cdots$
x	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	
y	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125	$\cdots$

Cuadro 2.9



Gráfica 2.2, función $y = \frac{1}{x}$

[12]Oscar Forner, Manuel Forner y Ma Consuelo Domínguez, La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume, (2012), pág. 46

[13]Tomada de La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume, (2012), pág. 47

[14]María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 139

Hallemos el área correspondiente a los segmentos generados entre los datos en progresión geométrica.

- Área entre los valores x=1 y x=2:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 - \ln 1 = 0{,}69314718$$

- Área entre los valores x=2 y x=4:

$$\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln 4 - \ln 2 = 0{,}69314718$$

- Área entre los valores x=4 y x=8:

$$\int_4^8 \frac{1}{x}\,dx = \ln 8 - \ln 4 = 0{,}69314718$$

- Área entre los valores x=8 y x=16:

$$\int_8^{16} \frac{1}{x}\,dx = \ln 16 - \ln 8 = 0{,}69314718$$

Si continuamos hallando el área bajo la curva entre los segmentos generados en progresión geométrica veremos que el área entre ellos siempre será igual. A partir de este hecho veamos lo que sucede cuando se halla el área comprendida desde $x = 1$ hasta cada uno de los puntos correspondientes a la progresión geométrica.

- Área entre los valores x=1 y x=2:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 - \ln 1 = 0{,}69314718$$

- Área entre los valores x=1 y x=4:

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln 4 - \ln 1 = 1{,}386294361$$

- Área entre los valores x=1 y x=8:

$$\int_1^8 \frac{1}{x}\,dx = \ln 8 - \ln 1 = 2{,}079441542$$

- Área entre los valores x=8 y x=16:

$$\int_1^{16} \frac{1}{x}\,dx = \ln 16 - \ln 1 = 2{,}772588722$$

Organizando los datos en el cuadro 2.10 veremos que se cumple la relación de las áreas en progresión aritmética, mientras que las coordenadas de los extremos de los segmentos tomados como base se desarrollan en progresión geométrica. Para hallar la razón aritmética entre las áreas, aplicamos la formula $r = a_n - a_{(n-1)}$, donde a_n es un término de la progresión y $a_{(n-1)}$ es el término inmediatamente anterior a este, de esta forma tenemos:

1,386294361 − 0,6931418 = 0,69314718
2,079441542 − 1,386294361 = 0,69314718
2,772588722 − 0,279441542 = 0,69314718

Abscisa	2	4	8	16	32	64	128	256
Área	0,693147	1,386294	2,079441	2,772588	3,465735	4,158883	4,852030	5,45177

Cuadro 2.10

Del cuadro 2.10 podemos verificar los siguientes hechos:

Nota: Observemos que las áreas forman una progresión aritmética de razón 0.69314718

- El producto de dos términos en progresión geométrica corresponde a la suma de sus correspondientes términos en progresión aritmética. En otras palabras, el área de la región entre las abscisas desde 1 hasta 32 es igual a la suma de las áreas desde 1 hasta 4 y desde 1 hasta 8.

4	$\times$	8	$=$	32
1.386294	$+$	2.079441	$=$	3.46573

- El cociente entre dos términos en progresión geométrica corresponde a la resta de sus correspondientes términos en progresión aritmética. Es decir, El área de la región entre las abscisas desde 1 hasta 4 es igual a la diferencia entre las áreas desde 1 hasta 128 y desde 1 hasta 32.

128	$\div$	32	$=$	4
4.852030	$-$	3.465735	$=$	1.386294

Con los resultados obtenidos es claro determinar la relación que existe entre los logaritmos y el área bajo la curva de la hipérbole equilátera, este mismo hecho sirve para llegar a la relación entre el área bajo esta curva y el número 2,728182...

Debemos tener en cuenta que para la época de St. Vincent no se había desarrollado el cálculo integral, pero se promovía el estudio de las series infinitas. Uno de los matemáticos pioneros en el estudio de este tema es Nicolaus Mercator (1620-1687). En su obra Logarithmotechnia se presentó la serie que lleva actualmente el nombre de "Serie de Mercator"siendo esta una de las más importantes, puesto que "Mercator llamo logaritmos naturales a los valores obtenidos por medio de esta serie”[15], con ayuda de la notación actual repasamos lo que hizo Mercator.

Se traslada una unidad del punto de origen la función $y = \frac{1}{x}$ quedando la función hiperbólica $y = \frac{1}{(1+x)}$, se calcula el área para los valores desde 0 hasta x, lo que resulta $\ln(1+x)$. En efecto, utilizando la integración y la división algebraica se obtiene:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+u \\ \hline -1-u & 1-u+u^2-u^3 \ldots \\ \quad u+u^2 & \\ \qquad -u^2-u^3 & \\ \qquad\quad u^3+u^4 & \end{array}$$

$$\int_0^x \frac{1}{u+1} = \int_0^x (1-u+u^2-u^3+\cdots)\, dx = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln(1+x)$$

Veamos como el número 2,718281 . . . se puede relacionar por medio del desarrollo de la integral $\log x = \int \frac{dx}{x}$ propuesta por Leibniz (1646-1716)[16] para llegar a un resultado importante . Un método de verificar este hecho es determinar el valor de a para que el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ entre las abscisas $x = 1$ y $x = a$ sea igual a uno, es decir:

$$\ln a = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx = 1$$

Para verificar este hecho utilicemos interpolaciones con los datos obtenidos en el cuadro 2.10, esta nos muestra que la región de la curva $y = \frac{1}{x}$ con área igual a uno debe estar entre las abscisas 2 y 4 con áreas correspondientes 0.69314718 y 1.386294361, con estos datos podemos establecer los nueve medios aritméticos y geométricos que corresponden a una buena aproximación. La razón aritmética obtenida es $r = \frac{1{,}386294361-0{,}69314718}{11-1} = \frac{0{,}693147181}{10} = 0{,}0693147181$ y la razón geométrica obtenida es $r = \sqrt[9+1]{\frac{4}{2}} = \sqrt[10]{2} = (2)^{\frac{1}{10}}$, ahora construimos la correspondiente tabla quedando de la siguiente forma:

Abscisa	Área
2	0,69314718
2,14354693	0,762461898
2,29739671	0,831776616
2,46228883	0,901091334
2,63901582	0,970406052
2,82842812	1,03972077
3,03143313	0,109035489
3,24900959	1,178350207
3,48220225	1,247664925
3,73213197	1,316979643
4	1,386294361

Cuadro 2.11

[15] María teresa González Astudillo, Segmentos de la historia: La función logarítmica, Escuela regional de Matemáticas, (2007), Pág. 139

[16] Nicolas Bourbaki, Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universitaria, 1972, pág. 235

Para acercanos más a que el valor del área bajo la curva sea uno hay que seguir realizando las interpolaciones entre los valores más cercanos (Cuadro 2.11, datos en negrilla), de esta forma obtenemos las interpolaciones registradas en los siguientes cuadros:

Abscisa	Área
2,63901582	0,97040661
2,65737163	0,97733808
2,67585511	0,98426955
2,69446715	0,99120102
2,71320865	0,99813249
2,73208051	1,00506396
2,75108363	1,01199544
2,77021893	1,01892691
2,78948733	1,02585838
2,80888975	1,03278985
2,82842712	1,03972132

Cuadro 2.12

Abscisa	Área
2,71320865	0,99813249
2,71508995	0,99882564
2,71697256	0,99951878
2,71885648	1,00021193
2,7207417	1,00090508
2,72262823	1,00159823
2,72451606	1,00229137
2,72640521	1,00298452
2,72829566	1,00367767
2,73018743	1,00437081
2,73208051	1,00506396

Cuadro 2.13

Abscisa	Área
2,71697256	0,99951878
2,71716089	0,999588095
2,71734924	0,999657409
2,7175376	0,999726724
2,71772597	0,999796039
2,71791435	0,999865354
2,71810275	0,999934668
2,71829116	1,000003983
2,71847959	1,000073298
2,71866802	1,000142612
2,71885647	1,000211927

Cuadro 2.14

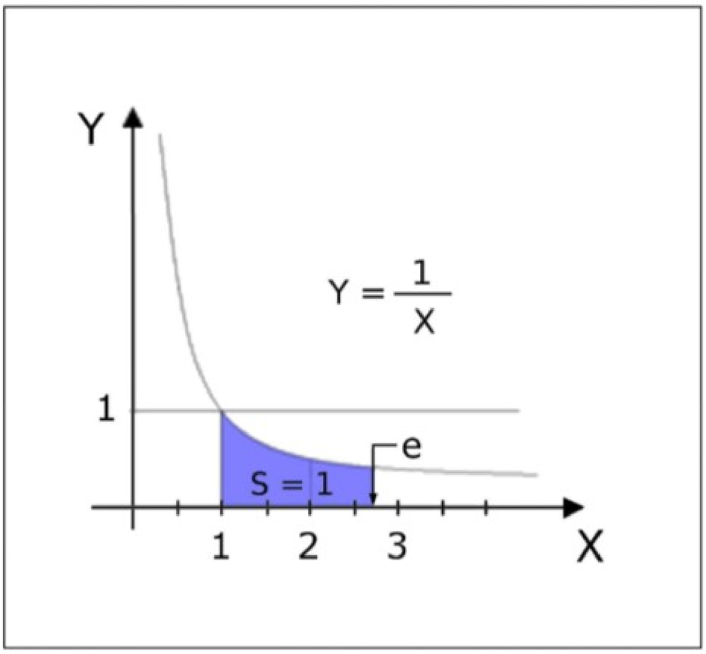
Abscisa	Área
2,71810275	0,999934668
2,71812159	0,999941599
2,71814043	0,999948531
2,71815927	0,999955462
2,71817811	0,999962394
2,71819695	0,999969325
2,7182158	0,999976257
2,71833464	0,999983188
2,71825348	0,99999012
2,71827232	0,999997051
2,71829116	1,000003983

Cuadro 2.15

Abscisa	Área
2,71827232	0,999997051
2,7182742	0,999997744
2,71824609	0,999998437
2,71827797	0,99999913
2,71827986	0,999999824
2,71828174	1,000000517
2,71828363	1,00000121
2,71828551	1,000001903
2,71828739	1,000002596
2,71828928	1,000003289
2,71829116	1,000003982

Cuadro 2.16

Al observar el dato obtenido en la tabla 2.16 podemos ver que a medida que el valor del área se aproxima a uno el valor de la abscisa también se aproxima al número $2{,}718281\ldots = e$, veamos en una gráfica como se interpreta este hecho:

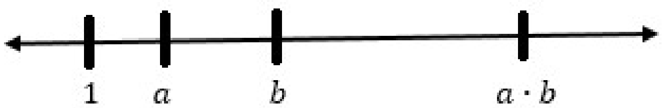


Gráfica 2.3 [17]

Este hecho indica que debe existir un número que siendo la base del logaritmo natural se obtenga como resultado uno ($\ln a = 1$). Así como $log_2 2 = 1$ y $log_5 5 = 1$, en este caso se define e como el único valor de a tal que $ln(a) = 1$; es decir, e es un numero tal que el área bajo la curva $\frac{1}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e$ es igual a 1.[18]

Empleando notación actual, veamos que siendo a y b dos abscisas cualesquiera, el área entre $x = 1$ y $x = a \times b$ es igual al área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = a$ más el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = b$.

Observemos la siguiente gráfica:



Gráfica 2.4

En este caso tenemos la siguiente integral:

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x}\, dx$$

Sea a un punto interior del intervalo $[1, ab]$, podemos descomponer la integral como la suma de dos integrales extendidas a los intervalo $[1, a]$ y $[a, ab]$, quedando la integral de la siguiente forma:

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{a} \frac{1}{x}\, dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x}\, dx \ [3]$$

[17]Tomada de La construcción de los logaritmos: historia y proyecto didáctico, Universitat Jaume, (2012), pág. 50

[18]Monografía matemática, El trascendental número de Euler, Alianza Universitaria, 1972, pág. 11

Veamos que la integral $\int_1^{ab} \frac{1}{x}\, dx$ se puede escribir de la siguiente forma:

- Sea $p = \frac{x}{a}$, y su derivada $\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}$, luego $dp = \frac{dx}{a}$
- Si $x = a$ entonces $p = 1$ y si $x = ab$ entonces $p = b$,

$$\int_a^{ab} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^b \frac{1}{t}\, dt$$

Remplazando esto en [3], tendremos que

$$\int_1^{ab} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^a \frac{1}{x}\, dx + \int_1^b \frac{1}{t}\, dt$$

Ahora desarrollemos cada integral

$$\begin{aligned} \ln\ x\ ]_1^{ab} &= \ln\ x\ ]_1^a + \ln\ t\ ]_1^b \\ [\ln\ (ab) - \ln\ (1)] &= [\ln\ (a) - \ln\ (1)] + [\ln\ (b) - \ln\ (1)] \\ [\ln\ (ab) - 0] &= [\ln\ (a) - 0] + [\ln\ (b) - 0] \\ \ln\ (ab) &= \ln\ (a) + \ln\ (b) \end{aligned}$$

Lo que se verifica es que el ln ab cumple la propiedad básica de los logaritmos, a saber: El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de cada factor.

2.3. La relación entre el concepto de Logaritmo y el número e

A partir de los conceptos de logaritmo propuestos por John Napier y Jobst Bürgi (descritos durante el primer capítulo) surgió la necesidad de representar su escritura por medio de símbolos, "Leibniz empleo "l" cuando el logaritmo natural era implícito, Stolz y Gmeiner dejaron "log"para la posición del logaritmo común de un número real positivo, "l"para su logaritmo natural, Peano escribió "log x"para el logaritmo de base e y "Log x"para uno de base 10"[19], hasta que finalmente Leonard Euler (1707-1783) utilizó la letra e para representar la base del sistema del logaritmo en el manuscrito titulado Meditaciones sobre los experimentos recientes en el encendido del cañón (Mediatio in experimenta explosiones tormentorum nuper instituta)[20] escrito entre 1727 y 1728 que fue publicado hasta 1862. Nuevamente uso la letra e en el libro Mechanica[21] volumen 1, pág. 68 en el año de 1736, Euler también encontró varias propiedades para el numero e que recopilo en su obra *introductio in analysis infinitorum* en el año de 1748 donde define el logaritmo natural y la función exponencial de manera simétrica como [22]

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n y \ln\ x = \lim_{n\to\infty} \left(x^{1/n} - 1\right)$$

[19]Florian Cajori, A history of mathematical notation, Dover publications, 1993, Volume II, página 107

[20]El número e, Luz Mirian Echeverry, APUNTES CIENTÍFICOS UNIANDINOS N°6, Diciembre de 2005, página 51

[21]Florian Cajori, A history of mathematical notation, Dover publications, 1993, Volume II, página

[22]El número e, Luz Mirian Echeverry, APUNTES CIENTÍFICOS UNIANDINOS N°6, Diciembre de 2005, página 52

Veamos cómo se determina e como base de la función exponencial partiendo del concepto de logaritmo. Euler introdujo el logaritmo de x en base a como $\log_a x = y$, que denoto como $l(x)$, y lo escribió luego de la forma $a^y = x$ relacionándolo con la función exponencial. Luego, partiendo de $a^0 = 1$, y escribe lo siguiente[23]:

$a^{\epsilon} = 1 + k\epsilon \quad (1)$

Con ϵ un número infinitamente pequeño y k una constante que depende de a, de acuerdo a esto en notación actual, se tiene que:

$$k = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(a^{\epsilon} - 1)}{\epsilon} = \ln\ a \ (2)$$

Sea x un número finito, Euler introduce un número infinitamente grande $N = \frac{x}{\epsilon}$. De acuerdo a esto y la ecuación (1) se escribe así:

$a^x = a^{N\epsilon} = (a^{\epsilon})^N = (1 + k\epsilon)^N$

De igual forma podemos escribir

$a^x = \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N \quad (3)$

Desarrollando esta expresión por medio del binomio tenemos que

$a^x = 1 + N\left(k\frac{x}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(k\frac{x}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(k\frac{x}{N}\right)^3 \cdots$

$a^x = 1 + (kx) + \frac{1}{2!}\left(\frac{N(N-1)}{N^2}\right)k^2x^2 + \frac{1}{3!}\frac{N(N-1)(N-2)}{N^3}k^3x^3 \cdots$

Para valores de N infinitamente grandes, podemos suponer que

$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \frac{N-3}{N} \cdots$

Con base en lo anterior, la expresión para a^x es:

$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots$

Realizando la sustitución $x = 1$, se obtiene

$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots$

De esta forma introduce el numero e como el valor de a para el cual $k = 1$

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

[23] Alfonso Aznaldo Meneses, Joaquín Delgado, Felipe Monroy, El legado matemático de Leonard Euler a trescientos años de su Nacimiento, Editorial Innovación, 2007, Universidad Autónoma Metropolitana, página 252.

Finalmente la ecuación (3) es la que actualmente se expresa como

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N$$

Otro aspecto importante en la ecuación (4) al remplazar el valor de k por 1, se obtiene el desarrollo de la función exponencial por medio de las series de potencias expuesta por Taylor que a su vez también se aproximan al valor de e[24].

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

En la matemática actual el simbolismo para log x se utiliza para especificar que la base es diez, por medio de este tipo de logaritmos que se llaman vulgares o de Briggs es más fácil realizar cálculos en notaciones decimales, y la expresión ln x se utiliza para especificar que la base de este tipo de logaritmos es el número e, también llamada constante de Napier o número de Euler.

Desde que se empezó a trabajar con este número y se desarrollaron fórmulas para obtener su expansión decimal, se sospechó que se trataba de un número irracional, sin embargo tal hecho no pudo ser confirmado hasta el año de 1737 donde el mismo Euler presento una prueba de su irracionalidad por medio de fracciones continuas, de igual manera en el año 1873 el matemático Charles Hermite (1822-1901) presento una prueba sobre su trascendencia. Tanto el tema de la irracionalidad de e como su trascendencia superaran las expectativas generadas por este trabajo.

[24]Alfonso Aznaldo Meneses, Joaquín Delgado, Felipe Monroy, El legado matemático de Leonard Euler a trescientos años de su Nacimiento, Editorial Innovación, 2007, Universidad Autónoma Metropolitana, página 252-3

CAPÍTULO 3

HACIA EL CONCEPTO DE FUNCIÓN LOGARITMO Y FUNCIÓN EXPONENCIAL

Uno de los conceptos matemáticos que contribuyó a mejorar los métodos y los procesos científicos fue el concepto de función. El estudio de las curvas generadas por el movimiento de objetos o partículas dio los primeros pasos en el desarrollo del concepto. Por ejemplo, la cuadratriz y la espiral de Arquímedes (curvas ideadas para resolver los tres famosos problemas Griegos); La representación de la velocidad en los trabajos de Galileo, la Cicloide (curva generada por el movimiento de un punto fijo en la circunferencia al rodar sin deslizarse en línea recta) definida por Mersenne (1588-1648) en 1615; la interpretación cinemática del logaritmo de John Napier, la cuadratura de las curvas por Saint Vincent, entre otras, contribuyeron a su conceptualización.

Durante el siglo $XVII$ se formalizo el estudio de las curvas geométricas hasta llegar a una escritura de tipo analítico. Una función era considerada como la cantidad obtenida por medio de operaciones y expresiones algebraicas tal como se evidencia en el libro: *Circuli et Hiperbolae Quadratura* (1667) escrito por Gregory. Newton nombra la relación entre las diferentes variables como "fluente", y Leibniz utiliza la palabra función para aquellas cantidades que dependían de una variable[1]. El término variable era asociado a las ecuaciones, como por ejemplo, a la relación entre las cantidades representadas por las abscisas y las ordenadas, las longitudes en un plano cartesiano, la región determinada bajo una curva y los ejes coordenados, y expresiones que no involucraban un valor fijo o constante.

El término función, es atribuido al matemático Leonard Euler (1707-1783) que en su libro "Introductio"hace mención a esta palabra logrando una separación entre el análisis infinitesimal y la geometría. Al principio de su *Introductio* escribe lo siguiente:

"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma a partir de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes"[2]

Euler comienza con la notación de la función algebraica, que está compuesta por variables

[1] Ángel Ruiz, Historia y filosofía de las matemáticas, pág. 275

[2] Alfonso Aznaldo Meneses, Joaquin Delgado, Felipe Monroy Perez, El legado matemático de Leonard Euler a trescientos años de su nacimiento, Universidad Autónoma Metropolitana,2007, página 250

y constantes que respectivamente también se conocen como términos dependientes e independientes, así como también hace la combinación de las cuatro operaciones básicas. Luego determina las funciones trascendentes como lo son las trigonométricas, la logarítmica, la exponencial y ciertas integrales, a su vez hace aclaraciones sobre la diferencia entre las funciones algebraicas y trascendentes afirmando que estas últimas estaban dadas por medio de series.

Euler llama la atención sobre las diferentes formas que puede asumir una función, así por ejemplo, habla de la función implícita (definida actualmente como $f(x,y) = 0$), función explicita (definida actualmente como $y = f(x)$), funciones univaluadas (para cada valor de x hay un solo valor en y), de donde se empiezan a considerar las funciones reales enteras y polinómicas. Más adelante en su libro instituciones *calculi differentialis* escribe otra definición de función bastante similar a la actual así:

Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que al cambiar estas últimas, las primeras también cambian, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las últimas. "Si por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x de alguna manera o están determinadas por x son llamadas funciones de x.Euler introduce el símbolo de $f(x)$ para hacer alusión a que la función f depende de la variable x [3].

El estudio de las curvas despertó en los matemáticos tanto interés que los llevo a hechos sorprendentes como relacionar los exponentes y los logaritmos, en contraposición de los movimientos de aceleración constante y los de aceleración variable. uno de estos matemáticos fue Leonard Euler quien definió primero las funciones exponenciales para luego definir el problema de su inverso que se conoce con el nombre de logaritmo, a su vez se formularon una serie de propiedades que hicieron ver estos dos conceptos plenamente como funciones y que respectivamente reciben el nombre de función Exponencial y función Logarítmica.

3.1. Concepto de función Exponencial

El estudio de las curvas proporcionó las ideas básicas para determinar el concepto de función exponencial, Rene Descartes (1596-1650) en su libro la geometría perfeccionó la notación de la función exponencial que venía dándose entre sus contemporáneos refiriéndose a ella como a^n (n, un entero positivo) marcando un gran avance en el campo del álgebra simbólica, por otro lado Christiaan Huygens en 1661 definió la curva logarítmica como la curva definida en las abscisas por la progresión aritmética y en las ordenadas por la progresión geométrica, la curva que llamo logarítmica en su momento, es la que conocemos hoy en día como función exponencial[4].

Leibniz fue uno de los primeros matemáticos en considerar que el exponente de una expresión puede ser variable (*It was Leibniz who first introduced variable exponents. In 1679 he wrote to christiaan Huygens about the equation* $x^x - x = 24$, *which can easily be "seen"to have a solution* $x = 3$, *but for which none of known methods of solition of equation applied* (boa, 1995,

[3]Alfonso Aznaldo Meneses, Joaquin Delgado, Felipe Monroy Perez, El legado matemático de Leonard Euler a trescientos años de su nacimiento, Universidad Autónoma Metropolitana,2007, página 250

[4]Oscar Gacharna León, Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media, Universidad Nacional de Colombia, 2012, página 16

pag 7)[5], a partir de ello estudio los diferentes métodos de solución apoyándose del logaritmo que en su época se expresaba de manera algebraica.

Entre la escritura actual y la notación de descartes vemos que no hay mucha diferencia, en notación actual la definición de función exponencial es la siguiente:

Para cualquier número real $a > 0$, $a \neq 1$ y $k \neq 0$, $f(x) = k \cdot a^x$ es la función exponencial

El objetivo principal en la función exponencial es buscar todos aquellos valores a^x para los cuales x es un número real, veamos algunos casos particulares para interpretar este hecho. Si el valor x esta entre los enteros positivos tenemos que a^x se puede escribir como $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{x-veces}$ sin presentar alguna dificultad, en el caso que el valor x este entre los enteros negativos tenemos que $-x \in \mathbb{Z}^+$, la expresión a^x se puede escribir como $a^x = (a^{-1})^{-x}$ la cual se puede expresar de la forma $a^x = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{-x-veces}$, para el caso en que $x = 0$ se debe tener en cuenta que $a \neq 0$, si no tenemos en cuenta esta condición se llegara a una indeterminación. Si $x \in \mathbb{Q}$ se debe tener bastante precaución en su escritura, ya que para este conjunto no se define el caso donde $a < 0$ y x es numero par. De esta manera podemos determinar que la función a^x tiene su dominio en todos los números reales siempre que $a > 0$.

Evidenciemos con algunos ejemplos cómo interpretar la definición de función exponencial utilizando el plano cartesiano, para ello veremos los casos donde $k = 1$ y $k \neq 1$ en $f(x) = k \cdot a^x$.

Sea $k = 1$ en $f(x) = k \cdot a^x$, tenemos los siguientes ejemplos:

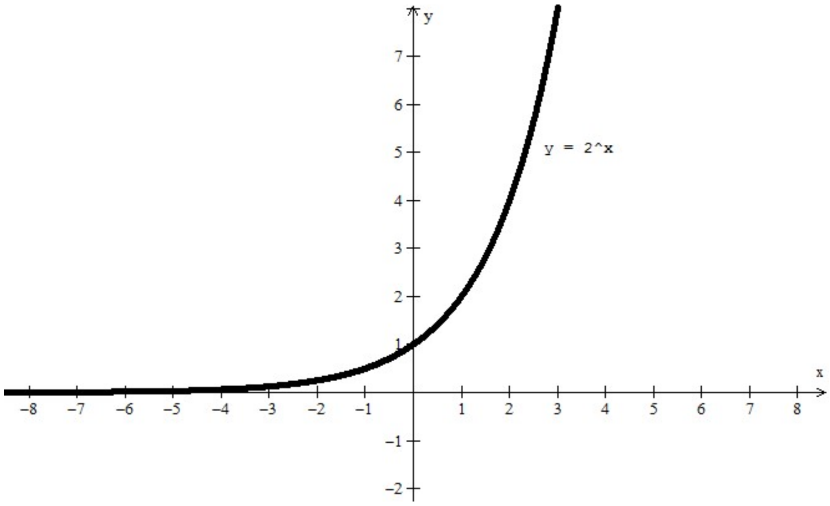
$f(x) = 2^x$, y $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

Nota: En este caso tomaremos valores desde $x = -6$ hasta $x = 6$, que ayudan a una buena representación gráfica.

$f(x) = 2^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,016	0,031	0,063	0,125	0,025	0,5	1	2	4	8	16	32	64

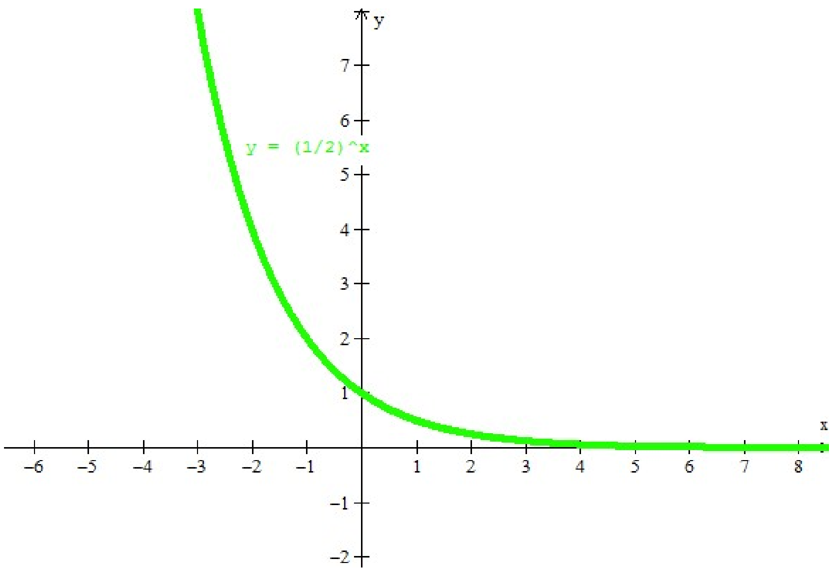
[5]Oscar Gacharna León, Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media, Universidad Nacional de Colombia, 2012, página 18



Gráfica 3.1

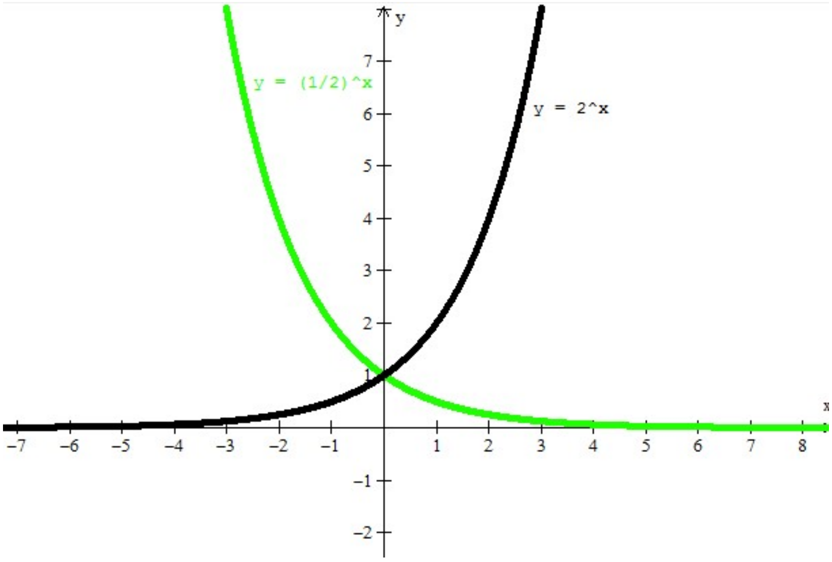
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625



Gráfica 3.2

Al contrastar las gráficas 3.1 y 3.2, podemos ver las siguientes características en general:



Gráfica 3.3

Las gráficas de funciones de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 1$ y $0 < a < 1$ presentan las siguientes características en común:

- El dominio son todos los números reales.
- Las imágenes siempre toman valores positivos
- Las curvas tienen la misma ordenada en el punto (0,1)
- La curva no corta al eje de las abscisas, estas tienen la misma asíntota ($y = 0$)

Por otro lado Si $a > 1$ la función es creciente y si $0 < a < 1$ la función es decreciente.

Para $k \neq 1$ en $f(x) = k \cdot a^x$, tenemos los siguientes ejemplos:

$f(x) = 5 \cdot 2^x$, $g(x) = (-2) \cdot 2^x$, $h(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $p(x) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

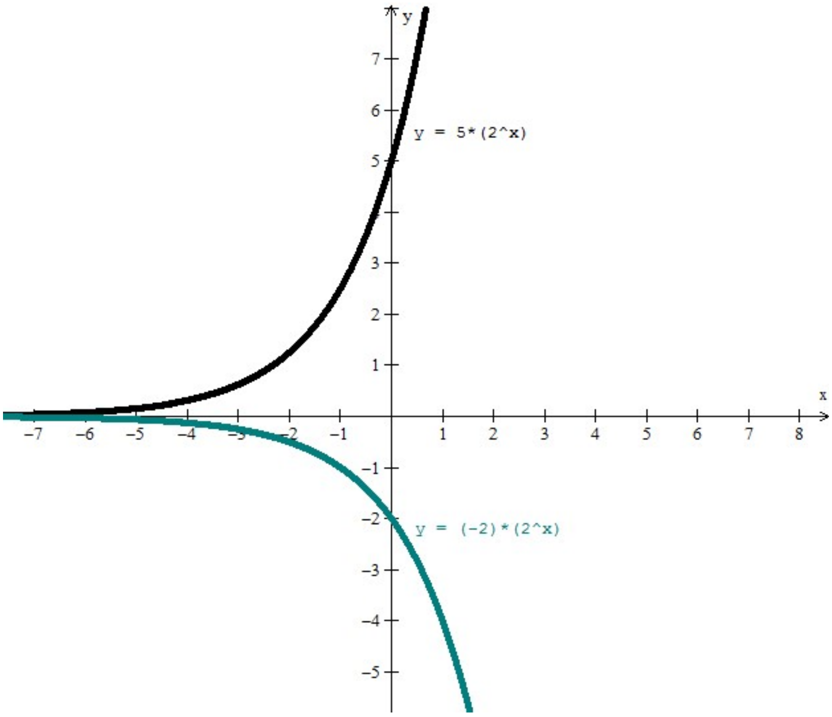
Las correspondientes tablas de valores y gráficas para estas funciones son:

$f(x) = 5 \cdot 2^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,078	0,156	0,313	0,625	1,25	2,5	5	10	20	40	80	160	320

$g(x) = (-2) \cdot 2^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	$-0{,}031$	$-0{,}063$	$-0{,}125$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	-1	-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128



Gráfica 3.4

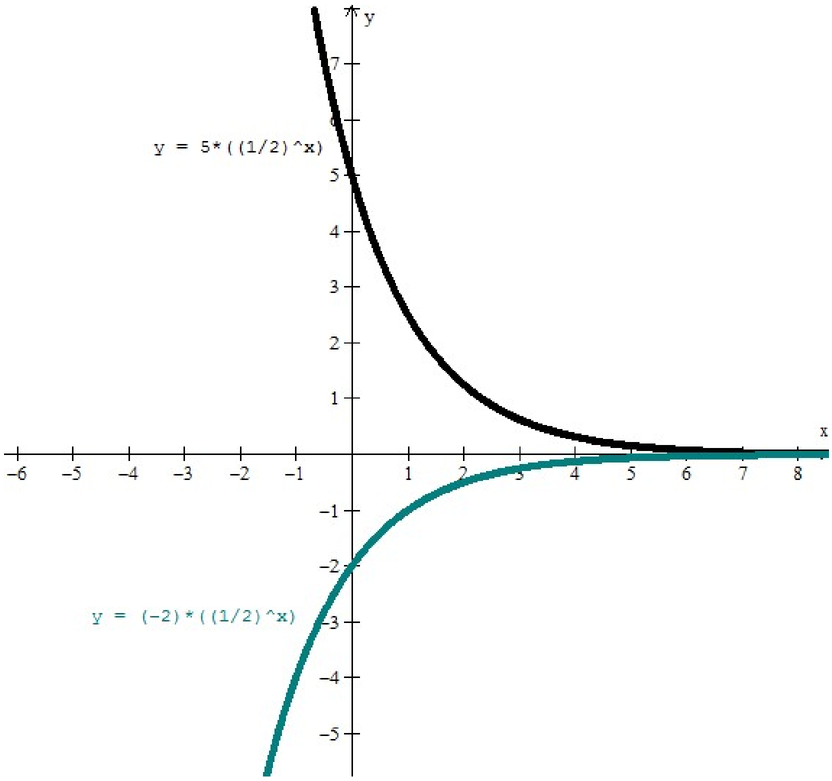
Al multiplicar la función $f(x) = k \cdot a^x$, con $a > 1$, notamos que si el factor $k > 0$ la función es creciente conservando las características básicas, si el factor $k < 0$ la función será decreciente, de igual forma cambia el punto de intersección con el eje y al punto $(0, k)$.

$h(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	320	160	80	40	20	10	5	3	1,3	0,6	0,31	0,16	0,078

$p(x) = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	-128	-64	-32	-16	-8	-4	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$	$-0,125$	$-0,063$	$-0,031$



Gráfica 3.5

Al multiplicar la función $f(x) = k \cdot a^x$, con $0 < a < 1$, notamos que si el factor $k > 0$ la función es decreciente conservando las características básicas, si el factor $k < 0$ la función será creciente, de igual forma cambia el punto de intersección con el eje y al punto $(0, k)$.

Las siguientes son una serie de propiedades que cumple la función exponencial.

Si a y b son números positivos, x y y son cualquier número real, entonces:

1 Producto de potencias de igual base $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2 Cociente de potencias de igual base $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3 Potencia de una potencia $(a^x)^y = a^{xy}$

4 Potencia de un producto $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

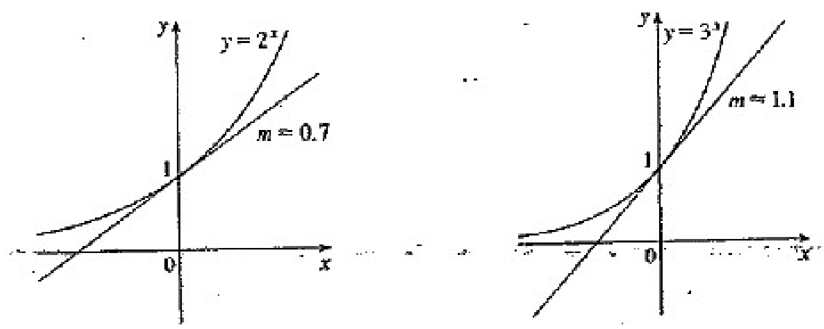
5 Potencia de un cociente $(a \div b)^x = a^x \div b^x$

El desarrollo de estas propiedades hace más útil la realización de cálculos al simplificar una expresión en otra más sencilla que permitirá obtener el resultado de una operación más rápido, al observar el comportamiento de la función exponencial vemos que todas tienen características en común, este tipo de comportamientos gráficos llevó a estudiar en el campo analítico la función exponencial, revelando así una relación con los logaritmos.

3.2. Concepto de función Exponencial Natural

De todas las bases que puede llegar a tener la función exponencial existe una que hace más fácil la realización del cálculo. La definición de función exponencial $f(x) = a^x$ para $a > 0$, $a \neq 1$ y su comportamiento gráfico proporciona características similares en el plano cartesiano que fueron mencionadas en la sección 3.1, y uno de los aspectos más interesantes entre estos es determinar el valor al cual la pendiente de la línea tangente a la función exponencial en el punto $(0, 1)$ es exactamente uno[6]. Leonard Euler en 1727 definió este número como e, veamos como aproximarnos a este número utilizando las notaciones actuales.

Sean las funciones de las gráficas $y = 2^x$ y $y = 3^x$ (figura 3.6) y sus correspondientes pendientes, tenemos lo siguiente:



Gráfica 3.6 [7]

La siguiente tabla nos ayuda a evidenciar como al aproximarse el limite a cero la función que esta entre $y = 2^x$ y $y = 3^x$, correspondiente a $y = e^x$ esta cada vez más cerca a tomar el valor de uno[8].

h	$\lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h}$	$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$	$\lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h}$
0,1	0,717734625	1,051709181	1,16123174
0,01	0,695555006	1,005016708	1,104669194
0,001	0,693387463	1,000500167	1,099215984
0,0001	0,693171204	1,000050002	1,098672638
0,00001	0,693149583	1,000005	1,098618323
0,000001	0,693147421	1,00000005	1,098612892
0,0000001	0,693147204	1,000000049	1,09861235

De esta forma práctica podemos determinar lo siguiente[9]: e es el número tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Algunas de las propiedades básicas de la función exponencial natural $y = e^x$ son:

[6] James Stewart, Calculo - trascendentes tempranas, sexta edición, Cengage Learning, 2008, página 56.

[7] Tomada de James Stewart, Calculo trascendentes tempranas sexta edición, pagina 40.

[8] Alfonso Aznaldo Meneses, Joaquín Delgado, Felipe Monroy, El legado matemático de Leonard Euler a trescientos años de su Nacimiento, Editorial Innovación, 2007, Universidad Autónoma Metropolitana, (Proceso tomado de la página 252-3)

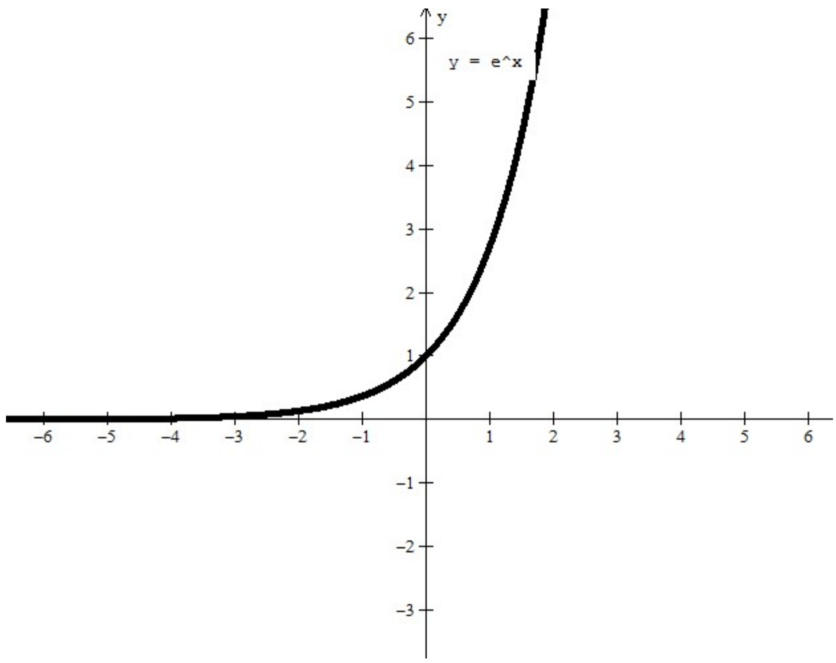
[9] James Stewart, Calculo - trascendentes tempranas, sexta edición, Cengage Learning, 2008, página 101

a $e^0 = 1, \quad e^1 = e$

b $\frac{dy}{dx} = e^x, \quad$ para todo x

c $e^{a+b} = e^a \cdot e^b \quad$ para todo a y todo b

Gráfica de la función exponencial natural



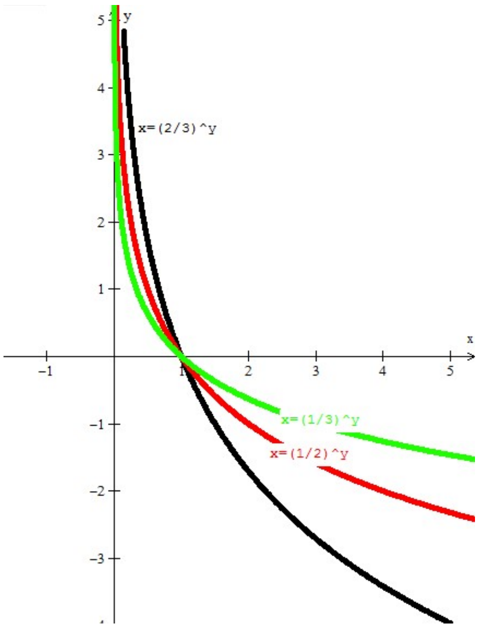
Gráfica 3.7

De acuerdo a la gráfica 3.6 la función exponencial e^x que tiene su dominio en todos los números reales, y su rango en todos los números reales positivos, además de ello la derivada de la función exponencial es ella misma, de este modo, definido el concepto de función exponencial natural como $y = e^x$ (Para todo $x \in \mathbb{R}$) podemos llegar al concepto de función logaritmo natural.

3.3. Concepto de función Logaritmo

Actualmente el concepto de logaritmo está ligado al concepto de exponencial, de esta forma podemos expresar la función exponencial $y = a^x$ como la función logaritmo $x = \log_a y$, esta forma de expresar el logaritmo tiene unas características básicas donde la base debe ser mayor que cero $(a > 0)$ y diferente de uno $(a \neq 1)$. Veamos lo que sucede con la función logaritmo cuando tomamos valores de la base $(0 < a < 1)$ y $(a > 1)$.

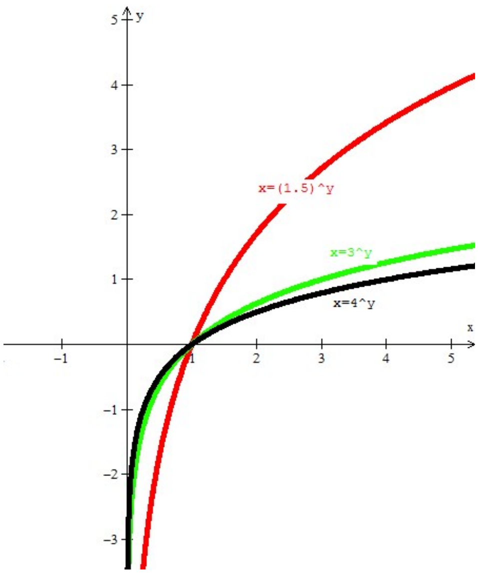
Sean las funciones logarítmicas con base $(0 < a < 1)$, así por ejemplo, en las gráficas de las funciones $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ y $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (figura 3.8) notemos algunas de sus características.



Gráfica 3.8

- El dominio son los reales positivos y el rango son todos los números reales.
- Las gráficas son decrecientes y cortan el eje x en el punto (1,0)
- Tienen como asíntota el eje y

Ahora veamos las funciones logarítmicas con base ($a > 1$), así por ejemplo, en las gráficas de las funciones $y = \log_{1,5}\ x$, $y = \log_3\ x$ y $y = \log_4\ x$ (figura 3.9) notemos algunas de sus características.



Gráfica 3.9

- El dominio son los reales positivos y el rango son todos los números reales.
- Las gráficas son crecientes y cortan el eje x en el punto (1,0)

- Tienen como asíntota el eje y

Las siguientes son una serie de propiedades que cumple la función logaritmo.

Si a es un número real positivo y diferente de uno, x y y cualquier número real, entonces:

1 Logaritmo de un producto
$\log_a\ x \cdot y = \log_a\ x + \log_a\ y$

2 Logaritmo del cociente
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a\ x - \log_a\ y$

3 Logaritmo de una potencia
$\log_a\ x^y = y \log_a\ x$

4 Logaritmo de 1
$\log_a\ 1 = 0$

4 Logaritmo de un número igual a su base.
$\log_a\ a = 1$

Existe una base que hace más sencillos los cálculos. La base del logaritmo más utilizada es la base diez o también llamada logaritmos vulgares o de Briggs (página 27). Al trabajar con este tipo de logaritmos es frecuente encontrar su escritura de la forma $\log\ x$, expresión que es equivalente a $\log_{10}\ x$.

Por otro lado una de las reglas de oro propuestas por Euler es la fórmula de cambio de base, para la cual se afirma que $\log\ y$ se puede calcular en otra base de forma semejante a $\log_b\ y = \frac{\log\ y}{\log\ b}$ siendo b cualquier otra base.

3.4. Concepto de función Logaritmo Natural

La evolución histórica en el concepto de logaritmo proporcionó una serie de relaciones que lo llevaron a un nivel más elevado, si queremos que el logaritmo sea expresado como una función esta deberá cumplir con una serie de propiedades que sean aplicables al concepto. Actualmente podemos encontrar el concepto de logaritmo natural definido por medio de una integral.

En los libros de cálculo es común encontrar la definición de logaritmo de la siguiente forma:

Si x es un número real positivo, definimos el logaritmo natural de x, designado provisionalmente por $\ln(x)$, como la integral $\int_1^x \frac{1}{t}\ dt$, cuyo dominio son todos los números reales positivos[10].

De la definición planteada se deducen dos aspectos. Cuando $x > 1$ el $\ln(x)$ es positivo, y cuando $0 < x < 1$ el $\ln(x)$ es negativo (figura 3.10). Uno de los matemáticos más interesados en este tema fue Torricelli (1608-1647) quien probablemente fue uno de los primeros en hacer la representación gráfica de la función logaritmo que actualmente conocemos como $y = \ln\ x$,

[10]Tom M. Apóstol, Calculus, volumen I, Editorial Reverte, 2001, página 281

esta gráfica la podemos construir aplicando la definición del logaritmo natural así:

Nota: Sea el valor de las abscisas para los $x > 0$, por medio de la progresión geométrica 2^n, donde $n \in \mathbb{Z}$.

$$\int_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 1 - \ln\ \frac{1}{8} = -2{,}079441542$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 1 - \ln\ \frac{1}{4} = -1{,}38629436$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 1 - \ln\ \frac{1}{2} = -0{,}69314718$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 2 - \ln\ 1 = 0{,}69314718$$

$$\int_{1}^{4} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 4 - \ln\ 1 = 1{,}38629436$$

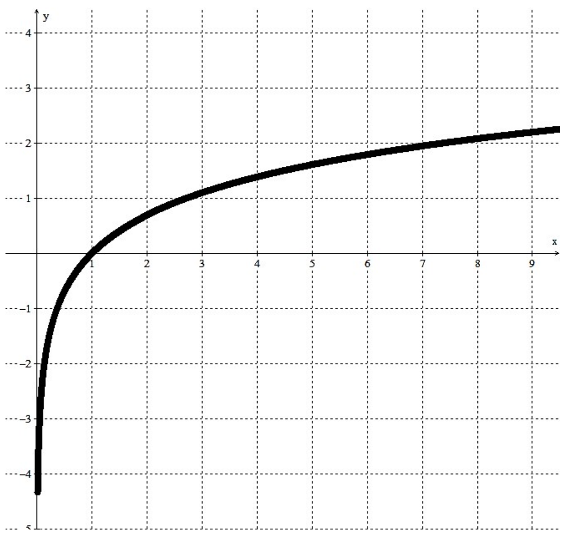
$$\int_{1}^{8} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 8 - \ln\ 1 = 2{,}079441542$$

$$\int_{1}^{16} \frac{1}{x}\, dx = \ln\ 16 - \ln\ 1 = 2{,}772588722$$

Con los valores obtenidos por medio de la integral podemos construir la siguiente tabla de valores:

x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	$\cdots$	
x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	$\cdots$	2^n
y	$-2{,}079441$	$-1{,}386294$	$-0{,}693147$	0	0,693147	1,386294	2,079441	2,772588	$\cdots$	

De esta forma obtenemos la gráfica para la expresión $y = \ln\ x$



Gráfica 3.10

Propiedades básicas de la función logaritmo natural[11].

a) $\ln\ 1 = 0$

b) $\ln\ ab = \ln\ a + \ln\ b$, para todo $a > 0, b > 0$

c) $\ln\ \frac{a}{b} = \ln\ (a) - \ln\ (b)$, para todo $a > 0, b > 0$

d) $\ln\ a^r = r \cdot \ln\ a$, para todo $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$

e) $\ln\acute{}\ x = \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$

En efecto:

a) Deducida por medio de la definición de la integral donde el punto $[1, 0]$ es solución de la función $y = \ln\ x$.

b) $\ln\ ab = \ln\ a + \ln\ b$, para todo $> 0, b > 0$
La prueba se realizó en la página 45 del presente trabajo.

c) $\ln\ \frac{a}{b} = \ln\ (a) - \ln\ (b)$, para todo $a > 0, b > 0$
Como $a = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot b$, entonces
$\ln\ a = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)$ Por la propiedad (b) tenemos lo siguiente
$\ln\ a = \ln\ \left(\frac{a}{b}\right) + \ln\ b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\ a - \ln\ b$

d) $\ln\ a^r = r \cdot \ln\ a$, para todo $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$
Sea $y = \ln\ x^r$ y su derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{1}{x^r} \cdot rx^r x^{-1} = \frac{r}{x}$
Por otro lado, si $y = r \cdot \ln\ x$ tiene como derivada $\frac{dy}{dx} = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x}$

Al observar las derivadas de cada expresión notamos que son iguales, se tiene que "si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un intervalo l tienen la misma derivada, entonces existe k tal que $f(x) = g(x) + k$ para todo x en l"[12] de modo que:

$$\ln x^r = r \ln x + k \ para\ todo x > 0$$
$$Ahora\ sustituimos\ x = 1\ para\ hallar\ el\ valor\ de\ k$$
$$\ln 1^r = r \ln 1 + k\ Por\ la\ propiedad\ (a)$$
$$\ln 1^r = k\ Por\ esta\ misma\ propiedad\ (a)\ el\ valor\ de\ k = 0$$

De esta forma podemos concluir que
$\ln x^r = r \ln x$

e) $\ln\acute{} x = \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$

[11] Tom M. Apóstol, Calculus, volumen I, Editorial Reverte, 2001, página 281
[12] Lois Leithold, El Cálculo 7ed, Oxford University Press, 1998, página 298

Consideremos la función $y = \log_a x$ [1]

En notación actual esto indica que $a^y = x$ [2]

El término a se puede expresar como $z^{(\log_z a)}$ [3]

Por lo tanto, remplazando [3] en [2] tenemos $z^{(\log_z a)y} = x$ [4]

Remplazamos z por e en [4], lo cual queda $e^{(\ln a)y} = x$ [5]

Derivando parcialmente con respecto a x en [5] se obtiene:

$$e^{(\ln a)y} \cdot \ln a \cdot y\acute{} = 1$$

Despejando $y\acute{}$ obtenemos

$$y\acute{} = \frac{1}{e^{(\ln a)y} \cdot \ln a}$$
$$y\acute{} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Finalmente sustituimos a por e

$$y\acute{} = \frac{1}{x \cdot \ln e} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$$

De esta forma se ha demostrado que la derivada de $\ln x$ es $\frac{1}{x}$

De esta forma vemos como la definición de función logaritmo natural y su representación gráfica cumple las siguientes características:

- Tiene como dominio el conjunto de los números reales positivos
- Tiene como rango el conjunto de los números reales
- Es una función creciente.
- La gráfica es cóncava hacia abajo.
- La gráfica tiene una asíntota vertical

3.5. La función Logaritmo como función inversa a la función Exponencial

Euler fue uno de los primeros matemáticos en considerar este hecho en su obra *Introductio*, que actualmente podemos determinar de la siguiente forma:

Sea la función $y = a^x$ para $a > 0$ y $a \neq 1$, se define como función inversa $f^{-1}(x)$ a la función logarítmica con base a notada como $\log_a y = x$. [13]

Veamos con el siguiente ejemplo como interpretarlo

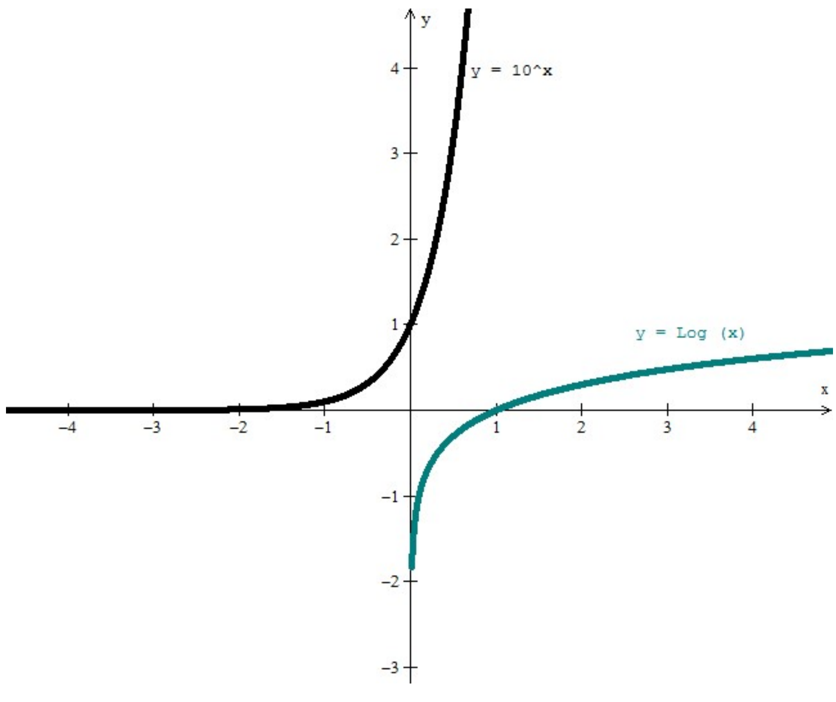
Realicemos la gráfica de la función $y = 10^x$ (función exponencial) y la función $x = \log\ y$ (función logaritmo) para determinar su comportamiento.

$y = 10^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000

$x = \log y$

y	0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

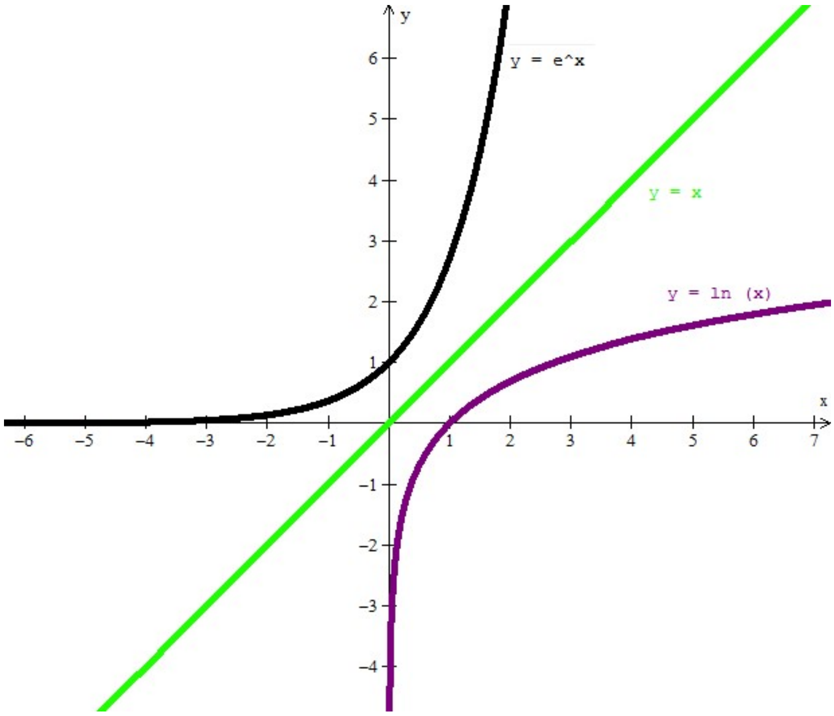


Gráfica 3.11

De acuerdo a la gráfica 3.11 podemos ver que las abscisas de la función $y = 10^x$ corresponden a las ordenadas en la función $x = \log\ y$, de igual forma las ordenadas de la función $y = 10^x$ corresponde a las abscisas de la función $x = \log\ y$.

Igualmente sucede con las funciones logaritmo natural y exponencial natural que son simétricas a la recta $y = x$, su representación es la siguiente:

[13] James Stewart, Calculo - trascendentes tempranas, sexta edición, Cencage Learning, 2008, página 63



Gráfica 3.12

Una forma de ver que estas dos funciones son inversas es verificando que el producto entre sus correspondientes derivadas sea uno. Ilustremos este hecho con ayuda de las notaciones actuales:

Sea $y = e^x$ que tiene como derivada $\frac{dy}{dx} = e^x$ y su función inversa $x = \ln\ y$ cuya derivada es $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$.

Ahora verifiquemos el producto $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$, tengamos en cuenta que $y = e^x$ es equivalente a $\frac{1}{y} = \frac{1}{e^x}$, de la cual obtenemos que:

$e^x \cdot \frac{1}{y} = e^x \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} = 1.$

El concepto de la función logaritmo y la función exponencial se modelan en diferentes situaciones de la naturaleza, donde se ve ampliamente el desarrollo y la importancia de las matemáticas en el cálculo por medio de aplicaciones en los diferentes campos de la ciencia.

CAPÍTULO 4

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

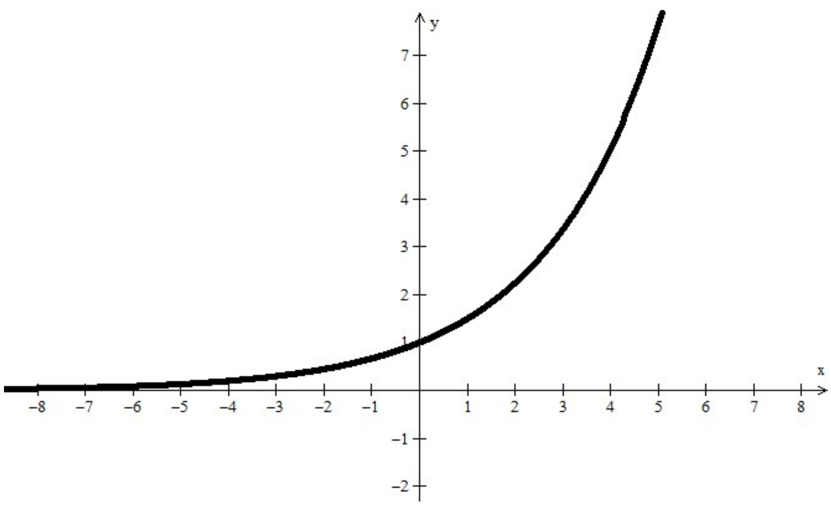
Uno de los aspectos más importantes en las funciones exponencial y logaritmo es la amplia variedad de aplicaciones que presentan en los diferentes campos de la ciencia, algunas de ellas serán analizadas en el presente capítulo, tales como el interés compuesto, el crecimiento de la población, crecimiento de utilidades, función de costo, publicidad y ventas, depreciación, radio-actividad y otras aplicaciones básicas.

4.1. Ejercicios y aplicaciones de la función Exponencial

1) Construir la gráfica de las funciones exponenciales siguientes calculando algunos de sus puntos.

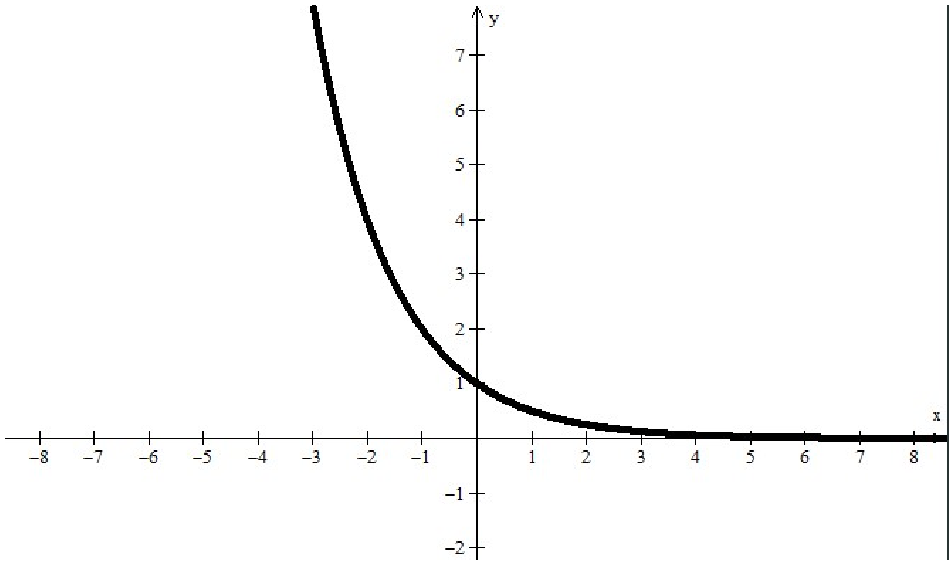
a) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,0878	0,1317	0,1975	0,2963	0,4444	0,6667	1	2	2,3	3,4	5,06	7,59	11,39



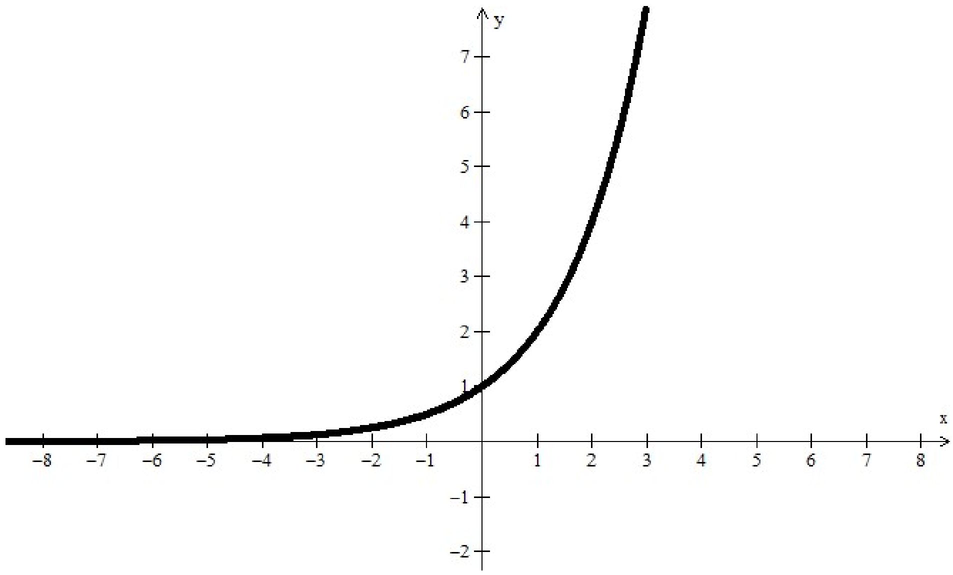
b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,3	0,1	0,06	0,03	0,016



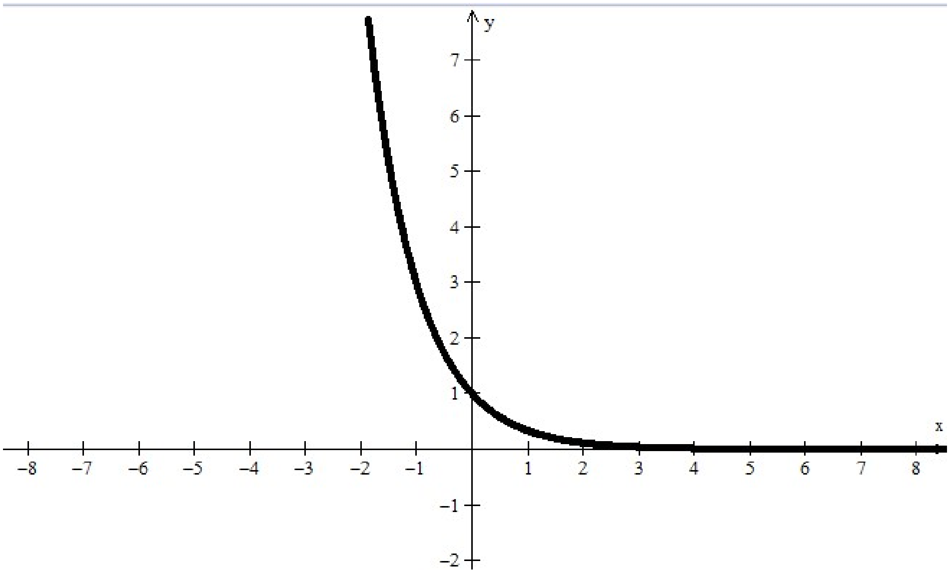
c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,0156	0,0313	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	08	16	32	64



d) $y = (3)^{-x}$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	729	243	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$



2) Evaluar las cantidades siguientes usando una tabla de e^x y e^{-x}

a) $e^{0,4}$, $e^{0,4} = 1{,}5068$
b) $e^{2,75}$, $e^{2,75} = 15{,}647$
c) e^8, $e^8 = 2981{,}0$
d) $e^{-1,05}$, $e^{-1,05} = 0{,}3499$
e) $e^{-0,68}$, $e^{-0,68} = 0{,}5066$
f) $e^{-5,2}$, $e^{-5,2} = 0{,}0055$

3) Si \$2000 se invierten a un interés compuesto anual del 6 %, encontrar lo siguiente.

a) El valor de la inversión después de 4 años

$P = 2000 \quad i = \frac{k}{100} = \frac{6}{100} \quad n = 4$

$$\begin{aligned}
\text{Capital} &= P(1+i)^n \\
&= 2000\left(1+\frac{6}{100}\right)^4 \\
&= 2000(1+0{,}06)^4 \\
&= 2000(1{,}06)^4 \\
&= 2000(1{,}262) \\
&= 2524{,}95
\end{aligned}$$

b) El valor de la inversión después de 12 años

$P = 2000 \quad i = \frac{k}{100} = \frac{6}{100} \quad n = 12$

$$\begin{aligned} \text{Capital} &= P(1+i)^n \\ &= 2000\left(1+\frac{6}{100}\right)^{12} \\ &= 2000(1+0{,}06)^{12} \\ &= 2000(1{,}06)^{12} \\ &= 2000(2{,}012) \\ &= 4024{,}39 \end{aligned}$$

4) Si \$100 se invierten a un interés compuesto anual del 8 %, calcular lo siguiente.

a) El valor de la inversión después de 5 años

$P = 100 \quad i = \frac{k}{100} = \frac{8}{100} \quad n = 5$

$$\begin{aligned} \text{Capital} &= P(1+i)^n \\ &= 100\left(1+\frac{8}{100}\right)^{5} \\ &= 100(1+0{,}08)^{5} \\ &= 100(1{,}08)^{5} \\ &= 100(1{,}4693) \\ &= 146{,}93 \end{aligned}$$

b) El valor de la inversión después de 10 años

$P = 100 \quad i = \frac{k}{100} = \frac{8}{100} \quad n = 10$

$$\begin{aligned} \text{Capital} &= P(1+i)^n \\ &= 100\left(1+\frac{8}{100}\right)^{10} \\ &= 100(1+0{,}08)^{10} \\ &= 100(1{,}08)^{10} \\ &= 100(2{,}1589) \\ &= 215{,}89 \end{aligned}$$

5) Un capital de \$2000 se invierten a una tasa de interés nominal anual del 12 %, calcular:

a) El capital después de un año si la capitalización es trimestral

$P = 2000 \quad i = \left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{3}{100} = 0{,}03 \quad n = 4$

$$\begin{aligned} \text{Capital} &= 2000(1+0{,}03)^4 \\ &= 2000(1{,}03)^4 \\ &= 2251{,}01 \end{aligned}$$

b) El capital después de un año si la capitalización es mensual

$P = 2000 \quad i = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad n = 12$

$$\text{Capital} = 2000(1+0{,}01)^{12} = 2000(1{,}01)^{12} = 2253{,}65$$

c) El capital después de cuatro años si la capitalización es cada 6 meses.

$P = 2000 \quad i = \left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{6}{100} = 0{,}06 \quad n = 8$

$$\begin{aligned} \text{Capital} &= 2000(1+0{,}06)^8 \\ &= 2000(1{,}06)^8 \\ &= 3187{,}69 \end{aligned}$$

d) El capital después de seis años si la capitalización es trimestral

$P = 2000 \quad i = \left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{3}{100} = 0{,}03 \quad n = 24$

$$\begin{aligned} \text{Capital} &= 2000(1+0{,}03)^{24} \\ &= 2000(1{,}03)^{24} \\ &= 4065{,}58 \end{aligned}$$

6) Encontrar la tasa de interés nominal anual que corresponde a una tasa efectiva de:

a) 6 % de tasa nominal de capitalización semestral

$i = \left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{6}{100}\right) = \frac{3}{100} = 0{,}03 \quad n = 2$

$$\begin{aligned} (1+i) &= (1+0{,}03)^2 \\ i &= (1+0{,}03)^2 - 1 \\ i &= (1{,}03)^2 - 1 \\ i &= 1{,}0609 - 1 \\ i &= 0{,}0609 \end{aligned}$$

$$i = 6{,}09\,\%$$

b) 8 % de tasa nominal de capitalización trimestral

$i = \left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{8}{100}\right) = \frac{2}{100} = 0{,}02 \qquad n = 4$

$$\begin{aligned}(1+i) &= (1+0{,}02)^4\\ i &= (1+0{,}02)^4 - 1\\ i &= (1{,}02)^4 - 1\\ i &= 1{,}0824 - 1\\ i &= 0{,}0824\\ i &= 8{,}24\,\%\end{aligned}$$

c) 12 % de tasa nominal de capitalización mensual

$i = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad n = 12$

$$\begin{aligned}(1+i) &= (1+0{,}01)^{12}\\ i &= (1+0{,}01)^{12} - 1\\ i &= (1{,}01)^{12} - 1\\ i &= 1{,}1268 - 1\\ i &= 0{,}1268\\ i &= 12{,}68\,\%\end{aligned}$$

d) 12 % de tasa nominal de capitalización 6 veces al año

$i = \left(\frac{2}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{2}{100} = 0{,}02 \qquad n = 6$

$$\begin{aligned}(1+i) &= (1+0{,}02)^6\\ i &= (1+0{,}02)^6 - 1\\ i &= (1{,}01)^{12} - 1\\ i &= 1{,}1261 - 1\\ i &= 0{,}1261\\ i &= 12{,}61\,\%\end{aligned}$$

7) Encontrar la tasa de interés nominal anual que corresponde a una tasa efectiva de:

a) 8.16 % compuesta semestralmente

$i = 8{,}16\,\% = \frac{8{,}16}{100} = 0{,}0816$

$$(1+0{,}0816) = \left(1+\frac{i}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1{,}0816} &= \sqrt{\left(1+\frac{i}{2}\right)^2} \\
\sqrt{1{,}0816} &= 1+\frac{i}{2} \\
\sqrt{1{,}0816}-1 &= \frac{i}{2} \\
i &= 2\left(\sqrt{1{,}0816}-1\right) \\
i &= 2(0{,}04) \\
i &= 0{,}08 \\
i &= 8\,\%
\end{aligned}$$

b) 12.55 % compuesta trimestralmente

$i = 12{,}55\,\% = \frac{12{,}55}{100} = 0{,}1255$

$$\begin{aligned}
(1+0{,}1255) &= \left(1+\frac{i}{4}\right)^4 \\
\sqrt[4]{1{,}1255} &= \sqrt[4]{\left(1+\frac{i}{4}\right)^4} \\
\sqrt[4]{1{,}1255} &= 1+\frac{i}{4} \\
\sqrt[4]{1{,}1255}-1 &= \frac{i}{4} \\
i &= 4(\sqrt[4]{1{,}1255}-1) \\
i &= 4(0{,}029) \\
i &= 0{,}1199 \\
i &= 11{,}99\,\%
\end{aligned}$$

c) 10 % compuesta mensualmente

$i = 10\,\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$

$$\begin{aligned}
(1+0{,}1) &= \left(1+\frac{i}{12}\right)^{12} \\
\sqrt[12]{1{,}1} &= \sqrt[12]{\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}} \\
\sqrt[12]{1{,}1} &= 1+\frac{i}{12} \\
\sqrt[12]{1{,}1}-1 &= \frac{i}{12} \\
i &= 12\left(\sqrt[12]{1{,}1}-1\right) \\
i &= 12(0{,}079)
\end{aligned}$$

$$i = 0{,}09568$$
$$i = 9{,}56\,\%$$

d) 9 % compuesta 6 veces al año

$i = 9\,\% = \frac{9}{100} = 0{,}09$

$$\begin{aligned}
(1 + 0{,}09) &= \left(1 + \frac{i}{6}\right)^6 \\
\sqrt[6]{1{,}09} &= \sqrt[6]{\left(1 + \frac{i}{6}\right)^6} \\
\sqrt[6]{1{,}09} &= 1 + \frac{i}{6} \\
\sqrt[6]{1{,}09} - 1 &= \frac{i}{6} \\
i &= 6\left(\sqrt[6]{1{,}09} - 1\right) \\
i &= 6(0{,}0149) \\
i &= 0{,}089 \\
i &= 8{,}9\,\%
\end{aligned}$$

8) ¿Qué es mejor para el inversionista?

a) ¿Capitalización semestral con una tasa nominal del 8.2 % o capitalización trimestral al 8 %?

Capitalización semestral

$$i = \left(\tfrac{6}{12}\right)\left(\tfrac{8{,}2}{100}\right) = \tfrac{4{,}1}{100} = 0{,}041$$
$$(1 + 0{,}041)^2$$
$$(1{,}041)^2$$
$$1.083$$

Capitalización trimestral

$$i = \left(\tfrac{3}{12}\right)\left(\tfrac{8}{100}\right) = \tfrac{2}{100} = 0{,}02$$
$$(1 + 0{,}02)^4$$
$$(1{,}02)^4$$
$$1.082$$

Respuesta: la capitalización semestral

b) ¿Capitalización semestral con una tasa nominal del 6 % o capitalización anual al 6.1 %?

Capitalización semestral

$$i = \left(\tfrac{6}{12}\right)\left(\tfrac{6}{100}\right) = \tfrac{3}{100} = 0{,}03$$
$$(1 + 0{,}03)^2$$
$$(1{,}03)^2$$
$$1.0609$$

Capitalización anual

$$i = \left(\tfrac{6{,}1}{100}\right) = 0{,}061$$
$$(1 + 0{,}061)$$
$$1.061$$

Respuesta: la capitalización anual

c) ¿Capitalización anual al 8.2 % o capitalización trimestral con una tasa nominal del 8 %?

Capitalización trimestral

$i = \left(\frac{3}{12}\right)\left(\frac{8}{100}\right) = \frac{2}{100} = 0{,}02$

$(1 + 0{,}02)^4$

$(1{,}02)^4$

1.08243

Capitalización anual

$i = \left(\frac{8{,}2}{100}\right) = 0{,}082$

$(1 + 0{,}082)$

1.082

Respuesta: la capitalización trimestral

d) ¿Capitalización semestral con una tasa nominal del 12.2 % o capitalización mensual con una tasa nominal del 12 %?

Capitalización semestral

$i = \left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{12{,}2}{100}\right) = \frac{6{,}1}{100} = 0{,}061$

$(1 + 0{,}061)^2$

$(1{,}061)^2$

2.592

Capitalización mensual

$i = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{12}{100}\right) = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$(1 + 0{,}01)^{12}$

$(1{,}01)^{12}$

1.126

Respuesta: la capitalización semestral

9) ¿Qué tasa de interés compuesta duplica el valor de una inversión a 10 años?

$$
\begin{aligned}
2p &= p(1+i)^{10} \\
2\frac{p}{p} &= (1+i)^{10} \\
2 &= (1+i)^{10} \\
\sqrt[10]{2} &= \sqrt[10]{(1+i)^{10}} \\
\sqrt[10]{2} &= 1+i \\
\sqrt[10]{2} - 1 &= i \\
i &= (1{,}0717) - 1 \\
i &= 0{,}0717 \\
i &= 7{,}17\,\%
\end{aligned}
$$

10) ¿Qué tasa de interés compuesta triplica el valor de una inversión a 10 años?

$$
\begin{aligned}
3p &= p(1+i)^{10} \\
3\frac{p}{p} &= (1+i)^{10} \\
3 &= (1+i)^{10} \\
\sqrt[10]{3} &= \sqrt[10]{(1+i)^{10}} \\
\sqrt[10]{3} &= 1+i \\
\sqrt[10]{3} - 1 &= i \\
i &= (1{,}116) - 1 \\
i &= 0{,}116
\end{aligned}
$$

$$i = 11{,}6\,\%$$

11) Una suma de dinero se invierte 5 años a un interés del 3 % anual y luego 4 años más a un interés del R por ciento. Determinar R si el valor del dinero se duplica exactamente a los 9 años.

$z = p(1 + 0{,}03)^5$
$z = p(1{,}03)^5$
$z = p(1{,}15927)$

Remplazamos

$$\begin{aligned}
t &= z(1+i)^4\\
2p &= z(1+i)^4\\
2p &= p(1{,}15927)(1+i)^4\\
2\frac{p}{p} &= (1{,}15927)(1+i)^4\\
2 &= (1{,}15927)(1+i)^4\\
\frac{2}{1{,}15927} &= (1+i)^4\\
1{,}7252 &= (1+i)^4\\
\sqrt[4]{1{,}7252} &= \sqrt[4]{(1+i)^4}\\
1{,}146 &= 1+i\\
1{,}146 - 1 &= i\\
i &= 0{,}146 = 14{,}6\,\%
\end{aligned}$$

12) (Crecimiento de la población) La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones. Si la tasa de crecimiento continúa al 2 % anual, ¿Cuál fué la población en el año 2016?

Entre los años 2016 y 1976 hay 51 años

$P = 4$ mil millones $\quad i = 2\,\% = \frac{2}{100} = 0{,}02 \quad n = 51$

$$\begin{aligned}
\text{Después de 51 años} &= 4(1+0{,}02)^{51}\\
&= 4(1{,}02)^{51}\\
&= 4(2{,}745419)\\
&= 10{,}981679 \text{mil millones}
\end{aligned}$$

13) (Crecimiento de la población) Con los datos del problema anterior, calcular la población al año 2076
$P = 4$ mil millones $\quad i = 2\,\% = \frac{2}{100} = 0{,}02 \quad n = 101$

$$\text{Después de 101 años} = 4(1+0{,}02)^{101}$$

$$\begin{aligned}&= 4(1{,}02)^{101}\\&= 4(7{,}3895)\\&= 29{,}558156 \text{mil millones}\end{aligned}$$

14) (Crecimiento de la población) La población de cierta ciudad al tiempo t (medido en años) está dada por la fórmula: $p = 50000e^{0{,}05t}$, hallar su valor:

a) Cuando t=10

$$\begin{aligned}p &= 50000e^{0{,}05(10)}\\p &= 50000e^{0{,}5}\\p &= 50000(1{,}648)\\p &= 82436\end{aligned}$$

b) Cuando t=15

$$\begin{aligned}p &= 50000e^{0{,}05(15)}\\p &= 50000e^{0{,}75}\\p &= 50000(2{,}117)\\p &= 105850\end{aligned}$$

15) (Decrecimiento de una población) Debido a una depresión, cierta región económica tiene una población que decrece. EN 1970, su población fue de 500000 y de ahí en adelante su población se rigió por la formula $p = 500000e^{-0{,}02t}$:

Donde t es el tiempo en años, calcule la población en 1980. Suponiendo que esta tendencia continua, calcular la población proyectada para el año 2000.

a) Entre 1980 y 1970 hay 10 años

$$\begin{aligned}p &= 500000e^{-0{,}02t}\\p &= 500000e^{-0{,}02(10)}\\p &= 500000e^{-0{,}2}\\p &= 500000(0{,}8187)\\p &= 409365\end{aligned}$$

b) Entre 2000 y 1980 hay 20 años

$$\begin{aligned}p &= 409365e^{-0{,}02t}\\p &= 409365e^{-0{,}02(20)}\\p &= 409365e^{-0{,}4}\\p &= 409365(0{,}6703)\end{aligned}$$

$$p = 274405$$

16) (Crecimiento de utilidades) Las utilidades de cierta compañía se han incrementado a un promedio del 12 % por año entre 1975 y 1980. Tenían \$5.2 millones, suponiendo que este crecimiento continua, calcular las utilidades en 1985.

Entre 1980 y 1985 hay 6 años

$P = 520000 \quad i = 12\,\% = \frac{12}{100} = 0{,}12 \quad n = 6$

$$\begin{aligned} \text{Valor después de 6 años} &= 5200000(1 + 0{,}12)^6 \\ &= 5200000(1{,}12)^6 \\ &= 5200000(1{,}9738) \\ &= 10263877{,}96 \end{aligned}$$

17) (Depreciación exponencial) Se adquiere una maquina por \$10000 y se deprecia continuamente desde la fecha de adquisición. Su valor después de t años está dado por la formula.

$$v = 10000e^{-0{,}2t}$$

a) Calcular el valor de la máquina después de 8 años.

$$\begin{aligned} p &= 10000e^{-0{,}2(8)} \\ p &= 10000e^{-1{,}6} \\ p &= 10000(0{,}2018) \\ p &= 2018{,}9 \end{aligned}$$

b) Determinar el porcentaje de depreciación de su valor cada año

$$10000e^{-0{,}2} = 8187{,}307$$

Luego

$$10000 - 8187{,}307 = 1812{,}69$$

Su porcentaje es

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1812{,}69)(100)}{10000} \\ p &= \frac{1812{,}69}{100} \\ p &= 18{,}12\,\% \end{aligned}$$

4.2. Ejercicios y aplicaciones de la Función Logarítmica

1) Verifique las proposiciones siguientes y reescríbalas en forma de logaritmo con una base apropiada.

a) $(27)^{\frac{-4}{3}} = \frac{1}{81}$, su escritura es $\log_{27} \frac{1}{81} = \frac{-4}{3}$

b) $(16)^{\frac{3}{4}} = 8$, su escritura es $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

c) $(125)^{\frac{2}{3}} = 25$, su escritura es $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$

d) $(8)^{\frac{-5}{3}} = \frac{1}{32}$, su escritura es $\log_{8} \frac{1}{32} = \frac{-5}{3}$

e) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{-1}{3}} = \frac{3}{2}$, su escritura es $\log_{\left(\frac{8}{27}\right)} \frac{3}{2} = \frac{-1}{3}$

f) $\left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{-3}{4}} = \frac{8}{125}$, su escritura es $\log_{\frac{625}{16}} \frac{8}{125} = \frac{-3}{4}$

2) Escribir las ecuaciones siguientes en forma exponencial.

a) $\log_3 27 = 3$, su escritura es $(3)^3 = 27$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{243}\right) = \frac{5}{2}$, su escritura es $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{243}$

c) $\log_4 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$, su escritura es $(4)^{\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$

d) $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = -2$, su escritura es $(2)^{-2} = \frac{-1}{4}$

3) Calcule los valores de las expresiones siguientes usando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 512 = x$

$$\begin{aligned} \text{como } 2^x &= 512 \\ 2^x &= 2^9, \\ \text{luego } x &= 9 \end{aligned}$$

b) $\log_{27} 243 = x$

$$\begin{aligned} \text{como } 27^x &= 243 \\ 27^x &= 3^5, \\ 27^x &= 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{1-1}, \\ 27^x &= 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^{-1}, \\ 27^x &= 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^{(-1)\left(\frac{3}{3}\right)}, \\ 27^x &= 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^{(3)\left(\frac{-1}{3}\right)}, \\ 27^x &= (27) \cdot (27) \cdot (27)^{\left(\frac{-1}{3}\right)}, \\ 27^x &= (27)^{\frac{5}{3}}, \end{aligned}$$

$$\text{luego } x = \frac{5}{3}$$

c) $\log_{\sqrt{2}} 16 = x$

$$\begin{aligned} \text{como } (\sqrt{2}^{x} &= 16, \\ \left(2^{1/2}\right)^{x} &= 2^4, \\ (2^x)^{\frac{1}{2}} &= 2^4, \\ 2^x &= 2^8 \\ \text{Luego } x &= 8 \end{aligned}$$

d) $\log_8 128 = x$

$$\begin{aligned} \text{como } 8^x &= 128 \\ 8^x &= 2^7 \\ 8^x &= 2^3 \cdot 2^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^1 \\ 8^x &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^{(1)\left(\frac{3}{3}\right)} \\ 8^x &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^{(3)\left(\frac{1}{3}\right)} \\ 8^x &= (8) \cdot (8) \cdot (8)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \\ 8^x &= (8)^{\left(\frac{7}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{luego } x = \frac{7}{3}$$

e) $\log_2 0{,}125 = x$
como $\log_2 0{,}125 = \frac{\log 0{,}125}{\log 2} = -3$, luego $x = -3$.

f) $10^{\log 100} = x$
como $\log x = \log 100$, $10^{\log x} = 10^{\log 100}$, luego $x = 100$

g) $10^{\log 2} = x$
como $\log x = \log 2$, $10^{\log x} = 10^{\log 2}$, luego $x = 2$

h) $\log_4 2^p = x$
como $(p)\log_4 2 = x$, $(p)\left(\frac{1}{2}\right) = x$, luego $\frac{p}{2} = x$

i) $\log_2 4^p = x$
como $(p)\log_2 4 = x$, $(p)(2) = x$, luego $2p = x$

j) $2^{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 3} = x$
como $\log_2 x = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 3$, por cambio de base $\frac{\log x}{\log 2} = \frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$, $\log x = \frac{(\log 2)(\log 3)}{\log \frac{1}{2}} = -0{,}477$,
$10^{\log x} = 10^{-0{,}477}$, luego $x = \frac{1}{3}$

4) Escriba cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una expresión.

a) $\log(x+1) - \log x = \log \frac{x+1}{x}$

b) $\log x + \log 5 - \log y = \log 5x - \log y = \log \frac{5x}{y}$

c) $2\log x - 3\log y + 4\log t = \log x^2 - \log y^3 + \log t^2 = \log \frac{x^2}{y^3} + \log t^4 = \log \frac{x^2 \cdot t^4}{y^3}$

d) $\ln t - 2\ln u + 3\ln v = \ln t - \ln u^2 + \ln v^3 = \ln \frac{t}{u^2} + \ln v^2 = \ln \frac{t \cdot v^2}{u^2}$

e) $2\log x + x\log 3 - \frac{1}{2}\log(x-3) = \log x^2 + \log 3^x - \log{(x+1)}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{(x^2)\cdot(3^x)}{(x+1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$

f) $x\ln 2 + 5\ln(x-1) - 2\ln(x+3) = \ln 2^x + \ln{(x+1)}^5 - \ln{(x+3)}^2 = \ln \frac{(2^x)\cdot(x+1)^5}{(x+3)^2}$

g) $\log x + 2\log y - 3 = \log x + \log y^2 - 3 = \log xy^2 - 3 = \log xy^2 - \log 1000 = \log \frac{(xy^2)}{1000}$

h) $2 + 3\ln t - 4\ln x = 2 + \ln t^3 - \ln x^4 = 2 + \ln \frac{t^3}{x^4} = 2\ln e + \ln \frac{t^3}{x^4} = \ln e^2 + \ln \frac{t^3}{x^4} = \ln \frac{(t^3 \cdot e^2)}{x^4}$

5) Resolver para x las siguientes ecuaciones sin usar tablas o calculadora.

a) $\log_2(x+3) = -1$
como $2^{-1} = x+3$, $\frac{1}{2} = x+3$, $\frac{1}{2} - 3 = x$, luego $\frac{-5}{2} = x$

b) $\log_x 4 = 2$
como $x^2 = 4$, $x^2 = 2^2$, luego $x = 2$

c) $\log_x(5x-6) = 2$
como $x^2 = (5x-6)$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $(x-3)(x-2) = 0$, luego $x = 2$ O $x = 3$

d) $\log_x(6-x) = 2$
como $x^2 = 6-x$, $x^2 + x - 6 = 0$, $(x+3)(x-2) = 0$ luego $x = 2$

e) $\log_x(6-x) = 2$
como $x^2 = 6-x$, $x^2 + x - 6 = 0$, $(x+3)(x-2) = 0$ luego $x = 2$

f) $\log_x(6-5x) = 2$
como $x^2 = 6-5x$, $x^2 + 5x - 6 = 0$, $(x+6)(x-1) = 0$ luego $x = -6$ o $x = 1$ Podemos decir que no son solución

g) $\log(x+2) - \log(x-1) = \log 4$

$$\begin{aligned}
\log \frac{x+2}{x-1} &= \log 4 \\
10^{\left(\log \frac{x+2}{x-1}\right)} &= 10^{\log 4} \\
\frac{x+2}{x-1} &= 4 \\
x+2 &= 4(x-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= 4x-4 \\ 4+2 &= 4x-x \\ 6 &= 3x \\ x &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

h) $\log(10x+5) - \log(4-x) = \log 2$

$$\begin{aligned} \log \frac{10x+5}{4-x} &= \log 2 \\ 10^{\log \frac{10x+5}{4-x}} &= 10^{\log 2} \\ \frac{10x+5}{4-x} &= 2 \\ 10x+5 &= 2(4-x) \\ 10x+5 &= 8-2x \\ 10x-4x &= 8-5 \\ 6x &= 3 \\ x &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

i) $\log_3 3 + \log_3(x+1) - \log_3(2x-7) = 4$

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{3(x+1)}{2x-7} &= 4 \\ 3^{\log_3 \frac{3(x+1)}{2x-7}} &= 3^4 \\ \frac{3x+3}{2x-7} &= 81 \\ 3x+3 &= 81(2x-7) \\ 3x+3 &= 162x-567 \\ 162x-3x &= 3+567 \\ 159x &= 570 \\ x &= \frac{570}{159} = \frac{190}{53} = 3{,}584 \end{aligned}$$

j) $\log x = \log 3 + 2\log 2 - \frac{3}{4}\log 16$

$$\begin{aligned} \log x &= \log 3 + \log 2^2 - \log 16^{\frac{3}{4}} \\ \log x &= \log \frac{12}{16^{\frac{3}{4}}} \\ \log x &= \log \frac{12}{8} \\ 10^{\log x} &= 10^{\log \frac{12}{8}} \\ x &= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

k) $\log(4x-3) = \log(x+1) + \log 3$

$$\log(4x-3) = \log 3(x+1)$$

$$\begin{aligned}
\log(4x-3) &= \log(3x+3)\\
10^{\log(4x-3)} &= 10^{\log 3x+3}\\
4x-3 &= 3x+3\\
4x-3x &= 3+3\\
x &= 6
\end{aligned}$$

6) Compruebe las relaciones siguientes sin usar tablas o calculadoras

a) $7\log\left(\frac{16}{15}\right)+5\log\left(\frac{25}{24}\right)+3\log\left(\frac{81}{80}\right)=\log 2$

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{16}{15}\right)^7+\log\left(\frac{25}{24}\right)^5+\log\left(\frac{81}{80}\right)^3\\
\log\left(\frac{16}{15}\right)^7\cdot\left(\frac{25}{24}\right)^5\cdot\left(\frac{81}{80}\right)^3\\
\log\left(\frac{2^{28}}{3^{12}}\right)\cdot\left(\frac{5^{10}}{5^{10}}\right)\cdot\left(\frac{3^{12}}{2^{27}}\right) &= \log 2
\end{aligned}$$

b) $3\log\left(\frac{36}{25}\right)+\log\left(\frac{6}{27}\right)^3-2\log\left(\frac{16}{125}\right)\neq\log 2$

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{36}{25}\right)^3+\log\left(\frac{6}{27}\right)^3-\log\left(\frac{16}{125}\right)^2 &=\\
&= \log\frac{\left(\frac{36}{25}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{27}\right)^3}{\left(\frac{16}{125}\right)^2}\\
&= \log\frac{6^9\cdot 5^6}{5^6\cdot 3^9}\\
&= \log\left(\frac{6}{2}\right)^9\\
&\neq \log 3^9 \log 2
\end{aligned}$$

7) Evaluar los logaritmos usando tablas de logaritmos naturales

a) $\ln 3{,}41 = 1{,}2267$

b) $\ln 2{,}68 = 0{,}9858$

c) $\ln 84{,}2 = \ln(84{,}2)\left(\frac{10}{10}\right) = \ln(8{,}42)(10) = \ln 8{,}42 + \ln 10 = 2{,}1306 + 2{,}3026 = 4{,}4332$

d) $\ln 593 = \ln 5{,}93\cdot 10^2 = \ln 5{,}93 + \ln 10^2 = \ln 5{,}93 + 2\ln 10 = 1{,}7800 + 2(2{,}3026) = 1{,}7800 + 4{,}6052 = 6{,}3852$

e) $\ln 0{,}341 = \ln 3{,}41\cdot 10^{-1} = \ln 3{,}41 + \ln 10^{-1} = \ln 3{,}41 - \ln 10 = 1{,}2267 - 2{,}3026 = -1{,}0759$

f) $\ln 0{,}00917 = \ln 9{,}17 \cdot 10^{-3} = \ln 9{,}17 + \ln 10^{-3} = \ln 9{,}17 - 3\ln 10 = 2{,}2159 - 3(2{,}3026) = 2{,}2159 - 6{,}0078 = -4{,}6919$

8) (Función de costo) Una compañía manufacturera encuentra que el costo de producir x unidades por hora está dado por la formula

$$c(x) = 5 + 10\log(1 + 2x)$$

Calcular

a) El costo de producir 5 unidades por hora

$c(5) = 5 + 10\log(1 + 2(5))$
$c(5) = 5 + 10\log(11)$
$c(5) = 5 + 10(1{,}041)$
$c(5) = 5 + 10{,}41$
$c(5) = 15{,}4139$

b) El costo extra por aumentar la tasa de producción de 5 a 10 unidades por hora.

$c(10) = 5 + 10\log(1 + 2(10))$
$c(10) = 5 + 10\log(21)$
$c(10) = 5 + 10(1{,}3222)$
$c(10) = 5 + 13{,}222$
$c(10) = 18{,}222$

Costo extra $= 18{,}222 - 15{,}4139 = 2{,}808$

c) El costo extra por aumentar de 10 a 15 unidades por hora.
$c(15) = 5 + 10\log(1 + 2(15))$
$c(15) = 5 + 10\log(31)$
$c(15) = 5 + 10(1{,}4913)$
$c(15) = 5 + 14{,}913$
$c(15) = 19{,}9136$

Costo extra $= 19{,}9136 - 18{,}222 = 1{,}6916$

9) (Publicidad y ventas) Una compañía encuentra que la cantidad de dólares y que deben gastar semanalmente en publicidad para vender x unidades de su producto está dado por:

$$y = 200\ln\left(\frac{400}{500 - x}\right)$$

Calcular el gasto publicitario que se necesita para vender:

a) 100 unidades

$y = 200\ln\left(\frac{400}{500-100}\right) = 200\ln\left(\frac{400}{400}\right) = 200\ln 1 = 200(0) = 0$

b) 300 unidades

$y = 200 \ln (400500 - 300) = 200 \ln \left(\frac{400}{200}\right) = 200 \ln 2 = 200(0{,}69314) = 138{,}62$

c) 490 unidades

$y = 200 \ln \left(\frac{400}{500-490}\right) = 200 \ln \left(\frac{400}{10}\right) = 200 \ln 40 = 200(3{,}688) = 737{,}77$

10) (Función de costo) Una compañía está ampliando sus instalaciones y tiene la opción de escoger entre dos modelos. Las funciones de costo son $c(x) = 3{,}5 + \log(2x + 1)$ y $c_2(x) = 2 + \log(60x + 105)$ donde x es la tasa de producción. Encuentre la tasa x en la que los dos modelos tienen los mismos costos. ¿Para valores grandes de x, cual es el modelo que es más grato?

a)

$$\begin{aligned}
3{,}5 + \log(2x+1) &= 2 + \log(60x+105) \\
\log(2x+1) - \log(60x+105) &= 2 - 3{,}5 \\
\log \frac{2x+1}{60x+105} &= -1{,}5 \\
10^{\log \frac{2x+1}{60x+105}} &= 10^{-1{,}5} \\
\frac{2x+1}{60x+105} &= \frac{1}{10^{1{,}5}} \\
10^{1{,}5}(2x+1) &= 60x+105 \\
10^{1{,}5}2x + 10^{1{,}5} &= 60x+105 \\
(10^{1{,}5})2x - 60x &= 105 + 10^{1{,}5} \\
2x(10^{1{,}5} - 30) &= 73{,}37 \\
2x(1{,}622) &= 73{,}37 \\
x = \frac{73{,}37}{3{,}245} &= 22{,}610
\end{aligned}$$

b) Tomemos los valores de $x = 30$

$$\begin{aligned}
c(30) &= 3{,}5 + \log(2(30)+1) \\
&= 3{,}5 + \log 61 \\
&= 3{,}5 + 1{,}7853 \\
&= 5{,}285
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
c_2(30) &= 2 + \log(60(30)+105) \\
&= 2 + \log(1905) \\
&= 2 + 3{,}2798 \\
&= 5{,}2798
\end{aligned}$$

Respuesta: El segundo modelo es el más grato

4.3. Aplicaciones de la función Exponencial Natural y Logarítmica

1) Resolver las ecuaciones siguientes para x

a) $10^x = 25$

$$\begin{aligned} \text{Como } \log 10^x &= \log 25 \\ x \log 10 &= \log 25 \\ x &= \log 5^2 \\ x &= 2\log 5 = 1{,}3979 \end{aligned}$$

b) $2^x = 25$

$$\begin{aligned} \text{Como } \log 2^x &= \log 25 \\ x \log 2 &= \log 25 \\ x &= \frac{\log 5^2}{\log 2} \\ x &= \frac{2\log 5}{\log 2} \\ x &= \frac{2(0{,}6989)}{0{,}3010} \\ x &= 4{,}6438 \end{aligned}$$

c) $3^x 2^{3x} = 4$

$$\begin{aligned} \text{Como } (3 \cdot 2^3)^x &= 4 \\ (24)^x &= 4 \\ \text{Luego } \log 24^x &= \log 4 \\ x \log 24 &= \log 4 \\ x &= \frac{\log 4}{\log 24} \\ x &= 0{,}4362 \end{aligned}$$

d) $3^x \cdot 2^{1-x} = 10$

$$\begin{aligned} \text{Como } 3^x \cdot 2^1 \cdot 2^{-x} &= 10 \\ \left(\frac{3^x}{2^x}\right) 2^1 &= 10 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \frac{10}{2} \\ \log \left(\frac{3}{2}\right)^x &= \log 5 \\ x \log \left(\frac{3}{2}\right) &= \log 5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{(\log 5)}{\log \frac{3}{2}}$$
$$x = 3{,}9693$$

e) $3^x = 2^{2-x}$

$$\begin{aligned}
\text{Como } 3^x &= \frac{2^2}{2^x} \\
3^x \cdot 2^x &= 4 \\
(6)^x &= 4 \\
\log(6)^x &= \log 4 \\
x \log 6 &= \log 4 \\
x &= \frac{\log 4}{\log 6} \\
x &= 0{,}7737
\end{aligned}$$

f) $(3^x)^2 = 2\sqrt{2^x}$

$$\begin{aligned}
\text{Como}(3^2)^x &= 2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x \\
\frac{(3^2)^x}{(2^{\frac{1}{2}})^x} &= 2 \\
\left(\frac{9}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^x &= 2 \\
\left(\frac{81^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^x &= 2 \\
\left(\frac{81}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} &= 2 \\
\log\left(\frac{81}{2}\right)^{\frac{1}{2}x} &= \log 2 \\
\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \log 40{,}5 &= \log 2 \\
\left(\frac{1}{2}x\right) &= \frac{\log 2}{\log 40{,}5} \\
x &= \frac{\log 2}{\log 40{,}5} \div \left(\frac{1}{2}\right) \\
x &= 0{,}18727 \cdot (2) \\
x &= 0{,}3745
\end{aligned}$$

g) $(2^x)^x = 25$

$$\begin{aligned}
\text{Como } 2^{x^2} &= 25 \\
\log 2^{x^2} &= \log 25 \\
(x^2) \log 2 &= \log 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\log 25}{\log 2} \\
x^2 &= 4{,}64385 \\
x &= \sqrt{4{,}64385} = 2{,}1549
\end{aligned}$$

h) $(2^x)^x = 3^x$

$$\begin{aligned}
\text{Como } \frac{2^{x^2}}{3^x} &= 1 \\
\frac{2^x}{3} &= 1 \\
2^x &= 3 \\
\log 2^x &= \log 3 \\
(x)\log 2 &= \log 3 \\
x &= \frac{\log 3}{\log 2} \\
x &= 1{,}58496
\end{aligned}$$

i) $a^x = c \cdot b^x$

$$\begin{aligned}
\text{Como } \frac{a^x}{b^x} &= c \\
\left(\frac{a}{b}\right)^x &= c \\
\log\left(\frac{a}{b}\right)^x &= \log c \\
(x)\log\left(\frac{a}{b}\right) &= \log c \\
x &= \frac{\log c}{\log\left(\frac{a}{b}\right)}
\end{aligned}$$

2) (Crecimiento de la población) la población del planeta en 1976 era de 4 mil millones y estaba creciendo a un 2 % anual. Si esta tasa de crecimiento sigue vigente, ¿Cuándo alcanzará la población los 10 mil millones?

$$\begin{aligned}
4(1+0{,}02)^n &= 10 \\
\log 4(1+0{,}02)^n &= \log 10 \\
\log 4 + \log(1+0{,}02)^n &= 1 \\
n \log 1{,}02 &= 1 - \log 4 \\
n &= \frac{1-\log 4}{\log 1{,}02} \\
n &= 46{,}27 \approx 46{,}3 \text{ Años}
\end{aligned}$$

3) (Crecimiento de población) La población de China en 1970 era de 750 millones y está creciendo a un 4 % al año. ¿Cuándo alcanzara esta población los 2 mil millones, suponiendo que continúe la misma tasa de crecimiento? (La tasa de crecimiento actual es bastante más baja)

$$
\begin{aligned}
2000 &= 750(1+0{,}04)^n \\
\log 2000 &= \log 750(1+0{,}04)^n \\
\log 2000 &= \log 750 + \log(1+0{,}04)^n \\
\log 2000 - \log 750 &= n \log 1{,}04 \\
\log \frac{2000}{750} &= n \log 1{,}04 \\
n &= \frac{\log \frac{2000}{750}}{\log 1{,}04} \\
n &= 25{,}007 \approx 25 \text{ Años}
\end{aligned}
$$

4) (Crecimiento de población) Con los datos de los ejercicios 11 y 12, ¿Calcular cuando, la población de China será igual a la mitad de la población de la tierra ?

Desde 1976 a 1970 son 6 años, para determinar qué población hay las dos situaciones deben estar en el mismo año.

Población de China hasta 1976

$$
\begin{aligned}
\text{Valor después de 6 años } &= 750(1{,}04)^6 \\
&= 750(1{,}26531) \\
&= 948{,}98 \approx 949 \text{ millones}
\end{aligned}
$$

Igualamos las dos cantidades para determinar así en que año se puede dar el suceso.

$$
\begin{aligned}
\frac{(4000(1{,}02)^n)}{2} &= 949(1{,}04)^n \\
\log \frac{4000(1{,}02)^n}{2} &= \log 949(1{,}04)^n \\
\log 4000 + \log(1{,}02)^n - \log 2 &= \log 949 + \log(1{,}04)^n \\
\log 4000 + n \log 1{,}02 - \log 2 &= \log 949 + n \log 1{,}04 \\
n \log 1{,}02 - n \log 1{,}04 &= \log 949 + \log 2 - \log 4000 \\
n(\log 1{,}02 - \log 1{,}04) &= \log 949 + \log 2 - \log 4000 \\
n \log \left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right) &= \log \frac{949(2)}{4000} \\
n(\log 1{,}01960) &= 0{,}32376 \\
n(0{,}00843) &= 0{,}32376 \\
n &= \frac{-0{,}32376}{-0{,}00843} \\
n &= 38{,}4
\end{aligned}
$$

5) (Crecimiento de Utilidades) Las utilidades de una compañía han crecido a un promedio del 12 % anual entre 1980 y 1985 y en este último año alcanzaron el nivel de $ 5.2 millones.

Suponiendo que la tasa de crecimiento continuas, ¿Cuánto tendrán que esperar antes de alcanzar los \$8 millones por año?

$$\begin{aligned}
8 &= 5{,}2(1+0{,}12)^n \\
\log 8 &= \log 5{,}2(1+0{,}12)^n \\
\log 8 &= \log 5{,}2 + \log{(1{,}12)}^n \\
\log 8 - \log 5{,}2 &= n \log 1{,}12 \\
\log \frac{8}{5{,}2} &= n \log 1{,}12 \\
n &= \frac{\log \frac{8}{5{,}2}}{\log 1{,}12} \\
n &= 3{,}8
\end{aligned}$$

6) (Crecimiento de Periódicos) Dos periódicos que compiten tienen circulaciones de 1 millón y 2 millones, respectivamente. Si el primero aumenta su circulación en un 2 % al mes, mientras que la circulación del segundo decrece a un 1 % al mes, calcular cuanto deberá transcurrir antes de que las circulaciones sean iguales.

$p_1 = 1, \quad i = 2\,\% \quad$ y $\quad p_2 = 2, \quad i = -1\,\%$

Planteamos las situaciones e igualamos

$$\begin{aligned}
1(1+0{,}02)^n &= 2(1-0{,}01)^n \\
\log(1+0{,}02)^n &= \log 2(1-0{,}01)^n \\
\log(1+0{,}02)^n &= \log 2 + \log(1-0{,}01)^n \\
n \log 1{,}02 &= \log 2 + n \log 0{,}99 \\
n \log 1{,}02 - n \log 0{,}99 &= \log 2 \\
n \log \frac{1{,}02}{0{,}99} &= \log 2 \\
n \log 1{,}030 &= \log 2 \\
n &= \frac{\log 2}{\log 1{,}030} \\
n &= 23{,}21 \text{ Meses}
\end{aligned}$$

7) (Interés compuesto) Suponga que se invierten \$1000 a un interés compuesto anual del 8 %.

a) ¿Cuánto le llevara incrementarse a \$1500?

$$\begin{aligned}
1500 &= 1000(1+0{,}08)^n \\
\frac{1500}{1000} &= (1+0{,}08)^n \\
\log 1{,}5 &= \log(1+0{,}08)^n \\
\log 1{,}5 &= n \log 1{,}08
\end{aligned}$$

$$\frac{\log 1{,}5}{\log 1{,}08} = n$$
$$n = 5{,}2$$

b) ¿Cuánto tardara en multiplicarse a \$3000?

$$3000 = 1000(1 + 0{,}08)^n$$
$$\frac{3000}{1000} = (1 + 0{,}08)^n$$
$$\log 3 = \log(1 + 0{,}08)^n$$
$$\log 3 = n \log 1{,}08$$
$$\frac{\log 3}{\log 1{,}08} = n$$
$$n = 14{,}27$$

8) (Interés compuesto) La regla practica siguiente a menudo se emplea en finanzas, si la tasa de interés es el R por ciento anual, entonces el número de años, n, que la inversión tarda en duplicarse se obtiene dividiendo, 70 entre R (es decir, $n = \frac{70}{R}$. Calcular n exactamente para los valores siguientes de R: 4, 8, 12, 16 y 20. Compare sus respuestas con aquellas obtenidas por la formula $n = \frac{70}{R}$ y estime la precisión de la regla práctica.

Cuando $R = 4\,\%$
$$2 = (1 + 0{,}04)^n$$
$$\log 2 = \log(1{,}04)^n$$
$$\log 2 = n \log 1{,}04$$
$$\tfrac{\log 2}{\log 1{,}04} = n$$
$$n = 17{,}67$$

$n = \frac{70}{4} = 17{,}5$
Precisión
Diferencia $= 0{,}17$

Cuando $R = 8\,\%$
$$2 = (1 + 0{,}08)^n$$
$$\log 2 = \log(1{,}08)^n$$
$$\log 2 = n \log 1{,}08$$
$$\tfrac{\log 2}{\log 1{,}08} = n$$
$$n = 9{,}006$$

$n = \frac{70}{8} = 8{,}75$
Precisión
Diferencia $= 0{,}256$

Cuando $R = 12\,\%$
$$2 = (1 + 0{,}12)^n$$
$$\log 2 = \log(1{,}12)^n$$
$$\log 2 = n \log 1{,}12$$
$$\tfrac{\log 2}{\log 1{,}12} = n$$
$$n = 6{,}116$$

$n = \frac{70}{12} = 5{,}83$
Precisión
Diferencia $= 0{,}286$

Cuando $R = 16\,\%$
$$2 = (1 + 0{,}16)^n$$
$$\log 2 = \log(1{,}16)^n$$
$$\log 2 = n \log 1{,}16$$
$$\tfrac{\log 2}{\log 1{,}16} = n$$
$$n = 4{,}67$$

$n = \frac{70}{16} = 4{,}37$
Precisión
Diferencia $= 0{,}3$

Cuando $R = 20\,\%$
$$2 = (1 + 0{,}20)^n$$
$$\log 2 = \log(1{,}20)^n$$
$$\log 2 = n \log 1{,}20$$
$$\tfrac{\log 2}{\log 1{,}20} = n$$
$$n = 3{,}801$$

$n = \frac{70}{20} = 3{,}5$
Precisión
Diferencia $= 0{,}301$

9) (Interés compuesto capitalizable en forma semestral) Calcular la tasa de interés compuesto capitalizable semestralmente que es equivalente a una tasa de interés anual del 8 %

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2} &= (1+0{,}08)\\
\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2} &= (1{,}08)\\
1+\frac{i}{2} &= (1{,}08)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\\
\frac{i}{2} &= (1{,}08)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-1\\
i &= 2\left\{(1{,}08)^{\left(\frac{1}{2}\right)}-1\right\}\\
i &= 2\left\{1{,}03923-1\right\}\\
i &= 2(0{,}03923)\\
i &= 0{,}07846 = 7{,}8\,\%\\
\frac{i}{2} &= \frac{(7{,}8\,\%)}{2} = 3{,}9\,\%\ \text{Semestral}
\end{aligned}$$

10) (Interés compuesto capitalizable de forma mensual) Calcular la tasa de intereses mensual que es equivalente a una tasa de interés anual del 8 %.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{i}{12}\right) &= (1+0{,}08)\\
1+\frac{i}{12} &= (1{,}08)\\
\frac{i}{12} &= 1{,}08-1\\
i &= 12(1{,}08-1)\\
i &= 12(0{,}08)\\
i &= 0{,}96\\
\frac{i}{12} &= \frac{0{,}96}{12} = 0{,}08
\end{aligned}$$

11) (Valor presente) Una empresa espera recibir \$1000 cada año durante los próximos años, el primer pago debe realizarlo dentro de un año. Si, en lugar de ello, la persona decide pagar la deuda de inmediato en una suma total, calcule cuanto deberá pagar, poniendo una tasa de descuento del 8 %

a) En el primer año

$1000(1-0{,}08)$
$1000(0{,}92)$
920

b) En el segundo año

1920(0,92)
1766,4

c) En el tercer año
2766,4(0,92)
2545,08

12) (Valor presente) Una persona tiene una deuda que debe pagar en tres abonos anuales de \$5000, el primer pago debe realizarlo dentro de un año. Si, en lugar de ello, la persona decide pagar la deuda de inmediato en una suma total, calcular cuanto deberá pagar, poniendo una tasa de descuento de 8 % anual.

$15000(1-0{,}08)^3$
$15000(0{,}92)^3$
$15000(0{,}7786)$
$11680{,}32$

13) Expresar las funciones siguientes en la forma $y = ae^{kt}$

a) $y = 2^t$

$2^t = e^{kt} \quad k = \ln 2 = 0{,}6931$
$2^t = e^{0{,}6031t}$
$y = e^{0{,}6931t}$

b) $y = 1000\left(2^{\left(\frac{t}{3}\right)}\right)$

$2^{\left(\frac{t}{3}\right)} = e^{k\left(\frac{t}{3}\right)} \quad \frac{k}{3} = \frac{\ln 2}{3} = 0{,}23104$
$2^{\left(\frac{t}{3}\right)} = e^{0{,}231t}$
$y = e^{0{,}231t}$

c) $y = 5(1{,}04^t)$

$1{,}04^t = e^{kt} \quad k = \ln 1{,}04 = 0{,}0392$
$1{,}04^t = e^{0{,}0392t}$
$y = 5e^{0{,}3092t}$

d) $y = 6 \times 10^8(1{,}05)^t$

$1{,}05^t = e^{kt} \quad k = \ln 1{,}05 = 0{,}048$
$y = 6 \times 10^8 e^{0{,}048t}$

14) (Crecimiento de población) la población actual de la tierra es de 4 mil millones y crece a una tasa del 2 % anual. Expresar la población y al tiempo t (en años) a partir del momento en la forma $y = ae^{kt}$

4 mil millones $\quad i = 2\,\%\quad t =$ años

$1{,}02^t = e^{kt} \quad k = \ln 1{,}02 = 0{,}0198$
$y = 4(1 + 0{,}02)^t$
$y = 4e^{0{,}0198t}$

15) (Depreciación) Una compañía adquiere una maquina en \$10000. Cada año el valor de la maquina decrece en un 20 %. Exprese el valor en la forma be^{kt}, en donde b y k son constantes y el tiempo $t = 0$ corresponde a la fecha de adquisición.

\$10000 $\quad i = -20\,\%$

$0{,}8^t = e^{kt} \quad k = \ln 0{,}8 = -2{,}223$
$y = 10000(1 - 0{,}2)^t$
$y = 10000(0{,}8)^t$
$y = 10000e^{-2{,}223t}$

16) (Aumento del I.P.C) .Entre enero de 1975 y enero de 1980, el índice de precios al consumidor I paso de 121 a 196.

a) Calcular el incremento porcentual promedio por año durante este periodo

Entre 1980 y 1975 hay 5 años

$196 = 121(1 + i)^5$
$\frac{196}{121} = (1 + i)^5$
$\sqrt[5]{(1{,}6198)} = 1 + i$
$1{,}1012 - 1 = i$
$i = 0{,}1012 = 10{,}12\,\%$

b) Exprese I en la forma be^{kt}, con $t = 0$ correspondiente a enero de 1975

$(1 + 0{,}1012)^t = e^{kt} \quad k = \ln 1{,}1012 = 0{,}0964$
$I = 121(1 + 0{,}1012)^t$
$y = 121e^{0{,}0964t}$

c) Suponiendo que esta tasa de crecimiento continua, determine cuando i alcanzara los 250.

$250 = 121(1 + 0{,}1012)^n$
$\frac{250}{121} = (1{,}1012)^n$
$\log 2{,}066 = \log(1{,}1012)^n$
$\log 2{,}066 = n \log 1{,}1012$
$n = \frac{\log 2{,}066}{\log 1{,}1012}$
$n = 7{,}527$

17) (Crecimiento de población) Una población crece de acuerdo con la formula $p = 5{\times}10^6 e^{0{,}06t}$. En donde t se da en años, calcular el porcentaje de crecimiento anual.

$e^{kt} = (1+i)^t$
$e^{0,06t} = (1+i)^t$
$e^{0,06} = 1+i$
$e^{0,06} - 1 = i$
$i = 0{,}06183 = 6{,}183\,\%$

CONCLUSIONES

La trascendencia que ha tenido la matemática desde los egipcios hasta la actualidad ha hecho que el interés por el aprendizaje de los conceptos de función exponencial y función logarítmica sean una de las herramientas básicas para su desarrollo. Es por eso que actualmente en la matemática y entre las disciplinas del conocimiento humano podemos hablar del estudio de la población, hallar el interés compuesto, determinar la intensidad de un sismo, entre otras aplicaciones donde el uso de estas dos funciones es primordial.

Al construir una progresión aritmética y una progresión geométrica de fórmulas $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ y $a_n = a1 \cdot r(n-1)$ respectivamente, se pudo determinar que existe una correspondencia. Esta correspondencia es conocida actualmente como la potenciación, así como por ejemplo: De la serie aritmética 1, 2, 3, 4 $\cdots$ y la serie geométrica 2, 4, 8, 16 $\cdots$ De la cual se puede establecer que $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, teniendo como base el número dos (2). A su vez, al comparar en tablas los valores obtenidos, se evidenció otro tipo de correspondencia entre estos valores que hoy en día conocemos como propiedades de la potenciación, de las cuales dos de ellas evidencian la realización de una multiplicación a través de una suma y la división por medio de una resta.

La idea de convertir multiplicaciones y divisiones en sumas y restas respectivamente genera asombro en la mayoría de astrónomos, navegantes y matemáticos, ya que este hecho simplifico la realización de cálculos relativamente complicados para la época (siglos XV y XVI). Al comparar las progresiones aritméticas y geométricas, y al tomar valores cada vez más pequeños como base, tales como $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ (Numero de John Napier) y $1 + 10^{-4} = 1{,}0001$ (número de Jobst Bürgi) se pudo evidenciar que las progresiones aritméticas y geométricas estaban estrechamente relacionadas con el concepto de Logaritmo atribuido a John Napier, quien inspiro a los matemáticos en la construcción de las llamadas tablas de logaritmos con el objetivo de simplificar aún más los cálculos matemáticos.

Al analizar detenidamente las comparaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas notamos que en determinado momento los valores obtenidos por John Napier y Jobst Bürgi son cada vez mas próximos a 0.367879423 y 2.718145927 respectivamente, hecho que condujo a la idea de relacionar el concepto de interés compuesto, el concepto de área bajo una curva (hipérbole equilátera) y el concepto de Logaritmo. Al desarrollar los hechos mencionados, encontramos que cada uno de ellos nos lleva al número 2.71828182 que actualmente conocemos con el nombre de e gracias al aporte hecho por Leonhard Euler, el cual refuerza el concepto de logaritmo y lo introduce en sus investigaciones como base los logaritmos naturales, aunque anteriormente fue representado por otros matemáticos con diferentes letras.

Los conceptos de función logaritmo y función exponencial respectivamente, son atribuidos a Leonhard Euler puesto que en sus trabajos investigativos define estos conceptos que actualmente son una referencia básica en la realización de cálculos matemáticos. Actualmente podemos encontrar gran variedad de aplicaciones de estas dos funciones en las diferentes áreas del conocimiento, el estudio de estos conceptos a través de su evolución histórica nos conduce a comprender e interpretar mejor las definiciones de función logaritmo y función exponencial.

Un aspecto a tener en cuenta es el uso que se le pueden dar a estas funciones en el conjunto de los números complejos, sería de gran utilidad realizar una investigación de este tipo con el objetivo de ampliar los conceptos y reforzar los hechos históricos mencionados durante el presente trabajo de grado.

BIBLIOGRAFÍA

[1] M.O. Francisco Javier Tapia Moreno (2003). *Apuntes de historia de las matemáticas.*

[2] Ian Stewart (2007). *Historia de las Matemáticas en los últimos 10000 años.* España, Drakontos.

[3] Nicolas Bourbaki (1972). *Elementos de historia de las Matemáticas.* Madrid, Alianza Universidad.

[4] Florián Cajori (1993). *A History Of Mathematical Notations "Two volumes bound as one".* United Estates of America, Dover Publications INC.

[5] E. T. Bell. *Los Grandes Matemáticos.* Buenos Aires - Argentina - Editorial Losada.

[6] Cargill Gilston Knott (1915). *The Napier Tercentenary Memorial.* The Royal Society Of Edimburgo.

[7] María Teresa González Astudillo, Jeannette Vargas Hernández (2007). *Segmentos de la historia: La función Logarítmica.* Cali - Colombia, Matemáticas: Enseñanza Universitaria.

[8] Oscar Forner Martínez, Ma Consuelo Domínguez salas, Manuel Forner Gumbau (2013). *Construcción de los Logaritmos: Historia y proyecto didáctico*, Universidad Jaume.

[9] J. T. Coolidge (1950). *The Number e.* Harvard University, Mathematical Association of America.

[10] Oscar Gacharna León (2012). *Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de Logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media.* Bogotá D.C. Colombia, Universidad Nacional de Colombia.

[11] Luz Miriam Echeverry. *Enumero e*, Universidad de los Andes.

[12] José Manuel Sánchez Muñoz (2011). *Historia de Matemáticas: Hermite y la trascendencia de e*, Madrid - España, revista de investigación Pensamiento Matemático.

[13] Eli Maor (2008). *e: Historia de un Número*, Rio de janeiro, Le Livros, Record.

[14] Henry Mauricio Pulido Olaya (2012). *Propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza de concepto de función exponencial mediante la implementación de algunas aplicaciones*, Bogotá - Colombia, Universidad Nacional de Colombia.

[15] Ángel Ruiz Zúñiga. *Historia y filosofía de las matemáticas.*

[16] Gonzalo Aguilar Quiroz (2001). *Un resultado de Leonard Euler relativo a series infinitas*, Universidad de las Américas de Puebla México, Miscelánea Matemática.

[17] Alfonso Anzaldo Meneses, Joaquín delgado, Felipe Monroy Pérez (2007) . *El Legado Matemático de Leonard Euler a Trescientos Años de su Nacimiento*, Naucalpan, estado de México, Innovación editorial Lagares de México.

[18] Eduardo Tellechea Armenta (2003). *Apuntes de Historia de las Matemáticas "El cálculo según Euler".*

[19] Eladio Sáenz Quiroga (2005). *Apuntes para el curso "Historia de las Matemáticas"*, Universidad Autónoma de Nuevo León.

[20] James Stewart. *Calculo "Trascendentes tempranas"*, sexta edición, Cengace Learning.

[21] Tom M. Apóstol (1984[1999]). *Calculus, One Variable Calculus*, volume I, Barcelona, Editorial Reverte.