Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunos Modelos Matemáticos que se Resuelven Utilizando Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Diego Armando Avilés Guzmán
Francisco Javier Narváez

Neiva, Huila
2016

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Algunos Modelos Matemáticos que se Resuelven Utilizando Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Diego Armando Avilés Guzmán

2010297490

Francisco Javier Narváez

20102195515

Asesor:

Magister Mauricio Penagos

Neiva, Huila
2016

Algunos Modelos Matemáticos que se Resuelven Utilizando Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Autores: Diego Armando Avilés Guzmán y Francisco Javier Narváez

Asesor: MSc Mauricio Penagos

Texto impreso en Neiva (Huila).

Primera Edición, noviembre de 2016

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

MSc. Mauricio Penagos

Asesor

MSc. Mauricio Penagos

Segundo Lector

MSc. Mauricio Guzmán

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

Neiva, noviembre de 2016.

Introducción

Este trabajo es una recopilación sobre la teorá de las ecuaciones diferenciales de primer orden, sus métodos de solución y **ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS QUE SE RESUELVEN UTILIZANDO DICHAS ECUACIONES**.

Dicha recopilación incluye una estructura de definiciones, ejemplos, en algunos casos donde se consideró necesario, se incluyeron gráficas con el fin de describir la teoría o el problema en cuestión las posibles soluciones con el fin de facilitar la lectura y en aras de una mejor coherencia, se tuvo en cuenta un orden en la presentación de los temas: inicialmente se incluyó un poco de historia sobre las *Ecuaciones Diferenciales*, mostrando los aportes de algunos matemáticos junto a un breve recuento de su vida y su obra; posteriormente se estudian las ecuaciones diferenciales y se establecen su clasificación, después se desarrollan algunas técnicas básicas para resolverlas, finalmente se muestran algunas aplicaciones de estas **Ecuaciones Diferenciales**. Al final del trabajo se dedica una sección del mismo a la modelación utilizando problemáticas cotidianas.

Se espera que este resulte ser un trabajo de grado de utilidad para los estudiantes no sólo del Programa de Licenciatura en Matemáticas sino también de otras carreras de la universidad donde se apliquen o utilicen tales ecuaciones en el curso de *Ecuaciones Diferenciales*.

En lo que tiene que ver con el estilo del desarrollo de los temas, se consideraron las definiciones y cuando fue necesario se enunciaron los teoremas con sus respectivas demostraciones; posteriormente se desarrollaron ejemplos y en muchas ocaciones gráficos, ilustrativos.

Para presentar el trabajo la primera dificultad que se presentó fue la incertidumbre de cómo empezar; aquí es donde intervino el asesor, quien nos mostró el camino y motivó para dar los primeros pasos. Otra dificultad tuvo que ver con la redacción: como es apenas natural, en ocaciones se presentaban enredos entre lo escrito y lo que se pretendía expresar, eso se notaba en el momento en el que el asesor hacía la revisión y finalmente se salía de este impase. Otras veces se presentaron dificultades en la solución de algunos ejercicios que se incluyeron como ejemplos y en algunos casos no se pudo ni siquiera incluir un gráfico por la complejidad de graficar las ecuaciones resultantes.

También hubo dificultad en el manejo del procesador de texto científico con la que se digitó este trabajo de grado, el Latex. En algunos casos costaba trabajo entender los comandos, en otros, el resultado al compilar no era el esperado, por ello se recomienda a los estudiantes que empiecen a practicar y familiarizarse con este editor de texto matemático desde los primeros semestres, para que así, al llegar el momento de elaborar su trabajo de grado no padezcan este tipo de dificultades.

Por último, se desea que este documento sea ameno y sobre todo de mucha utilidad para el lector.

Objetivos

Objetivo General

- Realizar una revisión bibliográfica y organizada sobre las ecuaciones diferenciales de primer orden, su clasificación y solución, lo mismo que algunas de sus aplicaciones teóricas y de modelación.

Objetivos Específicos

- Indagar sobre algunos aspectos históricos sobresalientes que llevaron a la concepción y evolución de las ecuaciones diferenciales.
- Presentar los diferentes tipos de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden y los métodos de solución de las mismas e ilustrar la teoría con ejemplos.
- Exponer algunos modelos matemáticos y su aplicación a la realidad que se pueden resolver utilizando las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Justificación

Sin tener que hablar (o mejor, escribir mucho) el curso de ecuaciones diferenciales tomado en el pregrado nos dió la iniciativa para desarrollar el presente trabajo de grado. A continuación explícitamente queremos mencionar algunos aspectos que motivaron la indagación:

1. Simpatía por el tema a desarrollar. Si se trabaja en algo por gusto, se permite que se disfrute cuando se consulta y cuando se redacta. Esto lo percibe la persona que lee.

2. Profundización. Se necesitaba hacer una investigación mas o menos discreta sobre la historia de las ecuaciones diferenciales, sus técnicas de solución y múltiples aplicaciones.

3. Algo fundamental: los profesores del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la **Universidad Surcolombiana** siempre han insistido que aunque se indague sobre un tema que se considere sencillo, este en realidad no lo es tanto. Es bueno indagar, conocer la especificidad y aplicación, ojalá de la mayoría de los temas vistos en la carrera.

4. Aplicabilidad. Esta es una de las dos razones más importantes: responder el interrogante de **¿Para qué sirven las matemáticas?** en el caso de las ecuaciones diferenciales vivenciar sus numerosas aplicaciones.

5. Proyección. Las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales no solo son una herramienta potente en el campo de la ciencia y la industria. Estas se pueden extender a estudiantes de bachillerato. Es evidente que no en su total

dimensión pero si intenta dar respuesta a algunos conceptos por medio de la experimentación.

Índice general

El inicio es la parte mas importante del trabajo.

Platón

CAPÍTULO 1

Historia

Las ecuaciones diferenciales aparecieron por primera vez en los trabajos de cálculo de Newton y Leibniz. En 1638 apareció el problema de la tractríz, para el cual René Descartes $(1596 - 1650)$ propuso a Fermat, como un problema de tangentes a una curva y por lo tanto un problema que involucran derivadas. Fermat no pudo resolverlo pues no conocía el cálculo, el problema fue resuelto en 1674 por Leibniz y también en 1690 por Jakob Bernoulli, cuando ya se conocían los trabajos de Newton y Leibniz.

En 1671, Isaac Newton en su libro "Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum", hizo una lista de tres clases de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{y} \quad x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

Las cuales resolvió usando series infinitas y discutió la no unicidad de las soluciones.

Jakob Bernoulli en 1695 propuso la ecuación llamada hoy día, ecuación diferencial de Bernoulli. Esta es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Años después Leibniz la resolvió mediante simplificaciones.

El problema de la cuerda vibrante tal como la de un instrumento musical, fue estudiado por Jean le Rond D`Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli, y Joseph-Louis Lagrange. En 1746, D`Alembert propuso la ecuación de onda unidimensional, y después Euler formuló la ecuación de onda tridimensional.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron desarrolladas y resueltas por estos matemáticos en la década de 1750, en relación con sus estudios sobre el problema de la tautócrona, que consiste en determinar una curva en la cual una partícula con peso rueda desde un punto fijo en cantidad fija de tiempo, independiente del punto de partida.

Lagrange resolvió este problema en 1755 y envió la solución a Euler. Ambos desarrollaron el método de Lagrange y lo aplicaron a la mecánica, lo que los condujo a la mecánica Lagrangiana.

Fourier publicó su trabajo de transferencia de calor en el libro *Théorie analytique de la chaleur*, en la que basó su razonamiento en la llamada "Ley del enfriamiento de Newton", que establece que la transferencia de calor entre dos moléculas adyacentes es proporcional a diferencias extremadamente pequeñas de sus temperaturas. Fourier expone además la ecuación del calor para la difusión conductiva del calor. Esta ecuación en derivadas parciales, es de gran aplicación en la física matemática.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas, que amplían tanto la teoría de las ecuaciones diferenciales como la teoría de la probabilidad, fueron introducidas por Kiyoshi It$\overline{o}$ y Ruslan Stratonovich durante los años 1940 y 1950.

Biografía de Isaac Newton (1642 - 1727) nació el mismo año en que murió Galileo. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1665 en que expresó funciones en series de potencias, empezó a pensar en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.

En 1711 publicó su libro "**De analysi per aequationes numero terminorum infinitas**", el cual contiene la primera exposición sistemática del cálculo, donde formula un método de diferenciación, similar al publicado por Barrow en 1670. En 1742 se publicó "**Methodus fluxionum et serierum infinitorum**", en el que ya aparecen ecuaciones diferenciales. En 1676 escribió "De quadratura curvarum" donde evitaba las cantidades infinitamente pequeñas reemplazándolas por las llamadas "razones primeras y últimas". En su obra *"Philosophiae naturalis principia mathematica"* publicada en 1687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, se resalta la importancia plenamente de las ecuaciones diferenciales. En la primera fórmula de Newton, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite, etc, que es de la forma $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ donde m, g y k son constantes reales mayores que cero, con lo que se obtiene una ecuación diferencial en la que se quiere encontrar $v = v(t)$, es decir la velocidad en función del tiempo.

El concepto de que las leyes físicas son ecuaciones diferenciales es el único concepto de Newton que, en opinión de Einstein, sigue hoy totalmente vigente. Newton planteó una solución a los tres tipos de ecuaciones diferenciales que propuso, utilizando una función f expresada en serie de potencias, que había que derivar y sustituir término a término. El cálculo de coeficientes se hace por recurrencia. La noción de constante arbitraria es más tardía.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) Estudió las obras de Pascal sobre la cicloide, y se dió cuenta que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Por esta razón creó un lenguaje y una notación adecuada para tratar estos problemas, lo cual facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de "dx" y del signo de integral; fue el primero en introducir el término “ecuación diferencial” y el término “derivar” en el sentido de “deducir”.

El problema crucial que resolvió el cálculo de Newton y Leibniz fue el siguiente. Si una variable “y” depende de otra “x”, y se conoce la tasa de variación de “y” respecto de “x” para cambios muy pequeños de la variable “x”, lo que Leibniz ya denotó: $dy = f(x)dx$, entonces la determinación de “y” respecto de “x” se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Leibniz descubre métodos de separación de variables de resolución de ecuaciones homogéneas de primer orden y de ecuaciones lineales de primer orden, utiliza en 1696 el cambio $y = z^{1-n}$ y mantiene concordancia con otros matemáticos, en especial con los hermanos Bernoulli.

Leibniz redujo la ecuación homogénea mediante la sustitución “$y = ux$”, y la lineal de primer orden mediante “$y = uv$”.

Los Hermanos Bernoulli: Deben ser resaltados los trabajos de los hermanos Jakob Bernoulli (1654 - 1705) y Johann Bernoulli (1667 - 1748), y del hijo de Johann, Daniel Bernoulli (1700 - 1782). La familia Bernoulli tuvo, en tres generaciones, ocho matemáticos, de los cuales los tres ya citados fueron extraordinarios.

En 1690 Jakob resuelve el problema de la isócrona y plantea el problema de la catenaria. El problema de la braquistócrona, curva por la que el tiempo de caída es mínimo, propuesto en 1696 por Johann Bernoulli, que es posible considerar como el origen del cálculo de variaciones, provocó discusiones entre ellos. Daniel asocia su nombre a la famosa ecuación de Bernoulli de la mecánica de fluidos.

Jakob Bernoulli estudió teología, pero pronto se dedicó a estudiar los trabajos de Newton y a Leibniz. Fue profesor de matemáticas en Basilea. Su hermano más joven, Johann Bernoulli estudió medicina y se doctoró con una tesis sobre la contracción de los músculos, aunque pronto se sintió fascinado por el cálculo. Estudió y escribió las ecuaciones diferenciales utilizadas en el movimiento planetario, su trabajo incluyó el desarrollo de la catenaria y el uso de coordenadas polares.

En 1695 fue profesor de matemáticas y física en Groningen, Holanda, y al morir su hermano, le sucedió como profesor en Basilea. Daniel Bernoulli estudió medicina como su padre y se doctoró con un trabajo sobre los pulmones. Al igual que su padre fue profesor de matemáticas en San Petersburgo. Obtuvo diez premios de la Academia de Ciencias de París, siendo superado únicamente por el líder de los matemáticos de la época, Leonhard Euler.

Los Bernoulli introdujeron los fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales. Los primeros esfuerzos estuvieron dirigidos a reducir ecuaciones de primer orden a ecuaciones de variables separadas. Los Bernoulli redujeron a lineal la ecuación que hoy lleva su nombre. Johann Bernoulli utilizó factores integrantes y probó que la ecuación que hoy se denomina de Euler (pues Euler encontró la sustitución $x = e^t$) puede reducirse de orden multiplicando por un factor x^k.

Es interesante analizar las dificultades que encontraban en la solución de ecuaciones que hoy se consideran elementales, así como los logros que alcanzaron. A finales del siglo XVII se conocían muchos de los métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y se dirigió la atención hacia las ecuaciones diferenciales de orden superior y las ecuaciones en derivadas parciales. En la tumba de Jakob Bernoulli aparece la espiral logarítmica y llevan su nombre la elástica de Bernoulli y la lemniscata de Bernoulli. Johann Bernoulli resolvió las trayectorias ortogonales a una familia dada como un reto con los ingleses. Por ejemplo, Johann Bernoulli en 1694, al utilizar el método de separación de variables para integrar una ecuación diferencial, se dió cuenta de que en ocasiones, como ocurre en la ecuación diferencial $dy/y = 2dx/x$, se oculta la naturaleza de las soluciones, y que si se multiplica por un factor integrante adecuado se obtiene una solución algebraica.

De forma simplificada se considera el siglo XVIII como el siglo de la integración elemental de las ecuaciones diferenciales. Éstas se convirtieron en el instrumento básico de investigación en problemas de mecánica, geometría diferencial y cálculo de variaciones y se relacionaron con la teoría de funciones de variable compleja y con las series trigonométricas.

Durante la segunda mitad del siglo XVIII aparecen numerosas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Los matemáticos más famosos del siglo XVIII contribuyeron enormemente al desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Se pueden citar de una manera especial por la importancia de sus trabajos en este campo a Leonhard Euler (1707 - 1783), Clairaut (1713 - 1765), D`Alembert (1717 - 1783), Daniel Bernoulli (1700 - 1782), Lagrange(1736 - 1813) y Laplace (1749 - 1827). Se estudiaron los distintos tipos de ecuaciones diferenciales integrables por cuadraturas, se elaboraron los primeros procesos de aproximación y se introdujeron conceptos fundamentales dentro de la teoría como los de solución singular y solución general de una ecuación diferencial. Se estudiaron algunos tipos de ecuaciones de orden superior y se elaboraron los cimientos para una teoría geométrica de las ecuaciones en derivadas parciales.

Leonhard Euler: Obtuvo importantes progresos en la teoría de ecuaciones diferenciales, que utilizó en la resolución de problemas de mecánica celeste y de balística. Con Euler, la teoría de las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) se transforma en una disciplina independiente. Los resultados fueron recogidos en la magistral obra “Institutiones calculi integralis” en cuatro tomos, publicados los tres primeros entre 1768 y 1770 y el cuarto en 1794, siendo utilizado desde entonces como manual obligado para el estudio de matemáticas.

A él se deben varios cambios de variables, como aquellos que permiten reducir ecuaciones de segundo orden en ecuaciones de primer orden. También creó el concepto de factor integrante, que proporciona la forma de integrar directamente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. En 1735 trabajó las ecuaciones diferenciales mediante series, y en 1739 dió un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes encontrando una solución exponencial, dando en 1743 el método más general de la ecuación característica, y resolviendo en 1753 la ecuación no homogénea. La teoría general de coeficientes variables se debe a D`Alembert, en 1765, y el método de variación de parámetros a Lagrange en 1776. Euler probó que el número de parámetros necesarios en una ecuación diferencial lineal de orden n es exactamente igual a n.

No existe una filosofía que no se funda en el conocimiento de los fenómenos, pero para obtener algún beneficio de este conocimiento es absolutamente necesario ser matemático.

Daniel Bernoulli

CAPÍTULO

2

Ecuación Diferencial

Una ecuación diferencial es una expresión matemática que establece relaciones entre variables independientes y dependientes y las derivadas de ésta última. En las aplicaciones, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio, y la ecuación define la relación entre ellas. Como éstas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en muchas disciplinas, incluyendo la ingeniería, física, economía, biología, etc. Se presentan aquí algunos modelos que pueden resolverse utilizando ecuaciones diferenciales.

Dinámica de poblaciones: Modelo de Malthus. El comportamiento de una población de seres vivos cuyo número de individuos varía en el tiempo puede ser matemáticamente modelada mediante ecuaciones diferenciales y constituye, de hecho, uno de los principales campos de aplicación de las matemáticas a la biología.

Cuando una población no está sujeta a condicionantes externos (falta de alimentos, competencia por el hábitat, etc) su ritmo de crecimiento o decrecimiento es debido únicamente al equilibrio entre su tasa de natalidad y su tasa de mortandad: la velocidad de crecimiento de la población (o de decrecimiento, si nacen menos individuos de los que mueren) es proporcional al número de individuos que la componen.

Luego la ecuación diferencial de Malthus es

$$P'(t) = rP(t),$$

donde r es una constante típicamente positiva para poblaciones que no están condenadas a la extinción.

Desintegración Radiactiva: Los núcleos de determinados elementos químicos (radiactivos) se desintegran, transformándose en otros y emitiendo radiaciones. La velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva (es decir, el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo) en un instante dado es proporcional al número de átomos de dicha sustancia existente en ese instante. En consecuencia, si se denota por $A(t)$ el número de átomos de la sustancia original presentes en el instante t, se puede escribir:

$$A^{'}(t) = -\lambda A(t)$$

donde el signo menos se debe a que la velocidad es negativa (el número de átomos disminuye) y la constante de proporcionalidad, $\lambda > 0$, se llama constante de descomposición o de decaimiento, y es propia de cada sustancia radiactiva.

Dinámica de Crecimiento de un Individuo: modelo de Bertalanffy. En los años 50 del siglo XX, el biólogo austriaco Ludwing Von Bertalanffy (1901-1972) desarrolló un modelo matemático para la talla de un individuo en función de su edad, que se utiliza con frecuencia para predecir el tamaño de los peces.

Sea $L(t)$ la longitud del individuo en la edad t, y sea A la talla máxima de la especie, es decir, la talla máxima alcanzable por un pez adulto.

La ley de crecimiento de este modelo dice que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima permisible:

$$L^{'}(t) = k(A - L(t))$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie.

Ley de Enfriamiento de Newton: En determinadas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra. Si se denota por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t, la ley anterior se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$T'(t) = -k(T(t) - M)$$

donde M es la temperatura del medio (que se supone constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto.

Dinámica de poblaciones: modelo Presa-Depredador. El caso, mucho más complicado desde el punto de vista matemático, en que hay dos especies diferentes que interaccionan, también se puede representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, se considera el caso de un sistema presa-predador, es decir, de un ecosistema con dos poblaciones de dos especies distintas, en donde una de ellas es el alimento de la otra. Se denota por $p_1(t)$ el número de individuos de la población de presas y por $p_2(t)$ el número de individuos de la población de predadores.

2.1 Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales tienen diversas clasificaciones, en este sentido si se tiene en cuenta el tipo de derivadas que involucran pueden ser: Ordinarias y Parciales.

2.1.1 Ecuación Diferencial Ordinaria

Es una igualdad en que la incógnita es una función desconocida $y = f(x)$ definida y derivable hasta orden k para todo $x \in \mathbb{R}$ o para todo x en un intervalo abierto de números reales. El objetivo es hallar una función desconocida que es la incógnita de la ecuación diferencial, de la cual aparece en la ecuación algunas de sus derivadas. Por ejemplo la primera derivada $y' = f'(x)$, la segunda derivada $y'' = f''(x)$, o hasta la derivada de orden k de $f(x)$. Estructuralmente se busca que la ecuación tenga una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente.

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 10y = e^x$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6y$
3. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dy}{dx} = ln(x)$
4. $x\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} = 5$
5. $y\dfrac{dy}{dt} + 2\dfrac{dx}{dt} = e^t$

2.1.2 Ecuación Diferencial Parcial

Es aquella que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto de más de una variable independiente. Por lo general provienen de funciones o relaciones de varias variables independientes.

Las siguientes ecuaciones diferenciales son parciales:

1. $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4} = f(x, y)$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + h(x, t)$ para $0 < x < 1$, en donde $u(0, t) = u(l, t), \ \ t > 0$ y además $u(x, 0) = f(x), \ \ 0 < x < 1$, satisfaciendo $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x), \ 0 < x < 1$

Las ecuaciones diferenciales se estudian desde perspectivas diferentes, la mayoría concernientes con el conjunto de relaciones matemáticas (algunas de estas funciones) que satisfacen la ecuación. Las ecuaciones diferenciales más simples se pueden resolver mediante fórmulas explícitas; sin embargo, pueden determinarse algunas propiedades de las soluciones de una cierta ecuación diferencial sin hallar su forma exacta.

Cuando la solución exacta de una ecuación diferencial no puede hallarse facilmente, ésta puede obtenerse numéricamente utilizando programas de computadoras. Por otro lado, la teoría de Sistemas Dinámicos hace énfasis en el análisis cualitativo de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, mientras que muchos métodos numéricos han sido desarrollados para determinar soluciones con cierto grado de exactitud.

2.1.3 Orden de una Ecuación Diferencial

El orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que ésta incluya.

Ejemplos:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$ es una ecuación diferencial de orden 2.
2. $y''' + y'' + y' + y = sen3x$ es una E.D de orden 3.
3. $(x+y)dx = (y-x)dy$ es una E.D de primer orden.
4. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$ es una E.D de orden 4.
5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ es una E.D de segundo orden.
6. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = y$ es una E. D de primer orden.

2.1.4 Grado de una Ecuación Diferencial

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente que tenga la derivada de mayor orden que incluya.

Ejemplos:

1. $e^x\dfrac{d^2y}{dx^2} + senx\dfrac{dy}{dx} = x$ es una E.D de 2^{do} orden y 1^{er} grado.

2. $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$ es una E.D de 3^{er} orden y 2^{do} grado.

3. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \dfrac{dy}{dx} = tanx$ es una E.D de 3^{er} orden y 1^{er} grado.

4. $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ es una E.D de 1^{er} orden y 1^{er} grado.

5. $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^4 - \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + xy = 0$ es una E.D de 3^{er} orden y 4^{to} grado.

6. $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x^2\dfrac{dy}{dx} + 2xy - x^2e^x = 0$ es una E.D de 2^{do} orden y 1^{er} grado.

La razón acabará por tener razón
Jean Le Rond DÁlembert

CAPÍTULO
3

Técnicas Básicas Para Resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En términos generales, no es sencillo resolver ecuaciones diferenciales de primer orden; a través de los años, los matemáticos han tratado de resolver muchas ecuaciones especializadas. Por ello hay muchos métodos; sin embargo, lo que funciona bien con un tipo de ecuación de primer orden no necesariamente se aplica a otros. Con frecuencia, para resolver las ecuaciones diferenciales se tendrá que integrar y quizá la integración requiera alguna técnica especial.

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una expresión que relaciona una variable independiente x con una variable dependiente $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad \text{con} \quad x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

La solución general de una ecuación diferencial de primer orden es una familia de funciones $y = y(x, C)$ dependiente de un parámetro (o constante arbitraria) C

que nos proporciona todas las posibles soluciones de la ecuación diferencial. Por ejemplo, la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = -y \quad \text{es} \quad y = Ce^{-x} \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

En efecto, cualquier función de la forma anterior es solución de la ecuación:

$$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x)$$

Resolver una ecuación diferencial significa obtener todas sus soluciones, esto es, hay que determinar su solución general. La inmensa mayoría de ecuaciones diferenciales no pueden resolverse mediante métodos analíticos, es decir, no es posible obtener una expresión exacta de la solución $y = y(x, C)$.
En este capítulo estudiaremos métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.1 Problemas de valor inicial

Hemos visto que la solución general de una ecuación diferencial de primer orden, que supondremos escrita en forma normal

$$y' = f(x, y)$$

depende de una constante arbitraria C, esto es, $y \equiv y(x, C)$. En particular, la ecuación diferencial posee un número infinito de soluciones, aunque todas ellas se diferencian únicamente en el valor de la constante C. Supongamos que estamos interesados en elegir, de entre todas las posibles soluciones, aquella que en el punto a toma un cierto valor y_0. En tal caso, estamos ante un problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b] \quad \text{con} \quad y(a) = y_0$$

La condición $y(a) = y_0$ se denomina condición inicial. Bajo hipótesis adecuadas de regularidad sobre la función $f(x, y)$, puede demostrarse que el problema de valor inicial posee una única solución. El valor correspondiente de la constante c se determina imponiendo la condición inicial en la solución general; dicho de otro modo, hay que resolver la ecuación $y(a, c) = y_0$.

Ejemplo 1: Comprobar que la ecuación diferencial $y = ce^x$ es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación $y' = y$, de primer orden, en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solución: Se especifica una condición inicial, por ejemplo, $y(0) = 3$. Vemos que al sustituir $x = 0$ y $y = 3$ en la familia, se determina la constante, esta es, $c = 3$. Por consiguiente, la función $y = 3e^x$, es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \qquad y(0) = 3$$

Ahora bien, si queremos que una solución de la ecuación diferencial pase por el punto $(1, -2)$, hacemos, $y(1) = -2$, que da como resultado $c = -2e^{-1}$. La función $y = -2e^{x-1}$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \qquad y(1) = -2$$

Ejemplo 2: El problema de valor inicial $y' = 2x$, con condición inicial $y(0) = 1$, tiene una única solución, ya que si primero se integra y se halla el valor de la constante c, se obtiene que la solución es

$$y = x^2 + 1$$

3.2 Ecuaciones de variables separables

Son aquellas que pueden ser escritas en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad (1)$$

donde $g(x)$ y $h(y)$ son funciones de una sola variable. Para resolver (1) se multiplican ambos miembros por $h(y)$ para obtener

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (2)$$

Ahora se observa que si $y = f(x)$ es una solución de (2), al tener que verificar dicha ecuación, entonces se cumple que

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

por lo que al integrar se obtendrá

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c \qquad (3)$$

Pero como $dy = f'(x)dx$, entonces (3) se puede escribir así:

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \qquad (4)$$

De modo que (4) constituye una familia uniparamétrica de soluciones, que generalmente vienen expresadas de forma implícita.

De la ecuación (1) obtenemos $h(y)dy = g(x)dx$ y, finalmente, integramos ambos miembros para obtener la solución general de la ecuación dada.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial $y' = y^2 - 4$.

Solución: Note que $y' = y^2 - 4$ equivale a $\frac{1}{y^2-4}dy = dx$. Luego, para integrar en ambos miembros, utilizaremos

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{-1/4}{y+2} + \frac{1/4}{y-2}$$

de donde se obtiene

$$-\frac{1}{4}ln \mid y+2 \mid + \frac{1}{4}ln \mid y-2 \mid = x + c_1$$

es decir

$$-ln \mid y+2 \mid + ln \mid y-2 \mid = 4x + 4c_1$$

y por lo tanto

$$ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2 \longleftrightarrow \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{4x+c_2} = c_3e^{4x} \longleftrightarrow \left|\frac{y-2}{y+2}\right| = ce^{4x},$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Finalmente se encuentra que

$$y = 2\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$

Solución: Organizando y agrupando los términos tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-1)(x+2)}{(x-3)(y+1)}$$

Al separar las variables se obtiene

$$\frac{y+1}{y-1}dy = \frac{x+2}{x-3}dx$$

Para poder integrar sumamos y restamos 1 en el numerador del miembro de la izquierda, igualmente sumamos y restamos 5 en el derecho y así tenemos

$$\int dy + 2\int \frac{dy}{y-1} = \int dx + 5\int \frac{dx}{x-3}$$

Luego se tiene como resultado

$$y = x + \frac{5}{2}ln\left|\frac{x-3}{y-1}\right| + c$$

Ejemplo 3: Resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición inicial respectiva

$$(1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0 \qquad\qquad y(1) = 0$$

Solución: Separando variables para integrar la ecuación tenemos:

$$\int \frac{dy}{1+4y^2}dy = -\int \frac{x}{1+x^4}dx$$

pero,

$$\int \frac{dy}{1+4y^2}dy = \int \frac{dy}{1+(2y)^2}dy = \frac{1}{2}arctan(2y)$$

Para realizar la integral con respecto a x hacemos la sustitución $x^2 = u$, así $x = \sqrt{u}$, entonces $x^4 = u^2$, luego $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}du$, de esta manera la ecuación queda de la siguiente forma

$$-\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{du}{2(1+u^2)} = \frac{1}{2}arctan(u) + \frac{1}{2}arctan(c)$$

Sustituyendo de nuevo tenemos que

$$-\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}arctan(x^2) + \frac{1}{2}arctan(c)$$

Al igualar los resultados de las integrales derecha e izquierda encontramos

$$\frac{1}{2}arctan(2y) = \frac{1}{2}arctan(x^2) + \frac{1}{2}arctan(c)$$

es decir,

$$2y = tan(arctan(x^2) + arctan(c))$$

Para despejar y utilizamos la identidad trigonométrica

$$tan(A+B) = \frac{tan(A) + tan(B)}{1 - tan(A)tan(B)}$$

y por lo tanto:

$$2y = \frac{tan(arctan(x^2)) + tan(arctan(c))}{1 - tan(arctan(x^2))tan(arctan(c))}$$

es decir: $2y = \dfrac{x^2+c}{1-x^2c}$ o equivalentemente $y = \dfrac{x^2+c}{2(1-cx^2)}$

Sustituyendo la condición inicial se tiene que $c = -1$, entonces una solución particular de la ecuación diferencial es

$$y = \frac{x^2-1}{2(1+x^2)}$$

3.3 Ecuaciones Exactas

Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

donde M y N poseen derivadas parciales primeras continuas en todos los puntos (x,y) de un dominio rectangular D.

$i.$ Si la ecuación diferencial (1) es exacta en D, se verifica

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (2)$$

para todo $(x, y) \in D$.

$ii.$ Recíprocamente, si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$, entonces la ecuación diferencial (1) es exacta en D

DEMOSTRACIÓN :

$i.$ Si la ecuación diferencial (1) es exacta en D, se verifica que $Mdx + Ndy$ es una diferencial exacta en D. Luego, existe una función F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Por tanto,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Entonces

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad y \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. Pero, usando la continuidad de las derivadas parciales primeras de M y N, tenemos

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

y, en consecuencia

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$.

$ii.$ Debemos probar que si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y) \in D$, entonces $Mdx + Ndy = 0$ es exacta en D. Esto significa que hemos de probar que existe una función F que verifica

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad (3)$$

y

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (4)$$

para todo $(x,y) \in D$. Ciertamente podemos hallar alguna $F(x,y)$ que satisfaga (3) o (4), pero ¿las dos simultáneamente?. Supongamos que F satisface (3) y operemos. Entonces

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y), \qquad (5)$$

donde $\int M(x,y)\partial x$ indica una integración parcial con respecto a x, manteniendo y constante, y ϕ es una función arbitraria de y solamente. La función $\phi(y)$ que necesitamos en (5) ha de ser tal que $F(x,y)$ dada por (5) represente todas las soluciones de (3). Esta corresponde a una constante de integración en el caso de “una variable”. Efectuando la diferenciación parcial de (5) respecto a y, obtenemos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Puesto que (4) ha de satisfacerse, hemos de tener

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} \qquad (6)$$

y, en consecuencia,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x \qquad (7)$$

Puesto que ϕ es función de y únicamente, la derivada $d\phi/dy$ ha de ser también independiente de x.

Demostraremos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right] = 0$$

Resulta inmediatamente que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

Si han de satisfacerse (4) y (5) hemos de tener, usando la hipótesis (2),

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)\partial x$$

Así,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)\partial x$$

y, en consecuencia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.$$

Pero, según la hipótesis (2),

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y)\in D$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=0$$

para todo $(x,y)\in D$, y de esta manera (7) es independiente de x. Podemos escribir entonces

$$\phi(y)=\int\left[N(x,y)-\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right]dy$$

Sustituyendo $\phi(y)$ en la ecuación (5) por este valor, tendremos

$$F(x,y)=\int M(x,y)\partial x+\int\left[N(x,y)-\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right]dy$$

Esta función $F(x,y)$ satisface (4) y (5) para todo $(x,y)\in D$, de modo que $Mdx+Ndy=0$, es exacta en D.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial $2xydx+(x^2-1)dy=0$

Solución: Ll amando $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$ entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En consecuencia, la ecuación es exacta. Por tal motivo existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$f(x, y) = x^2y + g(y)$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \quad = \quad N(x, y)$$

Es decir,

$$g'(y) = -1 \quad y \quad g(y) = -y$$

En conclusión, la solución general es $f(x, y) = x^2y - y = c$ o simplemente $x^2y - y = c$.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación diferencial

$$(e^{2y} - ycosxy)dx + (2xe^{2y} - xcosxy + 2y)dy = 0$$

Solución: La ecuación es exacta pues al hacer
$M(x, y) = e^{2y} - ycosxy$ y $N(x, y) = 2xe^{2y} - xcosxy + 2y$, tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xysenxy - cosxy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Luego, existe una función $f(x, y)$ para la cual

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si $\partial f/\partial y = N(x,y)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - xcosxy + 2y$$

y por tanto,

$$f(x,y) = 2x\int e^{2y}dy - x\int cosxydy + 2\int ydy = xe^{2y} - \sin xy + y^2 + h(x)$$

esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - ycosxy + h'(x) = e^{2y} - ycosxy = M(x,y)$$

así que $h'(x) = 0$, y por tanto $h(x) = c$. Por consiguiente, una familia de soluciones es

$$xe^{2y} - senxy + y^2 + c = 0.$$

Ejemplo 3 Resuelva la ecuación diferencial sujeta a la condición inicial respectiva

$$\left(\frac{1}{1+y^2} + cos(x) - 2xy\right)\frac{dy}{dx} = y\left(y + sen(x)\right); \qquad y(0) = 1$$

Solución: Haciendo

$$M(x,y) = \frac{1}{1+y^2} + cos(x) - 2xy \quad \text{y}$$
$$N(x,y) = -y\left(y + sen(x)\right) = -y^2 - ysen(x)$$

Es claro que

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -sen(x) - 2y = \frac{\partial N}{\partial y}$$

por lo tanto, la ecuación diferencial es exacta, es decir, existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} + cos(x) - 2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -y^2 - ysen(x)$$

Integrando la primera ecuación con respecto a y se obtiene

$$f(x,y) = \int \frac{1}{1+y^2}dy + cos(x)\int dy - 2x\int ydy + A(x)$$
$$= arctan(y) + ycos(x) - xy^2 + A(x)$$

Ahora
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -ysen(x) - y^2 + A'(x) = N(x,y)$$
integrando con respecto a x, encontramos que $A(x) = c$, luego
$$f(x,y) = arctan(y) + ycos(x) - xy^2 + c$$
es decir,
$$c = arctan(y) + ycos(x) - xy^2$$
Al reemplazar la condición inicial y simplificando se encuentra que $c = 46$, y así la solución particular es
$$arctan(y) + ycos(x) - xy^2 = 46$$

3.3.1 Factores Integrantes

De lo estudiado anteriormente, encontramos que dada la ecuación diferencial $M(x,y)dx+ N(x,y)dy = 0$, si $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, la ecuación es exacta y podemos obtener una familia uniparamétrica de soluciones mediante cualquiera de los procedimientos explicados anteriormente. Sin embargo, si
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$
la ecuación no es exacta y no pueden aplicarse los métodos anteriores. ¿Qué hacer en tal caso?: Podemos multiplicar esta ecuación, que no es exacta, por alguna expresión que la transforme en una ecuación exacta, esencialmente equivalente. Si esto es posible, se puede proceder a resolver la ecuación exacta resultante por uno de los métodos previos.
Consideremos la ecuación
$$ydx + 2xdy = 0$$
que evidentemente no es una ecuación exacta. Sin embargo, si multiplicamos esta ecuación por y, se transforma en la ecuación
$$y^2dx + 2xydy = 0,$$

la cual es exacta y por lo tanto integrable. Llamamos a y *factor integrante* de la ecuación $ydx + 2xdy = 0$. De acuerdo al resultado anterior se tiene la siguiente definición.

Definición: Si la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (a)$$

no es exacta en su dominio D, pero la ecuación diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (b)$$

es exacta en D, la función $\mu(x,y)$ recibe el nombre de factor integrante de la ecuación diferencial (a).

Ejemplo: Consideremos la ecuación diferencial

$$(3y + 4xy^2)dx + (2x + 3x^2y)dy = 0 \qquad (c)$$

Es claro que esta no es exacta, pues llamando

$$M(x,y) = 3y + 4xy^2 \quad , \quad N(x,y) = 2x + 3x^2y$$

entonces

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3 + 8xy \quad , \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2 + 6xy.$$

con lo cual

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

excepto para los $(x,y) \in D$ que satisfacen $2xy + 1 = 0$, la ecuación (c) no es exacta.

Sea $\mu(x,y) = x^2y$. Entonces la ecuación diferencial de la forma (b) es

$$(3x^2y^2 + 4x^3y^3)dx + (2x^3y + 3x^4y^2)dy = 0.$$

La cual es exacta en todo $D \subseteq \mathbb{R}^2$, pues

$$\frac{\partial[\mu(x,y)M(x,y)]}{\partial y} = 6x^2y + 12x^3y^2 = \frac{\partial[\mu(x,y)N(x,y)]}{\partial x}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto $\mu(x,y) = x^2y$ es un factor integrante para la ecuación (c).

3.4 Ecuaciones Lineales

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es lineal considerando a y como *variable dependiente* y a x como *variable independiente*, si está escrita, o se puede escribir, en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

Por ejemplo, la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$$

es una ecuación diferencial lineal de primer orden ya que puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) y = x^2$$

que es de la forma (1) con $P(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $Q(x) = x^2$.

Note que si se escribe la ecuación (1) como

$$[P(x)y - Q(x)]\, dx + dy = 0 \quad (2)$$

esta es de la forma $M(x,y)dx + n(x,y)dy = 0$, donde

$$M(x,y) = P(x,y)y - Q(x,y) \quad \text{y} \quad N(x,y) = 1$$

Ahora, puesto que $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x,y)$, y , $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$

La ecuación (2) no es exacta a menos que $P(x,y) = 0$ en cuyo caso la ecuación (1) se convierte en una de variables separables. Sin embargo, la ecuación (2) posee un factor integrante que sólo depende de x y que puede hallarse fácilmente.

Al multiplicar la ecuación (2) por $\mu(x)$ se obtiene:

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]\, dx + \mu(x)dy = 0 \quad (3)$$

Donde $\mu(x)$ es un factor integrante para la ecuación (3) si y sólo si dicha ecuación es exacta, es decir, si y sólo si:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x,y)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)]$$

Esta condición se reduce a:

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx}\left[\mu(x)\right] \qquad (4)$$

En esta última ecuación P es una función conocida de la variable independiente x, mientras que μ es una función desconocida de x que debemos encontrar. En consecuencia, la ecuación (4) puede escribirse como

$$\mu P(x) = \frac{d\mu}{dx},$$

Esta ecuación diferencial es separable, de la cual se obtiene

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = P(x)dx$$

Al integrar a cada lado de la ecuación resulta

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx \text{ o } \mu = e^{\int P(x)dx} \text{ (5)}$$

donde $\mu > 0$. Por lo tanto, la ecuación lineal (1) posee un factor integrante de la forma (5). Multiplicando (1) por el factor integrante se obtiene

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

que se reescribe como:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Al integrar a cada lado esta última ecuación no solo encontramos su solución, sino también, la solución a la ecuación (1), esta es

$$e^{\int P(x)dx}y = \int (e^{\int P(x)dx}Q(x))dx + c$$

Donde c es una constante arbitraria.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$

Solución: En este caso,

$$P(x) = \left(\frac{2x+1}{x}\right)$$

y por lo tanto el factor integrante es:

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \left(\frac{2x+1}{x}\right)dx} = e^{2x+\ln|x|} = e^{2x}e^{\ln|x|} = xe^{2x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante obtenemos

$$xe^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}(2x+1)\,y = x$$

Es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{2x}y\right) = x$$

Al integrar en ambos lados se llega a

$$xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c$$

es decir,

$$y = \frac{1}{2}xe^{-2x} + c\frac{e^{-2x}}{x}$$

Donde c es una constante arbitraria.

3.5 Ecuación De Bernoulli

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

se denomina ecuación diferencial de Bernoulli.

Si $n = 0$ o $n = 1$, es en realidad una ecuación lineal y por lo tanto, es fácil de solucionar. En caso de que $n > 1$ se debe proceder de una manera diferente.

La sustitución $v = y^{1-n}$ transforma la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (6)$$

a una ecuación lineal en v.

DEMOSTRACIÓN: Multipliquemos la ecuación (6) por y^{-n}

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad (7)$$

Ahora utilizamos la sustitución propuesta: $v = y^{1-n}$, entonces

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

y la ecuación (7) se transforma en

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

o de otra manera en

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Ahora hacemos

$$P_1(x) = (1-n)P(x)$$
$$Q_1(x) = (1-n)Q(x)$$

Luego a ecuación se escribe ahora como

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)$$

que es lineal en la variable v.

Ejemplo: Resolver La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^3$

Solución: Vemos que el mayor grado de los exponentes de y es 3, de donde podemos afirmar que $n = 3$, por lo cual multiplicamos la ecuación diferencial por y^{-3}, es decir,

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + y^{-2} = x$$

Ahora hacemos $v = y^{1-n} = y^{-2}$ entonces $\dfrac{dv}{dx} = -2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}$, la ecuación anterior se transforma en

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v = x$$

Ahora que es una ecuación lineal, se va a escribir en la forma

$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

Ahora se procede a calcular el factor integrante

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$$

Multiplicando por el factor integrante

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} - 2ve^{-2x} = -2xe^{-2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}v\right) = -2xe^{-2x}$$

y al integrar se obtiene

$$e^{-2x}v = \frac{1}{2}e^{-2x}\left(2x+1\right) + c$$

$$v = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

donde c es una constante arbitraria, ademas $v = \dfrac{1}{y^2}$, ahora tenemos:

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

Reconozco al león por sus garras.

Johann Bernoulli

CAPÍTULO

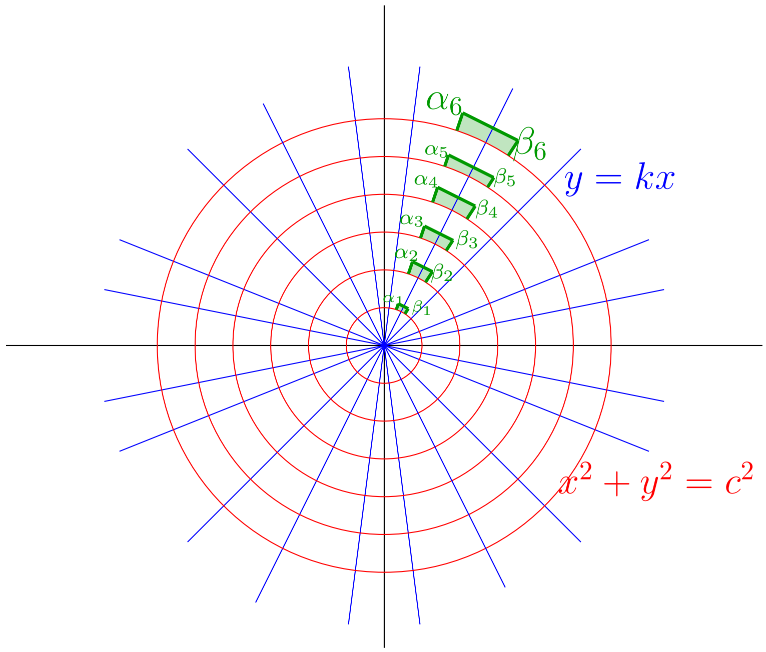
4

Aplicaciones

4.1 Trayectorias Ortogonales

Definición: Sea $F(x, y, c) = 0$ *una familia uniparamétrica dada de curvas en el plano* XY. Cuando una curva corta a las curvas de la familia $F(x, y, c) = 0$ en ángulos rectos recibe el nombre de **trayectoria ortogonal** a la familia dada.

Ejemplo: Dada la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$, con centro en el origen y radio c, cada recta de la forma $y = kx$ que pasa por el origen es una trayectoria ortogonal a la familia de circunferencias dada.



Para hallar las Trayectorias Ortogonales a una familia de curvas dadas, se procede de la siguiente manera:

1. Partiendo de la familia de curvas de la forma $y = F(x, y, c) = 0$ se calcula $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$.

2. Se sustituye $f(x, y)$ por $-\dfrac{1}{f(x, y)}$ que es su recíproca cambiada de signo. Esto es
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

3. Luego se obtiene una familia uniparamétrica $G(x, y, c) = 0$ o $y = F(x, c)$ que corresponde a la familia de trayectorias ortogonales.

Ejemplo 1: Hallar las trayectorias ortogonales a la familia de parábolas $y = cx^2$.
El procedimiento es el siguiente:

1. En primer lugar $\dfrac{dy}{dx} = 2cx$. Ahora, de la relación $y = cx^2$ tenemos que $c = \dfrac{y}{x^2}$, por tanto
$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x^2}x = \frac{2y}{x}$$

2. Como $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$, su recíproca negativa es $-\dfrac{1}{f(x,y)} = -\dfrac{x}{2y}$ y así,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

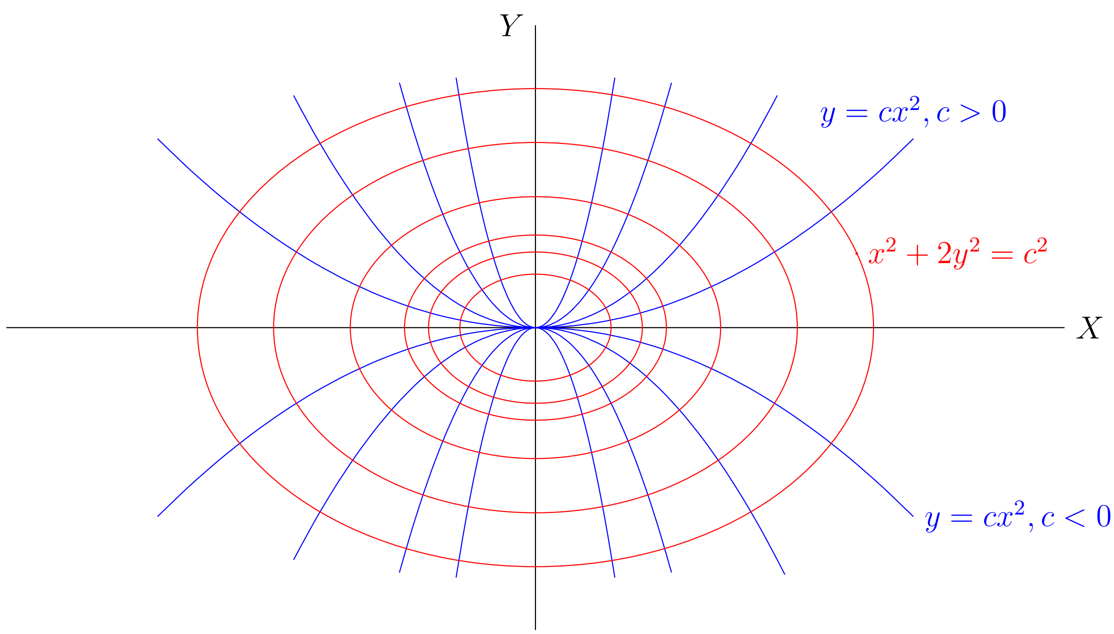
3. Resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables se encuentra que

$$2ydy = -xdx$$

y al integrarla

$$x^2 + 2y^2 = k^2$$

Donde k es una constante arbitraria. La siguiente gráfica representa la familia de parábolas con sus trayectorias ortogonales, que es una familia de elipses.

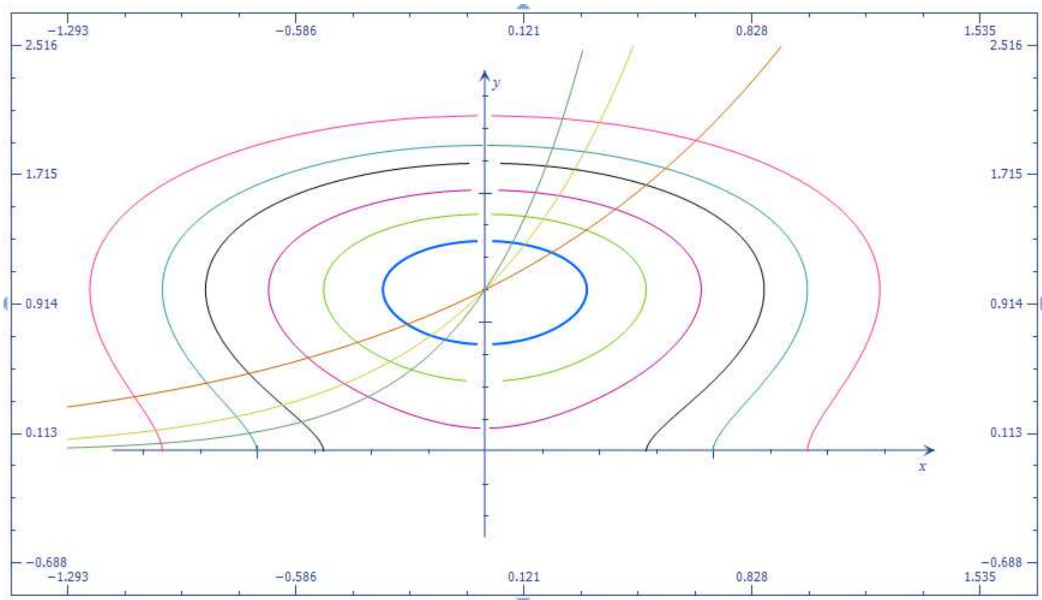


Ejemplo 2: Hallar las trayectorias ortogonales a la familia uniparamétrica $y = e^{cx}$. Análogamente al anterior se tiene

1. Como $\dfrac{dy}{dx} = ce^{cx}$, eliminando el parámetro c obtenemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \ln y}{x}$

2. Reemplazando $f(x, y)$ se tiene que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y \ln y}$

3. Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene $y^2(2 \ln y - 1) = -2x^2 + k$.



4.2 Trayectorias oblicuas

Definición: Si $F(x, y, c) = 0$ es una familia uniparamétrica de curvas, se denomina trayectoria oblicua a la familia dada, a una curva que las corta formando ángulos constantes, diferentes de 90^o.

Para hallar trayectorias oblicuas a una familia uniparamétrica de curvas se procede como sigue:

1. Se halla la ecuación diferencial de la familia $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ y luego se elimina la constante (parámetro).

2. En la anterior ecuación diferencial se sustituye $f(x, y)$ por $\dfrac{f(x, y) + \tan\alpha}{1 - f(x, y)\tan\alpha}$

3. Se resuelve la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x,y) + \tan\alpha}{1 - f(x,y)\tan\alpha}$

Ejemplo 1: Hallar una familia de trayectorias oblicuas que corte a la familia de lineas rectas $y = cx$ formando un ángulo de 45^o.

Solución:

Como $\dfrac{dy}{dx} = c$, al eliminar el parámetro c tenemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} = f(x,y)$.

Luego $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{y}{x} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \frac{y}{x}\tan\frac{\pi}{4}}$, donde $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, y por tanto $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Esta ecuación es homogénea y por lo tanto se hace la sustitución $y = vx$ y se obtiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}$$

Al simplificar y organizar se llega a

$$\frac{(v-1)dv}{v^2+1} = -\frac{dx}{x}$$

Integrando resulta

$$\frac{1}{2}\ln(v^2+1) - \arctan v = -\ln|x| - \ln|c|$$

Al sustituir v por $\dfrac{y}{x}$ y organizar nuevamente se obtienen las trayectorias:

$$\ln c^2(x^2+y^2) - 2\arctan\frac{y}{x} = 0$$

Ejemplo 2: Hallar una familia de trayectorias oblicuas que corte a la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$ formando un ángulo de 45^o.

Solución:

Como $F(x,y,c) = x^2 + y^2 - c^2 = 0$, entonces $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0$ y por tanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Como $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \tan\theta = 1$ y así

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{x}{y} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \dfrac{x}{y}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{y - x}{x + y}$$

Esta ecuación es homogénea y al hacer la sustitución $y = vx$ se obtiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1}$$

es decir

$$\frac{(v^2 - v + 2)dv}{v+1} = -\frac{dx}{x}$$

Integrando resulta

$$\frac{v^2}{2} + 2v + \ln|v+1| = -\ln|x| - \ln|c|$$

al sustituir v por $\dfrac{y}{x}$ y organizar se obtiene:

$$\ln|xc| = \frac{y^2}{2x^2} + \frac{2y}{x} + \ln|\frac{y}{x} + 1|$$

que corresponde a las trayectorias oblicuas de la familia $x^2 + y^2 = c^2$.

4.3 Problemas de mecánica

Las ecuaciones diferenciales pueden aplicarse también para resolver problemas de la mecánica clásica o Newtoniana. A continuación se hace un breve repaso de algunos conceptos y principios de esta disciplina.

Se define la *cantidad de movimiento* de un cuerpo como el producto de su masa m por su velocidad v, es decir, $\vec{p} = m\vec{v}$. La velocidad, y por tanto, la cantidad de movimiento, son magnitudes vectoriales.

Leyes de Newton: También conocidas como leyes del movimiento de Newton, son tres principios a partir de los cuales se explican una gran parte de los problemas planteados en mecánica clásica, en particular aquellos relativos al movimiento de los cuerpos, que revolucionaron los conceptos básicos de la física y el movimiento de los cuerpos en el universo.

Primera ley: Un objeto continua moviéndose con velocidad constante a menos que actúe una fuerza externa. Si el objeto esta en reposo, continuará en reposo a menos que exista una fuerza externa.

Segunda ley: La variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y su sentido es el de la fuerza resultante. Matemáticamente esto se escribe como

$$m\frac{dv}{dt} = KF$$

donde m es la masa del cuerpo, v su velocidad, F la fuerza resultante que actúa sobre él y K una constante de proporcionalidad. La cantidad $\frac{dv}{dt}$ corresponde a la aceleración a que experimenta el cuerpo. Si la masa m es constante, entonces

$$a = K\frac{F}{m} \text{ o bien, } F = kma$$

donde $k = \frac{1}{K}$ y $a = \frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo.

Como ejemplo, considérese un balón que se deja caer desde la terraza de un edificio, ¿cuál es la posición $s(t)$ respecto al suelo en el tiempo t?. Como $v = \frac{ds}{dt}$ y $a = \frac{dv}{dt}$ entonces la aceleración del balón es la segunda derivada de la posición con respecto all tiempo, es decir $a = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Suponiendo que la aceleración para arriba es positiva y que no actúa otra fuerza además de la gravedad, entonces

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g$$

es decir, la fuerza neta es solamente el peso del balón cerca de la superficie de la tierra.

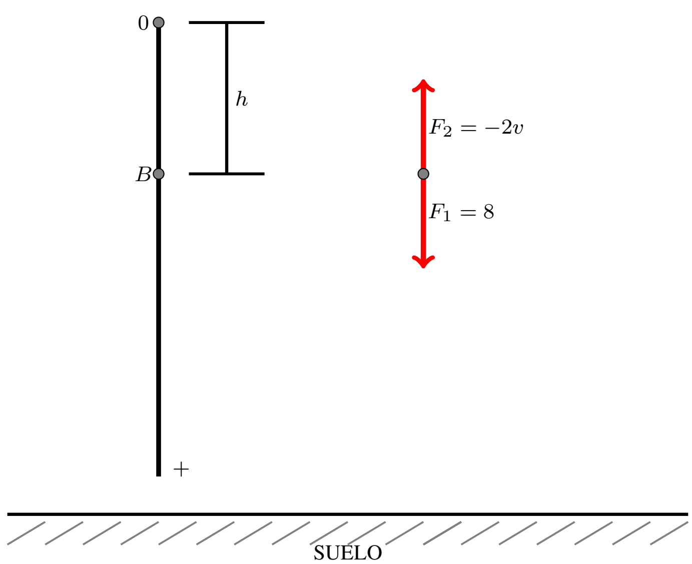
Tercera ley: Siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, este ejerce una fuerza de igual magnitud pero en sentido opuesto a la del primer objeto.

4.3.1 Problemas sobre caída de los cuerpos

Un cuerpo encuentra en su caída una resistencia por parte del aire, resistencia que depende de la velocidad instantánea v del cuerpo. En el caso más elemental la resistencia k se considera lineal, es decir $R = kv$ y es de tipo cuadrático, osea $R = kv^2$, esto depende de las condiciones del problema. La constante k de proporcionalidad puede depender, a su vez, de varias circunstancias.

Ejemplo 1: Un cuerpo de 8 lb de peso cae partiendo del reposo desde una gran altura. Conforme cae, actúa sobre él la resistencia del aire (en libras) numéricamente igual a $2v$, siendo v la velocidad en pies por segundo (ft/s). Hallar la velocidad y la distancia recorrida al cabo de t segundos.

Solución: Elegimos al eje vertical Y hacia abajo positivo y sea $h = OB$ la distancia recorrida por el cuerpo en el tiempo t, es decir $h = h(t)$. Sea además O el punto en que el cuerpo inicia su caída. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son F_1, su peso, 8 lb, actuando hacia abajo y, por tanto positivo, y, F_2, la resistencia del aire, numéricamente igual a $2v$, pero como están hacia arriba, entonces $f = -2v$.



De acuerdo a la segunda ley de Newton, $F = ma$, se transforma en

$$m\frac{dv}{dt} = 8 - 2v$$

tomando $g = 9,8$ y como $w = mg$ es el peso del cuerpo, entonces $m = \frac{w}{g} = \frac{8}{9,8}$ y por tanto

$$\frac{8}{9,8}\frac{dv}{dt} = 8 - 2v$$

o bien

$$\frac{dv}{1 - \frac{1}{4}v} = 9,8dt$$

que es una ecuación diferencial separable. Integrando tenemos que

$$-4ln \mid 1 - \frac{1}{4}v \mid = 9,8t + c_0$$

es decir,

$$1 - \frac{1}{4}v = c_1 e^{\frac{9,8}{4}t}$$

Puesto que el cuerpo se encontraba inicialmente en reposo, entonces $v(0) = 0$, así que $c_1 = 1$. La velocidad en el instante t esta dada por

$$v(t) = -4\left(1 - e^{-\frac{9,8}{4}t}\right) \qquad (1)$$

Para determinar la distancia recorrida en el instante t, tenemos en cuenta que $v = \frac{dh}{dt}$, es decir

$$\frac{dh}{dt} = -4\left(1 - e^{-\frac{9,8}{4}t}\right)$$

Separando variables e integrando la ecuación anterior se tiene

$$h(t) = 4\left(t + \frac{4}{9,8}e^{-\frac{9,8}{4}t}\right) + c_2$$

Como $h = 0$ cuando $t = 0$, encontramos que $c_2 = -\frac{4}{9,8}$, por lo tanto, la distancia recorrida esta dada por

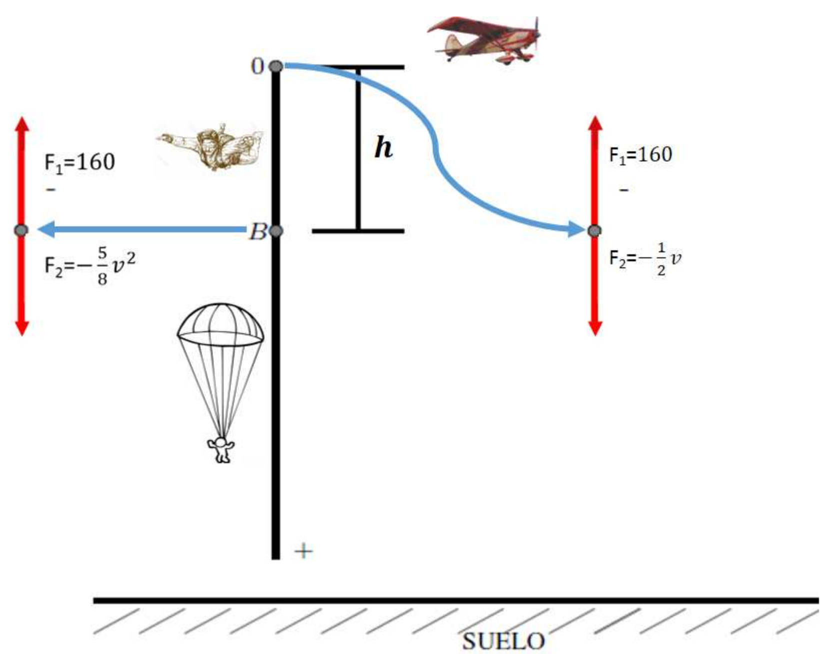
$$h(t) = 4\left(t + \frac{4}{9,8}e^{-\frac{9,8}{4}t} - \frac{1}{9,8}\right)$$

Es claro que la ecuación (1) demuestra que cuando $t \longrightarrow \infty$, la velocidad v se aproxima a la velocidad límite 4 (m/seg) (el signo es negativo por el sentido del movimiento). Se observa también que esta velocidad límite se alcanza aproximadamente en un tiempo muy corto. La última ecuación demuestra que cuando $t \longrightarrow \infty$, la función $h(t)$ también se hace infinita.

Ejemplo 2: Un paracaidista bien equipado cae hacia la superficie terrestre partiendo del reposo. El peso total del hombre y su equipo es de 160 lb. Antes de que se abra el paracaídas, la resistencia del aire es en (libras) numéricamente igual a $\frac{1}{2}v$, donde v es la velocidad (en pies por segundo). El paracaídas se abre a los $5s$ de haber comenzado la caída y, después de abierto, la resistencia del aire es (en libras) numéricamente igual a $\frac{5}{8}v^2$, donde v es la velocidad (en pies por segundo). Hallar la velocidad del paracaidista

A. Antes de que se abra el paracaídas.

B. Después de la apertura del paracaídas.



Solución: Escogemos el eje Y positivo hacia abajo, con el origen situado en el comienzo de la caída. Para resolver la parte (A), las fuerzas que actúan sobre el paracaidista son, F_1, su peso de 160 lb actuando hacia abajo y, por tanto, positivo, y, F_2, la resistencia del aire, numéricamente igual a $\frac{1}{2}v$, actuando hacia arriba, y, en consecuencia negativo.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, $F = ma$, donde $F = F_1 + F_2$, es decir

$$m\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{1}{2}v$$

Como $m = \frac{w}{g}$, con $g = 32ft/s^2$, entonces $m = \frac{w}{g} = \frac{160}{32} = 5$, así

$$5\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{1}{2}v$$

Como el paracaidista se encontraba inicialmente en reposo, entonces $v = 0$ cuando $t = 0$, y por lo tanto antes de que el paracaídas se abra es válido afirmar que

$$5\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{1}{2}v \quad \text{con} \quad v(0) = 0$$

y separando variables, se obtiene

$$\frac{dv}{v - 320} = -\frac{1}{10}dt$$

es decir,

$$ln(v - 320) = -\frac{1}{10}t + c_0$$

o bien,

$$v(t) = 320 + ce^{-t/10}$$

Como $v(0) = 0$, entonces $c = -320$. Así que

$$v(t) = 320\left(1 - e^{-t/10}\right)$$

válida para $0 \leq t \leq 5$. En particular cuando $t = 5$, obtenemos

$$v_5 = 320\left(1 - e^{-1/2}\right) \approx 126ft/s$$

que es la velocidad en el momento en el que se abre el paracaídas.

Para la parte (B), razonando como en la parte (A), vemos que después de que el paracaídas se abra, las fuerzas que actúan sobre el paracaidista son, F_1, el peso del paracaidista, y, $F_2 = -\frac{5}{8}v^2$ (en lugar de $-\frac{1}{2}v$). Esto sugiere la ecuación diferencial

$$5\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{5}{8}v^2$$

Si el paracaídas se abre $5s$ después del comienzo de la caída, tendremos que la velocidad inicial para este trayecto es $v_i = v(5) = 126$ que es $v = v_5$ la velocidad alcanzada cuando se abrió el paracaídas. Luego,

$$5\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{5}{8}v^2 \quad \text{con} \quad v(i) = v_5 = 126$$

Simplificando y separando variables, se tiene

$$\frac{dv}{v^2 - 256} = -\frac{dt}{8}$$

Integrando en ambos lados

$$\frac{1}{32}ln\left(\frac{v-16}{v+16}\right) = -\frac{t}{8} + c_2$$

es decir,

$$ln\left(\frac{v-16}{v+16}\right) = -4t + c_1$$

por lo tanto,

$$\frac{v-16}{v+16} = ce^{-4t}$$

despejando para v se tiene

$$v(t) = \frac{16\left(ce^{-4t}+1\right)}{1-ce^{-4t}}$$

Como $v_i = v(5) = 126$, entonces $c = \frac{110}{142}e^{20}$, con lo que se obtiene

$$v(t) = \frac{16\left(\frac{110}{142}e^{20-4t}+1\right)}{1-\frac{110}{142}e^{20-4t}}$$

que es válida para $t \geq 5$.

La parte (A) sugiere que cuando $t \longrightarrow \infty$, la velocidad v se aproxima a la velocidad límite de $320ft/s$; si el paracaídas no se hubiese abierto nunca, el paracaidista hubiera llegado al suelo con una velocidad aproximada de $320ft/s$.

Los resultados de la parte (B), indican que cuando $t \longrightarrow \infty$, la velocidad v se aproxima a la velocidad límite $16ft/s$.

4.4 Mezclas

Se considera una sustancia Q que fluye con cierta rapidez a un recipiente que contiene una mezcla, la cual se mantiene homogénea gracias a un sistema que la agita constantemente. Esta mezcla fluye uniformemente hacia el exterior con una rapidez igual o diferente a la de la sustancia. Lo que se pretende es determinar la cantidad de sustancia Q en el tanque en el instante t.

Si x designa la cantidad Q de sustancia presente en cualquier instante t, la expresión $\dfrac{dx}{dt}$, representa la rapidez de variación de x respecto a t. Se va a denotar E la razón con la que Q entra al recipiente y S la razón con la que sale. Obteniendose la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = E - S$$

Ejemplo 1: Un tanque contiene inicialmente 50 litros de agua pura, en el instante $t = 0$ una solución que contiene 2 gramos de sal disuelta por litro de agua entra en el tanque a razón de 3 litros/min. La mezcla se mantiene homogénea por medio de agitación y esta mezcla bien agitada fluye simultáneamente al exterior del tanque a la misma razón con la que entra.

1. ¿Qué cantidad de sal hay en cualquier instante $t > 0$?
2. ¿Qué cantidad de sal hay presente al cabo de 25 minutos?
3. ¿Cuánta sal hay al cabo de mucho tiempo?

Solución:

Puesto que $\dfrac{dx}{dt} = E - S$, entonces

$$E = 2\frac{g}{lt} \cdot 3\frac{lt}{min} = 6\frac{g}{min}$$

Como la solución saliente es igual a la entrante, significa que el tanque mantendrá su volumen constante en cualquier instante t, además el tanque contiene x libras de sal en cualquier instante t, de forma que la concentración de sal es $\dfrac{x}{50}$ g/lt, como la razón saliente fluye a 3 lt/min entonces

$$S = \frac{x}{50}\frac{g}{lt} \cdot 3\frac{lt}{min} = \frac{3x}{50}\frac{g}{min}$$

Por lo anterior, la ecuación diferencial queda

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{50}$$

Separando variables se obtiene

$$\frac{dx}{100 - x} = \frac{3}{50}dt$$

que al integrar y ordenar queda

$$x(t) = 100 - ce^{-3t/50}$$

Como $x(0) = 0$, encontramos que $c = 100$. Por lo tanto, en cualquier instante $t > 0$ la cantidad de sal en el tanque esta dada por la fórmula

$$x(t) = 100(1 - e^{-3t/50})$$

2. Cuando $t = 25$, entonces

   $$x(25) = 100(1 - e^{-3(25)/50}) \approx 78 \;\; lb$$

   que indica que en el tanque hay aproximadamente 78 libras de sal luego de 25 minutos.

3. Como $x(t) = 100(1 - e^{-3t/50})$, cuando $t \to \infty$, $\dfrac{1}{e^{3t/50}} \to 0$ y $x(t) = 100$ lo que indica que al cabo de mucho tiempo el tanque contendrá 100 libras de sal.

Ejemplo 2: Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, que contiene 10 libras de sal disuelta. Le entra salmuera a razón de $1/2$ libra de sal por galón a un flujo de 6 galones por minuto. El contenido del tanque bien mezclado, sale a un flujo de 4 galones por minuto de solución. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.

Solución:

Como $\dfrac{dx}{dt} = E - S$, entonces $E = 0{,}5\dfrac{lb}{gal} \cdot 6\dfrac{gal}{min} = 3\dfrac{lb}{min}$. La solución entrante supera en dos galones a la saliente, esto significa que el tanque presenta un volumen variable en cualquier instante t. Este volumen es $100 + 2t$. Además el tanque contiene x libras de sal en cualquier instante t, de forma que la concentración de sal es $\dfrac{x}{100+2t}\dfrac{g}{gal}$. Como la razón saliente fluye a $4gal/min$ entonces

$$S = \frac{x}{100+2t}\frac{g}{gal} \cdot 4\frac{gal}{min} = \frac{2x}{50+t}$$

Por lo anterior, la ecuación diferencial para x como función de t es

$$\frac{dx}{dt} = 3 - \frac{2x}{50+t}$$

que se puede escribir como $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{2x}{50+t} = 3$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden cuyo factor integrante es $e^{2\int \frac{dt}{50+t}} = (50+t)^2$, al multiplicar por el factor integrante y organizar se tiene

$$\frac{d(x(50+t)^2)}{dt} = 3(50+t)^2$$

al integrar resulta

$$x(t) = t + 50 + \frac{c}{(t+50)^2}$$

Para calcular el parámetro c se utiliza la condición inicial $x(0) = 10$, obteniendose

$$10 = 0 + 50 + \frac{c}{(0+50)^2}$$

de donde $c = -100000$. Por lo tanto la cantidad $x(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier momento t es

$$x(t) = t + 50 - \frac{100000}{(t+50)^2}$$

La cantidad de gramos pasados 30 minutos es

$$x(30) = 30 + 50 - \frac{100000}{(30+50)^2} \approx 64lb$$

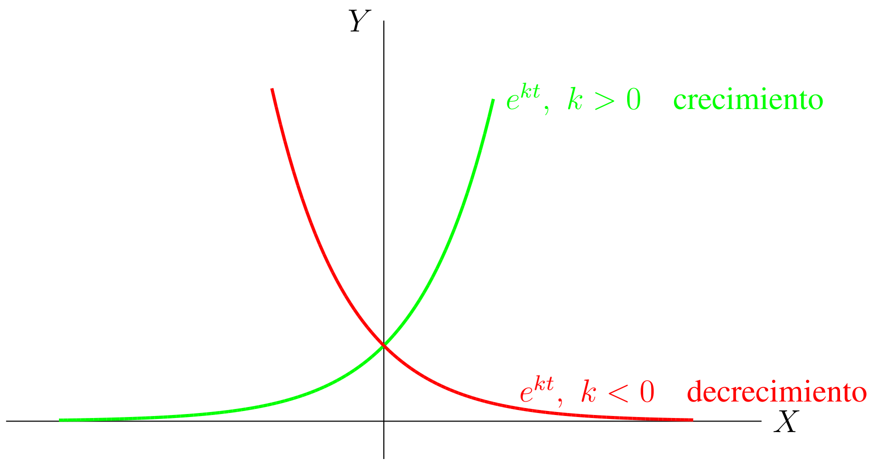
es decir, pasados 30 minutos hay aproximadamente 64 libras de sal en el tanque.

4.5 Rapidez de crecimiento y desintegración

Experimentalmente se ha observado que en cortos periodos de tiempo, la tasa de crecimiento de algunas poblaciones como las de bacterias o de animales pequeños, es proporcional a la población presente en cualquier momento. Si conocemos una población en cierto momento inicial arbitrario $P(t_0)$, que podemos considerar definido para $t_0 = 0$. Puede probarse que la población en cualquier instante futuro $t > t_0$ estará dada por el modelo $\frac{dP}{dt} = kP$ donde k es una constante de proporcionalidad.

En la física, el mismo modelo sirve para calcular la cantidad residual de una sustancia que se desintegra o decae en forma radiactiva. Igualmente esta ecuación diferencial sirve para describir la temperatura de un objeto que se enfría o que se calienta, partiendo de una temperatura inicial $T = T_0$.

Como muestra la siguiente figura, la función exponencial e^{kx} se incrementa al aumentar t, cuando $k > 0$ y disminuye al crecer t, cuando $k < 0$.



Por ello, los problemas que describen el crecimiento o aumento sea de poblaciones, bacterias o capitales, temperatura, etc. Se caracterizan con un valor positivo de k, mientras que cuando interviene un decrecimiento como por ejemplo la desintegración radiactiva, disminución de la temperatura (enfriamiento), se tiene un valor negativo de k. Por lo anterior, se dice que k es una constante de crecimiento si $k > 0$ o una constante de decrecimiento o de declinación si $k < 0$.

Se sabe que todos los procesos radiactivos siguen una ley exponencial decreciente. La vida media, o periodo de semidesintegración, se define como el tiempo que debe transcurrir para que la mitad de los núcleos radiactivos se desintegren. Si vamos representando en una gráfica el número N de átomos que quedan de una población inicial N_0, veremos que transcurrido un periodo de semidesintegración, la población se ha reducido a la mitad ($N = \frac{N_0}{2}$). Transcurrido un segundo periodo de semidesintegración, la población se ha reducido a la mitad de la mitad, es decir, a la cuarta parte ($N = \frac{N_0}{4}$), y así sucesivamente (si han transcurrido 10 tiempos de vida media quedará $\frac{N_0}{1024}$ veces el inicial).

Se ha observado que la variación de la población con respecto al tiempo es proporcional a la población en cierto instante, es decir

$$\frac{dP}{dt} \quad \alpha \quad kP$$

o equivalentemente

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \text{con} \quad P(t_0) = P_0$$

Donde P representa la población en algún instante t, k es la constante de crecimiento y P_0 la población inicial.

Separando variables para integrar se tiene

$$\int \frac{dP}{P} = k \int dt$$

$e^{\ln|P|} = e^{kt+c}$, la solución es:

$$P = ce^{kt}$$

Si $t = 0$, $P_0 = P(t_0)$, entonces $c = P_0$, por lo tanto

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

La ley de enfriamiento de Newton define que la variación de la temperatura con respecto al tiempo es proporcional a la temperatura en cierto instante, es decir

$$\frac{dT}{dt} \quad \alpha \quad kT$$

o equivalentemente

$$\frac{dT}{dt} = kT \quad \text{con} \quad T(t_0) = T_0$$

Donde T representa la temperatura en algún instante t, k es la constante de proporcionalidad de enfriamiento y T_0 la temperatura inicial.

Separando variables para integrar se tiene

$$\int \frac{dT}{T} = k \int dt$$

$e^{\ln|T|} = e^{kt+c}$, la solución es:

$$T = ce^{kt}$$

Si $t = 0$, $T_0 = T(t_0)$, entonces $c = T_0$, por lo tanto

$$T(t) = T_0 e^{kt}$$

Por último la desintegración de una sustancia con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad de sustancia en cierto instante, es decir

$$\frac{dQ}{dt} \quad \alpha \quad kQ$$

o equivalentemente

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \quad \text{con} \quad Q(t_0) = Q_0$$

Donde Q representa la cantidad de sustancia en algún instante t, k es la constante de proporcionalidad de desintegración de dicha sustancia y Q_0 la cantidad de sustancia inicial.

Separando variables para integrar se tiene

$$\int \frac{dQ}{Q} = k \int dt$$

$e^{\ln|Q|} = e^{kt+c}$, la solución es:

$$Q = ce^{kt}$$

Si $t = 0$, $Q_0 = Q(t_0)$, entonces $c = Q_0$, por lo tanto

$$Q(t) = Q_0 e^{kt}$$

Ejemplo 1: El coeficiente de variación instantánea con que se desintegran los núcleos radiactivos es proporcional al número de tales núcleos presentes en una muestra dada. La mitad del número original de núcleos radiactivos se ha desintegrado en un periodo de 1500 años. ¿Qué porcentaje de los núcleos radiactivos originales quedará al cabo de 4.500 años? ¿Cuánto tardará en reducirse a una décima parte del número original de núcleos?

Solución:
Este caso de decrecimiento, al resolver la ecuación $\dfrac{dx}{dt} = kt$, se obtiene

$$x(t) = ce^{kt}$$

como $x(0) = x_0$, entonces $c = x_0$ y así

$$x(t) = x_0 e^{-kt}$$

Puesto que $x(1500) = \dfrac{1}{2}x_0$, entonces $\dfrac{1}{2}x_0 = x_0 e^{1500k}$ y por lo tanto $k = \dfrac{\ln 2}{1500}$.

La cantidad de sustancia en cualquier instante de tiempo $t > t_0$ es

$$x(t) = x_0 e^{\frac{\ln 2}{1500}t}$$

Así que cuando $t = 4500$, se obtiene

$$x(4500) = x_0 e^{\frac{-\ln 2}{1500}4500} = \frac{1}{8}x_0$$

es decir que, al cabo de 4500 años queda $\dfrac{1}{8}$ o $12{,}5\,\%$ de la cantidad inicial.

Ahora si $x(t) = \dfrac{1}{10}x_0$, entonces $\dfrac{1}{10}x_0 = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{1500}t}$ de donde $t \approx 4985$ años.
Es decir, al cabo de 4985 años queda $1/10$ o $10\,\%$ de la cantidad inicial.

Ejemplo 2: Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco años, ¿en cúanto tiempo se triplicará y en cúanto tiempo se cuadruplicará?

Solución: Puesto que

$$P(t) = ce^{kt}, \text{ si } P(0) = P_0 \text{ entonces } P(t) = P_0 e^{kt}$$

Como $P(5) = 2P_0$, entonces $2P_0 = P_0 e^{5t}$, así que $k = \dfrac{ln2}{5}$ es decir,

$$P(t) = P_0 e^{\frac{\ln 2}{5}t}$$

El tiempo en el que la población se triplica, es decir cuando $p(t) = 3P_0$ se calcula resolviendo la ecuación $3P_0 = x_0 e^{\frac{\ln 2}{5}t}$, de donde resulta $t = 7{,}9$ años, que equivale aproximadamente a 7 años y 11 meses.

Si queremos que se cuadruplique la población resolvemos $4x_0 = x_0 e^{\frac{t \ln 2}{5}}$, donde se encuentra que $t \approx 10$ años.

Yo consideraba completamente inútil la lectura de grandes tratados de análisis puro: un número demasiado grande de métodos pasan una vez ante nuestros ojos. Es en los trabajos de aplicación donde uno debe estudiarlos, allí se juzga su utilidad y se evalúa la manera de hacer uso de ellos.

Joseph-Louis de Lagrange

CAPÍTULO

5

Modelación

5.1 Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

Es el momento de aplicar las ecuaciones diferenciales para dar explicación experimental algunos de los modelos matemáticos y corroborar con teoría algunos de los modelos matemáticos que se desarrollaron y solucionaron en los capítulos anteriores, pero primero debemos dar respuesta al diguiente interrogante: ¿Qué es un modelo matemático? Un modelo matemático es la descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real.

La formulación de un modelo matemático implica:

- Identificar las variables causantes del cambio de un sistema.
- Establecer un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema (leyes empíricas aplicables).

Las hipótesis de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más variables que intervienen. El enunciado matemático de esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales. En este capítulo se van a tratar algunos modelos sencillos que se explican utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Se entiende por "modelización matemática" el proceso por el cual se representa la realidad en términos matemáticos. El objetivo es explicar o comprender los fenómenos naturales, encontrar respuestas a problemas técnicos o científicos [1].

Toda modelización lleva consigo un proceso de "idealización". La realidad suele ser compleja y los problemas reales habitualmente dependen de multitud de parámetros o variables, al mismo tiempo que suelen estar interrelacionados con otros procesos. El diseño de un modelo matemático lleva consigo la simplificación de muchos aspectos del problema real.

Los modelos que estudiaremos se fundamentan en representar un fenómeno real por medio de una o varias ecuaciones diferenciales de primer orden. La resolución de estas ecuaciones permitirá no sólo comprender en profundidad algunos aspectos relevantes del fenómeno en cuestión sino además, en algunos casos, hacer predicciones sobre el comportamiento futuro del mismo.

Según T.P. Dreyer, la modelización matemática puede describirse de forma sistemática por medio de los siguientes pasos:

1. Identificación: Se trata de clarificar las preguntas que se intentan responder con el modelo, formular el problema en palabras, documentar los datos relevantes e identificar el mecanismo que esta detrás del problema real.

2. Suposiciones: El problema debe ser analizado para decidir los factores del mismo que son importantes y aquellos que pueden ser ignorados. Con todo ello deben hacerse suposiciones que sean lo más reales posibles.

[1] Tomado de: "Modelos Matematicos basados en E. D. O. de Primer Orden I: http://campus.usal.es/ mpg/Personales/PersonalMAGL/Docencia/TeoriaTema3MM.pdf"

3. Construcción: En este paso se "construye" el modelo, es decir, el problema se traduce al lenguaje matemático obteniendo un conjunto de ecuaciones cuyas variables son las mismas del problema a resolver.

4. Análisis o Resolución: Las soluciones consistirán en general en funciones por medio de las cuales la o las variables dependientes se han de expresar en términos de la o las variables independientes. En algunos casos no es posible expresarse como funciones explicitas debido a la complejidad de las expresiones obtenidas, en tal casola relación ha de quedar implícita. Por otro lado, se obtendrá información acerca de los parámetros que intervienen en el modelo, en algunos casos por medio de condiciones iniciales dadas por ciertas situaciones del modelo.

5. Interpretación: En este paso, la solución matemática debe ser comparada con la realidad para observar si se ajusta a lo conocido del problema real. Se trata, en definitiva, de interrumpir el proceso si se obtiene soluciones carentes de sentido real.

6. Validación: Una vez interpretada la solución, se comprueba numéricamente que concuerda con los datos disponibles sobre el problema.

7. Implementación: Finalmente, se usa el modelo para describir el problema, se pueden por tanto realizar predicciones sobre los valores de las variables. Es necesario prestar atención al rango de validez del modelo.

5.2 Modelo de dinámica de poblaciones para una sóla especie

Se van a presentar dos modelos considerados los más básicos: **El modelo de Malthus** y **El Modelo Logístico**.

5.2.1 Modelo de Malthus

Se llaman Modelo de Malthus o Modelo Malthusiano a todo aquel en el que se considera que los nacimientos y las muertes de una cierta especie son proporcionales a la propia población en un instante de tiempo t. Explicitamente, si la tasa de nacimientos es aP y tasa de muertes es bP, con $a, b > 0$ constantes, asumiendo que no existen migraciones. La ecuación que describe el modelo es:

$$\frac{dP}{dt} \ = \ aP - bP \ = \ kP$$

Con $k \ = \ , a - b$, la cual es positiva si la tasa de natalidad es mayor que la tasa de mortalidad, negativa si la tasa de mortalidad es mayor que la tasa de natalidad y es nula si ambas tasas son iguales (las unidades en las que viene dada k son de T^{-1}, es decir, en unidades de tiempo inverso.

Es claro que la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dP}{dt} \ = \ aP - bP \ = \ kP$ es de variables separables y por tanto,

$\dfrac{dP}{dt} \ = \ kP$, implica $\dfrac{dP}{P} \ = \ kdt$, cuya solución es:

$$P(t) \ = \ C\, e^{kt}$$

Si se dispone, como condición que para un tiempo inicial t_0 se tenga una población inicial P_0 la solución particular del correspondiente problema de Cauchy es:

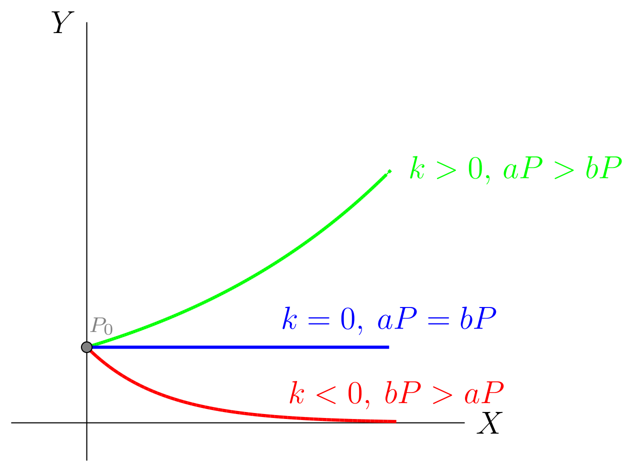
$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(t_0) = P_0$$

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$$

Al considerar que el tiempo se cuenta a partir de $t = 0$ entonces $t_0 = 0$ y así

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

El gráfico de $P(t) \ = \ P_0 e^{kt}$ varía muy poco con respecto al que se acaba de presentar, con ello se puede afirmar que esta solución presenta un comportamiento cualitativamente muy diferente según sea el signo de la constante de proporcionalidad k. Para $k > 0$ se tiene una situación de crecimiento exponencial, para $k = 0$ una solución constante, y para $k < 0$ una solución decreciente y que tiende a cero (debe recordarse que $P = 0$ es una solución estacionaria de la ecuación de Malthus, pues cuando $k < 0$ la solución tiende a 0 cuando $t \longrightarrow \infty$ y a eso se le llama valor estacionario.



Ejemplo: Las cifras de los censos en Colombia, desde 1960 hasta el 2015, se muestran en la siguiente tabla:

Población de Colombia en los últimos 50 años							
Año	**t**	**Real**	$P(t) = 16{,}4e^{0{,}02991t}$	**Año**	**t**	**Real**	$P(t) = 16{,}4e^{0{,}02729t}$
1960	0	16.4	16.4	1960	0	16.4	16.4
1965	5	19.1	19	1965	5	19.1	18.8
1970	10	22	22.1	1970	10	22	21.5
1975	15	24.7	25.7	1975	15	24.7	24.7
1980	20	28.4	29.8	1980	20	28.4	28.3
1985	25	30.7	34.6	1985	25	30.7	32.4
1990	30	34.1	40.2	1990	30	34.1	37.2
1995	35	37.4	46.7	1995	35	37.4	42.6
2000	40	40.2	54.3	2000	40	40.2	48.9
2005	45	42.8	63	2005	45	42.8	56
2010	50	45.5	73.2	2010	50	45.5	64.2
2015	55	48.2	85	2015	55	48.2	73.6

La tabla muestra como se ajusta el modelo de crecimiento ilimitado a esos datos, midiendo el tiempo t en años y la población $P(t)$ en millones de personas, haciendo que $t = 0$ corresponda al año 1960, entonces $P(0) = 16{,}4$, que es la condición inicial de la ecuación diferencial $\dfrac{dP}{dt} = kP$, la solución de esta es $P(t) = 16{,}4e^{kt}$;

al considerar la condición $P(10) = 22{,}2$ se encuentra que $k \approx 0{,}02991$, correspondiente a la tabla izquierda, por otro lado, al considerar la condición $P(20) = 28{,}4$ se encuentra que $k \approx 0{,}02729$, correspondiente a la tabla derecha; luego la población de Colombia esta dada según el modelo de Malthus por las ecuaciones $P(t) = 16{,}4e^{0{,}02991t}$ y $P(t) = 16{,}4e^{0{,}02729t}$.

Note sin embargo, como se observa en la tabla, que comparado con la población real, el modelo de la izquierda predice bien la población solo hasta 1970 y el de la derecha solo hasta 1985 en la parte derecha. Esto se debe a que el modelo no tiene en cuenta la migración y otros factores que intervienen en el proceso de crecimiento de la población. El modelo es bueno, siempre y cuando la población sea relativamente pequeña.

5.2.2 Modelo Logístico

Este modelo agrega una mejora al Modelo De Malthus la cual trata de introducir la competencia entre los individuos de la especie en estudio como factor que altera los nacimientos y/o las muertes. Tanto si la competencia afecta a la lucha por los alimentos, por sobrevivir al contagio de enfermedades o algún otro factor, una suposición razonable es medir dicha competencia por medio del número de contactos posibles entre dos individuos de la especie. El número de tales contactos, cuando se dispone de cierta población P en total, es:

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 \frac{P(P-1)}{2}$$

o equivalentemente,

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

donde $r = k_1 + \frac{1}{2}k_2$ y $K = 2\frac{k_1}{k_2} + 1$, la variable $\frac{1}{r}$ proporciona el intervalo de tiempo en el cual el modelo puede considerarse como una aproximación aceptable al problema real. Por su parte, K (unidades de población) recibe el nombre de población limite.

Si en la ecuación de Malthus $P_0 = kN$, se toma en consideración que la tasa de crecimiento por individuo k, es alterada por la falta de recursos que aparece al incrementarse la población, por ello es razonable suponer que k no es constante con respecto a P. Si se toma entonces $k = r(1 - \frac{P}{K})$, la tasa es menor cuanto más cercano esté al valor de K, mientras que es casi constante para valores pequeños de P. Obviamente este razonamiento convierte la ecuación de Malthus en la ecuación logística de una forma alternativa.

La ecuación logística es de variables separables, para la resolución de la ecuación y posterior simplificación, se toma como dato inicial $P(0) = P_0$. Se parte de:

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

y separando variables se obtiene

$$-\frac{dP}{P} + \frac{dP}{K - P} = -rdt$$

Al integrar ambos lados queda:

$$\frac{P - K}{P} = ce^{-rt}$$

o bien,

$$P(t) = \frac{K}{1 - ce^{-rt}}$$

Ahora, considerando la condición inicial $P(0) = P_0$ entonces

$$P(0) = \frac{K}{1 - ce^{-r(0)}}$$

de donde $c = \frac{P_0 - K}{P_0}$, al sustituir en la familia de soluciones se llega a la solución particular

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (k - P_0)e^{-rt}}$$

Es fácil observar que $P = 0$ y $P = K$ son las soluciones estacionarias de la ecuación logística, para hallarlas se parte de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{k}\right)$$

Luego hacemos $\frac{dP}{dt} = 0$, es decir, $rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) = 0$, de aquí se tiene que

$(rP = 0)$ o $1 - \frac{P}{k} = 0$, de donde $P = 0$ o $P = k$.

El significado de la solución $P = 0$ es trivial, si la población inicial es nula no hay posibilidades de crecimiento dentro de este modelo (ni de cualquiera en el que las migraciones no sean consideradas). La segunda solución estacionaria, que se produce cuando $P_0 = K$, nos indica que para una población inicial exactamente igual a K, encontramos que $P(t)$ es constante para cada valor positivo de t. Se trata por tanto de dos estados de equilibrio.

Al calcular ahora el límite cuando $t \to \infty$ de la solución tendremos:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}} = K$$

Para una población inicial $P_0 > 0$, la solución siempre tiende al valor K, de ahí se justifica su denominación de “población límite”.

En definitiva, el modelo logístico no considera un crecimiento ilimitado de la población, como ocurría en el Modelo de Malthus (con constante positiva), sino que se supone una estabilización de la población alrededor del valor K. Se encuentran tres posibilidades: cuando $P_0 > K$, cuando $\frac{k}{2} < P_0 < K$ y cuando $0 < P_0 < \frac{k}{2}$

Ejemplo
Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su colegio, donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no solo a la cantidad P de alumnos infectados sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determine la cantidad de alumnos infectados seis días después, si se observa que a los cuatro días hay 50 estudiantes infectados.

Solución. Si P es la cantidad de estudiantes infectados en un tiempo de t días, K la población total, $K - P$ los estudiantes no infectados, entonces $1 - \frac{P}{K}$ es el escalado de los estudiantes no infectados en el intervalo $(0, 1]$. Además r es la constante de proporcionalidad de la infección y $\dfrac{dP}{dt}$ la razón de cambio de la cantidad de estudiantes infectados.

Como $K = 1000$, entonces la ecuación a resolver es

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

o bien

$$\frac{dP}{dt} = -rP\left(\frac{P - 1000}{1000}\right)$$

Separando variables se encuentra que

$$\frac{dP}{P} + \frac{dP}{1000 - P} = rdt$$

es decir que

$$\frac{dP}{(P - 1000)} - \frac{dP}{P} = -rdt$$

Integrando ambos miembros se obtiene

$$\ln\frac{p - 1000}{P} = -rt + c_1$$

y por lo tanto $\dfrac{p - 1000}{P} = ce^{-rt}$, donde $c = e^{c_1}$. Luego se obtiene

$$P(t) = \frac{1000}{1 - ce^{-rt}}$$

Como hay un infectado al principio, entonces $P(0) = 1$, y así

$$1 = \frac{1000}{1 - ce^{-r(0)}}$$

de donde $c = -999$. Tenemos entonces que

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-rt}}$$

como $P(4) = 50$ entonces

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4r}}$$

por lo tanto $r \approx 0{,}9905$. La función particular buscada es

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}9905t}}$$

Por último, para saber cuantos infectados hay después de seis días, se toma $t = 6$ y así

$$P(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0{,}9905(6)}} \approx 276,12705$$

Es decir que pasados seis días habrán 276 estudiantes infectados.

5.3 Modelo Compartimental

Se trata de describir mediante una función $x(t)$ la cantidad de una sustancia que esté presente en un recipiente o su compartimento en cierto instante de tiempo t. El recipiente puede ser de cualquier tipo como un lago, un tanque de mezclas, etc. El modelo se fundamenta en una ley de conservación evidente: la tasa de cambio de la sustancia en el recipiente $\frac{dx}{dt}$ será igual a la velocidad de entrada de la sustancia en el recipiente en el instante t menos la velocidad de salida de la misma:
$\frac{dx}{dt} =$ velocidad de entrada $-$ velocidad de salida.

Este modelo se debe principalmente a su uso en aplicaciones de bioquímica como por ejemplo: Orden uno $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, Orden cero $\frac{dQ}{dt} = -ko$, Michaelis-Menten $\frac{dQ}{dt} = -\frac{V_{max}Q}{K_{max}} + Q$ (enzima-sustrato), que son modelos cinéticos. En el capíulo anterior se mencionaron otras aplicaciones relacionadas con este modelo, por lo tanto no se profundizará sobre esto pero, se va a considerar un campo donde se modela un comportamiento de la variación de una cantidad de sustancia en el tiempo que describiremos a continuación:

Uno de los problemas más urgentes de la sociedad actual es cómo reducir los niveles de contaminación y toxicidad del agua disponible. Existen modelos muy complejos que requieren del esfuerzo de equipos multidisciplinares; trataremos un modelo muy simple aplicado a la contaminación de un lago. A pesar de su sencillez, aparecen elementos básicos que están presentes en los modelos más complicados.

Ejemplo: Un nuevo pesticida que se aplica a los campos y que llega a través de un río a un lago con un volumen v de agua. Para facilitar las cosas se supone que el río recibe una cantidad constante de pesticida y que fluye al lago con un ritmo constante f, por tanto, el río tiene una concentración constante p del nuevo pesticida; Se supone que el agua del lago está bien agitada y que entra tanta agua cómo sale de él. Si $C(t)$ es la concentración de pesticida en el lago en el tiempo t, entonces el ritmo de cambio en la cantidad de pesticida es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale, es decir

$$\frac{dC}{dt} = \frac{f}{v}P - \frac{f}{v}C$$

además si se supone que el lago estaba inicialmente libre del pesticida, entonces $C(0) = 0$.

La ecuación diferencial anterior equivale a

$$\frac{dC}{dt} + C\frac{f}{v} = P\frac{f}{v}$$

que es una ecuación diferencial lineal cuyo factor integrante es $e^{\int \frac{f dt}{v}} = e^{\frac{ft}{v}}$. Así, la ecuación diferencial es ahora

$$e^{\frac{ft}{v}}\frac{dC}{dt} + \frac{f}{v}e^{\frac{ft}{v}}C = P\frac{f}{v}e^{\frac{ft}{v}}$$

de donde

$$\frac{d(Ce^{\frac{ft}{v}})}{dt} = P\frac{f}{v}e^{\frac{ft}{v}}$$

Al integrar se obtiene

$$Ce^{\frac{ft}{v}} = Pe^{\frac{ft}{v}} + k$$

es decir

$$C = P + ke^{-\frac{ft}{v}}$$

Como $C(0) = 0$ entonces $0 = P + ke^{-\frac{0f}{v}}$ así que $k = -P$. Luego la solución de la ecuación diferencial es

$$C = P - Pe^{-\frac{ft}{v}}$$

El segundo término de esta última expresión muestra que a largo plazo, la solución tiende hacia P, como era lógico suponer.

5.4 Modelo exponencial

5.4.1 Ley de enfriamiento de Newton

Este modelo ha sido utilizado entre otras cosas para determinar el tiempo que lleva muerta una persona al medir y analizar la temperatura de su cadáver en diferentes momentos con objeto de saber el "ritmo" de enfriamiento del cuerpo. Naturalmente, este proceso puede repetirse para obtener una mejor aproximación de la hora en que ha sucedido la muerte.

La Ley de enfriamiento de Newton dice que el ritmo con el que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente que lo rodea. Es decir, si $T(t)$ es la temperatura del cuerpo para el tiempo t, entonces $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$, con $k > 0$, siendo T_a la temperatura ambiente y T_0 la temperatura inicial del cuerpo y $T(0) = T_0$ la condición inicial donde T_0 es la primera temperatura tomada al cuerpo.

Ejemplo: Se encuentra un cadáver a las 8:30 am, y a esa hora su temperatura era de 30^o C, siendo la temperatura de la habitación donde se encontraba constante de 22^o C. Una hora más tarde la temperatura del cuerpo ha descendido a 28^oC. Determinar la hora aproximada en que falleció esta persona.

Solución: Si suponemos que la temperatura de un ser humano vivo en condiciones normales es de aproximadamente 37^oC.

De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton se tiene que

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 22)$$

con $T(0) = 30$ y $T(1) = 28$. Esta ecuación es separable y por tanto

$$\frac{dT}{T - 22} = -k(dt)$$

al integrar a ambos lados de la ecuación diferencial obtenemos

$$\ln|T - 22| = -kt + c$$

es decir

$$T(t) = ce^{-kt} + 22$$

como $T(0) = 30$ entonces $30 = ce^{-0k} + 22$ y así $c = 8$. Tenemos ahora que

$$T(t) = 8e^{-kt} + 22$$

Puesto que $T(1) = 28$, entonces $28 = 8e^{-k} + 22$ y así $k = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}2877$, con lo cual se obtiene

$$T(t) = 8e^{-0{,}2877t} + 22$$

Para determinar la hora del fallecimiento se debe resolver la ecuación con $T(t) = 37$. Luego

$37 = 8e^{-kt} + 22$, de donde $t = -2$.

De esta información se puede afirmar que la muerte ocurrió aproximadamente dos horas antes de haber encontrado el cuerpo y tomándole la temperatura por primera vez, es decir, aproximadamente a las 6:30 am.

CAPÍTULO

6

Anexos

6.1 Experimento de enfriamiento

Para validar en la realidad la ley de enfriamiento de Newton, se procedío a hacerle seguimiento a la variación en el tiempo de la temperatura de dos tipos de bebidas: una caliente y una fía, para ver su comportamiento experimental y así mismo tratar de compararlo con la ley teórica ya mencionada.

Para realizar el experimento fue necesario obtener lo siguiente:

1. Una bebida fría (Gaseosa negra).
2. Una bebida caliente (Chocolate).
3. Una sonda Termocupla tipo k USB (sensor de temperatura).
4. Un computador con puerto USB.
5. Un programa de captura de datos y graficador (Cassy Lab 2.0).
6. Un recipiente plástico.

Antes de iniciar el experimento se necesitó aprender a manejar el programa que iba a tomar los datos que arrojaba la gráfica que modelaba el comportamiento experimental. Para ello se obtuvo la versión 2.0 del programa Cassy Lab, que leía y graficaba los datos del sensor. Los datos fueron tomados primero para la bebida fría y luego para la bebida caliente.

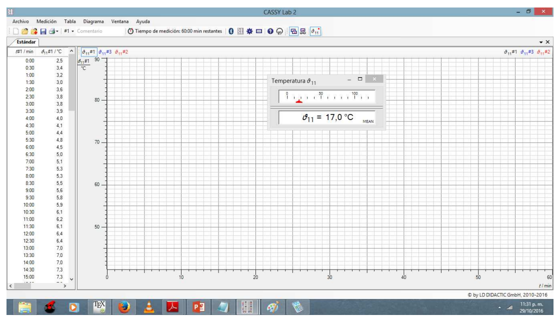
6.1.1 Bebida fría

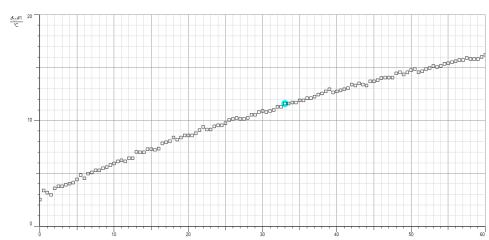
El experimento inició a las 10:13 pm en el sector suroriente de la ciudad de Neiva (Huila). En este momento la temperatura ambiente era de $28{,}3^oC$. Se trasvasó la bebida fría a un recipiente plástico, la intención era que el recipiente no fuera conductor de calor.


Posteriormente se procedió a colocar la sonda dentro de la bebida para que el software registrara los datos.

La primera imagen muestra como se obtienen los datos por medio de la aplicación.

La segunda imagen muestra la gráfica final.





Basándose en la tabla de los datos iniciales arrojada por el programa Cassy Lab y considerando la temperatura ambiente de $28{,}3^oC$, la temperatura inicial de $2{,}5^oC$, se formula la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 28{,}3)$$

donde T es la temperatura en cualquier instante y t es el tiempo en minutos. La solución a esta ecuación es

$$T = 28{,}3 - ce^{kt}$$

Como $T(0) = 2{,}5$, la solución se transforma en

$$T = 28{,}3 - 25{,}8e^{kt}$$

Se tomó como condición inicial de los datos iniciales que mostraba el programa $T(1) = 3{,}2^oC$ con lo cual, la solución sin parámetros queda

$$T = 28{,}3 - 25{,}8e^{-0{,}0275t}$$

Por último se calculó la temperatura para $t = 20$, de donde $T(20) = 13{,}4^oC$. La temperatura real fue de $8{,}6^oC$, el margen de error es

$$E = \frac{13{,}41 - 8{,}6}{8{,}6} 100\,\% \approx 56\,\%$$

el error aunque es muy alto es entendible pues la ley de enfriamiento de Newton es un modelo teórico que requiere condiciones de laboratorio ideales donde se exige que la temperatura ambiente sea constante. Al realizar el experimento se notó que la temperatura ambiente en dos horas descendió hasta los $24{,}3^oC$.

Al mostrar inconformidad por los resultados obtenidos se repitió el experimento a las 2:12 pm del siguiente día, cuando la temperatura ambiente era de $33{,}5^oC$, al considerar que entre las 12:00 m y las 3:00 pm la temperatura ambiente es más o menos constante.

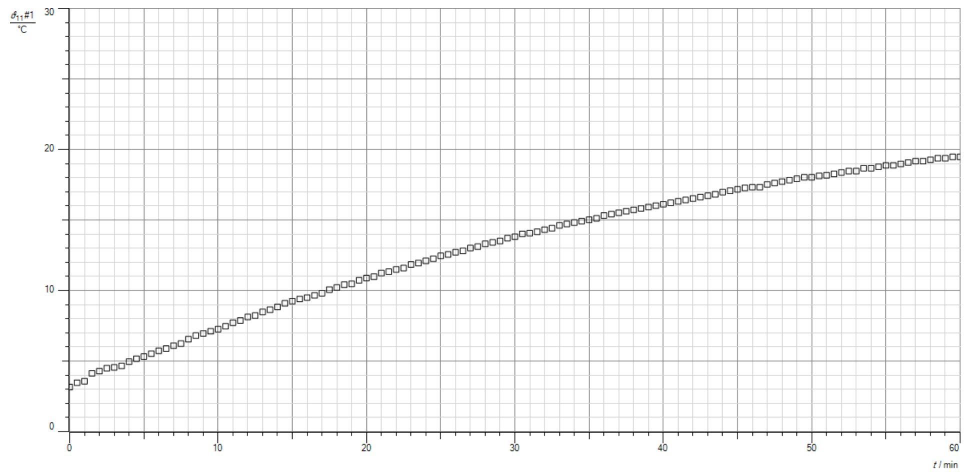
La temperatura inicial de la bebida fue de $3{,}2^oC$.

Se plantea entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 33{,}5)$$

cuya solución es

$$T(t) = 33{,}5 - e^{kt+c}$$



Como $T(0) = 3{,}2^oC$,entonces

$$T(t) = 33{,}5 - 30{,}3e^{kt}$$

De la gráfica se tomó $T(10) = 7{,}3^oC$ lo que genera la solución sin parámetros

$$T(t) = 33{,}5 - 30{,}3e^{-0{,}01454t}$$

Por último, se calculó la temperatura para $t = 30$ de donde $T(t) = 13{,}9^oC$, la temperatura real fue de $13{,}8^oC$, el margen de error es

$$E = \frac{13{,}9 - 13{,}8}{13{,}8}100\,\% \approx 0{,}7\,\%$$

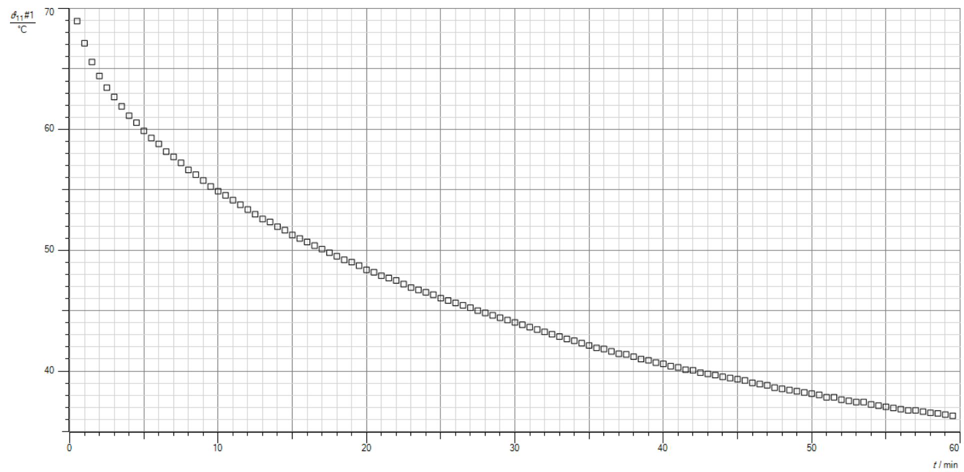
en este experimento la temperatura del modelo también estuvo por encima de la real, la variación de la temperatura ambiente influyo aunque en menor medida, pues la diferencia fue menor de 1^oC, por ello se presenta un margen de error mucho menor.

6.1.2 Bebida caliente

El experimento inició a las 12:09 am en el mismo lugar que el experimento anterior; La temperatura ambiente era de 24^oC. Se trasvasó la bebida caliente a un recipiente plástico y se procedío a colocar la sonda para que el software registrara los datos.

La siguiente imagen muestra la ubicación de la bebida caliente en en recipiente de plastico, la sonda y el computador.

Después de ajustar la escala, la función final que arrojó el programa fue



Basándose en los datos de la imagen de la función obtenida, tomando la temperatura ambiente de 24^oC y una temperatura inicial de $71{,}5^oC$ se plantea la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 24)$$

donde $T(t)$ es la temperatura en cualquier instante y t es el tiempo en minutos, la solución a esta ecuación es

$$T = 24 - ce^{-kt}$$

Como $T(0) = 71{,}5^oC$, se obtiene

$$T(t) = 24 + 47{,}5e^{-kt}$$

Tomando $T(10) = 54{,}9^oC$. La solución sin parámetros es

$$T(t) = 24 + 47{,}5e^{-0{,}043t}$$

Por último se calculó la temperatura para $t = 20$ que fue $T(20) = 44{,}1^oC$, la temperatura real fue de $48{,}4^oC$,así que el margen de error es

$$E = \frac{48{,}4 - 44{,}1}{48{,}4} 100\,\% \approx 8{,}9\,\%$$

consideramos que en este experimento el error no fue muy alto, aunque la temperatura ambiente fue mas estable y se cree que la poca cantidad de líquido fue la que influyó.

Ahora bien, este no es el final. No es ni siquiera el principio del fin. Pero es, quizá, el fin del principio.

Winston Churchill

Conclusiones

- Se logró hacer una revisión bibliográfica sobre las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, sus métodos de solución y principales aplicaciones, con esto se logró enriquecer nuestro conocimiento específico del tema y acrecentar el gusto por este campo.

- En el presente trabajo se incluyó un buen número de ejemplos resueltos para reforzar la temática en discusión. También se hizo énfasis en la solución de algunos modelos matemáticos relevantes.

- Llevar a la realidad un modelo matemático permite comprender de primera mano la teoría y reflexionar entorno a la majestuosidad de la matemática para explicar los fenómenos del mundo real. Prueba de ello es la aplicación de las ecuaciones diferenciales que se hizo al final del presente trabajo: Crecimiento Poblacional, la Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton.

- Por último con el desarrollo de las ecuaciones diferenciales se ha logrado importantes avances en la ciencia y la ingeniería que han permitido grandes desarrollos científicos. Es importante dar a conocer a nuestros estudiantes sobre estos aspectos.

Bibliografía

1. Blanchard, Paul. Devaney, Robert L. Hall, Glen R. 1998. *Ecuaciones Diferenciales*. Massachusetts,Boston. Editorial THOMSON.

2. Ross, Shepley L. 1980. *Ecuaciones Diferenciales*.Barcelona,España. Editorial Reverte.

3. Zill, Dennis G. 1997. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Ciudad de México, México. Editorial THOMSON.

4. Simmons, George F. 1993. textit Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. Barcelona, España. Editorial McGraw-Hill.

Webgrafía

1. Morales, Franklyn. Ecuaciones Diferenciales. Recuperado de:
http://davinci.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/

2. Tecnologico Nacional de Mexico. Ecuación Diferencial, Orden Grado Linealidad, Recuperado de:
http://mitecnologico.com/sistemas/Main/

3. Catsigeras, Eleonora. Ecuaciones Diferenciales. Una introducción para el curso de Cálculo I y II, 2007, Recuperado de:
http://www.fing.edu.uy/~eleonora

4. Molero, M, Salvador, A, MENARGUEZ. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Universidad Polítecnica De Madrid, Recuperado de:
http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas

5. González Gutiérrez, Francisco José. Ecuaciones Diferenciales Como Modelos Matemáticos. Universidad De Cádiz, Recuperado de:
http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/

6. Modelos Matemáticos basados en E. D. O. de Primer Orden. Universidad De Salamanca, Recuperado de:
http://campus.usal.es/~ mpg/Personales

7. Bernoulli, Daniel. Frase celebre de Daniel Bernoulli, Recuperado de:
http://www.frasesgo.com/autores/frases-de-daniel-bernoulli.html

8. D`Alembert, Jean Le Rond. Frase celebre de Jean Le Rond D`Alembert. Akifrases. Recuperado de:
http://akifrases.com/autor/jean-le-rond-d'alembert

9. Bernoulli, Johann. Frase celebre de Johann Bernoulli.Akifrases. Recuperado de:
http://akifrases.com/autor/johann-bernoulli

10. Lagrange. Joseph Louis. Frase celebre de Joseph Louis Lagrange. Recuperado de:
http://www.pensamientoscelebres.com/autor/josephlouisdelagrange

11. Garaizar Sagarminaga,Pablo. 2011. DeustoTech Computing. Plantilla Latex para el trabajo de grado, Recuperado de:
http://softwarelibre.deusto.es/plantilla-latex-para-tesis-doctorales/

12. Aplicación para convertir imágenes a extención eps. Recuperado de:
http://imagen.online-convert.com/es/convertir-a-eps

13. LD Didactic Group. 2016. Aplicación Cassy Lab, Recuperado de:
http://www.ld-didactic.de/

14. Real Academia Española. 2016. Diccionario de la Real Academia Española, Recuperado de:
http://dle.rae.es/Isócrona