Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

De la semejanza de triángulos a las Funciones trigonométricas.

Jemberson Bedoya Tique
Anyie Xiomara Polania Peña

Neiva, Huila
2017

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

De la semejanza de triángulos a las funciones trigonométricas.

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Jemberson Bedoya Tique
20131119332
Anyie Xiomara Polania Peña
20131119332

Asesor:
Profesor Augusto Silva Silva.

Neiva, Huila
2017

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Director

Johnny Fernando Alvis P

Segundo Lector

Neiva, Octubre de 2017.

AGRADECIMIENTOS

En la culminación de esta etapa de nuestras vidas, damos gracias a Dios por permitirnos llevar a cabo nuestras metas y propósitos. A nuestros padres por el esfuerzo y tenacidad que han tenido y por el gran amor que han demostrado. A nuestros hermanos por ser parte fundamental en nuestras vidas y por guiarnos en este largo camino que hemos recorrido. A nuestro Asesor y segundo lector por la paciencia y por el gran compromiso en la realización del presente trabajo y en general al programa de Licenciatura en Matemáticas, a la Facultad de Educación y la Universidad Surcolombiana y a sus docentes por acogernos durante cinco años y encargarse de nuestra formación como docentes.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE CUADROS

PRESENTACIÓN

La enseñanza de la Trigonometría en secundaria y específicamente de las razones trigonométricas, puede llegar a convertirse en un proceso memorístico de fórmulas, que con ayuda de la calculadora se torna finalmente en un aprendizaje superficial, sin ningún sentido ni utilidad. Esta situación puede ser producto en ocasiones de la poca formación matemática que posee los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas sobre conceptos trigonométricos. Por tanto el presente Trabajo de Grado pretende brindar a los estudiantes que accedan a él, no sólo una serie de conceptos, si no las herramientas y estrategias necesarias para que exploren, analicen, relacionen, demuestren y aprendan con sentido los conceptos y propiedades trigonométricas. Más específicamente, contribuir en la comprensión de las razones trigonométricas basada en los conceptos de proporcionalidad y semejanza de triángulos.

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Grado, es un material de estudio de las funciones trigonométricas para estudiantes de secundaria e incluso universitaria a través de una construcción basada en la semejanza de triángulos y la proporcionalidad; permitiendo al estudiante reflexionar, relacionar y demostrar algunos resultados de la trigonometría.

El trabajo surge de la reflexión sobre el bajo nivel de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas en el dominio y manejo de las funciones trigonométricas, observando la forma memorística con la que han sido aprendidas, lo cual se evidencia en cursos como Calculo Integral y Calculo Diferencial, en donde es necesario la utilización de estos conceptos.

Desde esta perspectiva, el trabajo es un material que contribuye al estudio y aprendizaje de los conceptos básicos de la trigonometría a través de una construcción geométrica basada en la semejanza de triángulos y una forma de generalizar las funciones trigonométricas utilizando el círculo unitario.

Este trabajo consta de cinco capítulos. En el primero se definen los conceptos que son importantes en su desarrollo y sobre los cuales se sustentan las definiciones y resultados posteriores. En el segundo se estudian las razones trigonométricas desde dos tipos de representaciones: como proyecciones de un punto y como razones referidas a triángulos rectángulos. Además se hace la extensión de las funciones trigonométricas utilizando la circunferencia unitaria.

En el tercer capítulo se enuncian y demuestran algunas identidades trigonométricas básicas, mencionando dos métodos para realizar estas pruebas y un error común que se comete. En el cuarto se desarrollan las ecuaciones trigonométricas mostrando el procedimiento para solucionar este tipo de ecuaciones y dando pautas para su correcta solución.

Finalmente el capítulo quinto esta dedicado a las aplicaciones. Se enuncian los teoremas del Seno y del Coseno los cuales son fundamentales en la solución de triángulos. El capitulo termina conceptualizando los ángulos de elevación y depresión y resolviendo algunos problemas relacionados con el tema.

JUSTIFICACIÓN

El presente Trabajo de Grado ofrece un material de estudio de las funciones trigonométricas, ya que se ha logrado evidenciar el déficit de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas en el dominio y uso de las razones trigonométricas constatando un aprendizaje memorístico que se ha restringido al uso de la calculadora para determinar ángulos y longitudes en función de una razón trigonométrica particular.

En consecuencia, el presente trabajo contribuye a la comprensión y aprendizaje de las razones trigonométricas a partir de la semejanza de triángulos y de la proporcionalidad. Es de esperar que el estudiante muestre habilidad para aproximarse a los valores de algunas funciones trigonométricas básicas, se apropie de las propiedades de estas funciones y las justifique.

En un programa que se encarga de formar docentes de educación básica secundaria es necesario que los estudiantes se encuentren en buenas condiciones de enseñar una temática que es obligatoria en la planificación curricular de los grados décimo y undécimo. Como lo señalan los estándares propuestos por el MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL : "Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas"

Por tanto a través de este trabajo se logra que los estudiantes del programa encuentren un material de preparación y de apoyo no solo para cursos donde es necesario la utilización de los conceptos, propiedades y relaciones trigonométricas sino también para su labor como docentes. Por otro lado puede convertirse en un material con el cual los estudiantes de secundaria puedan profundizar y apoyar su proceso de aprendizaje sin estar ligados necesariamente a una calculadora.

OBJETIVOS

Objetivo General

Elaborar un material de estudio el cual contribuya al aprendizaje de las funciones trigonométricas utilizando como recurso matemático la semejanza de triángulos y la proporcionalidad.

Objetivos Específicos

- Presentar una serie de conceptos, acompañado de herramientas y estrategias necesarias para que se explore, analice, relacione, demuestre y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricas.
- Utilizar la circunferencia unitaria para realizar una extensión de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas.
- Mostrar aplicaciones de las funciones trigonométricas en problemas de solución de triángulos y ángulos de depresión y de elevación.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS PRELIMINARES

En este capítulo se trataran los conceptos de magnitud, congruencia, razón, proporción y semejanza. Los cuales son de suma importancia para los fines del presente trabajo.

1.1. Magnitud

Se entiende como magnitud a la cualidad o característica de una figura, cuerpo o fenómeno que referida a una unidad de la misma especie se expresa por un número. Ejemplo: área, volumen y longitud.

1.2. Congruencia

Dos figuras geométricas (segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros o polígonos) son congruentes si se pueden sobreponer de manera que coincidan el uno sobre el otro. El símbolo " $\cong$ " colocado en medio de dos figuras, significa que son congruentes. Por tanto en adelante las afirmaciones como: AB es congruente con CD, o bien, $\measuredangle ABC$ es congruente con $\measuredangle DEF$, se escribirán así:

$$AB \cong CD, \quad \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$$

1.3. Razones y proporciones

Las magnitudes referidas a la misma característica se pueden sumar, multiplicar, dividir y establecer entre ellas relaciones de igualdad o desigualdad. Estas magnitudes se llaman magnitudes de la misma especie.

Las magnitudes referidas a objetos geométricos como longitudes de segmentos, ángulos, áreas, volúmenes, etc, las llamaremos magnitudes geométricas.

Definición 1.3.1 Cuando la medida de dos magnitudes de la misma especie se dividen entre sí, el resultado final es una fracción que se denomina razón. Por ejemplo si la longitud $L = 25\ cm$ y otra $M = 15\ cm$ se dividen entre sí, se obtiene la razón $\frac{5}{3}$. En efecto:

$$\frac{L}{M} = \frac{25cm}{15cm} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

La razón de un número a otro es el cociente que resulta de dividir el primero entre el segundo. La razón 5 a 8 es $\frac{5}{8}$, o también $5 : 8$. La razón de m a n es $\frac{m}{n}$, o también $m : n$.

La razón entre dos magnitudes de la misma especie puede establecerse cuando ambas están expresadas en la misma unidad de medida. Si el área de un rectángulo es $A = 40\ cm^2$ y el área B de un trapecio es de $0{,}0120\ m^2$, la razón entre sus áreas es:

$$\frac{A}{B} = \frac{40\ cm^2}{120\ cm^2} = \frac{40}{120} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Definición 1.3.2 Se llama proporción a la igualdad de dos razones. En la proporción: $a : b = c : d$, que también se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los números a y d se llaman extremos y b y c se llaman medios. En la escritura $a : b = c : d$, el cuarto término d, se llama cuarta proporcional de los otros tres términos. Por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ es una proporción que también se puede escribe como $2 : 3 = 4 : 6$.

Cuando los medios o los extremos de una proporción son iguales, cualquiera de ellos, se llama media proporcional de los otros dos. O sea, dada:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{d} : \ b \text{ se le denomina media proporcional de } a \text{ y } d.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{a}: \ a \text{ se le denomina media proporcional de } b \text{ y } c.$$

La media proporcional también recibe el nombre de media geométrica.

1.3.1. Propiedades de las proporciones

1. En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Dada la proporción:
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
Multiplicando miembro a miembro por bd, obtenemos:
$$\frac{a}{b}\times bd \ = \ \frac{c}{d}\times bd \quad \text{luego } a\times d=b\times c.$$

2. Si los numeradores de una proporción son iguales, entonces los denominadores son iguales. Si los denominadores son iguales, entonces los numeradores son iguales.
$$Si\ \frac{a}{b}=\frac{a}{d}, \text{ entonces } a\times d=a\times b \text{ de donde se obtiene } b=d.$$
De la misma forma, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{b}$, entonces $a\times b=b\times c$ y simplificando por b, se obtiene $a=c$.

3. Los términos de una proporción están también en proporción por alternación. Esto quiere decir que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$
En efecto:
$$\text{si } \ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ entonces } a\times d=b\times c$$
Dividiendo por cd y simplificando, se obtiene
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$
De la misma forma, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, entonces $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

4. Los términos de una proporción, están también en proporción por inversión
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

En efecto :

$$\text{si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } a \times d = b \times c$$

dividiendo por ac y simplificando, se obtiene

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

5. Los términos de una proporción están también en proporción por adición, o sea, que la suma del primero y el segundo término es al segundo, como la suma del tercero y el cuarto es al cuarto. Simbólicamente:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Sumando 1 a la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ obtenemos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

de donde se tiene:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

6. Los términos de una proporción están también en proporción por sustracción, o sea, que el primer término menos el segundo es al segundo, como el tercer término menos el cuarto es al cuarto. Simbólicamente:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Restando 1 a la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ obtenemos:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

de donde se tiene:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

7. En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la suma de los numeradores es a la suma de los denominadores, como cualquier numerador es a su correspondiente denominador. O sea:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{entonces} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{b} = \frac{c}{d}.$$

En efecto:

$$Si \quad \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}, \quad \text{así que} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

La otra igual se demuestra similar, el resultado puede generalizarse para más razones:

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \quad \text{entonces} \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

1.3.2. Segmentos proporcionales

La razón entre dos segmentos, es la razón entre sus medidas (Longitud), tal como lo consideró Euclides. Los dos segmentos deben ser medidos con la misma unidad.

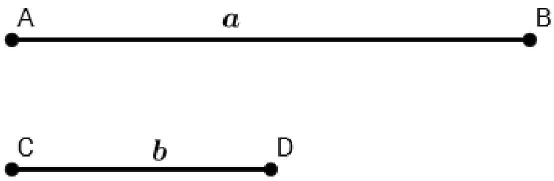


Figura 1.1. Segmentos proporcionales

En símbolos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$$

.

Dado un segmento AB; un punto P en su interior, éste lo divide en dos segmentos: AP y PB.

Figura 1.2. Segmento AB

La razón $\dfrac{AP}{PB} = r$ es un número real. Cuando r es un número racional, digamos $\dfrac{m}{n}$, diremos que los dos segmentos son conmensurables; en otro caso serán inconmensurables. En particular:

- Si $r = 1$, el punto P es el punto medio y el segmento AB ha sido dividido en dos trozos iguales y $AP \cong PB$.
- Si $r = \dfrac{1}{2}$, la medida del segmento AP es un tercio de la medida del segmento AB.

  $$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}, \ \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2} \ \text{luego}, \ 2AP = PB, \ AB = AP + PB = 3AP.$$

  Lo cual significa que AB ha sido dividido en tres trozos de igual longitud y AP corresponde a uno de ellos.

Dados cuatro segmentos $AB,\ CD,\ A'B'$ y $C'D'$ diremos que son proporcionales si y solo si

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Es decir, si $a,\ b,\ a',\ b'$ son las longitudes de los segmentos $AB,\ CD,\ A'B'$ y $C'D'$ respectivamente entonces : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$

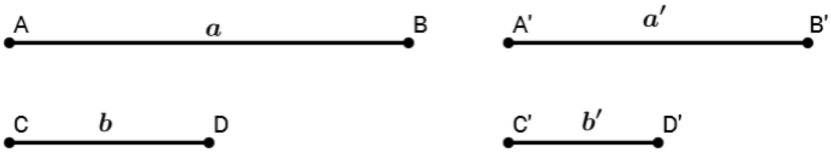


Figura 1.3. Longitudes de segmentos

$a = AB,\quad b = CD,\quad a' = A'B',\quad b' = C'D'$

Observación: Se tiene que en las razones de proporcionalidad entre segmentos se cumplen las mismas propiedades de las razones entre cantidades mencionadas anteriormente.

1.4. Teorema de Tales

Teorema 1.4.1 Si tres o más rectas paralelas cortan a dos rectas cualesquiera r y s, determinan en ellas segmentos proporcionales.

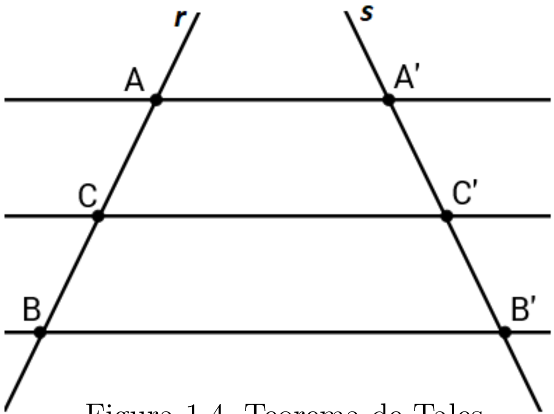


Figura 1.4. Teorema de Tales

Con relación a la figura adjunta, las paralelas son $AA',\ BB',\ CC'$ y r y s las rectas cualesquiera. El Teorema de Tales establece que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

Observaciones

- El Teorema de Tales es válido también para más de tres paralelas.
- La demostración puede consultarse en textos de Geometría, pues excede los propósitos del presente trabajo.

1.4.1. Implicaciones del Teorema de Tales en Triángulos

Son diversos los resultados que se obtienen del Teorema de Tales. Antes de hacer una reseña de ellos, conviene hacer algunas precisiones sobre triángulos. El triángulo con vértice A, B y C, lo representaremos con símbolos $\triangle ABC$; el ángulo en un vértice digamos B, lo representamos con el simbolismo $\measuredangle ABC$.

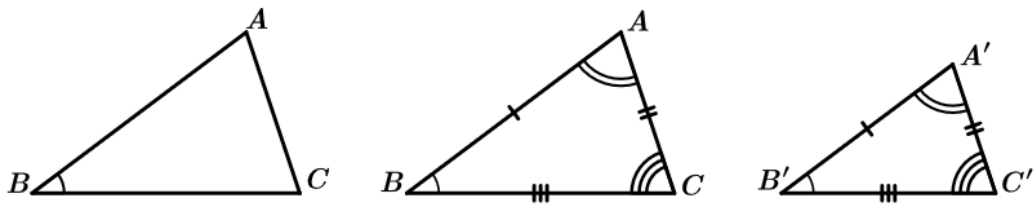


Figura 1.5. Triángulos homólogos

En dos figuras geométricas (Triángulos, polígonos) los elementos que se corresponden por su posición relativa los llamaremos homólogos. Estos elementos, se marcan en los diagramas con el mismo distintivo. Si AB y CD son segmentos paralelos, escribiremos $AB \parallel CD$ y si son perpendiculares $AB \perp CD$.

Asumimos los siguientes resultados sobre congruencia de triángulos: Dos triángulos son congruentes, si tienen congruentes:

- Un lado y sus dos ángulos adyacentes. (Criterio ALA)
- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. (Criterio LAL)
- Los tres lados (Criterio LLL).

Teorema 1.4.2 Toda recta paralela a un lado de un triángulo que interseca a los otros dos, determina segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo.

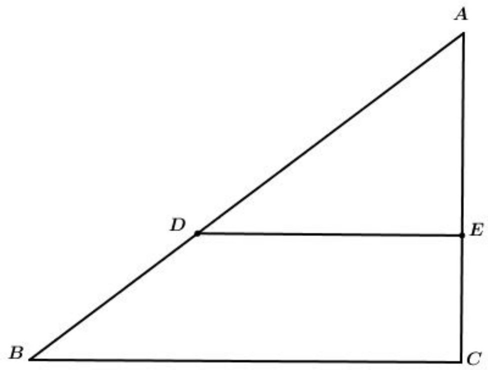


Figura 1.6. Segmentos proporcionales en un triángulo

O sea:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{CA}{EA}.$$

Demostración: Sea $\triangle ABC$, D y E puntos del segmentos AB y AC respectivamente tales que $DE \parallel BC$.

Por el teorema de Tales: $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CE}{EA}$

Luego: $\dfrac{BD + DA}{DA} = \dfrac{CE + EA}{EA}$

Como: $BD + DA = BA$ y $CE + EA = CA$, entonces, $\dfrac{BA}{DA} = \dfrac{CA}{EA}$.

1.5. Semejanza

1.5.1. Definición

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma y difieren en su tamaño. El símbolo "$\sim$" representa la semejanza entre dos figuras geométricas. Como la forma de los triángulos esta determinada por los ángulos entre sus lados, la semejanza entre triángulos se establece por las relaciones que guardan los lados y los ángulos homólogos.

1.5.2. Semejanza de triángulos

Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes, sí y sólo sí, se satisfacen las siguientes relaciones entre sus lados y sus ángulos.

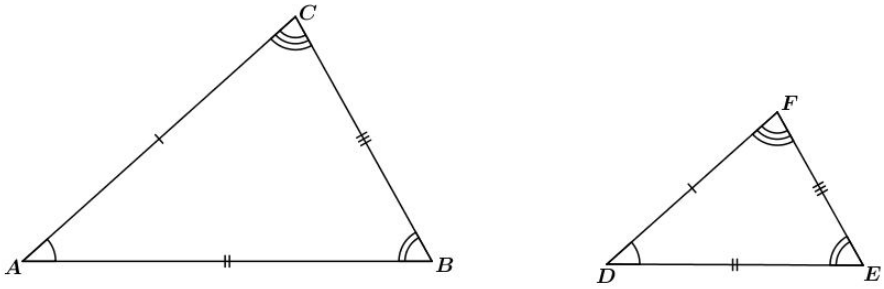


Figura 1.7. Semejanza de triángulos

$$\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}\ ,\quad \text{y}$$

$$\measuredangle CAB \cong \measuredangle FDE,\quad \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF,\quad \measuredangle ACB \cong \measuredangle DFE.$$

Cuando los triángulos sean semejantes se escribirá, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Y se leerá así: el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF.

Teorema 1.5.1 Si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, tienen sus ángulos congruentes, entonces sus lados homólogos son proporcionales.

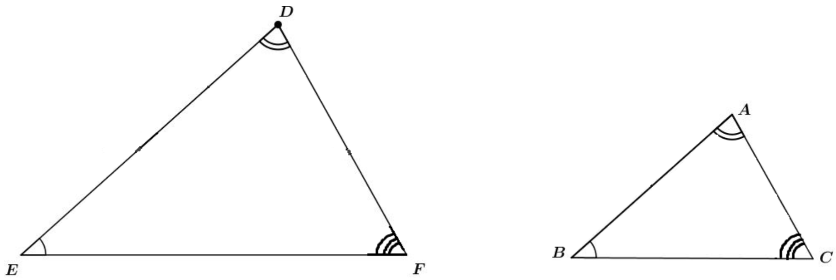


Figura 1.8. Triángulos con ángulos congruentes

O sea: Si $\measuredangle E \cong \measuredangle B$, $\measuredangle D \cong \measuredangle A$ y $\measuredangle F \cong \measuredangle C$. Entonces: $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}$.

Demostración: Trazamos en el triángulo $\triangle DEF$ el segmento PQ paralelo a EF de manera que $DP \cong AB$.

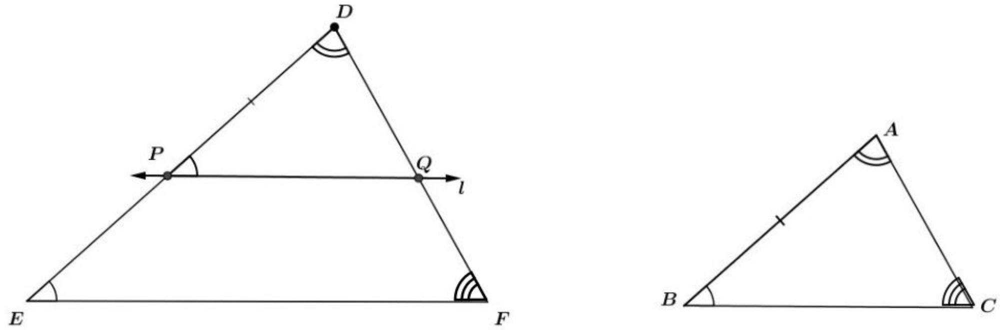


Figura 1.9. Triángulos con ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales

Además: $\measuredangle P = \measuredangle E$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas, luego $\measuredangle P \cong \measuredangle B$ y como $\measuredangle D \cong \measuredangle A$ los triángulos $\triangle DPQ$ y $\triangle ABC$ son congruentes por el criterio ALA.

Así que $DQ \cong AC$. Por el teorema de 1.4.2, tenemos que $\dfrac{DP}{DE} = \dfrac{DQ}{DF}$ y finalmente $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$, pues $DP \cong AB$ y $DQ \cong AC$. La otra igualdad se prueba en forma similar. Como una consecuencia inmediata de éste resultado se tienen, los dos siguientes.

Teorema 1.5.2 Toda paralela a un lado de un triángulo, determina otro triángulo semejante al primero.

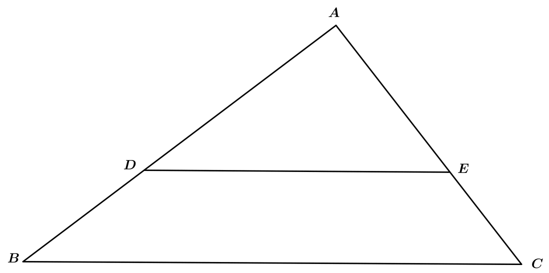


Figura 1.10. Triángulos semejentes determinados por una paralela

Es decir, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Teorema 1.5.3 Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, los triángulos tienen sus ángulos homólogos congruentes.

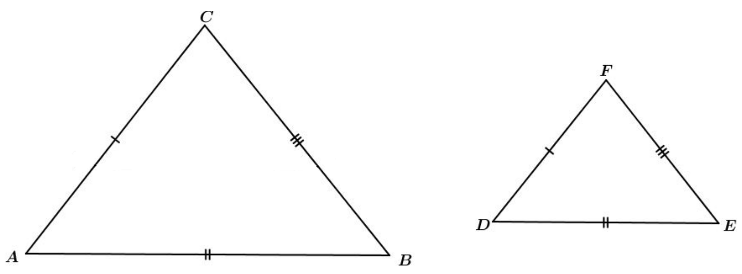


Figura 1.11. Triángulos con lados homólogos proporcionales

O sea: Si $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CB}{FE}$ entonces $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$ y $\measuredangle C \cong \measuredangle F$. De los anteriores teoremas se pueden concluir los siguientes criterios de semejanza.

1.5.3. Criterios de semejanza de triángulos

Criterio Ángulo, Ángulo, Ángulo: **(AAA):** Dos triángulos son semejantes, sí y sólo sí, tienen sus tres ángulos homólogos congruentes.

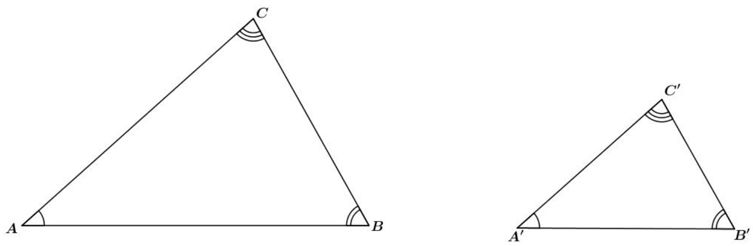


Figura 1.12. Triángulos con los 3 ángulos homólogos congruentes

O sea: Si $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle BCA \cong \measuredangle B'C'A'$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Criterio Ángulo, Ángulo: **(AA):** Dos triángulos son semejantes, sí y sólo sí, tienen dos ángulos homólogos congruentes.

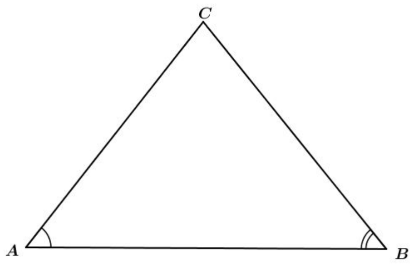


Figura 1.13. Triángulo con dos ángulos homólogos congruentes

Es decir: Si $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$, $\measuredangle ABC \cong \measuredangle A'B'C'$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Criterio Lado, Lado, Lado: **(LLL):** Dos triángulos son semejantes, sí y sólo sí, tienen sus lados homólogos respectivamente proporcionales.

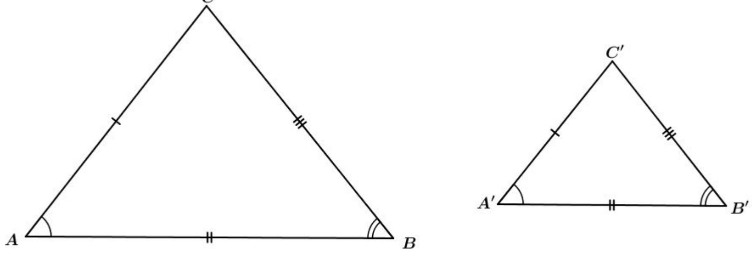


Figura 1.14. Triángulos con los 3 lados homólogos proporcionales

O sea: Si $\dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Criterio Lado, Ángulo, Lado: **(LAL):** Dos triángulos son semejantes, sí y sólo sí, tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulos comprendido entre ellos es congruente.

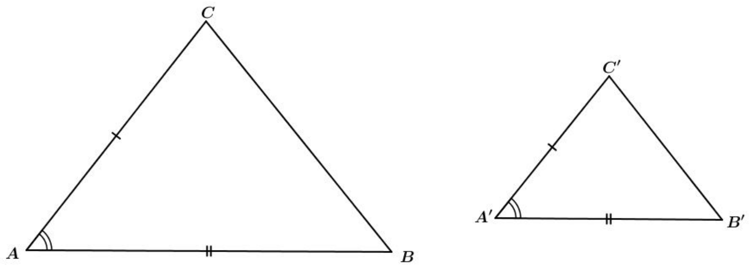


Figura 1.15. Triángulos con dos lados homólogos proporcionales y el ángulos comprendido entre ellos es congruente

Es decir: Si $\dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{AB}{A'B'}$ y $\measuredangle CAB \cong \measuredangle C'A'B'$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

1.5.4. Semejanza de triángulos rectángulos

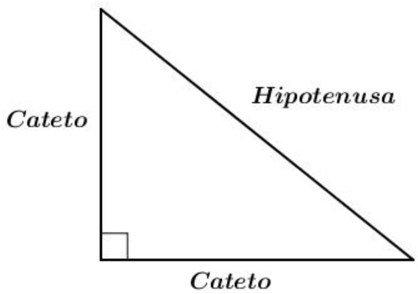


Figura 1.16. Triángulo rectángulo

Los triángulos que tienen un ángulo recto son los triángulos rectángulos. Como la suma de los tres ángulos internos del trángulo es 180°, los triángulos tienen dos ángulos agudos que son complementarios, pues su suma es igual a 90°. En triángulos rectángulos es usual la siguiente terminología:

- **Hipotenusa:** Es el lado opuesto al ángulo recto o de 90°.
- **Catetos:** Son los dos lados que forman el ángulo recto.

Cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo está formado por uno de los catetos y la hipotenusa.

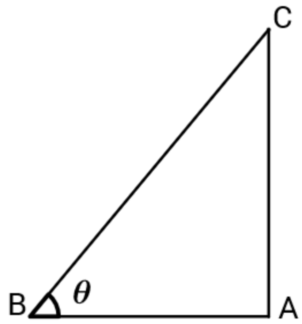


Figura 1.17. Triángulo rectángulo 2

Escogido uno de los ángulos agudos, digamos θ, el cateto que forma ese ángulo con la hipotenusa, lo llamamos cateto adyacente al ángulo θ. Debe observarse que ese cateto es a su vez, el lado opuesto al otro ángulo agudo del triángulo. Adicionalmente, si θ es la medida de uno de los ángulos, la medida del otro ángulo agudo es $90° - \theta$. Para que no haya lugar a confusión, la longitud de cada lado de un triángulo, la designaremos con la letra minúscula correspondiente al lado opuesto.

Los criterios de semejanza de triángulos establecidos en el parágrafo 1.5.3 para el caso de triángulos rectángulos se simplifican por la presencia de un ángulo recto; pueden establecerse de la siguiente forma:

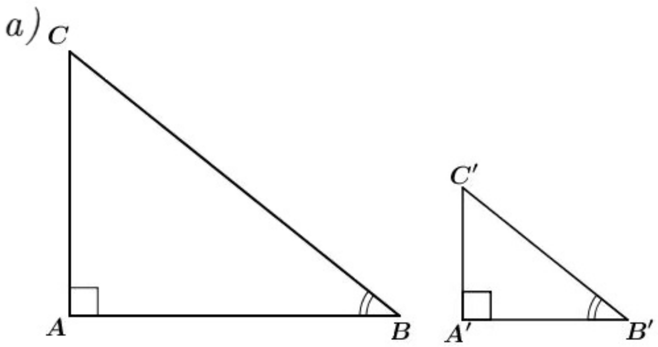
Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen:

a) Un ángulos agudo congruente.

b) Los dos catetos homólogos proporcionales.

c) Proporcionales la hipotenusa y un cateto.

Gráficamente, estos criterios se ilustran como se muestra a continuación.



$a)$

$$\measuredangle B \cong \measuredangle B'$$

.

Figura 1.18. Triángulo rectángulo con un ángulo agudo congruente

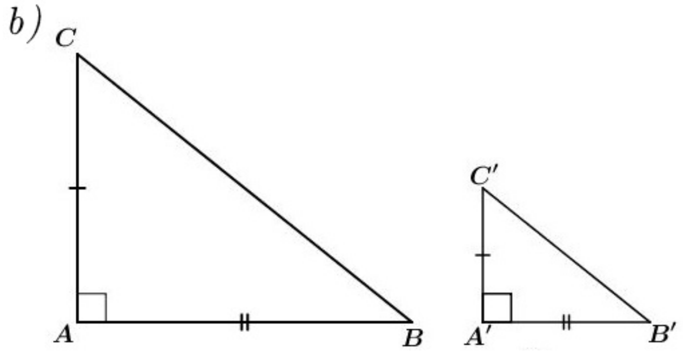


Figura 1.19. Triángulo rectángulo con los dós catetos homólogos proporcionales

$b)$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$$

.

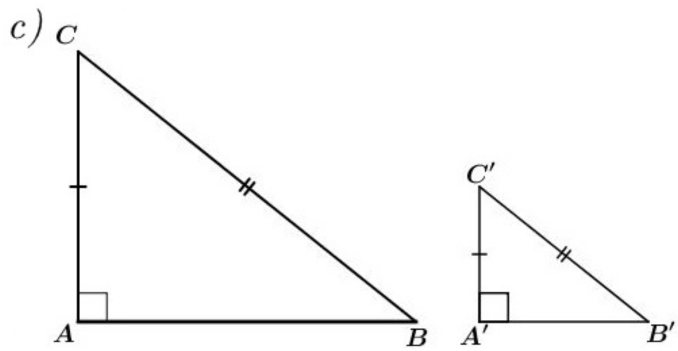


Figura 1.20. Triángulo rectángulo con un cateto y la hipotenusa proporcionales

$c)$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

1.5.5. Teorema de Pitágoras

Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, y si $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Entonces $a^2 + b^2 = c^2$

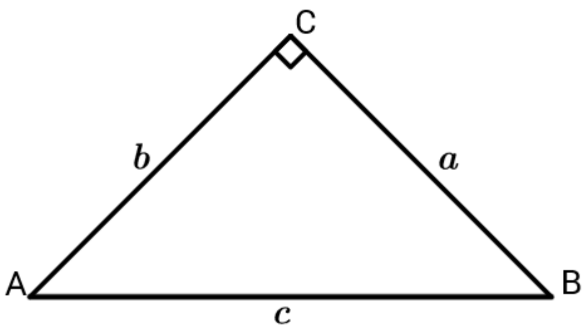


Figura 1.21. Teorema de Pitágoras

CAPÍTULO 2

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En este capítulo se estudiarán las razones trigonométricas llamadas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Su estudio se hará de forma gradual así: referidas a triángulos rectángulos, se introducen las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, posteriormente se extienden para ángulos entre 90° y 360°; por ultimo se introducen las funciones trigonométricas para cualquier número real.

2.1. Razones Trigonométricas referidas a Triángulos Rectángulos

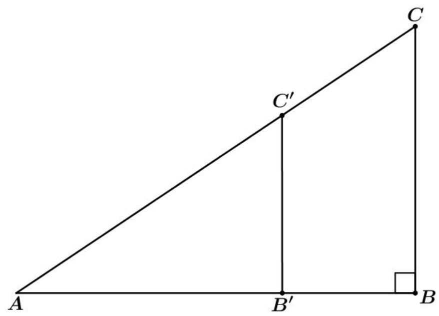


Figura 2.1. Triángulo rectángulo 3

Dado un triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en B, cualquier recta $B'C'$ paralela al lado BC determina otro triángulo rectángulo $AB'C'$ con ángulo recto en B', semejante al primero.

Son válidas entonces las siguientes proporciones:

$$1.\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'} \quad ; \quad 2.\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'} \quad ; \quad 3.\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}$$

$$4.\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'} \quad ; \quad 5.\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'} \quad ; \quad 6.\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'}$$

El valor común de la proporción 1. lo llamamos el Seno de A y se escribe:

$$\operatorname{sen} A=\frac{BC}{AC}$$

El valor común de las proporciones 2, 3, 4, 5 y 6 los llamamos respectivamente Coseno de A, Tangente de A, Cotangente de A, Secante de A, Cosecante de A y se escribe:

$$\cos A=\frac{AB}{AC} \quad ; \quad \tan A=\frac{BC}{AB} \quad ; \quad \cot A=\frac{AB}{BC}$$

$$\sec A=\frac{AC}{AB} \quad ; \quad \csc A=\frac{AC}{BC} \quad ; \quad \operatorname{sen} A=\frac{BC}{AC}$$

Lo anterior significa que si ABC es un triángulo rectángulo, con ángulo recto en B, cuyos lados tienen longitudes como se muestran en la figura adjunta; se tiene que:

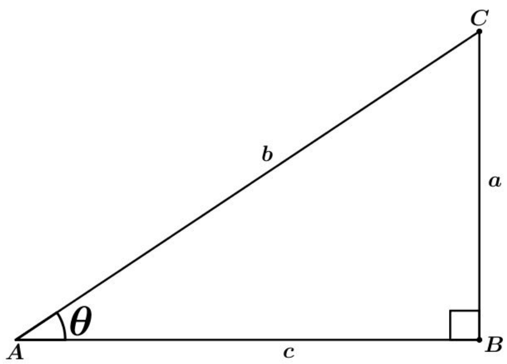


Figura 2.2. Triángulo rectángulo 4

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{a}{b}\left(\frac{\textit{Lado opuesto}}{\textit{Hipotenusa}}\right)$$
$$\cos\theta=\frac{c}{b}\left(\frac{\textit{Lado adyacente}}{\textit{Hipotenusa}}\right)$$
$$\tan\theta=\frac{a}{c}\left(\frac{\textit{Lado opuesto}}{\textit{Lado adyacente}}\right)$$
$$\cot\theta=\frac{c}{a}\left(\frac{\textit{Lado adyacente}}{\textit{Lado opuesto}}\right)$$
$$\sec\theta=\frac{b}{c}\left(\frac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Lado adyacente}}\right)$$
$$\csc\theta=\frac{b}{a}\left(\frac{\textit{Hipotenusa}}{\textit{Lado opuesto}}\right)$$

Observación: El valor de las razones trigonométricas de un ángulo fijo θ, es independiente de las longitudes de los lados que los conforman. Así por ejemplo:

$$\operatorname{sen} A=\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'} \quad , \quad \tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}$$

2.1.1. Primeras Propiedades

1.

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \csc\theta = 1$$
$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$
$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

En efecto :

$$\operatorname{sen}\theta \cdot \csc\theta = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1$$
$$\cos\theta \cdot \sec\theta = \frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c} = 1$$
$$\tan\theta \cdot \cot\theta = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a} = 1$$

Lo anterior significa que las razones trigonométricas $\csc\theta,\ \sec\theta,\ \cot\theta$ son respectivamente las razones inversas de $\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta$ y $\tan\theta$. O sea:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

2. Dada una función trigonométrica de un ángulo agudo θ, las otras cinco funciones quedan determinadas de manera única. A manera de ilustración, presentamos el siguiente ejemplo: Dado $\tan\theta = \frac{3}{4}$, hallar las otras funciones.

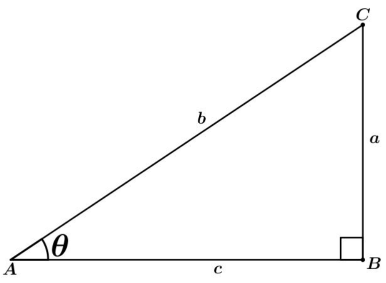


Figura 2.3. Ilustración funciones trigonométricas

Como $\tan\theta = \frac{3}{4}$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $a = 3$ y $c = 4$. Como $b^2 = a^2 + c^2 = 9 + 16 = 25$. Luego $b = 5$. Así que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{a}{c} = \frac{3}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} \quad ; \quad \sec\theta = \frac{b}{c} = \frac{5}{4} \quad ; \quad \csc\theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{3}$$

2.1.2. Co-Funciones Trigonométricas

En todo triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son complementarios, luego si uno de esos ángulos es θ, el otro es $90° - \theta$.

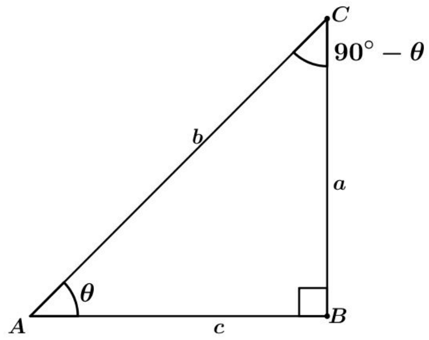


Figura 2.4. Co-funciones trigonométricas

Luego: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a}{b}$. Así que:
$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$.
De la misma forma:
$\cos\theta = \dfrac{c}{b}$; $\operatorname{sen}(90° - \theta) = \dfrac{c}{b}$
Luego: $\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$.

En resumen: El seno de un ángulo, coincide con el coseno del complemento y recíprocamente. Por ésta razón el coseno es co-función del seno y recíprocamente. Similarmente: tangente y cotangente son co-funciones la una de la otra; lo mismo ocurre con la secante y la cosecante.

2.1.3. Identidades Pitagóricas

Las igualdades:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Se conocen con el nombre de identidades pitagóricas porque se deducen haciendo uso del Teorema de Pitágoras.

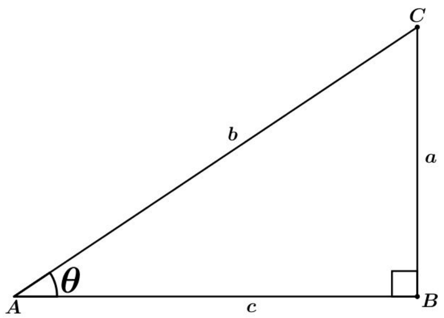


Figura 2.5. Triángulo rectángulo 5

En efecto : $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a}{b}$; $\cos\theta = \dfrac{c}{b}$
Luego:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 &= \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}\\ &= \frac{a^2 + c^2}{b^2}\end{aligned}$$

Como: $a^2 + c^2 = b^2$, luego $(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \dfrac{b^2}{b^2} = 1$. Usualmente se escribe :

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta; \quad (\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$$

Así que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2\theta &= 1 + (\tan\theta)^2 \\
&= 1 + \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} \\
&= \frac{a^2 + c^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = (\sec\theta)^2 = \sec^2\theta
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
1 + \cot^2\theta &= 1 + (\cot\theta)^2 \\
&= 1 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\
&= \frac{a^2 + c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\csc\theta)^2 = \csc^2\theta.
\end{aligned}$$

2.1.4. Visualización Gráfica

Como se sabe, el valor de las funciones trigonométricas no depende de la longitud de los lados del ángulo θ; esto permite representar un mismo ángulo usando triángulos convenientemente escogidos así:

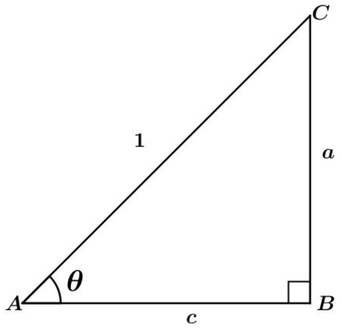


Figura 2.6. Visualización gráfica Seno y Coseno.

a) El seno y el coseno se representan en triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1.
$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a}{1}$, $\cos\theta = \dfrac{c}{1}$.
Luego: $\operatorname{sen}\theta$ es el lado opuesto, y $\cos\theta$ es el lado adyacente. Obsérvese que adicionalmente resulta inmediato que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \text{ pues } a^2 + c^2 = 1.$$

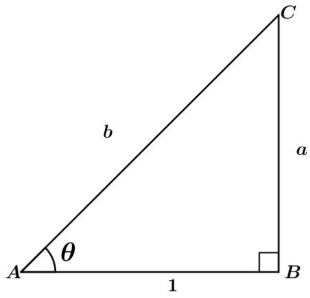


Figura 2.7. Visualización gráfica Tangente

b) La tangente se representa en triángulos rectángulos con lado adyacente igual a 1.

$\tan\theta = \dfrac{a}{1} = a$

Luego la $\tan\theta$ es el lado opuesto al ángulo θ. Como $\cos\theta = \dfrac{1}{b}$, así que $b = \dfrac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$. De paso se observa que la hipotenusa es la secante de θ.

De aquí se deduce en forma inmediata que

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

Pues es claro que $b^2 = a^2 + 1$.

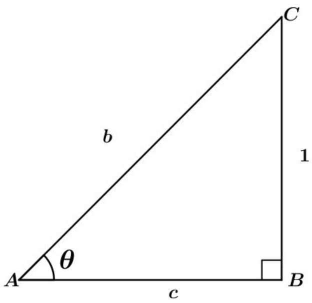


Figura 2.8. Visualización gráfica Cotangente

c) La cotangente se representa en triángulos rectángulos con lado opuesto igual a 1.

$\cot\theta = \dfrac{c}{1} = c$

Luego la $\cot\theta$ es el lado adyacente a θ. Como $\dfrac{1}{b} = \operatorname{sen}\theta$, entonces $b = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$. De nuevo debe observarse que la hipotenusa es la $\csc\theta$.

Además: $b^2 = 1 + c^2$, significa que

$$csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta.$$

2.1.5. Sistema de Medida de ángulos

Existen diversos sistemas para medir ángulos; es más cada civilización puede tener su propio sistema. De hecho pueden inventarsen sistemas para medir ángulos. Cada uno de ellos deben empezar estableciendo una unidad de medida. Vamos a describir dos sistemas de medida que actualmente son los más utilizados.

Sistema Sexagesimal:

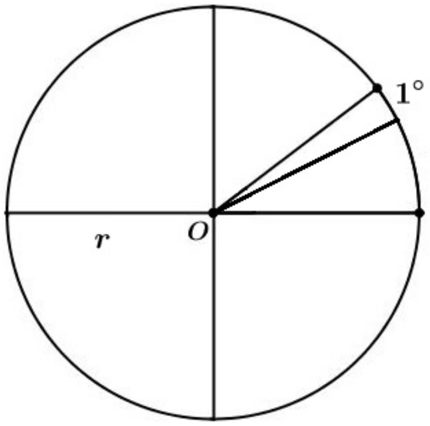


Figura 2.9. Sistema Sexagesimal.

La unidad de medida es el sexagesimal. Dada una circunferencia cualquiera, procedemos a dividirla en 360 arcos iguales tomando puntos equidistantes sobre ella. El ángulo central determinado por dos marcas consecutivas cualesquiera mide 1 grado sexagesimal.

Como las marcas son equidistantes según éste sistema todos los ángulos rectos miden 90 grados sexagesimales: Se escribe: 90°; el ángulo llano 180°, etc.

Cuando la unidad de medida (el grado), se divide en 60 partes iguales, cada una de ellas recibe el nombre de minuto; y si cada minuto se divide en 60 partes iguales, cada una recibe el nombre de segundo. De ésta forma:

$$1 \textit{ grado equivale a } 60 \textit{ minutos}$$

$$1 \textit{ minuto equivale a } 60 \textit{ segundos}$$

Los grados se representan con un supercero en el número; los minutos con una supercoma y los segundos con una doble supercoma. Así por ejemplo:

$$\theta = 37^\circ 45^{'} 32^{''}$$

es el ángulo con medida 37 grados, 45 minutos y 32 segundos.

Sistema de Radianes:

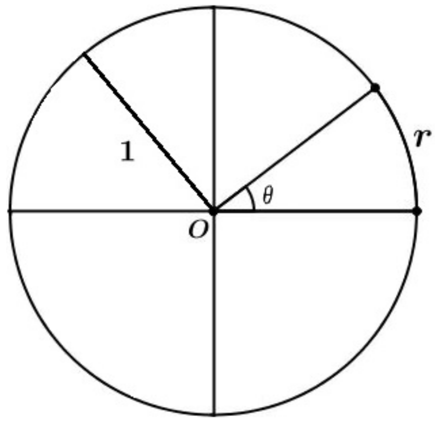


Figura 2.10. Sistema de Radianes

La unidad de medida es el radián. Dada una circunferencia de radio 1 y un ángulo central θ, si r es la longitud del arco determinado por el ángulo en la circunferencia diremos que r es la medida del ángulo θ en radianes. Escribiremos $\theta = 1$ (radianes) de ésta forma 1 radián es la medida del ángulo θ corresponde a un arco de longitud igual al radio.

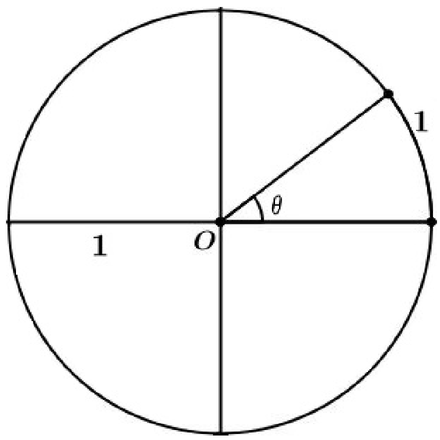


Figura 2.11. Sistema de Radianes

Como la longitud de la circunferencia es igual a 2π, se deduce inmediatamente que en éste sistema el ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ y los ángulos llanos miden π. Entendiendo que en el sistema sexagesimal el ángulo correspondiente a una circunferencia es de 360° y en el sistema de radianes corresponde a 2π, entonces

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = 0{,}0174532... \text{ radianes}$$

2

$$1\text{radián} = \frac{360}{2\pi} \cdot 1^\circ \;=\; 57{,}29... \text{ grados}$$

La siguiente tabla, establece la equivalencia entre los dos sistemas para algunos ángulos:

θ : Grados	360°	270°	180°	90°	45°	30°	60°	120°	15°	0°
θ: Radianes	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$2\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	0

Cuadro 2.1. Equivalencia entre ángulos y radianes

2.1.6. El Circulo Goniométrico(o Trigonométrico)

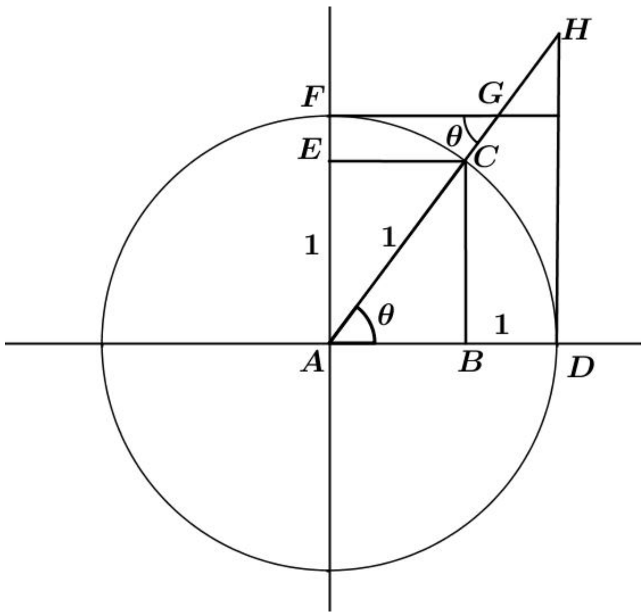


Figura 2.12. Circulo Goniométrico

La circunferencia de radio 1, en la cual se representa el ángulo θ, con su vértice en el centro de la circunferencia, determina el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B e hipotenusa igual a 1. Al trazar DH, tangente a la circunferencia en D y al prolongar el lado AC del triángulo hasta H, se obtiene el triángulo rectángulo ADH con ángulo recto en D. Este triángulo es semejante con el triángulo ABC. El lado AD mide 1 y es adyacente a θ. Al trazar la paralela a la circunferencia en F, se obtiene el triángulo rectángulo AFG con ángulo recto en F, es semejante con ABC el cateto opuesto a θ vale 1.

De acuerdo a las visualizaciones hechas anteriormente podemos escribir:

$$AB = \cos\theta \qquad FG = \cot\theta$$

$$AE = \operatorname{sen}\theta \qquad AH = \sec\theta$$

$$DH = \tan\theta \qquad AG = \csc\theta$$

El gráfico descrito antes, en el cual se visualizan todas las funciones trigonométricas de un ángulo θ, se le conoce con el nombre de “ Círculo Goniométrico” o “Círculo Trigonométrico”.

2.1.7. Funciones Trigonométricas de $30°,\ 45°,\ 60°$

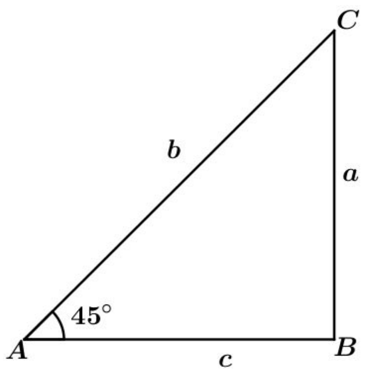


Figura 2.13. Funciones Trigonométricas de ángulo de 45°

Las funciones trigonométricas del ángulo de 45°, pueden calcularse con base en un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1. Como $b^2 = a^2 + c^2$ y $a = c = 1$, entonces $b^2 = 2$, o sea, $b = \sqrt{2}$.

Luego:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{c} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad \csc 45° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

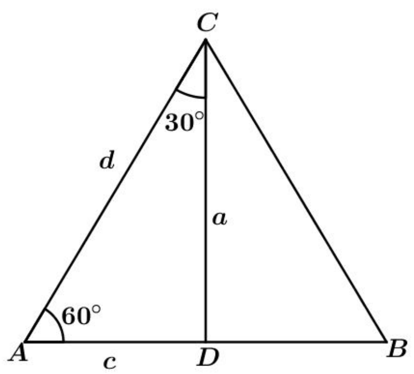


Figura 2.14. Funciones Trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°

Las funciones trigonométricas de 30° y 60° se pueden calcular con base en un triángulo equilátero ABC de lado 2. O sea: $d = 2$, $c = 1$ Como: $d^2 = a^2 + c^2$, entonces $4 = a^2 + 1$, luego $a^2 = 3$. Así que $a = \sqrt{3}$.

Entonces:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{c}{d} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60° = \frac{d}{c} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \csc 60° = \frac{d}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Similarmente:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{c}{d} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{c}{a} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{d}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 60^\circ = \frac{d}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

2.2. Extensión de las Funciones Trigonométricas

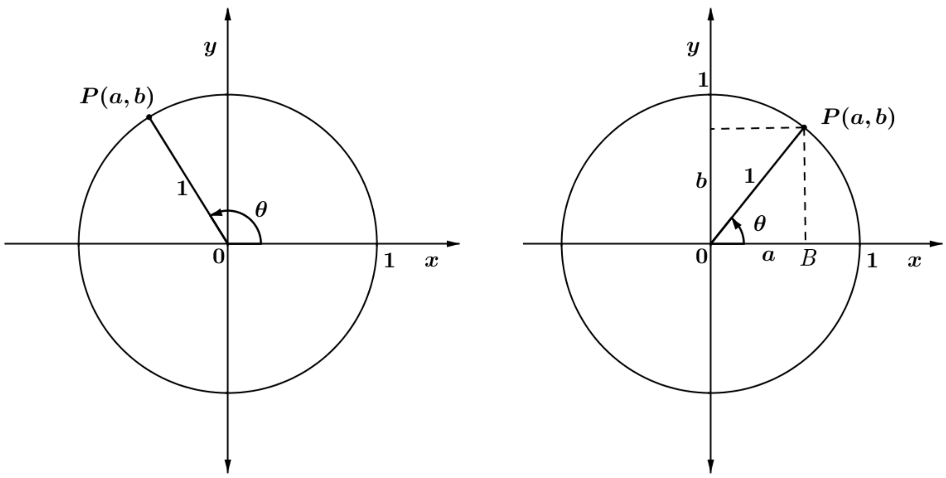


Figura 2.15. Extensión de las Funciones Trigonométricas

Tomamos en consideración la circunferencia con centro en el origen de un sistema cartesiano $x - y$ de radio 1. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Cada punto $P(a, b)$ de esta circunferencia, determina el segmento y el eje x positivo del sistema de coordenadas determina un ángulo θ. Cuando $a > 0$, $b > 0$ el punto P está en el primer cuadrante y θ es un ángulo agudo, como los considerados en el parágrafo anterior. El punto P puede proyectarse sobre el eje x y sobre el eje y, determinando el triángulo rectángulo OBP, con ángulo recto en el punto B. Como se sabe:

$$\cos\theta = \frac{OB}{OP} = a$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{BP}{OP} = b$$

Como a es la abcisa de P y b la ordenada, podemos escribir:

$$\cos\theta = \text{ abcisa de } P \quad ; \quad \operatorname{sen}\theta = \text{ ordenada de } P$$

Esta situación motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.1 Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ y si θ es el ángulo formado por el segmento OP y el eje OX positivo, definimos:

$$\cos\theta = x \quad , \quad \operatorname{sen}\theta = y$$

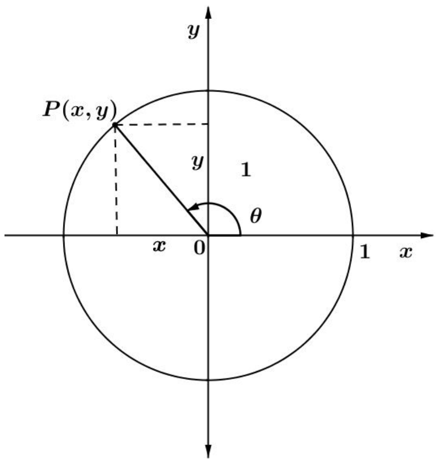


Figura 2.16. Razones en la circunferencia unitaria.

Cuando P es el punto (1,0), $\theta = 0°$ y entonces

$$\cos 0° = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 0° = 0$$

Cuando P es el punto (0,1) , $\theta = 90°$ y entonces

$$\cos 90° = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 90° = 1$$

Cuando P es el punto $(-1, 0)$, $\theta = 180°$ y entonces

$$\cos 180° = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 180° = 0$$

Cuando P es el punto $(0, -1)$, $\theta = 270°$ y entonces

$$\cos 270° = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 270° = -1$$

Cuando P es el punto (1,0), $\theta = 360°$ y entonces

$$\cos 360° = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 360° = 0$$

Observaciones:

a) Es conveniente y muy útil, ver $\operatorname{sen}\theta$ como la proyección del segmento OP, sobre el eje y, y $\cos\theta$ como la proyección de OP sobre el eje x.

b) De la definición se desprende que cualquier punto de la circunferencia unitaria es de la forma $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ donde θ es el ángulo descrito en la definición.

2.3. Más Propiedades de las Funciones Trigonométricas

2.3.1. Funciones Trigonométricas de $\theta + 90°, \theta + 180°, 180° - \theta$

Si θ es un ángulo agudo, las funciones trigonométricas de $\theta+90°$, $\theta+180°$, $180°-\theta$, se calculan sin dificultad por congruencia de triángulos.

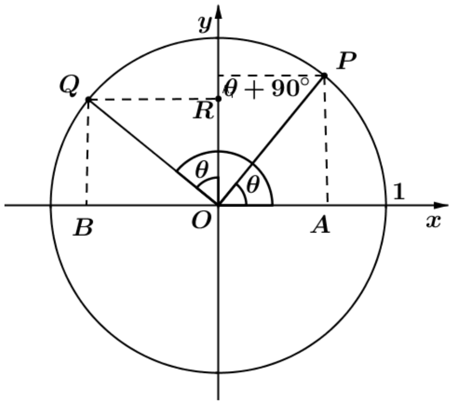


Figura 2.17. Funciones trigonométricas $\theta + 90°$

Se tiene que: $\triangle OAP \cong \triangle ORQ$

Luego: $0A \cong OR$; $AP \cong QR \cong OB$

Como $OA = \cos\theta = \operatorname{sen}(\theta + 90°)$

$AP = \operatorname{sen}\theta$

Pero $OB = -AP = \cos(\theta + +90°)$

Luego: $\operatorname{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$

$\cos(\theta + 90°) = -\operatorname{sen}\theta$

Nótese que el signo menos, se debe a que el punto Q es del segundo cuadrante, luego su coordenada x (que es el coseno de $\theta + 90°$) es negativa.

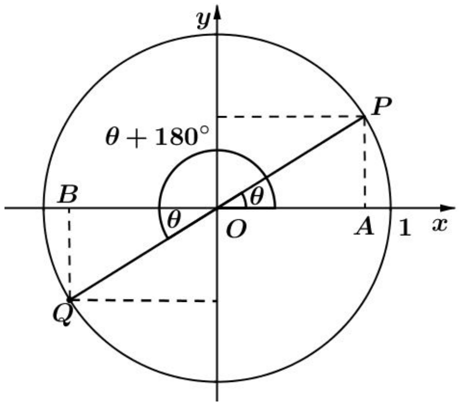


Figura 2.18. Funciones trigonométricas de $180° + \theta$

Se tiene que: $\triangle OAP \cong \triangle OBQ$

Luego: $0A \cong OB$; $AP \cong OB$

Q es un punto del tercer cuadrante, sus dos coordenadas son negativas, luego:

$\cos(\theta + 180°) = OB = -OA$

Como $OA = \cos\theta$ entonces de la misma forma:

$\operatorname{sen}(\theta + 180°) = -\operatorname{sen}\theta$

Estos dos resultados también pueden obtenerse así:

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta + 180°) &= \cos\left[(\theta + 90°) + 90°\right. \quad ; \quad & \operatorname{sen}(\theta + 180°) &= \operatorname{sen}\left[(\theta + 90°) + 90°\right. \\
&= -\operatorname{sen}(\theta + 90°) \quad ; & &= \cos(\theta + 90°) \\
&= -\cos\theta \quad ; & &= -\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}
$$

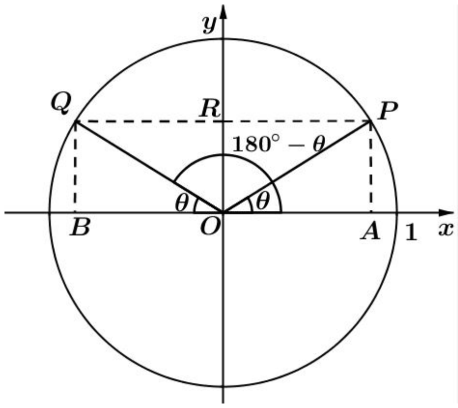


Figura 2.19. Funciones trigonométricas de $180° - \theta$

Tenemos: $\triangle OAP \cong \triangle OBQ$

luego:

$\cos\theta = OA$

$\cos(180° - \theta) = OB = -OA$

Así que:

$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

Similarmente: $\operatorname{sen}(180° - \theta) = OR$

$\operatorname{sen}\theta = AP = OR$

Luego: $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$.

Las funciones trigonométricas de $\theta + 270°$, se calculan en forma similar. Los resultados anteriores, lo que muestran es que las funciones trigonométricas de todo ángulo θ, entre $0°$ y $360°$, pueden calcularse, con base en un ángulo del primer cuadrante. Esta técnica se conoce con el nombre de “Reducción al primer cuadrante”.

2.3.2. Funciones Trigonométricas de Ángulos Negativos

Un ángulo θ, puede considerarse como generado por la rotación de un segmento OA, sobre uno de sus extremos, digamos O.

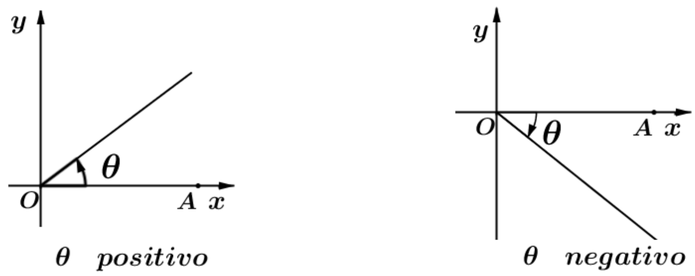


Figura 2.20. Ángulos orientados

Cuando la rotación se hace en sentido contrario a como se mueven los punteros de un reloj, diremos que θ es positivo(sentido antihorario); si la rotación es en sentido horario, θ es negativo. Los diagramas deben dar cuenta de la rotación seleccionada dibujando una flecha en el vértice del ángulo. Debe entenderse que si θ es un ángulo positivo, θ es el ángulo negativo u opuesto a θ en el sentido descrito antes.

De nuevo usando congruencia de triángulos se prueba que:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

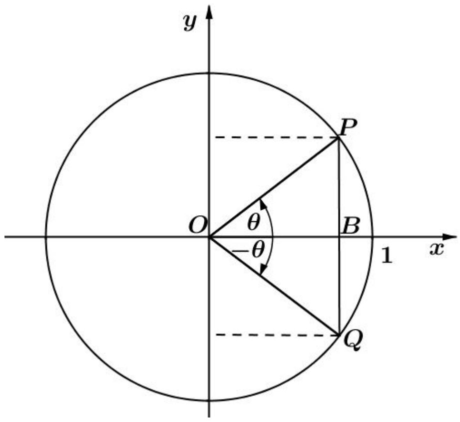


Figura 2.21. Razones de ángulos opuestos

Se tiene que: $\triangle OBP \cong \triangle OBQ$

$\cos\theta = OB = \cos(-\theta)$

$\operatorname{sen}\theta = BP$

$\operatorname{sen}(-\theta) = BQ = -BP$

Luego: $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

En resumen:

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

En general, cuando una función f, satisface la igualdad $f(-x) = f(x)$, decimos que f es par y si $f(-x) = -f(x)$ decimos que f es impar. Lo anterior significa que coseno es par y seno es impar.

2.3.3. Variación de las funciones trigonométricas

Se sabe que $\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ son las proyecciones del segmento OP sobre el eje x y sobre el eje y respectivamente. Para ver como son las variaciones de las funciones trigonométricas, conviene considerar la circunferencia unitaria como la trayectoria de un punto que se mueve en el plano, empezando en el punto $(1, 0)$ de tal manera que en todo momento, la distancia del punto móvil al centro de la circunferencia es igual a 1.

Variación del Coseno:

Cuando el punto móvil esta en $(1, 0)$, la proyección vale 1, a medida que el punto se dirige hacia (0,1), la proyección disminuye su valor hasta llegar a cero; a medida que el punto se dirige a $(-1, 0)$, la proyección sigue disminuyendo hasta llegar a -1.

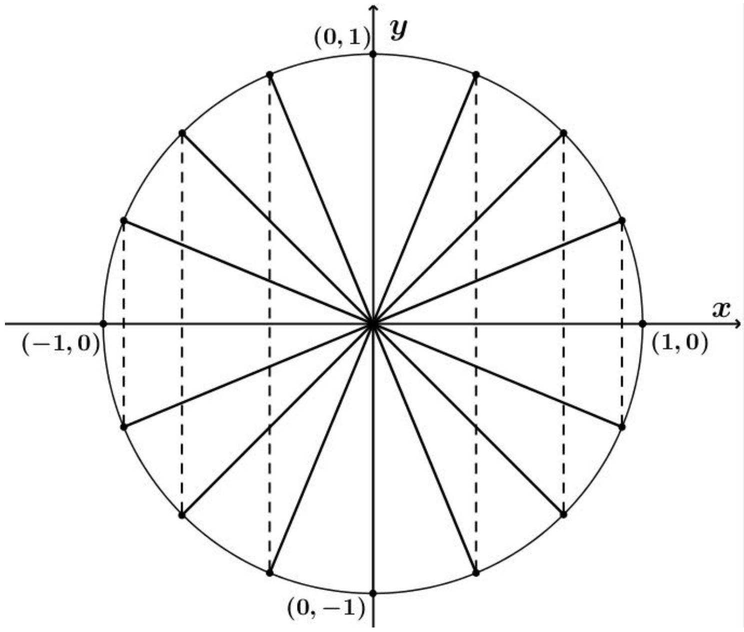


Figura 2.22. Variación del Seno y del Coseno.

Cuando el punto sigue avanzando hacia $(0,-1)$, la proyección aumenta hasta llegar a cero; y finalmente cuando el punto móvil se acerca de nuevo a $(1,0)$, la proyección sigue aumentando hasta llegar de nuevo a 1.

La anterior descripción permite escribir las siguientes características de $\cos\theta$:

a) $\cos\theta$ toma todos los valores entre -1 y 1:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

b) $\cos 0 = \cos 360° = 1$

c) $\cos 90° = \cos 270° = 0$

d) $\cos 180° = -1$

Variación del Seno:

Es similar a la de coseno, ahora las proyecciones se miden sobre el eje y ; empieza en 0, cuando el punto móvil esta en $(1,0)$; luego aumenta hasta llegar a 1, cuando el punto móvil está en $(0,1)$, etc.

Las características del seno son las siguientes: a) $\operatorname{sen}\theta$ toma todos los valores entre -1 y 1:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$$

b) $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 180° = \operatorname{sen} 360° = 0$

c) $\operatorname{sen} 90° = 1$

d) $\operatorname{sen} 270° = -1$

Variación de la Tangente:

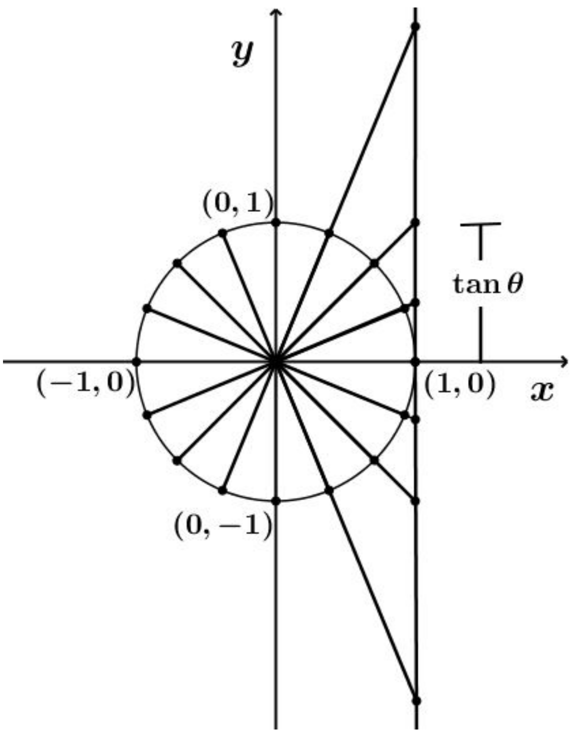


Figura 2.23. Variación de la Tangente

El circulo goniométrico , descrito en el numeral 6 muestra que la tangente puede medirse sobre la recta tangente trazada en las circunferencias unitarias en el punto $(1,0)$. Cuando el punto móvil está en $(1,0)$, la tangente vale 0, cuando el punto se acerca a $(0,1)$ la tangente aumenta su valor hasta hacerse infinitamente grande. Cuando el punto móvil supera al punto $(0,1)$ la tangente se hace infinitamente pequeña (ó infinitamente grande pero negativa); al avanzar hacia $(-1,0)$ la tangente aumenta su valor hasta llegar a cero, de manera que cuando el punto móvil se acerca a $(0,-1)$ la tangente vuelve hacerse infinitamente grande. Cuando el punto móvil supera a $(0,-1)$, la tangente vuelve hacerse infinitamente grande pero en negativa; empieza de nuevo a aumentar su valor hasta llegar a 0, cuando el punto móvil retorna a $(1,0)$. La descripción anterior permite escribir:

a)$\tan 0 = \tan 180° = 0$

b)$\tan 90° = \infty$

c)$\tan 270° = -\infty$

d) La tangente toma todos los valores de la recta real:

$$-\infty \leq \tan\theta \leq \infty$$

2.4. Gráficas de las funciones trigonométricas

Para graficar las funciones seno y coseno se sigue el siguiente procedimiento geométrico, el cual siguiendo las precisiones realizadas en el circulo trigonométrico permitirá realizar una buena representación de estas funciones.

- Trazar una circunferencia del radio deseado.
- Calcular el perímetro de la circunferencia($2\pi r$)
- Trazar un segmento en el eje coordenado de longitud $2\pi r$ desde el origen $(0, 0)$ como se observa en la figura, en este segmento se trazara las funciones mencionadas.
- Dividir la circunferencia en los radianes deseados, realizando la misma división en el segmento construido.
- Para hallar coseno de un ángulo se debe tener en cuenta que esta razón es la proyección sobre el eje x. Por tanto con el compás se debe tomar esta medida y trasladarla al eje coordenado.

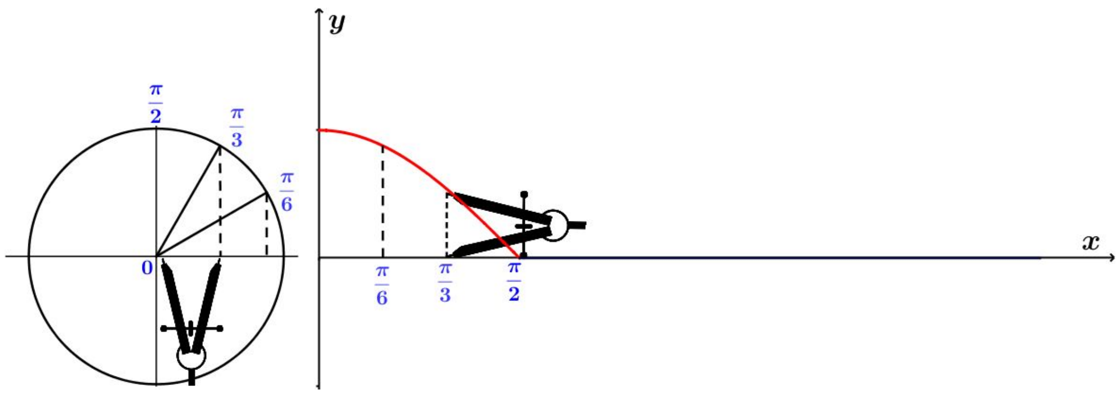


Figura 2.24. Construcción gráfica función Coseno 1.

- Se debe tener en cuenta que la proyección de los ángulos sobre le eje x en el segundo y tercer cuadrante tiene signo negativo. Por tanto al trasladar la medida con ayuda del compás esta se debe ubicar debajo del segmento trazado, como se muestra en las siguientes figuras.

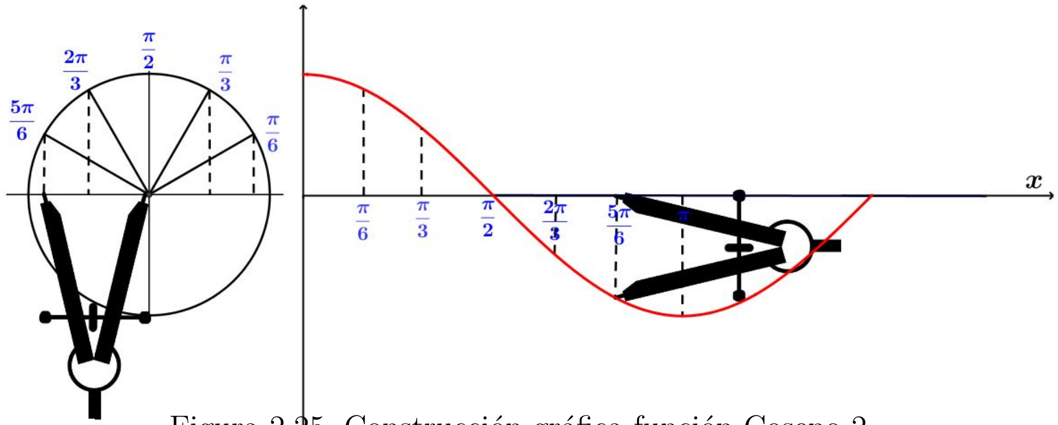


Figura 2.25. Construcción gráfica función Coseno 2.

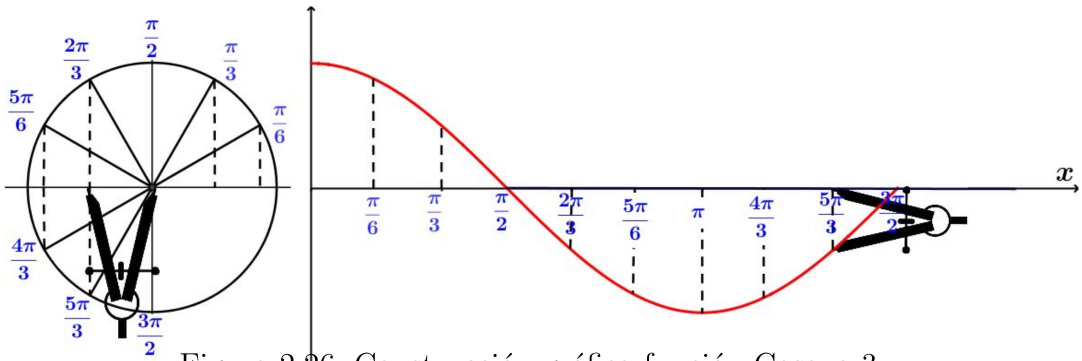


Figura 2.26. Construcción gráfica función Coseno 3.

- Luego, continuando con este proceso iterativamente con cada uno de los ángulos en la que se dividió la circunferencia se obtiene finalmente la representación gráfica del coseno.

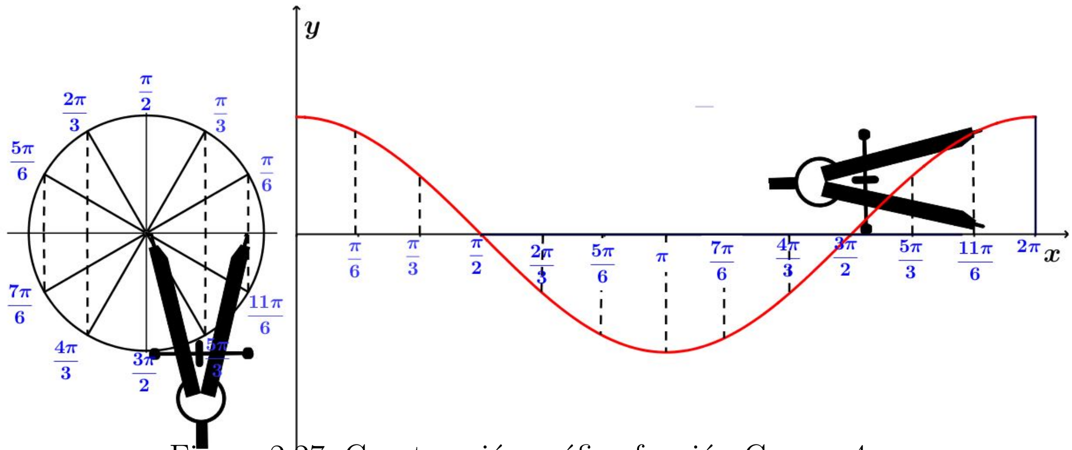


Figura 2.27. Construcción gráfica función Coseno 4.

- Ahora bien, para hallar seno de un ángulo se debe tener en cuenta que esta razón corresponde a la proyección sobre el eje y. Por tanto con el compás se debe tomar esta medida y trasladarla al eje coordenado.

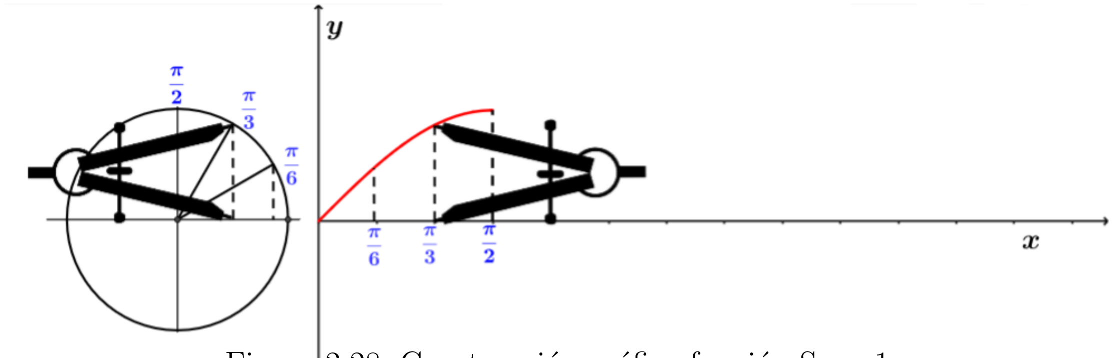


Figura 2.28. Construcción gráfica función Seno 1.

- De la misma manera que para la gráfica de coseno, continuamos con el proceso iterativo de trasladar la medida de la proyección al eje coordenado formado por el segmento construido.

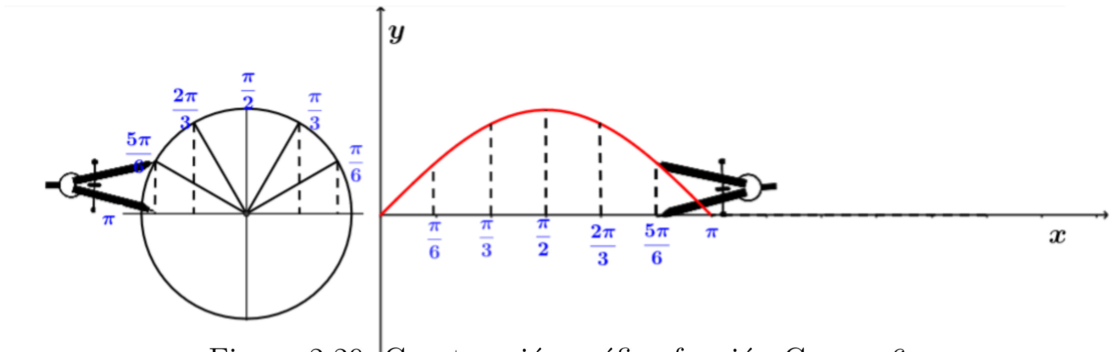


Figura 2.29. Construcción gráfica función Coseno 6.

- Se debe tener en cuenta que la proyección de los ángulos sobre le eje y en el tercer y cuarto cuadrante tiene signo negativo. Por tanto al trasladar su medida con ayuda del compás esta se debe ubicar debajo del segmento trazado, como se muestra en las siguientes figuras.

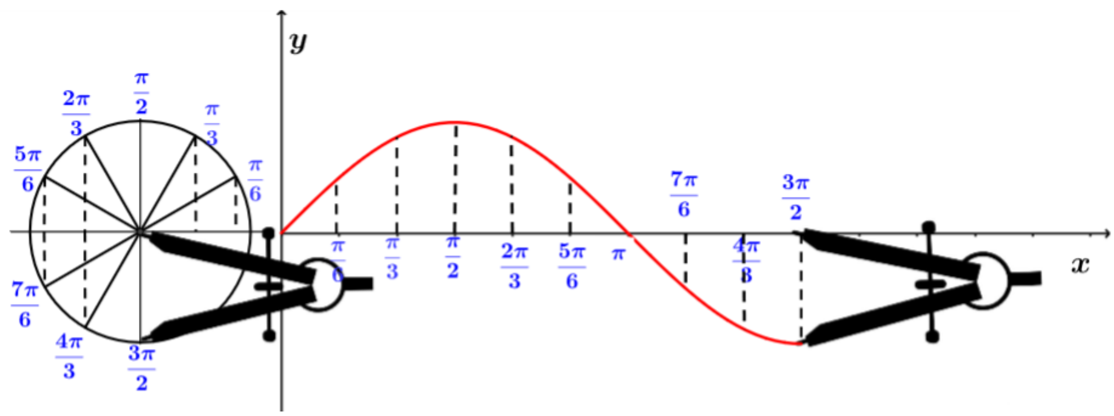


Figura 2.30. Construcción gráfica función Seno 2.

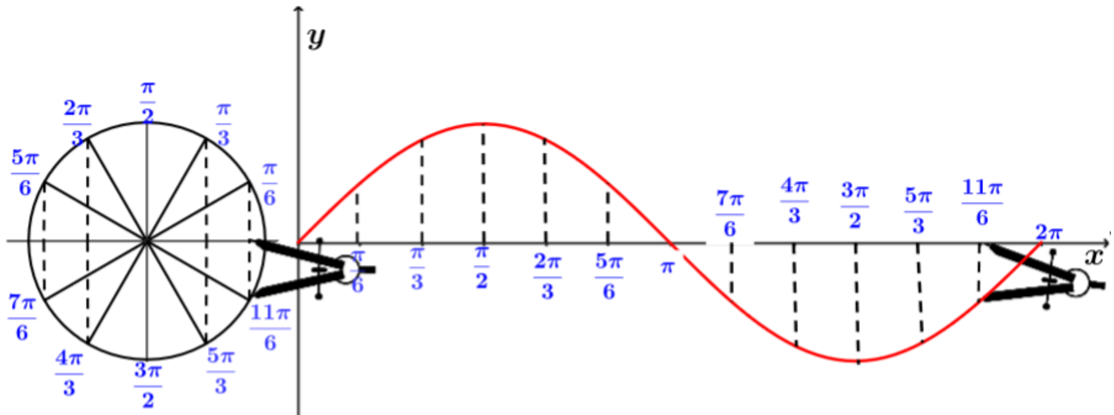


Figura 2.31. Construcción gráfica función Seno 3.

Luego de construidas estas funciones es posible realizar un análisis de estas para definir las funciones trigonométricas que faltan. Entonces veamos esto con cada una:

1. Tangente

Como se observó anteriormente $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ por tanto:

I. $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ y $\theta \neq \dfrac{3\pi}{2}$ pues $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$. Es por esto que en $\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{3\pi}{2}$ existe una asíntota vertical en la gráfica de tangente.

II. Como $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 2\pi = 0$ entonces $\tan 0 = \tan 2\pi = 0$.

III. Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ entonces $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ y en consecuencia $\tan\theta = 1$.

IV. Si $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ se tiene que cada vez que los ángulos se acercan a $\dfrac{\pi}{2}$ el $\cos\theta$ es cada vez mas pequeño y el $\operatorname{sen}\theta$ cada vez mas grande de tal modo que $\operatorname{sen}\theta$ se aproxima a 1 y $\cos\theta$ se aproxima a 0, acercándose al cociente $\dfrac{1}{0} = \infty$.

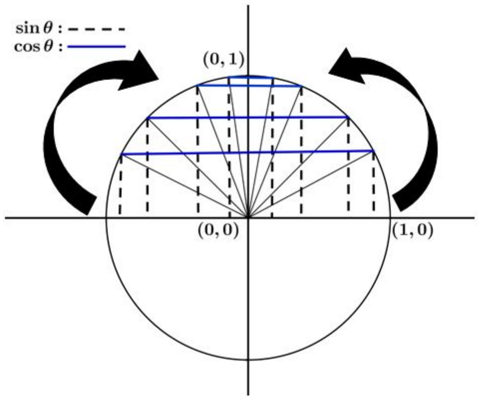


Figura 2.32. Variación Seno y Coseno.

v. Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ se tiene que cada vez que los ángulos se acercan a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda entonces tendrá un comportamiento similar, solo que en este caso el $\cos\theta$ será negativo pues su proyección se encuentra en el segundo cuadrante. En consecuencia el cociente $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ se hará cada vez más grande pero negativamente, aproximándose a $-\frac{1}{0} = -\infty$

Además su gráfica es:

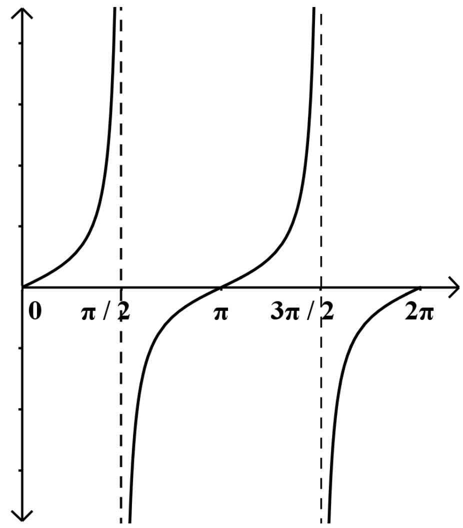


Figura 2.33. Representación gráfica Tangente

2. Secante

Como se observó anteriormente $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ entonces:

i. $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ y $\theta \neq \frac{3\pi}{2}$ pues $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$. Es por esto que en $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ existe una asíntota vertical en la gráfica de secante.

ii. Como $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ entonces $\sec 0 = \sec 2\pi = 1$. Del mismo modo si $\cos\pi = -1$ entonces $\sec\pi = -1$.

iii. Si $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ entonces cada vez que el ángulo se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ se tiene que $\cos\theta$ se acerca a 0 , en consecuencia el cociente $\frac{1}{\cos\theta}$ se aproxima a $\frac{1}{0} = \infty$

iv. Si $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ entonces $\cos\theta$ realiza una trayectoria de 0 a -1, por tanto el cociente $\frac{1}{\cos\theta}$ parte de $-\infty$ a -1.

v. Si $\pi \leq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ entonces $\cos\theta$ realiza una trayectoria de -1 a 0, por tanto el cociente $\dfrac{1}{\cos\theta}$ parte de -1 a $-\infty$.

vi. Si $\dfrac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$ entonces cada vez que el ángulo se acerca a 2π se tiene que $\cos\theta$ se aproxima a 1 , por tanto el cociente parte de ∞ aproximándose cada vez más a $\dfrac{1}{1}$.

Veamos esto gráficamente

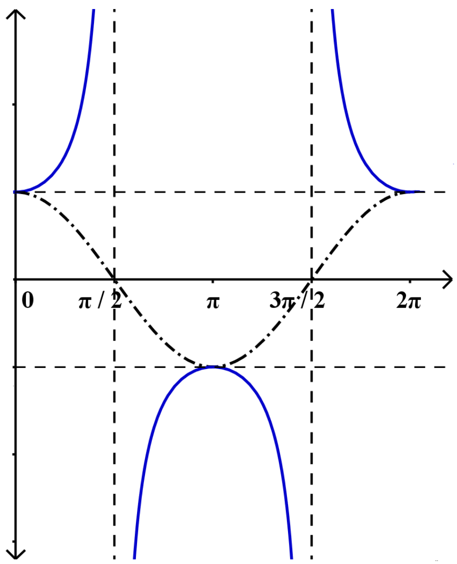


Figura 2.34. Representación gráfica Secante

3. Cosecante

Como se observó anteriormente $\sec\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ entonces:

i. $\theta \neq \pi$ y $\theta \neq 2\pi$, pues $\operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}2\pi = 0$. Es por esto que en π y 2π existe una asíntota vertical en la gráfica de cosecante.

ii. Como $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$ entonces $\csc\dfrac{\pi}{2} = 1$. Del mismo modo si $\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -1$ entonces $\csc\dfrac{3\pi}{2} = -1$.

iii. Si $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ entonces cada vez que el ángulo se aproxima más a $\dfrac{\pi}{2}$ se tiene que $\cos\theta$ se acerca a 1 , en consecuencia el cociente $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ parte de ∞ a 1.

iv. Si $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ entonces $\operatorname{sen}\theta$ realiza una trayectoria de 1 a 0, por tanto el cociente $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ parte de 1 a ∞.

V. Si $\pi < \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$ entonces $\operatorname{sen}\theta$ realiza una trayectoria de 0 a -1, por tanto el cociente $\dfrac{1}{\cos\theta}$ parte de $-\infty$ a 1.

VI. Si $\dfrac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$ entonces cada vez que el ángulo se acerca a 2π se tiene que $\operatorname{sen}\theta$ se aproxima a 0 , por tanto el secante parte de -1 a ∞.

Veamos esto gráficamente

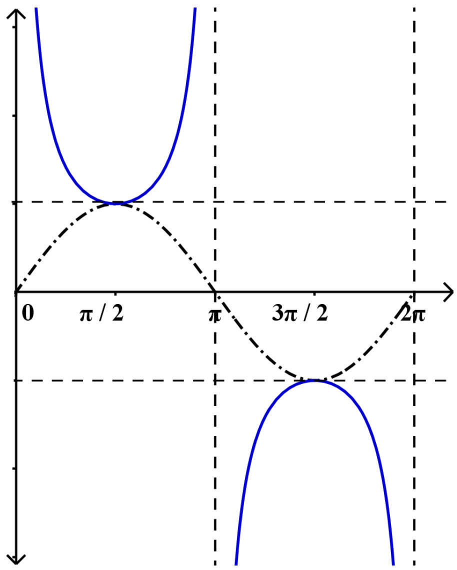


Figura 2.35. Representación gráfica Cosecante

4. Cotangente

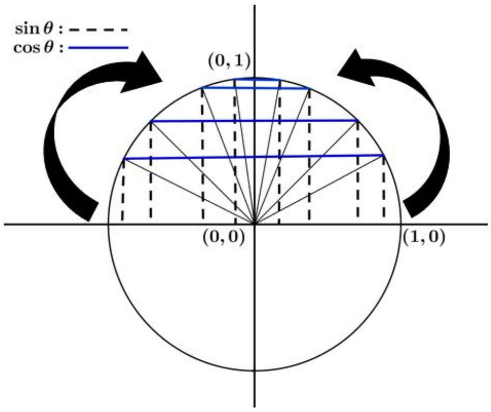
Como se observó anteriormente $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ por tanto es la reciproca de la función tangente ya que $\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

I. $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$ y $\theta \neq 2\pi$ pues $\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen} 2\pi = 0$. Es por esto que en 0, π y 2π existe una asíntota vertical en la gráfica de cotangente.

II. Como $\cos\dfrac{\pi}{2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$ entonces $\cot\dfrac{\pi}{2} = \cot\dfrac{3\pi}{2} = 0$.

III. Cuando $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ y $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ entonces $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ y en consecuencia $\cot\theta = 1$.

IV. Si $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ se tiene que cada vez que los ángulos se acercan a $\dfrac{\pi}{2}$ el $\cos\theta$ es cada vez más pequeño y el $\operatorname{sen}\theta$ cada vez más grande de tal modo que $\operatorname{sen}\theta$ se aproxima a 1 y $\cos\theta$ se aproxima a 0, acercándose al cociente $\dfrac{0}{1}$. En consecuencia $\cot\theta$ parte de ∞ a 0.



V. Si $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi$ se tiene que cada vez que los ángulos se acercan a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda entonces tendrá un comportamiento similar, solo que en este caso el $\cos\theta$ será negativo pues su proyección se encuentra en el segundo cuadrante.En consecuencia el cociente $\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ se hará cada vez más grande pero negativamente, aproximándose a $-\frac{1}{0} = -\infty$.

Además su gráfica es:

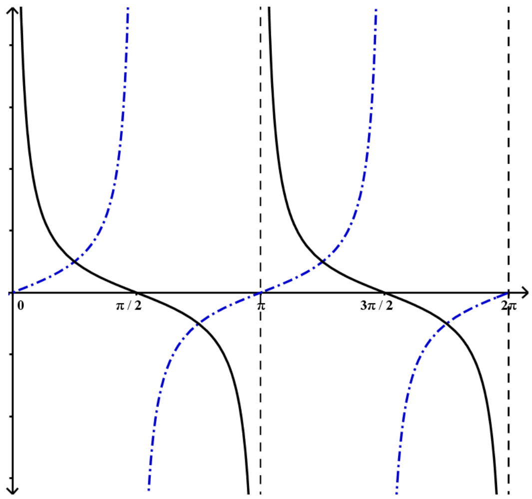


Figura 2.36. Representación gráfica Cotangente

Observación: Cada uno de las cuatro partes en que los ejes dividen la circunferencia se les llama cuadrante. Si el ángulo es agudo, el punto está en el primer cuadrante. Si el ángulo es obtuso estará en el segundo cuadrante. Si el ángulo está entre π y $\frac{3\pi}{2}$ este se ubica en el tercer cuadrante y si el ángulo está entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, el punto estará en el 4 cuadrante.

2.5. Las Funciones Trigonométricas como Funciones de Valor Real.

Para definir las funciones trigonométricas de números reales, a cada número real t se le asignará un punto $P(t) = (x, y)$ de la circunferencia unitaria. Dado $t \in \mathbb{R}$, recorremos t unidades sobre (a lo largo) de la circunferencia unitaria, comenzando en el punto $(1, 0)$, en sentido contrario de las manecillas del reloj, si t es positivo. Si t es negativo, entonces nos movemos a favor de las manecillas del reloj. Usaremos las coordenadas del punto $P(t) = (x, y)$ para definir las funciones trigonométricas del número t.

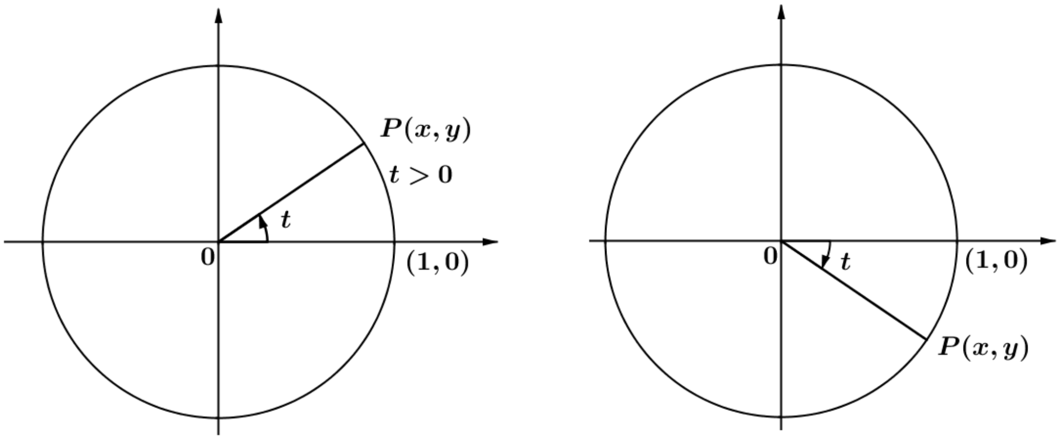


Figura 2.37. Funciones Trigonométricas como Funciones de Valor Real.

Así, a todo número real t le corresponde un único punto $P(x, y)$, sobre el circulo unitario. Es decir no importa el número real t que se escoja, habrá un punto P que le corresponde en el círculo unitario.

Definición: Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria correspondiente al número t obtenido en la forma anteriormente. Definimos;

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} t = y & \cos t = x \\ \tan t = \dfrac{y}{x} & \cot t = \dfrac{x}{y} \\ \sec t = \dfrac{1}{x} & \csc t = \dfrac{1}{y} \end{array}$$

Nota: Si el punto correspondiente al número t está en uno de los ejes de coordenadas, entonces hay dos funciones trigonométricas que no están definidas. En efecto si el punto P se encuentra en el eje x entonces sus coordenadas son $x = 1, y = 0$ por tanto no estarán definidas las funciones cosecante y cotangente. Mientras que si el punto P se encuentra sobre el eje y sus coordenadas serán de $x = 0, y = 1$ y en consecuencia las funciones tangente y secante no estarán definidas.

2.5.1. Dominio y rango de las funciones trigonométricas de valor real

Función	**Dominio**	**Rango o Imagen**
seno	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
coseno	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
tangente	$\mathbb{R}$ - $\left\{\frac{\pi}{2}\right.$ + nπ, n entero $\}$	$\mathbb{R}$
cotangente	$\mathbb{R} -$ { nπ, n entero }	$\mathbb{R}$
secante	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n\right.$ entero $\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
cosecante	$\mathbb{R} - \{n\pi, n$ entero $\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Cuadro 2.2. Dominios y Rangos de las Funciones Trigonométricas de Números Reales

2.6. Otras Propiedades de las Funciones Trigonométricas

2.6.1. Periodicidad de las funciones trigonométricas

Cuando un ángulo de medida θ y un ángulo que mide $\theta+2\pi$ tienen su lado inicial en el plano cartesiano sobre el semieje positivo de las equis ó abscisas y su vértice coincide con el origen o punto donde se intersecan los ejes (punto $(0, 0)$), sus lados terminales coinciden. Por lo tanto, las funciones trigonométricas de los dos ángulos tienen el mismo valor.

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$$

$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta \qquad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta \qquad \cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta$$

De manera similar, $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$, $\operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$, y así sucesivamente.

Definición: Una función $f(x)$ es periódica si existe un número positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$ para todo valor de x. El menor de los posibles valores de p es el periodo de f.

Periodo π	$\tan(x + \pi) = \tan x$ $\cot(x + \pi) = \cot x$
Periodo 2π	$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sec(x + 2\pi) = \sec x$ $\csc(x + 2\pi) = \csc x$

Cuadro 2.3. Funciones trigonométricas periódicas

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo $p = \pi$. Las otras cuatro funciones tienen periodo 2π. Estas funciones son importantes porque se puede estudiar su comportamiento periódico.

CAPÍTULO 3

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

3.1. Identidades fundamentales

Se denominan identidades trigonométricas a los resultados que involucran funciones trigonométricas y que son válidas para todos los valores posibles de la variable.

3.1.1. Identidades Pitagóricas

Reciben el nombre de Identidades Pitagóricas a tres resultados fundamentales que se derivan de forma muy elemental al relacionar las razones trigonométricas con el Teorema de Pitágoras. Ellas son:

1. $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

2. $\tan^2\theta + 1^2 = \sec^2\theta$

3. $\cot^2\theta + 1^2 = \csc^2\theta$

3.1.2. Identidades para la suma y diferencia de ángulos

1. $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$

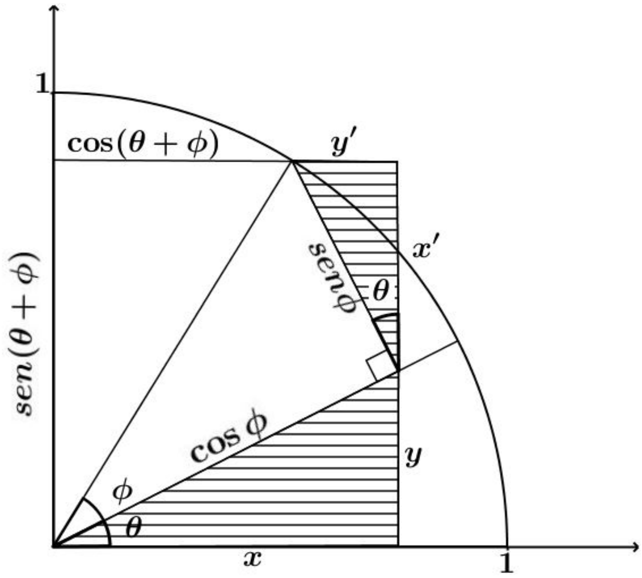


Figura 3.1. Seno y Coseno de una suma o diferencia.

Solución: De la figura 3.1, se tiene que $\operatorname{sen}(\theta+\phi) = x' + y$; $cos(\theta+\phi) = x - y'$ Además los triángulos sombrados son semejantes, entonces:

$$\frac{x'}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{x}{\cos\phi}$$
$$\frac{y}{\cos\phi} = \frac{y'}{\operatorname{sen}\phi}$$

Luego: $x' = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}x$; como $\cos\theta = \dfrac{x}{\cos\phi}$, entonces $x' = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cancel{\cos\phi}}\cos\theta\cancel{\cos\phi}$

$$= \operatorname{sen}\phi\cos\theta$$

Además: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\cos\phi}$ lo que implica que $y = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$.

Así que: $\operatorname{sen}(\theta+\phi) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\phi$

3.2. Otras identidades:

Las siguientes identidades se derivan de las anteriores usando procedimientos de tipo algebraico. Ellas son:

a) $\operatorname{sen}(\theta-\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi - \cos\theta\operatorname{sen}\phi$

b) $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$

c) $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$

d) $\tan(\phi+\theta) = \dfrac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta}$

Solución:

a) $\operatorname{sen}(\theta-\phi) = \operatorname{sen}[\theta+(-\phi)]$
$$= \operatorname{sen}\theta\cos(-\phi) + \cos\theta\operatorname{sen}(-\phi)$$
$$= \operatorname{sen}\theta\cos\phi - \cos\theta\operatorname{sen}\phi$$

b) $\cos(\theta+\phi) = \operatorname{sen}[90° - (\theta+\phi)]$
$$= \operatorname{sen}[(90° - \theta) - \phi)]$$
$$= \operatorname{sen}(90° - \theta)\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos(90° - \theta)$$
$$= \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$$

c) $\cos(\theta-\phi) = \cos[\theta+(-\phi)]$
$$= \cos\theta\cos(-\phi) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(-\phi)$$
$$= \cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

d) $\tan(\phi+\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(\phi+\theta)}{\cos(\phi+\theta)}$
$$= \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\phi}{\cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta}$$
$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\phi\cos\theta}{\cos\phi\cos\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\phi}{\cos\phi\cos\theta}}{\dfrac{\cos\phi\cos\theta}{\cos\phi\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta}{\cos\phi\cos\theta}}$$
$$= \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta}{\cos\phi\cos\theta}}$$
$$= \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta}$$

Ejercicio: Probar que:

a) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

b) $\tan(\theta-\phi) = \dfrac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta\tan\phi}$

Solución:

$a)$ $\tan(-\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \dfrac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$

$b)$ $\tan(\theta-\phi) = \tan[\theta+(-\phi)] = \dfrac{\tan\theta + \tan(-\phi)}{1-\tan\theta\tan(-\phi)} = \dfrac{\tan\theta - \tan\phi}{1+\tan\theta\tan\phi}.$

Ejercicio: Probar que $\tan(\theta+\phi) = \dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$ con base en la figura 3.2.

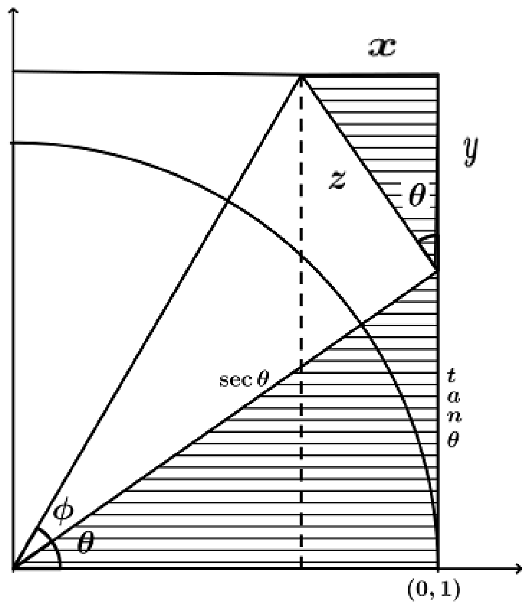


Figura 3.2. Tangente de una suma o diferencia

Solución: De la gráfica 3.2, teniendo presente que los triángulos sombreados son semejantes, tenemos:

$\tan\phi = \dfrac{z}{\sec\theta}$, luego: $z = \sec\theta\tan\phi$

además: $z = \dfrac{y}{\cos\theta}$

Entonces: $\sec\theta\tan\phi = \dfrac{y}{\cos\theta}$, se tiene que $y = \tan\phi$

Como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{z} = \dfrac{x}{\sec\theta\tan\phi}$, se tiene que $x = \operatorname{sen}\theta\sec\theta\tan\phi = \tan\theta\tan\phi$

Finalmente: $\tan(\theta+\phi) = \dfrac{y+\tan\theta}{1-x} = \dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}$

Son válidos los siguientes resultados:

a) $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

Prueba

En efecto: $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\theta$

Haciendo $\phi = \theta$, obtenemos:

$\operatorname{sen}(\theta + \theta) = \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

O sea: $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

De la misma forma:

$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta$

O sea: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

3.3. Identidades para ángulos dobles y ángulos medios

Combinando las identidades $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Se obtienen también: $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

En efecto: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$$= (1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Luego: $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.

Similarmente se prueba la otra igualdad.

Con base en las anteriores se obtienen expresiones para el seno y coseno de $\dfrac{\theta}{2}$, así:

$$\textbf{1.}\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} : & \text{Si } \dfrac{\theta}{2} \text{ está en el } 1^{\underline{o}} \text{ ó } 2^{\underline{o}} \text{ cuadrante} \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} : & \text{Si } \dfrac{\theta}{2} \text{ está en el } 3^{\underline{o}} \text{ ó } 4^{\underline{o}} \text{ cuadrante} \end{cases}$$

En efecto:

Como $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$, cambiando θ por $\dfrac{\theta}{2}$ se obtiene que $\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$;

luego

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}},\qquad \text{como } \sqrt{x^2}=|x|,\ \text{entonces}$$

$$|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

Ahora bien, si $\frac{\theta}{2}$ está en el 1º ó 2º cuadrante, $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\geq 0$ y $|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|=\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$. En consecuencia $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.
Si $\frac{\theta}{2}$ está en el 3º ó 4º cuadrante, $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\leq 0$, $|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}|=-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ y en consecuencia $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$.

2. $\cos\frac{\theta}{2}=\begin{cases}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}: & Si\ \ \frac{\theta}{2}\text{está en el } 1^{\text{o}} \text{ ó } 4^{\text{o}} \text{ cuadrante}\\ -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}: & Si\ \ \frac{\theta}{2}\ \text{está en el } 2^{\text{o}} \text{ ó } 3^{\text{o}} \text{ cuadrante}\end{cases}$

De la misma forma:

$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, cambiando θ por $\frac{\theta}{2}$ se obtiene que $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$; luego

$$\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}},$$

$$|\cos\frac{\theta}{2}|=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

Ahora bien, si $\frac{\theta}{2}$ está en el $1^{\bar{o}}$ ó $4^{\bar{o}}$ cuadrante ; $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\geq 0$. Luego,

$$|\cos\frac{\theta}{2}|=\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

Si $\frac{\theta}{2}$ está en el 2º ó 3º cuadrante; $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\leq 0$. Luego, $|\cos\frac{\theta}{2}|=-\cos\frac{\theta}{2}$ y en consecuencia

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

3. $\tan\frac{\theta}{2}=\begin{cases}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}: & Si\ \ \frac{\theta}{2}\ \text{está en el } 1^{\text{o}} \text{ ó } 3^{\text{o}} \text{ cuadrante}\\ -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}: & Si\ \ \frac{\theta}{2}\ \text{está en el } 2^{\text{o}} \text{ ó } 4^{\text{o}} \text{ cuadrante}\end{cases}$

En efecto:

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

Luego: $\sqrt{\tan^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$,

O sea: $|\tan\frac{\theta}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ Si $\frac{\theta}{2}$ está en el 1º ó 3º cuadrante, $\tan\frac{\theta}{2} \geq 0$ y si $\frac{\theta}{2}$ está en el 2º ó 4º cuadrante, $\tan\frac{\theta}{2} \leq 0$.

3.1. Probar que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

Son válidas las igualdades:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

En consecuencia, son válidas también:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Luego: $$\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}}{\operatorname{sen}\theta}$$

Así que: $$\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

O sea: $$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

3.2. Adicionalmente:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \times \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1+\cos\theta)}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

3.4. De la suma al producto y del producto a la suma de ángulos

1. De la suma al producto

1.1. Las identidades para la suma y la diferencia de ángulos para coseno son:

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta + \cos\phi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

Sumando miembro a miembro se tiene:

$$\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi) = 2\cos\theta\cos\phi$$

Resultado que puede escribirse como:

$$\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta+\phi) + \cos(\theta-\phi)]$$

1.2. Similarmente, restando miembro a miembro obtenemos:

$$\cos(\theta+\phi) - \cos(\theta-\phi) = -2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

O sea: $$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}[\cos(\theta-\phi) - \cos(\theta+\phi)]$$

1.3. Si escribimos las identidades para la suma y la diferencia de ángulos para seno obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\theta+\phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$\operatorname{sen}(\theta-\phi) = \operatorname{sen}\theta + \cos\phi - \cos\theta\operatorname{sen}\phi$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\theta+\phi) + \operatorname{sen}(\theta-\phi) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$

Este resultado lo podemos escribir como:

$$\operatorname{sen}\theta\cos\phi = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta+\phi)+\operatorname{sen}(\theta-\phi)]$$

1.4. Si por el contrario restáramos las dos ecuaciones entonces:

$$\operatorname{sen}(\theta+\phi)-\operatorname{sen}(\theta-\phi) = 2\cos\theta\operatorname{sen}\phi$$

O sea: $$\cos\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\theta+\phi)-\operatorname{sen}(\theta-\phi)]$$

2. Del producto a la suma

Las igualdades:

$$x = \theta+\phi$$

$$y = \theta-\phi$$

Son un sistema de ecuaciones en las variables θ y ϕ. Resolviéndolo obtenemos:

$$x+y = 2\theta \quad \text{entonces} \quad \frac{x+y}{2} = \theta$$
$$x-y = 2\phi \quad \text{entonces} \quad \frac{x-y}{2} = \phi$$

Incorporando éstos valores de θ y ϕ, en las identidades anteriores obtenemos las siguientes:

$$\cos x+\cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x-\cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}x+\cos y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}x-\cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

3.5. Los métodos para probar identidades

En esta sección se señalan algunos métodos para demostrar la igualdad entre dos funciones trigonométricas, ya que siempre es pertinente conocer cual es el mejor camino para demostrar una identidad $f(x) = g(x)$.

Método 1. Se puede empezar escribiendo un lado de la identidad(ya sea $f(x)$ ó $g(x)$) y luego mediante una cadena de igualdades llegar a convertir dicho función en otra. Tal prueba tiene un esquema como el siguiente:

$$f(x) = f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = ... = g(x)$$

Método 2. Se puede encontrar una expresión para la cual $f(x)$ y $g(x)$ son ambas iguales.Esta prueba tiene un esquema como el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = h(x) \\ g(x) = h(x)) \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = g(x)$$

Aunque probablemente la demostración de las igualdades $h(x) = f(x)$ y $h(x) = g(x)$ requiera una prueba utilizando el método 1. A continuación se mostrará un ejemplo de demostración utilizando el método 1.

Ejemplo 3.5.1 Probar la identidad $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

En efecto:

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x + \cos x \cos x}{\cos x \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \\ &= \sec x \csc x \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra una demostración utilizando el método 2.

Ejemplo 3.5.2 Probar la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\tan^2 x - 1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

En primer lugar se trabajará con el lado izquierdo de la identidad:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x} &= \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\cos^2 x(\operatorname{sen} x + \cos x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^3 x} \end{aligned}$$

Ahora trabajando con el lado derecho de la identidad:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan^2 x - 1}{\operatorname{sen} x + \cos x} &= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}}{senx + \cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x(\operatorname{sen} x + \cos x)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^3 x}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x} &= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^3 x} \\
\frac{\tan^2 x - 1}{\operatorname{sen} x + \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x \operatorname{sen} x \cos^3 x}
\end{aligned}$$

Así que:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x - 1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

Observación:

Un error común y que se debe evitar al demostrar una identidad trigonométrica $f(x) = g(x)$ es seguir el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x) \\
\rightarrow &f_1(x) = f_2(x) \\
\rightarrow &f_2(x) = f_3(x) \\
\rightarrow &\cdots \\
&\vdots \\
\rightarrow &\cdots h(x) = h(x).
\end{aligned}$$

El método de prueba anterior es incorrecto porque la primera igualdad $f(x) = g(x)$ es la identidad que queremos demostrar. Si empezamos escribiendo que $f(x) = g(x)$ entonces, ¿Es necesario escribir más?. Además sólo porque la ultima igualdad de esta “prueba” sea $h(x) = h(x)$, es una afirmación verdadera, no podemos concluir que la afirmación $f(x) = g(x)$es también cierta. Pues las afirmaciones verdaderas siempre conducen a declaraciones verdaderas, pero a declaraciones falsas también puede conducir a declaraciones verdaderas. A continuación se presenta un ejemplo de porque el método de prueba anterior es incorrecto.

Ejemplo 3.5.3 Probar la identidad $\dfrac{1 - sen\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

Prueba incorrecta

$$
\begin{aligned}
\frac{1 - sen\theta}{\cos\theta} &= \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} \\
&\rightarrow (1 - sen\theta)(1 + \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta \cdot \cos\theta \\
&\rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta \\
&\rightarrow 1 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta
\end{aligned}
$$

La igualdad obtenida sabemos que es cierta, por tratarse de una identidad pitagórica. Esto podría llevar a creer erróneamente que se ha probado la identidad original. Sin embargo, la prueba no es correcta. Aunque la identidad propuesta es en realidad cierta, no se ha proporcionado una prueba correcta de ello. Ahora vamos a mostrar una prueba correcta:

Prueba correcta

$$
\begin{aligned}
\frac{1 - sen\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - sen\theta}{\cos\theta}\frac{(1 + \operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} &= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 + \operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\cancel{\cos\theta}\cos\theta}{\cancel{\cos\theta}(1 + \operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}
\end{aligned}
$$

Seguidamente se demostrarán algunas identidades trigonométricas,propuestas en el libro *Principles of Mathematics* de Allendoerfer Oakley.

Ejemplo 3.5.4 Probar la identidad $\csc x = \cot x + \tan\dfrac{x}{2}$.

Prueba

$$
\begin{aligned}
\cot x + \tan\frac{x}{2} &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{Por identidad ángulo medio de tan} \\
&= \frac{\cancel{\cos x} + 1 - \cancel{\cos x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.5.5 Probar la identidad $\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \tan x$

Prueba

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} &= \frac{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen} x \cos x} && \text{por identidad ángulo doble} \\
&= \frac{1-\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x} \\
&= \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x \cos x} && \text{por identidad pitagórica} \\
&= \frac{\cancel{2\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x}{\cancel{2\operatorname{sen} x}\cos x} = \tan x
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.6 Probar la identidad $4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^2 2x$

Prueba

$$\begin{aligned}
1-\cos^2 2x &= 1-(2\cos^2 x - 1)^2 && \text{por identidad ángulo doble de cos} \\
&= 1-(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) && \text{desarrollando el cuadrado} \\
&= 1 - 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1 \\
&= -4\cos^4 x + 4\cos^2 x \\
&= 4\cos^2 x(1-\cos^2 x) \\
&= 4\cos^2 x(\operatorname{sen}^2 x) && \text{por identidad pitagórica}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.7 Probar la identidad $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} + \dfrac{1+\cot x}{1-\cot x} = 0$

Prueba

Probar la identidad propuesta es equivalente a probar $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = -\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x}$

$$\frac{1+\tan x}{1-\tan x} \underset{por\ def.}{=} \frac{1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - senx}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{multip. por 1}$$

$$= \frac{\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$= \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1} \qquad \text{por def. de cot}$$

$$= -\frac{\cot x + 1}{1 - \cot x} \qquad \text{organizando}$$

Ejemplo 3.5.8 Probar la identidad $\frac{\sec x}{\csc x} = \frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$

Prueba

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} \underset{por\ def.}{=} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\cancel{(\cos x + \operatorname{sen} x)} \cdot \operatorname{sen} x}{\cancel{(\cos x + \operatorname{sen} x)} \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \qquad \text{reescribiendo}$$

$$= \frac{\sec x}{\csc x} \qquad \text{por def. sec y csc}$$

Ejemplo 3.5.9 Probar la identidad $\cot x + \cot y = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

Prueba

$$\cot x + \cot y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} y} + \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

$$\text{por identidad suma de ángulos.} = \frac{\operatorname{sen}(x + y)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

Ejemplo 3.5.10 Probar la identidad $\frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 2 \csc x$

Prueba

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}+\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} &= \frac{(1+\cos x)^2+\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)} \\
&= \frac{1+2\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)} && \text{desarrollando el cuadrado} \\
&= \frac{1+2\cos x+(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)} && \text{agrupando} \\
&= \frac{1+2\cos x+1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)} && \text{por identidad pitagórica} \\
&= \frac{2+2\cos x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)} \\
&= \frac{2\cancel{(1+\cos x)}}{\operatorname{sen} x\cancel{(1+\cos x)}} \\
&= 2\frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x && \text{por def. de csc}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3.5.11 Obtener una identidad para $\cos 3x$.

Prueba

$$
\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x+x) \\
&= \cos 2x\cos x-\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x && \text{por identidad suma de ángulos} \\
&= (1-2\operatorname{sen}^2 x)\cos x-\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x && \text{por identidad ángulo doble cos} \\
&= \cos x-2\cos x\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen} x && \text{por iden. ángulo doble sen} \\
&= \cos x-2\cos x\operatorname{sen}^2 x-2\cos x\operatorname{sen}^2 x \\
&= \cos x-4\cos x\operatorname{sen}^2 x
\end{aligned}
$$

Por tanto la identidad es:

$$\cos 3x = \cos x - 4\cos x\operatorname{sen}^2 x$$

CAPÍTULO 4

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.1. Comentarios iniciales

Una ecuación trigonométrica es aquella ecuación en la que aparecen una o más funciones trigonométricas. En las ecuaciones trigonométricas la incógnita es el ángulo común de las funciones trigonométricas involucradas. Las ecuaciones de este tipo pueden tener infinitas soluciones.

No existe un método general que permita resolver cualquier ecuación trigonométrica. Pero pueden darse algunas sugerencias para tener en cuenta en su resolución, como las siguientes:

i. Expresar la ecuación trigonométrica en términos de un mismo ángulo.

ii. Expresar la ecuación en términos de una misma función trigonométrica.

iii. En caso de no poderse expresar la ecuación en términos de una misma función debe tratarse de factorizarla.

iv. Transformar la ecuación trigonométrica en una ecuación algebraica fácil de resolver.

v. Si se elevan al cuadrado o se quitan denominadores, deben verificarse las soluciones obtenidas y descartar aquellos valores que no satisfacen.

VI. Se debe tener presente que $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

Observación: En este trabajo se encontraran las soluciones de ángulos entre 0 y 2π de las ecuaciones trigonométricas. Aunque se menciono anteriormente tienen infinitas soluciones.

4.2. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.$\tan^2 x = 1$

Veamos que $\tan^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$ entonces,

$$\begin{aligned}
\tan^2 x = 1 \leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} &= 1\\
\leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x &= \cos^2 x\\
\leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x &= 1 - \operatorname{sen}^2 x\\
\leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x &= 1\\
\leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sea $u = \operatorname{sen} x$ entonces reemplazando se obtiene : $u^2 = \dfrac{1}{2}$ y en consecuencia $u = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, es decir $\operatorname{sen} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Por tanto la solución para esta ecuación son los ángulos que tienen como proyección sobre el eje y a $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ó $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

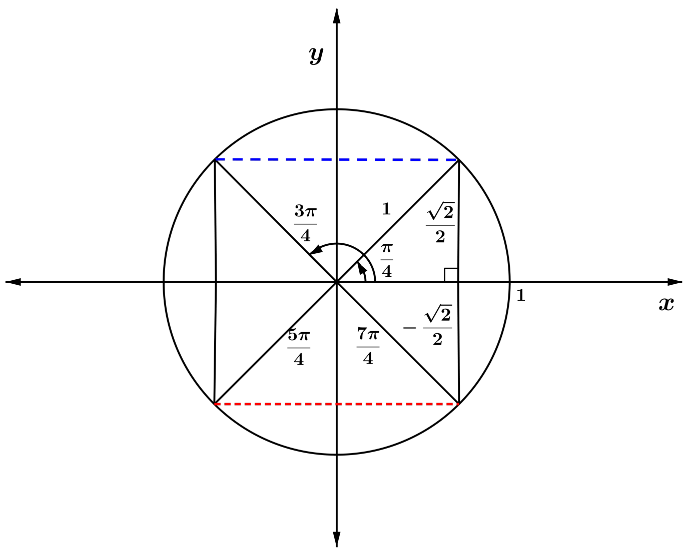


Figura 4.1. Ecuación 1

Observando la gráfica anterior se tiene que las soluciones son:

$$x = \frac{\pi}{4}; \qquad x = \frac{3\pi}{4}$$
$$x = \frac{5\pi}{4}; \qquad x = \frac{7\pi}{4}$$

Ejemplo 2. $2\cos^2 x - cosx = 0$

Sea $\cos x = u$ luego reemplazando se tiene que :

$$\begin{aligned} 2u^2 - u = 0 &\leftrightarrow u(2u-1) = 0 \\ &\rightarrow u = 0, \text{ o } 2u - 1 = 0 \\ &\leftrightarrow u = 0, \text{ o } u = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto $\cos x = 0$, o , $\cos x = \frac{1}{2}$

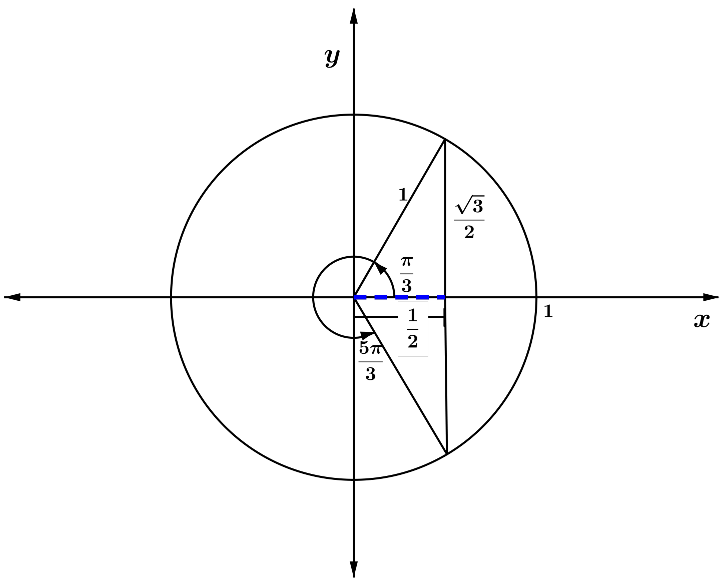


Figura 4.2. Ecuación 2

Observando la figura es fácil comprobar que el ángulo que tiene a $\frac{1}{2}$ como proyección sobre el eje x es $\frac{\pi}{3}$. Además por lo visto anteriormente se tiene que $\frac{5\pi}{3}$ posee la misma proyección. Del mismo modo el ángulo que tiene como proyección a 0 es $\frac{\pi}{2}$,notando que $\frac{3\pi}{2}$ posee la misma proyección. En consecuencia las soluciones para esta ecuación trigonométricas son:

$$x = \frac{\pi}{3}; \quad x = \frac{5\pi}{3}$$
$$x = \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Ejemplo 3. $\operatorname{sen} 3x = \dfrac{1}{2}$

Sea $u = 3x$, en consecuencia $\operatorname{sen} u = \dfrac{1}{2}$, entonces observando la figura 4.3 se tiene que las soluciones para esta ecuación son:

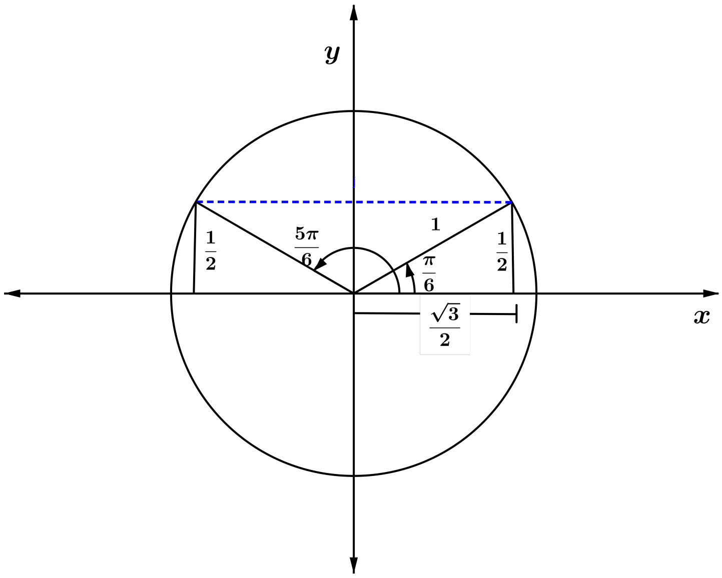


Figura 4.3. Ecuación 3

$$u = \frac{\pi}{6} \text{ y } u = \frac{5\pi}{6}.$$

Luego reemplazando $u = 3x$

$$3x = \frac{\pi}{6} \to x = \frac{\frac{\pi}{6}}{3} \quad , \qquad 3x = \frac{5\pi}{6} \to x = \frac{\frac{5\pi}{6}}{3}$$
$$\leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} \qquad\qquad \leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18}$$

Por tanto las soluciones para esta ecuación trigonométrica son: $x = \dfrac{\pi}{18}$ y $x = \dfrac{5\pi}{18}$.

Ejemplo 4. $\csc^2 x = \dfrac{4}{3}$

Recordemos que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, luego:

$$\csc^2 x = \frac{4}{3} \leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{4}{3}$$
$$\leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}$$

haciendo $u = \operatorname{sen} x$ se tiene $u^2 = \dfrac{3}{4}$ lo que implica que $u = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. En consecuencia la solución a esta ecuación son los ángulos que tienen como proyección sobre el eje y a $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ó $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

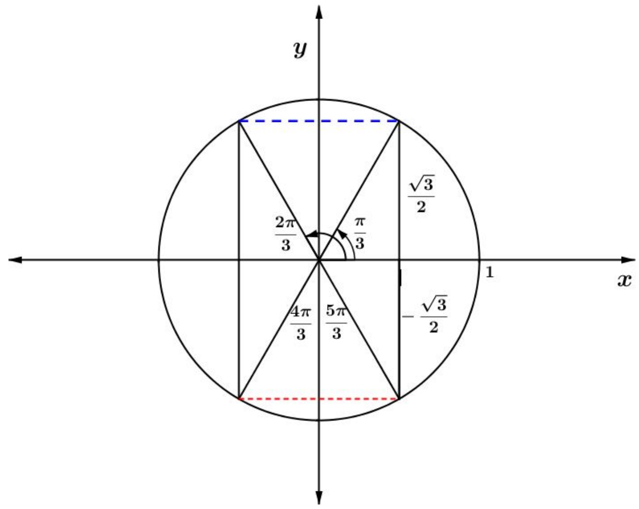


Figura 4.4. Ecuación 4

Por tanto las soluciones para esta ecuación trigonométrica son:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3}, \qquad x = \frac{2\pi}{3}; \\ x &= \frac{4\pi}{3}, \qquad x = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 5. $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

Sea $u = \operatorname{sen} x$ entonces reemplazando se obtiene $2u^2 - u - 1 = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} 2u^2 - u - 1 = 0 &\leftrightarrow \frac{2}{2} \cdot (2u^2 - u - 1) = 0 \\ &\leftrightarrow \frac{(2u)^2 - 1(2u) - 2}{2} = 0 \\ &\leftrightarrow \frac{(2u+1) \cdot (2u-2)}{2} = 0 \\ &\leftrightarrow \frac{(2u+1) \cdot 2(u-1)}{2} = 0 \\ &\leftrightarrow (2u+1)(u-1) = 0 \\ &\rightarrow 2u - 1 = 0, \quad \text{ó}, \quad u - 1 = 0 \\ &\leftrightarrow u = \frac{1}{2}, \quad \text{ó} \quad , u = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ o $\operatorname{sen} x = 1$. Pero se tiene en el inciso anterior que los ángulos que tienen como proyección en el eje y $\frac{1}{2}$ son $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$. Además es fácil notar que el ángulo que tiene como proyección a 1 sobre el eje y es $\frac{\pi}{2}$. Por tanto las soluciones para esta ecuación trigonométrica son:

$$x = \frac{\pi}{6}\ ; \qquad x = \frac{5\pi}{6}; \qquad x = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 6. $(2\cos x + \sqrt{3})(\sec x - 2) = 0$

Como $(2\cos x + \sqrt{3})(\sec x - 2) = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} 2\cos x + \sqrt{3} = 0, &\quad \text{ó}, \quad \sec x - 2 = 0 \\ 2\cos x = -\sqrt{3}, &\quad \text{ó}, \quad \frac{1}{\cos x} = 2 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, &\quad \text{ó}, \quad \cos x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

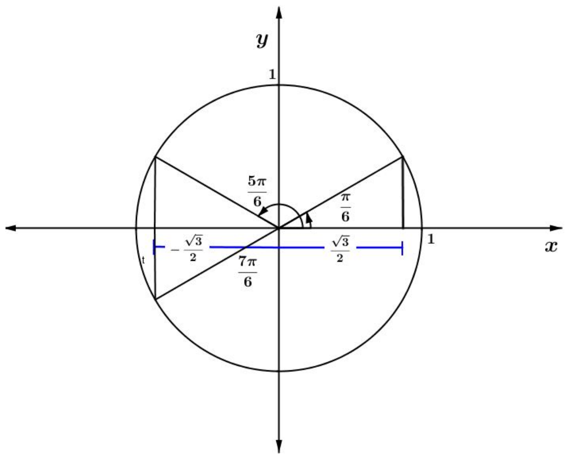


Figura 4.5. Ecuación 6

Como se había mencionado anteriormente $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Por otro lado observando la figura 4.5 es posible establecer que $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por tanto las soluciones de la ecuación trigonométrica son:

$$\begin{aligned} x = \frac{5\pi}{6}, &\qquad x = \frac{7\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{3}, &\qquad x \ = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo 7. $\sec x + 1 = 2\cos x$

Por definición se tiene que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ entonces $\dfrac{1}{\cos x} + 1 = 2\cos x$. Luego, sea $u = \cos x$ por tanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x}+1=2\cos x &\leftrightarrow \frac{1}{u}+1=2u\\
&\leftrightarrow \frac{1+u}{u}=2u\\
&\leftrightarrow 1+u=2u^2\\
&\leftrightarrow 2u^2-u-1=0\\
&\leftrightarrow 2u^2+u-2u-1=0\\
&\leftrightarrow u(2u+1)+(-2u-1)=0\\
&\leftrightarrow u(2u+1)-(2u+1)=0\\
&\leftrightarrow (2u+1)(u-1)=0\\
&\rightarrow 2u+1=0,\ \text{ó}\ u-1=0\\
&\leftrightarrow u=\frac{1}{2}\ \text{ó}\ u=1
\end{aligned}
$$

Es decir $\cos x = -\frac{1}{2}$ y $\cos x = 1$. Entonces las soluciones para la ecuación son los ángulos cuya proyección sobre el eje x es $-\frac{1}{2}$ ó 1.

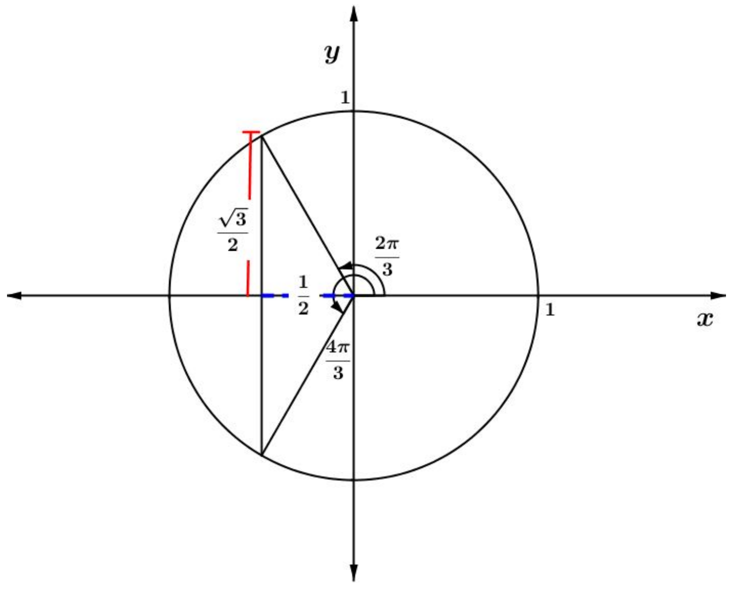


Figura 4.6. Ecuación 7

Como es posible percatarse en la figura, se tiene que los ángulos cuya proyección sobre el eje x son $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$. Además no es difícil notar que $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$.

Ejemplo 8. $7\operatorname{sen} x + 5 = 2\cos^2 x$

Por identidad pitagórica se tiene que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Luego:

$$\begin{aligned} 7\operatorname{sen} x + 5 = 2\cdot(1-\operatorname{sen}^2 x) = 7\operatorname{sen} x + 5 &= 2 - 2\operatorname{sen}^2 x, \textit{es decir} \\ &\leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} x + 5 - 2 = 0 \\ &\leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + 7\operatorname{sen} x + 3. \end{aligned}$$

Haciendo $\operatorname{sen} x = u$ se obtiene;

$$\begin{aligned} 2u^2 + 7u + 3 = 0 &\leftrightarrow 2u^2 + 6u + u + 3 = 0 \\ &\leftrightarrow 2u(u+3) + (u+3) = 0 \\ &\leftrightarrow (u+3)(2u+1) = 0 \\ &\rightarrow u + 3 = 0 \quad \text{ó} \quad 2u + 1 = 0 \\ &\leftrightarrow u = -3 \quad \text{ó} \quad u = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Es decir $\operatorname{sen} x = -3$ ó $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$. Como se puede observar en la figura anterior $\operatorname{sen} -\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. Pero notemos que $-3 \notin [-1, 1]$ pues no existe un ángulo cuya proyección sobre el eje x sea -3, ya que -3 no pertenece al rango de la función $\operatorname{sen} x$.

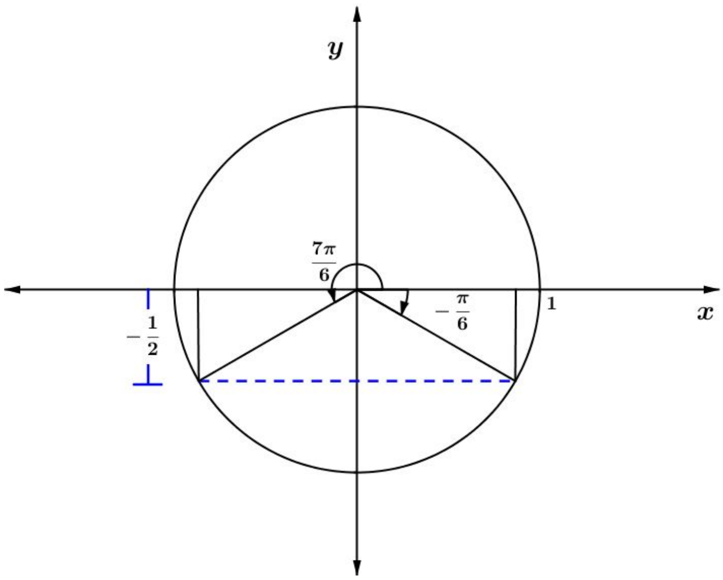


Figura 4.7. Ecuación 8

Entonces las soluciones para está ecuación son:

$$x = \frac{-\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

CAPÍTULO 5

TEOREMA DEL SENO, DEL COSENO Y RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

En el estudio realizado de las funciones trigonométricas se observó que estas pueden obtenerse a partir de la relación entre los lados y ángulos de un triangulo rectángulo, los teoremas que se verán en este capítulo, permiten establecer una relación entre el coseno de un ángulo ó seno de un ángulo y las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario. Lo anterior se establece ya que que si en un triángulo cualquiera trazamos una de sus alturas, el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos, esto se debe a que la altura de un triángulo respecto de un lado es el segmento perpendicular a dicho lado o a su prolongación y que pasa por el vértice opuesto.

5.1. Teorema del Seno

Teorema 5.1.1 *En un triángulo cualquiera las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.*

Para el triángulo de la figura 5.1. el Teorema del Seno indica:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

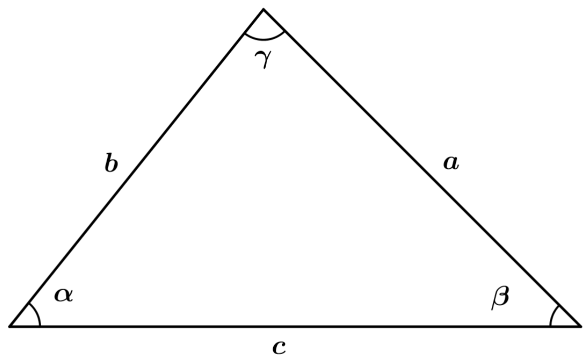


Figura 5.1. Teorema del Seno

Caso 1.Triángulo acutángulo

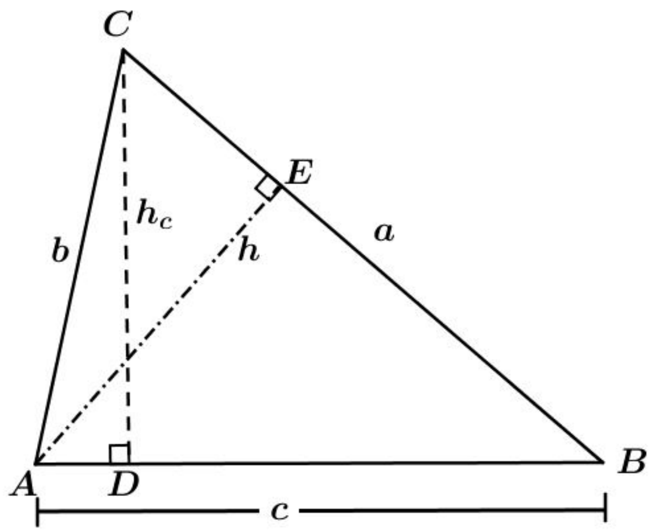


Figura 5.2. Teorema del seno para triángulos acutángulos

Caso 2.Triángulo obtusángulo

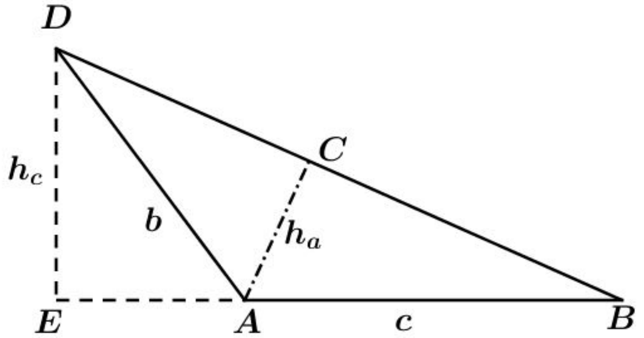


Figura 5.3. Teorema del seno para triángulos obtusángulos

Ejemplo 5.1.1 Encontrar todas las medidas que faltan en el siguiente triángulo:

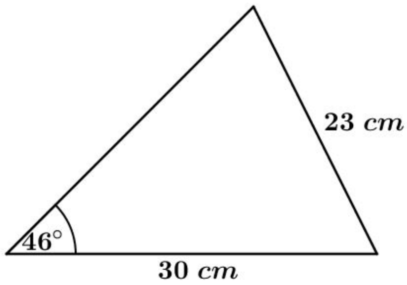


Figura 5.4. Ejemplo teorema del seno 1.

Solución:

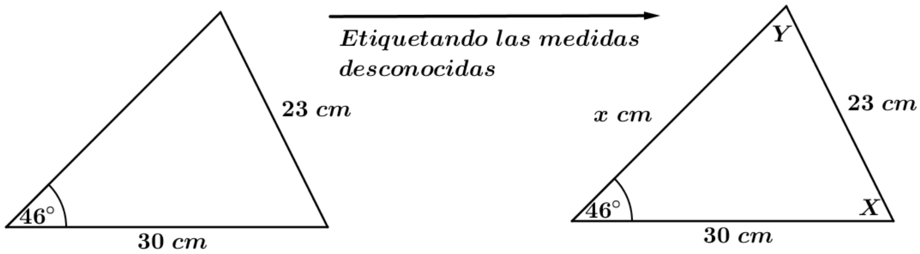


Figura 5.5. Ejemplo teorema del seno 2.

En primer lugar, se establecerá una ley de la proporción senos. En este caso se debe trabajar con un ángulo faltante, por lo que se tendrá que calcular un seno inverso:

Por Teorema del Seno se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{23}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{30}{\operatorname{sen} Y} &\leftrightarrow 23 \operatorname{sen} Y = 30 \operatorname{sen} 46^\circ \\ &\leftrightarrow \operatorname{sen} Y = \frac{30 \operatorname{sen} 46^\circ}{23} \\ &\leftrightarrow Y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{30 \operatorname{sen} 46^\circ}{23}\right) \\ &\leftrightarrow Y \approx 69{,}8^\circ\end{aligned}$$

Ahora es fácil calcular el tercer ángulo: $180^\circ - (46^\circ + 69{,}8^\circ) = 64{,}2^\circ$

Después, se aplica el Teorema del Seno de nuevo para hallar el lado que falta. Tenemos dos opciones, podemos resolver

$$\frac{23}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 64{,}2^\circ}, \quad \text{o} \quad , \frac{30}{\operatorname{sen} 69{,}8^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 64{,}2^\circ}$$

De cualquier forma obtenemos la misma respuesta:

$$x = 28{,}8 \ cm$$

5.2. Teorema del Coseno

Teorema 5.2.1 *El cuadrado de la longitud de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de estas longitudes por el coseno del ángulo que forman dichos dos lados.*

Para el siguiente triángulo,

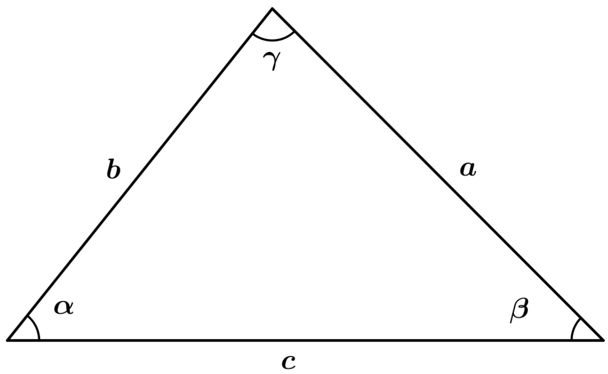


Figura 5.6. Teorema del coseno

el Teorema del Coseno se expresa de la siguiente manera

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + b2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Caso1. El ángulo incluido es agudo

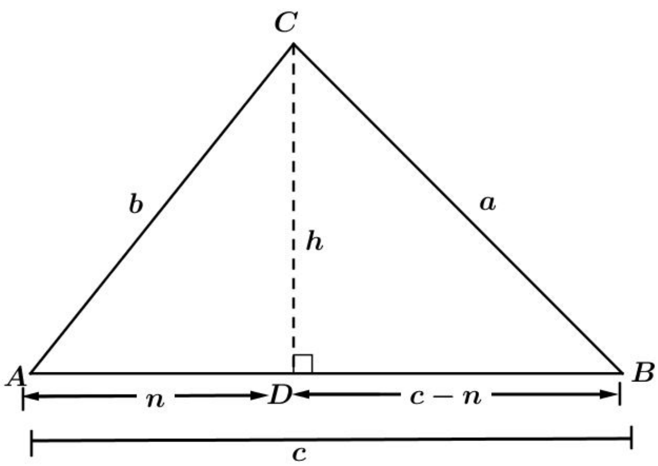


Figura 5.7. Teorema del coseno con ángulo incluido agudo

Caso2. El ángulo incluido es obtuso

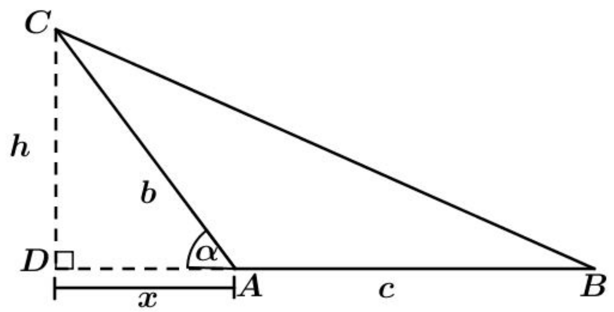


Figura 5.8. Teorema del coseno con ángulo incluido obtuso

Ejemplo 5.2.1 Encontrar la medida de a, y $m\angle C$

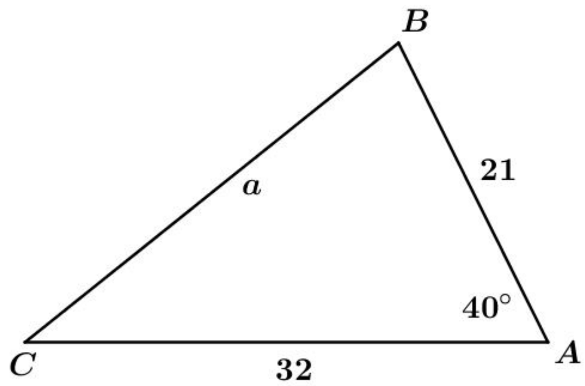


Figura 5.9. Ejemplo teorema del coseno

solución: Primero escribimos los datos conocidos: $b = 32$, $c = 21$, $m\angle 40°$

Luego aplicando el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = 32^2 + 21^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21\cos 40°$$

$$a^2 = 1024 + 441 - 1344\cos 40°$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{1024 + 441 - 1344\cos 40°}$$

$$a \approx 20{,}87$$

Ahora para hallar $m\angle C$ se aplica de nuevo el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$21^2 = (20,87)^2 + 32^2 - 2(20{,}87) \cdot 32\cos C$$

$$
\begin{aligned}
441 &= 435{,}5 + 1024 - 1335{,}68\cos C\\
441 &= 1459{,}5 - 1335{,}68\cos C\\
441 - 1459{,}5 &= -1335{,}68\cos C\\
-1018{,}5 &= -1335{,}68\cos C\\
\frac{-1018{,}5}{-1335{,}68} &= \cos C\\
0,76 &\approx \cos C\\
C &\approx \cos^{-1}(0{,}76)\\
C &\approx 40{,}5^\circ
\end{aligned}
$$

5.3. Resolución de Triángulos rectángulos

Haciendo uso de las razones trigonométricas es posible encontrar los valores que faltan en un triángulo dado, a esto se le conoce como resolución de triángulos. Ejemplo de lo anterior son los siguientes problemas:

1. Dado el $\triangle ABC$ con ángulo recto en B, $\measuredangle C = 58^\circ$ y $AB = 8cm$. Encontrar los elementos que faltan.

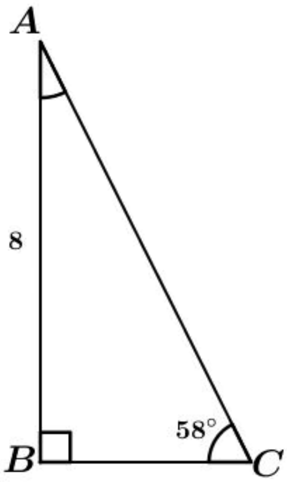


Figura 5.10. Resolución de triángulo 1

$$
\begin{array}{lll}
\operatorname{sen} 58^\circ = \dfrac{8}{AC} \;; & \cos 58^\circ = \dfrac{BC}{9{,}43} \;; & \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ\\
AC = \dfrac{8}{\operatorname{sen} 58^\circ} \;; & \cos 58^\circ \cdot (9{,}43) = BC \;; & \measuredangle A + 90^\circ + 58^\circ = 180^\circ\\
AC \approx 9{,}43\ cm \;; & BC \approx 5\ cm; & \measuredangle A = 180^\circ - 148^\circ = 32^\circ
\end{array}
$$

2. Dado el $\triangle DEF$ con ángulo recto en E, $DE = 2cm$ y $EF = 3cm$. Encontrar los elementos que faltan.

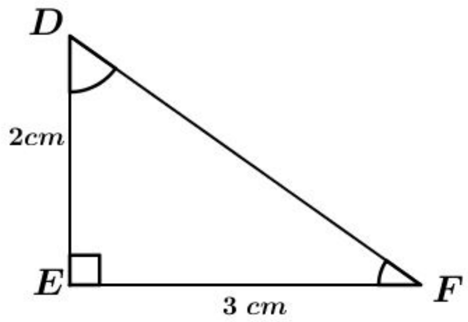


Figura 5.11. Resolución de triángulo 2

$$\begin{array}{lll}
\tan F = \dfrac{2}{3} \quad ; & \operatorname{sen} 33{,}69^\circ = \dfrac{2}{DF} \quad ; & \measuredangle D + \measuredangle E + \measuredangle F = 180^\circ \\
F = \tan^{-} 1 \left(\dfrac{2}{3}\right) \quad ; & DF = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 33{,}69} \quad ; & \measuredangle D + 90^\circ + 33{,}69^\circ = 180^\circ \\
F \approx 33{,}69^\circ \quad ; & DF \approx 3{,}6\ cm \quad ; & \measuredangle D = 180^\circ - 123{,}69^\circ = 56{,}31^\circ
\end{array}$$

3. Dado el $\triangle HGI$ con ángulo recto en G, $HG = 7cm$ y $HI = 11{,}4cm$. Encontrar los elementos que faltan.

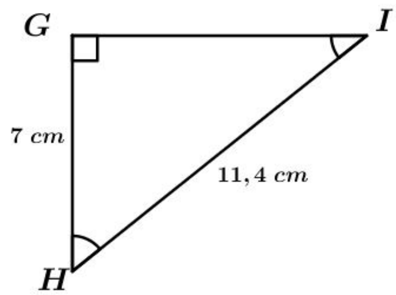


Figura 5.12. Resolución de triángulo 3

$$\begin{array}{lll}
\cos H = \dfrac{7}{11{,}4} \quad ; & \operatorname{sen} 52{,}12^\circ = \dfrac{GI}{11{,}4} \quad ; & \measuredangle H + \measuredangle G + \measuredangle I = 180^\circ \\
H = \cos^{-1}\left(\dfrac{7}{11{,}4}\right) \quad ; & GI = \operatorname{sen} 52{,}12 \cdot (11{,}4); & 52{,}12^\circ + 90^\circ + I = 180^\circ \\
H \approx 52{,}12^\circ \quad ; & GI \approx 9\ cm \quad ; & \measuredangle I = 180^\circ - 142{,}12^\circ = 37{,}88^\circ
\end{array}$$

CAPÍTULO 6

APLICACIONES

La Trigonometría es una rama de las matemáticas que cuenta con diversas aplicaciones en el mundo real; las primeras se hicieron en los campos de la Navegación, la Geodesia y la Astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la Tierra y la Luna, o una distancia que no podía ser medida de forma directa. Otras aplicaciones se pueden encontrar en la Física, Química y en casi todas las ramas de la Ingeniería.

En este trabajo se ha escogido la aplicación de la Trigonometría en problemas que involucren ángulos de elevación y depresión. Ángulo de elevación es el ángulo agudo formado por la línea horizontal y la línea visual(línea imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar u objeto observado) cuando el objeto o punto observado se encuentra por encima de la línea horizontal. Ángulo de depresión es el ángulo agudo formado por la línea horizontal y la línea visual cuando el objeto o punto observado está por debajo de la línea horizontal. Gráficamente, la situación es como se muestra en el esquema adjunto:

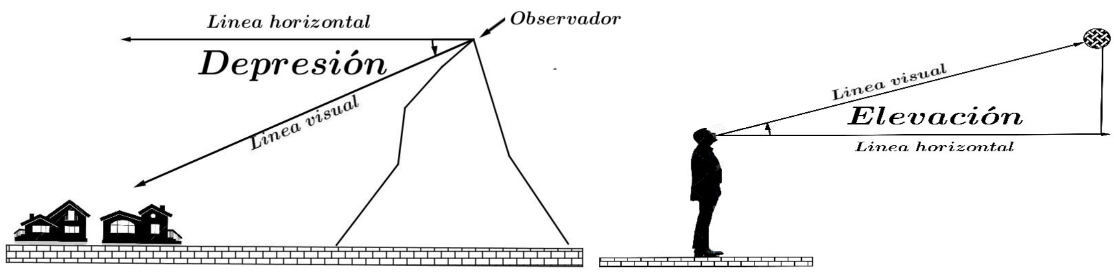


Figura 6.1. Ángulos de elevación y depresión

En la mayoría de los casos, éstos problemas se reducen a encontrar elementos desconocidos de triángulos rectángulos. Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento.

Ejemplo 6.0.1 Un camping está a 9,41 millas de un punto directamente debajo de la parte superior de una montaña. Si el ángulo de elevación es de 12° desde el campamento hasta la cima de la montaña, ¿qué tan alta es la montaña?.

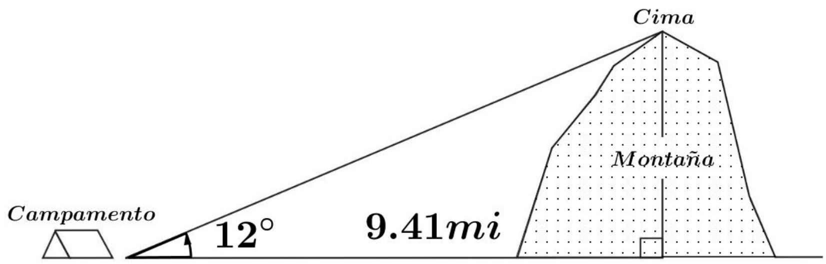


Figura 6.2. Aplicación montaña.

Solución: Se puede observar en la figura un triángulo rectángulo con lado adyacente al ángulo de 12° que mide 9.41 millas. Luego para hallar la altura de la montaña o el lado opuesto al ángulo de 12°, se tiene que tangente es la mejor opción. Esto es:

$$\tan 12^\circ = \frac{\textit{altura de la montaña}}{9{,}41mi}$$

$$\textit{Luego}: \quad (9{,}41mi)\tan 12^\circ = \textit{altura de la montaña}$$

$$2 \text{ millas} \approx \text{altura de la montaña}$$

Ejemplo 6.0.2 Sofia está en el Faro de Boca Manglares en Tumaco. Ella observa dos veleros al este del Faro. Los ángulos de depresión a los dos barcos son 33° y 57°. Encuentre la distancia entre los dos veleros y la distancia de cada velero al faro. La altura del Faro y de su plataforma se muestran en el esquema adjunto:

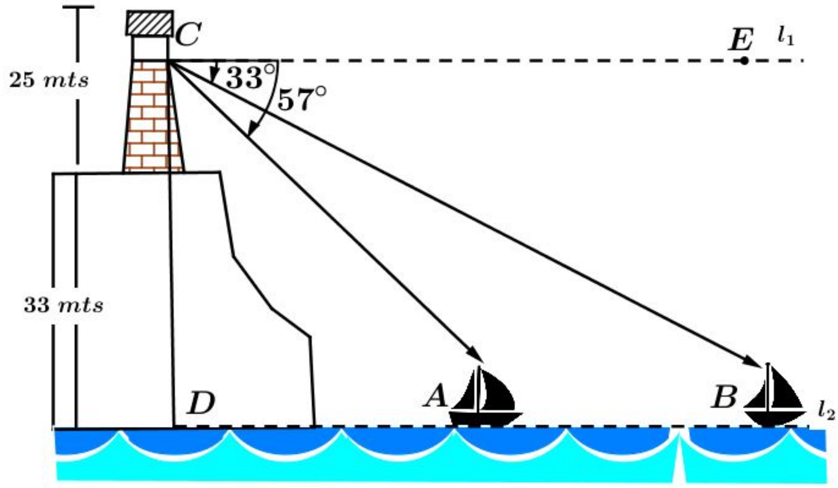


Figura 6.3. Aplicación veleros.

Solución: Se tiene que los triángulos $\triangle CDA$ y $\triangle CDB$ son rectángulos , y además que $CD = 25mts + 33mts = 58mts$. También que la distancia entre los veleros es AB o lo que es igual $DB - DA$. Claramente, $\measuredangle ECB \cong \measuredangle CBD$ y $\measuredangle ECA \cong \measuredangle CAD$ por tratarse de ángulos alternos internos entre paralelas. En consecuencia $\measuredangle CBD = 33°$ y $\measuredangle CAD = 57°$. Luego:

$$\tan 33° = \frac{58}{DB} \qquad \tan 57° = \frac{58}{DA}$$
$$DB = \frac{58}{tan 33°} \qquad DA = \frac{58}{\tan 57°}$$
$$DB \approx 89{,}31\ mts \qquad DA \approx 37{,}66\ mts$$

Por tanto la distancia entre los dos veleros es aproximadamente 51,65 metros.

Ejemplo 6.0.3 El ángulo de elevación a la cima de la pirámide egipcia de Keops es 36°, medida desde un punto situado a 106 metros de la base de la pirámide. El ángulo de elevación de una cara de la pirámide es 52°. Encuentra la altura de la pirámide.

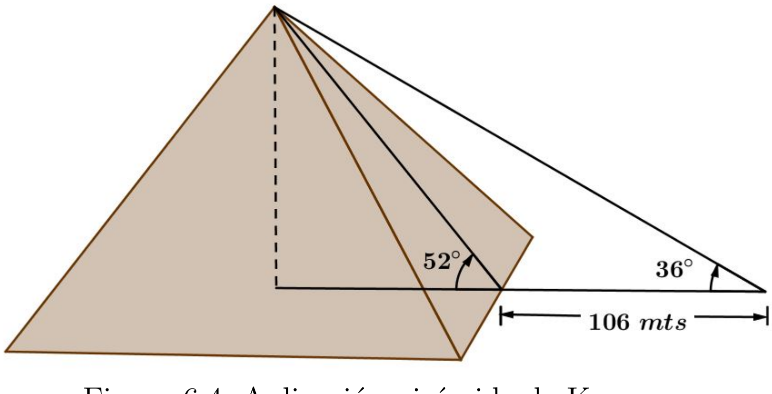


Figura 6.4. Aplicación pirámide de Keops

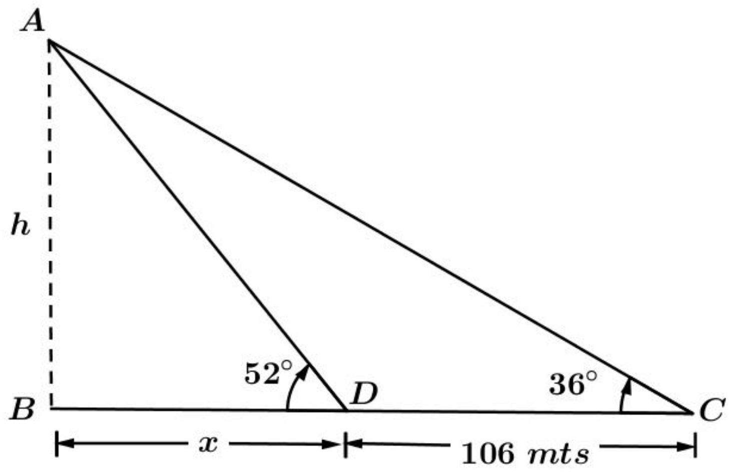


Figura 6.5. Esquema aplicación pirámide de Keops

Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABD$ son rectángulos con ángulo recto en B. Entonces:

$$\tan 52° = \frac{h}{x} \qquad\qquad \tan 36° = \frac{h}{x+106}$$

$$\textit{Luego} \qquad h = x \cdot \tan 52° \qquad y \qquad h = (x+106)\cdot \tan 36°$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} x \cdot \tan 52° &= (x+106)\cdot \tan 36° \\ x(1{,}28) &\approx (x+106)(0{,}73) \\ 1{,}28x &\approx 0{,}73x + 77{,}38 \\ 1{,}28x - 0{,}73x &\approx 77{,}38 \\ 0{,}55x &\approx 77{,}38 \\ x &\approx \frac{77{,}38}{0{,}55} \\ x &\approx 140{,}69 \; mts \end{aligned}$$

En consecuencia: $h = x \cdot \tan 52° \approx 140{,}69 \cdot (1{,}27) \approx 178{,}67$ mts

Por tanto la altura de la pirámide de Keops es de aproximadamente 178,69 metros.

Ejemplo 6.0.4 Se quiere calcular la distancia que separa la cima de dos montañas. Para ello, se fijan dos puntos P y Q distantes entre sí 50 m y que forman los ángulos que aparecen en la figura. ¿Cuál es la distancia entre las dos cimas?.

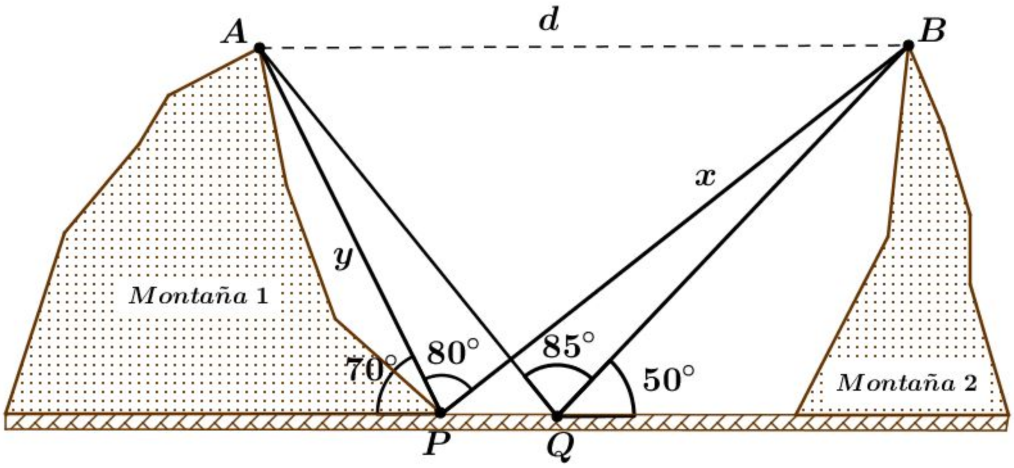


Figura 6.6. Aplicación dos montañas.

Solución: Sean $x = PB$; $y = AP$ y $d = AB$. Aplicando el Teorema del Seno al triángulo BPQ:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 130^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 20^\circ} \qquad \text{O sea } x = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 130^\circ}{\operatorname{sen} 20^\circ} = 111{,}99\ mts$$

Similarmente:

$$\frac{y}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 25^\circ} \qquad \text{O sea } x = \frac{50 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} 25^\circ} = 83{,}66\ mts$$

Finalmente aplicando el Teorema del Coseno en el triángulo APB:

$$\begin{aligned} d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 80^\circ &= (111{,}99)^2 + (83{,}66)^2 - 2 \cdot 111{,}99 \cdot (83{,}66) \cos 80^\circ \\ &= 16355{,}27 \to d = 127{,}88\ mts \end{aligned}$$

Ejemplo 6.0.5 Dos observadores colocados en las posiciones A y B y separados entre sí 2 km, miden simultáneamente el ángulo de elevación de un globo meteorológico, siendo las medidas de 40°y 70°, respectivamente. Determine la altura del globo si éste se ubica justo sobre un punto del segmento de recta entre A y B.

Solución:

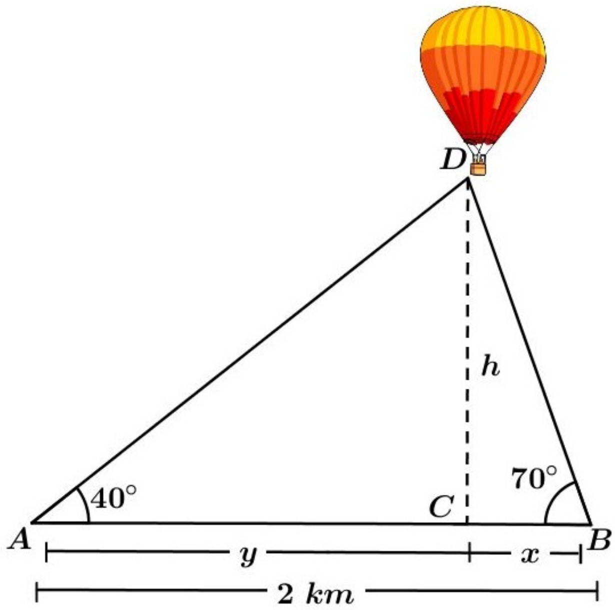


Figura 6.7. Aplicación de globos.

De los triángulos rectángulos: ACD y BCD, tenemos:

$$\tan 40^\circ = \frac{h}{2-x} \qquad \tan 70^\circ = \frac{h}{x}$$

$$(2-x)\tan 40^\circ = h \qquad x\tan 70^\circ = h$$

Luego:

$$\begin{aligned}
(2-x)\tan 40^\circ &= x\tan 70^\circ \\
2\tan 40^\circ - x\tan 40^\circ &= x\tan 70^\circ \\
2\tan 40^\circ &= x\tan 70^\circ + x\tan 40^\circ \\
2\tan 40^\circ &= (\tan 70^\circ + \tan 40^\circ)x
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2\tan 40^\circ}{\tan 70^\circ + \tan 40^\circ} \\
x &= \frac{(2)(0{,}84)}{(2{,}75)+(0{,}84)} \\
x &\approx \frac{1{,}68}{3{,}59} \\
x &\approx 0{,}47 Kms
\end{aligned}$$

Por tanto $h = (0{,}47)\cdot\tan 70^\circ = 1{,}29$. Es decir la altura del globo es 1,4 kms.

Ejemplo 6.0.6 En muchos teléfonos celulares con GPS, una ubicación aproximada puede darse antes de que el GPS reciba la señal. Esto se hace mediante un proceso de triangulación, que trabaja usando la distancia entre dos puntos conocidos. Supongamos que hay dos torres de teléfonos celulares dentro de su rango, separadas 1828 metros a lo largo de una autopista recta que va de este a oeste, y usted sabe que está al norte de la autopista. Basado en el retraso de la señal, se puede determinar que está a 1540 metros de la primera torre, y 738 metros de la segunda. Determine su posición con relación a la torre hacia el oeste y determine que tan lejos está de la autopista.

La siguiente gráfica ilustra el problema.

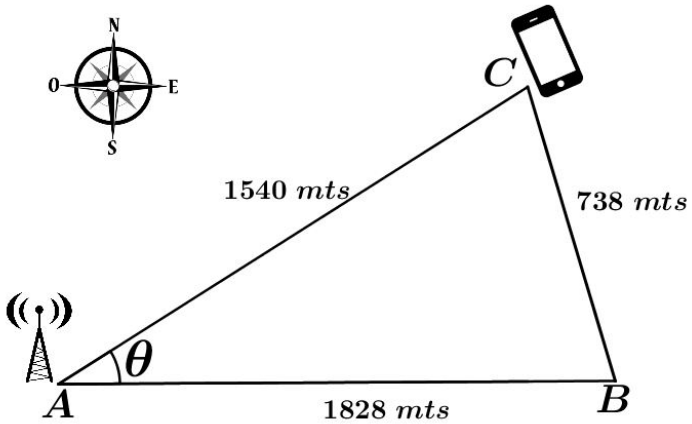


Figura 6.8. Aplicación GPS 1.

Solución: Usando el Teorema del Coseno, se puede encontrar el ángulo θ.

$$BC^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\theta$$

$$O\ sea: \quad (738)^2 = (1828)^2 + (1540)^2 - 2(1540)(1828)\cos\theta$$
$$Luego: \quad \cos\theta = \frac{(1828)^2 + (1540)^2 - (738)^2}{2(1828)(1540)}$$
$$\cos\theta = 0{,}918$$

Ahora bien usando este ángulo θ, y construyendo el triángulo rectángulo ADC (fig 6.9) tenemos:

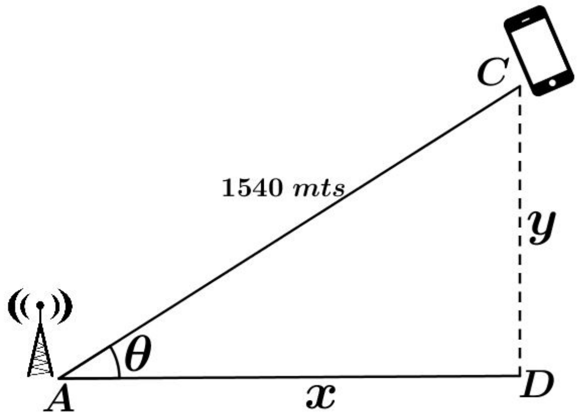


Figura 6.9. Aplicación GPS 2.

$$\begin{array}{lr} Luego: & x = (1540)\cos\theta = 141372\ mts \\ Como & (1540)^2 = x^2 + y^2, \\ entonces & y = \sqrt{(1540)^2 - (1413{,}72)^2} = 610{,}73\ mts \end{array}$$

Por tanto la distancia de la ubicación del teléfono celular a la torre occidental es 1 413,72 metros y la distancia a la autopista es 610,73 metros.

Ejemplo 6.0.7 Suponga que usted se encuentra en el punto A y las condiciones del terreno impiden ir en línea recta de A hacia C, decide ir entonces por el camino AB y luego BC. ¿Cuál será la distancia total que debe recorrer?.

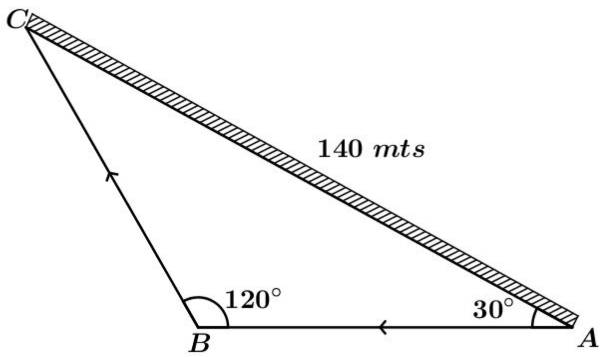


Figura 6.10. Aplicación terreno

Solución

Se deben encontrar las medidas de los segmentos BA y BC.

Usando el Teorema del Seno:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} A} = \frac{AC}{\operatorname{sen} B}$$

Entonces:

$$\frac{BC}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{140}{\operatorname{sen} 120^\circ}$$

Luego

$$BC = \frac{140 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 120^\circ}$$

$$BC = \frac{140 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 80{,}83 \text{ mts}$$

Por otro lado para hallar la medida de BA se puede realizar un procedimiento similar. Aunque como es un triángulo equilátero los lados BA y BC son congruentes.

$$\frac{BA}{\operatorname{sen} C} = \frac{AC}{\operatorname{sen} B}$$

Entonces

$$\frac{BA}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{140}{\operatorname{sen} 120^\circ}$$

Luego

$$BA = \frac{140 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 80{,}83 \text{ mts}$$

Finalmente se suman las dos distancias $BC + BA = 80{,}83 \text{ mts} + 80{,}83 \text{ mts}$ por lo tanto la distancia que se debe recorrer es aproximadamente 162,66 metros.

Ejemplo 6.0.8 Dos observadores A y B miden el ángulos de elevación de un avión que los sobrevuela a una altura constante. En cierto instante los ángulos medidos por A y B son $\theta = 60^\circ$ y $\phi = 40^\circ$, respectivamente. Diez segundos más tarde, A mide un ángulo de elevación $\alpha = 110^\circ$. La distancia entre los dos observadores es de 1Km. ¿A qué altura vuela el avión? ¿Cuál es su velocidad?.

Solución

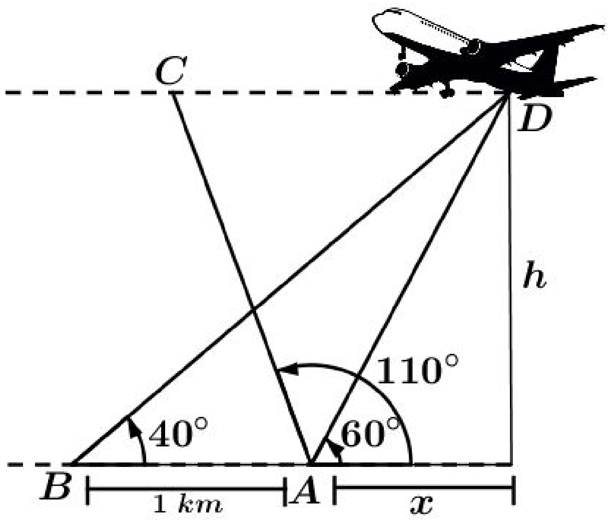


Figura 6.11. Aplicación avión 1.

Se tiene que:

$$\tan 60° = \frac{h}{x} \qquad\qquad \tan 40° = \frac{h}{x+1}$$

$$\textit{Luego} \qquad h = x \cdot \tan 60°; \qquad (x+1)\tan 40° = h$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
x\tan 60° &= (x+1)\tan 40° \\
x\tan 60° &= x\tan 40° + \tan 40° \\
x\tan 60° - x\tan 40° &= \tan 40° \\
x(\tan 60° - \tan 40°) &= \tan 40° \\
x &= \frac{\tan 40°}{\tan 60° - \tan 40°} \\
x &= \frac{0{,}84}{1{,}73 - 0{,}84} = 0{,}94
\end{aligned}$$

Así que:

$$h = (0{,}94) \cdot \tan 60° \approx 1{,}62 \text{ km}$$

Es decir el avión vuela a una altura aproximada de 1,62 km.

Para hallar el desplazamiento durante los diez segundos, se considera el triangulo CAD, el cual determina otro triángulo rectángulo CEA con ángulo recto E, al proyectar el punto C, sobre la recta de los observadores (fig 7.12).

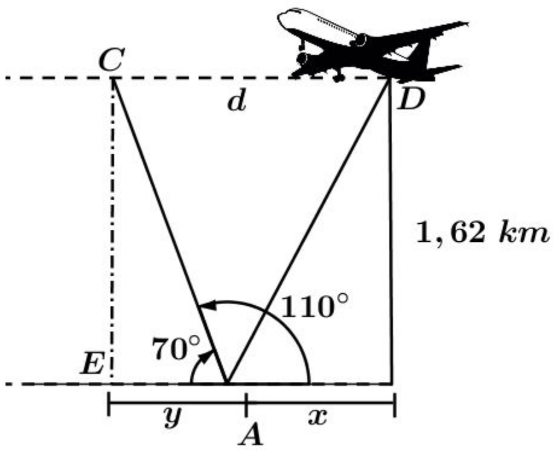


Figura 6.12. Aplicación avión 2.

Entonces:

$$\tan 70^\circ = \frac{CE}{EA} = \frac{1{,}62 \text{ km}}{y}$$

Así que:

$$y = \frac{1{,}62 \text{ km}}{\tan 70^\circ} \approx 0{,}58 \text{ km}$$

El desplazamiento es:

$$d \approx x + y \approx 0{,}93 \text{ km} + 0{,}58 \text{ km} \approx 1{,}51 \text{ km} = 1\ 510 \text{ m}$$

Como la velocidad es igual a la distancia recorrida dividida por el tiempo determinado se tiene que:

$$v = \frac{1\ 510 \text{ m}}{10\text{seg}} = 151\ m/s$$

La velocidad del avión es de 151 m/s.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta que el objetivo era realizar un material de estudio basado en la semejanza de triángulos y la proporcionalidad el cual contribuyera al aprendizaje de las funciones trigonométricas, se tiene que :

- Al utilizarse la geometría y por ende la proporcionalidad, semejanza de triángulos y demás conceptos preliminares, se logro presentar herramientas para el calculo de razones trigonométricas de un ángulo dado, en la demostración de identidades y la solución de ecuaciones, y por el contrario acercarse a la reflexión e interacción con conceptos que permitieran entender la variación, el comportamiento de las funciones trigonométricas y sus propiedades.

- Al utilizar como herramienta el circulo unitario fue posible realizar una extensión de las funciones trigonométricas del primer cuadrante a los demás. Y posteriormente lograr concebir estas como funciones de variable real.

- Mediante la construcción con regla y compás de las gráficas de las funciones trigonométricas fue posible comprender el porque de la representación de las mismas, y no limitarse a la simple tabulación para el esbozo de estas.

- Se mostró las aplicaciones de las funciones trigonométricas dentro de las mismas matemáticas, en otras áreas y en la vida real, demostrando la gran variedad de usos que tiene este concepto en la cotidianidad.

- Al modelar situaciones y dar soluciones a estas mediante conceptos trigonométricos se invita al estudiante a apropiarse de la trigonometría.

Finalmente, aunque este Trabajo no fue aplicado en un estudio que permita conocer los resultados, ha servido en nuestro ejercicio como docentes en grados como décimo y undécimo. Demostrando ser un material que facilita el aprendizaje de las funciones trigonométricas y sus propiedades.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Muñoz, J. (1989). *Precalculo.*Departamento de Matemáticas y Estadística.Universidad Nacional.

[2] Guzman, M (2014). *Las Razones Trigonométricas a Partir de la Semejanza de Triángulos.*Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

[3] Guerrero, A. (2006) *Geometría: desarrollo axiomático.*Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.

[4] Allendoerfer, C. & Oakley,C. (1990) *Fundamentals of Freshman Mathematics.*Cuarta edición.McGraw-Hill.

[5] Keisler, H. J. (1986). *Elementary calculus: an infinitesimal approach.*Boston, Mass : Prindle, Weber y Schmidt.

[6] Ridruejo,C.(2015). *Aprendizaje Basado En Problemas Trigonometría y Triángulos*(trabajo de grado).Universidad de la Rioja.

[7] Cañas, J. C. (2010). *Trigonometría I, y Razones Trigonométricas.*

[8] Montealegre,M.(2011)*Matemáticas para la creatividad V.*Editorial:tiempos ecológicos.

[9] Mendes,C.(2014)*DEMONSTRAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS VIA GEOMETRIA PLANA* . Catalão,Brasil.

[10] Ellermeyer,S.(2014) *Trigonometric Identities* . Department of Mathematics. Recuperado de: http://facultyweb.kennesaw.edu/sellerme/docs/basictrigidentities.pdf