Neiva, 22 de enero de 2018

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

El suscrito:

Yenny Alexandra Herrera Herrera, con C.C. No. 1’081.158.939, autor de la tesis y/o trabajo de grado titulado *Enseñanza de las Razones Trigonométricas en el Grado 9° a partir del Aprendizaje Activo*, presentado y aprobado en el año 2018 como requisito para optar al título de *Licenciada en Matemáticas.*

Autorizo al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.

- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato CD-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.

- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: Yenny A. Herrera H

TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: ***Enseñanza de las Razones Trigonométricas en el Grado 9° a partir del Aprendizaje Activo***

AUTOR:

Primero y Segundo Apellido	**Primero y Segundo Nombre**
Herrera Herrera	Yenny Alexandra

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ramírez Oviedo Penagos	Ivonne Andrea Mauricio

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ramírez Oviedo	Ivonne Andrea

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciada en Matemáticas

FACULTAD: Educación

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura en Matemáticas

CIUDAD: Neiva **AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2018 **NÚMERO DE PÁGINAS:** 78

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**)**:**

Diagramas___ Fotografías **X** Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general **X** Grabados___ Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas o Cuadros **X**

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: Ninguno

MATERIAL ANEXO:

PREMIO O DISTINCIÓN *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria)*:

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

Español	Inglés	Español	Inglés
1. Razón Trigonométrica	1. Trigonometric Reason	6. Aprendizaje Activo	6. Active Learning
2. Triángulo Rectángulo	2. Rectangle triangle	7. Análisis Cognitivo	7. Cognitive Analysis
3. Razón	3. Reason	8. Competencia	8. Competition
4. Proporción	4. Proportion	9. Componente	9. Component
5. Semejanza	5. Similarity	10. Resolución de Problemas	10. Problem resolution

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

Este Trabajo de Grado presenta el diseño, aplicación y evaluación de una unidad didáctica sobre la Enseñanza de las Razones Trigonométricas en el Grado 9° a partir del Aprendizaje Activo en la Institución Educativa INEM "Julián Motta Salas" de la ciudad de Neiva.

La unidad consiste en cuatro actividades con el objetivo de desarrollar el concepto de Razón Trigonométrica a través de un enfoque pedagógico diferente: el Aprendizaje Activo. Para ello se realizó una prueba diagnóstica sobre las competencias y niveles de desempeño que poseen los estudiantes antes de aplicar la unidad didáctica y medir de alguna manera los conocimientos previos de los estudiantes del grado 904 y 905 acerca del tema a trabajar, seguidamente se aplicaron las actividades al grado que presentó mayor dificultad en la prueba diagnóstica, para posteriormente comparar y evaluar los resultados obtenidos frente a esta propuesta.

Además, este trabajo resalta la importancia de las metodologías y estrategias a utilizar en la enseñanza, para generar en el estudiante un aprendizaje significativo, donde el docente a través de su conocimiento disciplinar y pedagógico plantea alternativas de solución en aras de mejorar los procesos de aprendizaje en los estudiantes, como también presenta el recorrido histórico de las razones trigonométricas un análisis cognitivo y metodológico con respecto a la enseñanza de dicho concepto.

ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

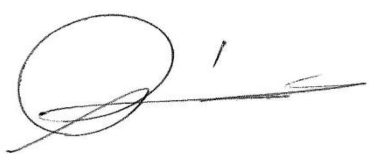
This Degree Project presents the design, application and evaluation of a didactic unit on the Teaching of Trigonometric Reasons in the 9th Grade from the Active Learning in the Educational Institution INEM "Julián Motta Salas" of the city of Neiva.

The unit consists of four activities with the aim of developing the concept of Trigonometric Reason through a different pedagogical approach: Active Learning. To this end, a diagnostic test was carried out on the competences and performance levels that the students possess before applying the didactic unit and to measure in some way the previous knowledge of the students of grade 904 and 905 about the subject to work, then the activities to the degree that presented greater difficulty in the diagnostic test, to later compare and evaluate the results obtained against this proposal.

In addition, this work highlights the importance of methodologies and strategies to be used in teaching, to generate significant learning in the student, where the teacher, through his disciplinary and pedagogical knowledge, proposes alternative solutions in order to improve learning processes in the students, as also the historical path of the trigonometric reasons presents a cognitive and methodological analysis with respect to the teaching of said concept.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: *Mauricio Penagos*

Firma: 

Nombre Jurado: *Ivonne Andrea Ramírez Oviedo*

Firma: 

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Enseñanza de las Razones Trigonométricas en el Grado 9° a partir del Aprendizaje Activo

Yenny Alexandra Herrera Herrera

Neiva, Huila
2018

Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Enseñanza de las Razones Trigonométricas en el grado 9° a partir del Aprendizaje Activo

Trabajo presentado como requisito de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Yenny Alexandra Herrera Herrera
Código: *20131116446*

Asesora:
Ivonne Andrea Ramírez Oviedo

Neiva, Huila
2018

Jefe de Programa

MSc. Mauricio Penagos

Asesora

MSc. Ivonne Andrea Ramírez Oviedo

Segundo Lector

MSc. Mauricio Penagos

Aprobado

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesora

Segundo Lector

Neiva, enero de 2018.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por permitirme culminar satisfactoriamente esta etapa de mi vida y a mi familia por su apoyo incondicional.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Resumen

El siguiente trabajo de grado presenta el diseño, aplicación y evaluación de una unidad didáctica sobre las razones trigonométricas, para el grado noveno de la Institución Educativa INEM "Julián Motta Salas" de la ciudad de Neiva.

La unidad consiste en cuatro actividades con el objetivo de desarrollar el concepto de Razón Trigonométrica a través de un enfoque pedagógico diferente: el Aprendizaje Activo. Para ello se realizó una prueba diagnóstica sobre las competencias y niveles de desempeño que poseen los estudiantes antes de aplicar la unidad didáctica y medir de alguna manera los conocimientos previos de los estudiantes del grado 904 y 905 acerca del tema a trabajar, seguidamente se aplicaron las actividades que se proponen en esta unidad solamente al grado con mayor dificultad, grado 904, para posteriormente comparar y evaluar los resultados obtenidos frente a esta propuesta.

Además, este trabajo resalta la importancia de las metodologías y estrategias a utilizar en la enseñanza, para generar en el estudiante un aprendizaje significativo, donde el docente a través de su conocimiento disciplinar y pedagógico plantea alternativas de solución en aras de mejorar los procesos de aprendizaje en los estudiantes.

2. Presentación

No es un secreto que las matemáticas siempre han ocupado un lugar muy importante en los programas escolares, como tampoco es un secreto que en ocasiones resulta ser un poco (para algunos estudiantes) complicada a la hora de aprender o asimilar ciertos conceptos. Es por esto, necesario que el docente utilice diversas estrategias, metodologías y recursos que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el fin de generar un aprendizaje significativo en el estudiante, teniendo en cuenta también los distintos factores que influyen en una persona a la hora de aprender.

Es claro que el docente siempre debe estar dispuesto a innovar en el aula de clase, con el objetivo de despertar el interés de sus estudiantes y promover en ellos un aprendizaje significativo que le dure para toda la vida. El aprendizaje activo es una nueva propuesta de enseñar y aprender, un aprendizaje basado y centrado en el alumno, donde el estudiante no solo se limita a escuchar al profesor, sino a construir por medio de sus conocimientos previos y de la práctica, los conceptos. Allí el docente deja de ser la autoridad, como se observa en la enseñanza tradicional; para ser de mediador, de guía, de orientador frente a los estudiantes, quienes están en el proceso de búsqueda y construcción de nuevos conocimientos. Esta forma de aprendizaje supone un aprendizaje significativo, ya que el estudiante por medio de la observación, del análisis, de la asimilación, de la experimentación y del afianzamiento de actividades supone un cambio en las estructuras mentales. Aquí se pone al maestro como facilitador y orientador para la construcción de nuevos conocimientos. Por ende, este aprendizaje requiere de alumnos activos responsables de su propio aprendizaje.

Con el presente trabajo de grado, queremos desarrollar el concepto de Razón Trigonométrica en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa INEM "Julián Motta Salas" de la ciudad de Neiva, a través de una Unidad Didáctica enfocada en el Aprendizaje Activo y conocimientos previos sobre razones. Para el desarrollo de dicha unidad, se llevó a cabo una metodología que se clasifica en cuatro fases: Recopilación de información, elaboración de una prueba diagnóstica que permita conocer los conocimientos previos que poseen los estudiantes frente a este concepto, diseño y aplicación de las actividades que conforman la unidad didáctica sobre razones trigonométricas y por último, la evaluación de los resultados obtenidos de dicha unidad. La prueba diagnóstica fue aplicada en dos cursos del grado noveno, para luego hacer un análisis estadístico comparativo que permitiera saber el desempeño de cada grupo y posteriormente aplicar las actividades de la unidad didáctica al grupo con el desempeño mas bajo.

También se tuvo en cuenta el recorrido histórico de las razones trigonométricas y un análisis cognitivo y metodológico con respecto a la enseñanza de dicho concepto, además Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) del grado noveno establecidos por el Ministerio de Educación Nacional y la matriz de referencia con la que evalúa el ICFES al grado noveno, para la elaboración de la prueba diagnóstica y demás actividades que se presentan en este trabajo.

3. Justificación

Las matemáticas juegan un papel muy importante, ya que están presentes a diario en nuestra vida, por ejemplo, el uso de los cajeros automáticos de un banco, las comunicaciones por telefonía móvil, la predicción del tiempo, las nuevas tecnologías, la arquitectura, la música, en la publicidad, en el cine o en la lectura de un libro. Sin embargo, no son de gran atractivo para algunas personas ni para los estudiantes. Es por esto, que la labor del docente de matemáticas resulta ser mas ardua, ya que debe buscar la manera de llamar la atención del estudiante, despertar su interés hacia la clase y motivarlos para desarrollar en ellos un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo basado en las diferentes competencias que corresponden a las matemáticas.

Las razones trigonométricas, según los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas son un conjunto de conocimientos que deben desarrollarse en el grado noveno de Educación Básica Secundaria y Media, pero que infortunadamente algunos colegios no la contemplan dentro de su plan de estudios. De aquí surge el deseo de desarrollar una unidad didáctica sobre las razones trigonométricas con los estudiantes de grado noveno de la I. E. INEM "Julián Motta Salas"por medio de una propuesta de enseñanza y aprendizaje distinta a la tradicional, donde se busca incentivar al alumno a adquirir competencias matemáticas a partir de un aprendizaje activo; pues ya que uno de los deberes del docente es buscar la manera de despertar el gusto de los estudiantes por apropiarse de las diferentes competencias y destrezas matemáticas, surge una nueva forma de enseñar y aprender en el aula de clase, se trata de un aprendizaje activo, el cual está centrado en el alumno y buscar generar en él un aprendizaje significativo, donde sea el mismo estudiante quien construya nuevos conocimientos y que el profesor sea un mediador y un guía para lograrlo.

Es por esto que en este trabajo de grado, se diseñó una unidad didáctica enfocada en el aprendizaje activo para desarrollar las competencias propias en la temática de razones trigonométricas en los estudiantes del grado noveno, con el objetivo de emplear una estrategia distinta a la tradicional en el proceso de enseñanza-aprendizaje y evaluar los resultados obtenidos de dicha unidad.

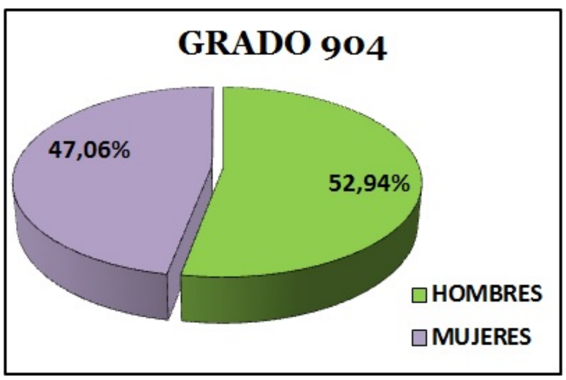
4. Caracterización de la población

El trabajo se llevó a cabo en la Institución Educativa INEM "Julián Motta Salas" Sede Central, ubicado en la ciudad de Neiva del Departamento del Huila, con los estudiantes del grado 904 y 905. Es una institución mixta que en su sede central cuenta con la Educación Básica Secundaria y Media de naturaleza oficial con carácter Académico y Técnico en varias especialidades.

El grado 904 en el cual se desarrollaron las actividades que conforman la unidad didáctica, cuenta con 34 estudiantes que oscilan entre los 14 y 16 de edad. Un grupo heterogéneo donde se presentan diferencias marcadas de comportamiento y homogéneos en cuanto el nivel de desempeño académico. Los estudiantes habitan en su mayoría en zona urbana de la ciudad y algunos poseen problemas de tipo familiar y económico.

El grado 905 cuenta con 36 estudiantes entre los 14 y 17 años de edad. Por el contrario, este es un curso muy homogéneo en cuanto al desempeño disciplinario y académico; algunos de estos estudiantes también poseen problemas de tipo de familiar y económico.

A continuación se presenta la clasificación de cada curso según su género.



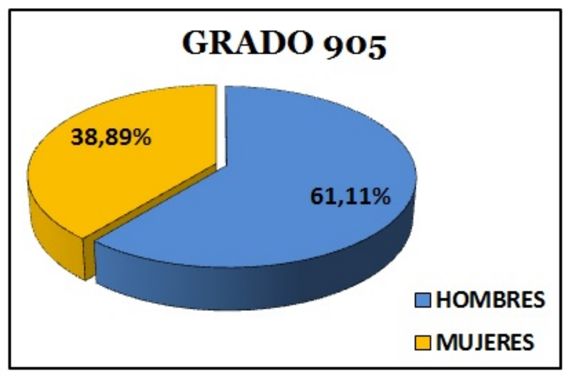


Figura 1: Caracterización de la población

5. Objetivos

5.1. Objetivo General

Diseñar, aplicar y evaluar una unidad didáctica sobre Razones Trigonométricas en los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa INEM "Julián Motta Salas" con el fin de desarrollar dicho concepto matemático a través de actividades, estrategias y metodologías basadas en el enfoque pedagógico de Aprendizaje Activo.

5.2. Objetivos Específicos

- Emplear el enfoque pedagógico de Aprendizaje Activo como metodología para elaborar la unidad didáctica.

- Desarrollar el concepto de Razón Trigonométrica a través de actividades y estrategias didácticas con el fin de generar en el estudiante un ambiente motivacional significativo.

- Alcanzar por medio de la metodología empleada, un aprendizaje significativo en los estudiantes del grado noveno de la I. E. INEM "Julián Motta Salas"

- Evaluar los resultados obtenidos con las actividades propuestas para desarrollar el concepto de Razón Trigonométrica.

6. Metodología

La metodología utilizada en este trabajo de grado se ha clasificado en cuatro fases, cada una con un objetivo y con las actividades que se realizaban para cumplir dicho objetivo. La siguiente tabla ilustra la metodología llevada a cabo.

FASE	OBJETIVO	ACTIVIDADES
FASE 1. **RECOPILACIÓN DE LA INFORMACIÓN**	Hacer una consulta sobre unidades didácticas ya realizadas anteriormente y sobre la metodología a utilizar en la aplicación de la unidad didáctica	•Revisión de los Derechos Básicos de Aprendizaje y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del grado noveno. •Investigación sobre la teoría del aprendizaje activo. •Trabajos de grado como referente.
FASE 2. **REALIZACIÓN DE PRUEBA DIAGNÓSTICA**	Elaborar una prueba diagnóstica sobre las competencias que los estudiantes poseen	•Consulta y selección de competencias y desempeños desarrollados en esta unidad. •Diseño y aplicación de la prueba diagnóstica basada en las competencias y conocimientos previos de los estudiantes con respecto al tema a trabajar.
FASE 3. **DISEÑO Y APLICACIÓN**	Diseñar y aplicar las actividades que conforman la unidad didáctica sobre razones trigonométricas en los estudiantes del grado noveno de la I. E. INEM “Julián Motta Salas”.	•Diseño y aplicación de las cuatro actividades que consta la unidad didáctica. •Elaboración de la estructura del trabajo de grado.
FASE 4. **EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS**	Evaluar la Unidad Didáctica sobre el concepto de razón trigonométrica, teniendo en cuenta algunos criterios de la matriz de referencia.	•Comparación de los resultados obtenidos a lo largo de las fases dos y tres

Tabla 1: Metodología

7. Cronograma

En la tabla que se muestra a continuación, se presenta la distribución de las actividades llevadas a cabo en las diferentes fases, con su respectiva duración

ACTIVIDAD - SEMANA	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO				SEPT.				OCTUBRE				NOV.				DICIEMBRE			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Recopilación de la información	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■																				
Elaboración de la prueba diagnóstica											■	■	■	■																		
Aplicación de la prueba diagnóstica																	■	■														
Análisis de la prueba diagnóstica																			■	■												
Diseño de las actividades									■	■	■	■	■	■	■	■	■	■														
Aplicación de la actividad 1																						■	■									
Aplicación de la actividad 2																								■								
Aplicación de la actividad 3																									■							
Aplicación de la actividad 4																											■					
Elaboración de estructura del trabajo																						■	■	■	■	■	■	■	■	■		
Evaluación de la unidad didáctica.																											■	■	■	■		

Tabla 2: Cronograma

8. Marco Teórico

8.1. Historia

En esta reseña histórica se toma como referencia trabajos de grado de la Universidad Nacional de Colombia, basados en la construcción y enseñanza de las razones trigonométricas.

La trigonometría en sus inicios se desarrolla de forma práctica en la agrimensura y la navegación, que desde sus orígenes han requerido el cálculo de distancias cuya medición directa no resultaba posible. Fue hace 3000 años que se comenzó a usar la trigonometría, primero en las civilizaciones egipcia y babilónica. En Babilonia para realizar medidas en la agricultura y los egipcios la utilizaban en la construcción de las pirámides, quienes establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos, criterio que se ha mantenido hoy en día.

Luego el desarrollo de la trigonometría se traslada a Grecia en el siglo II a.C., allí, Hiparco de Nicea, un matemático y astrónomo considerado el padre de la trigonometría por sus aportes a esta rama, construyó una tabla de cuerdas, que equivale a la moderna tabla de senos, en la que relacionaba los lados y ángulos de todo triángulo plano.

Posteriormente, los avances de la trigonometría pasan a la civilización árabe en el siglo X, donde los matemáticos árabes adoptan el concepto de la función seno y las otras cinco razones trigonométricas: *coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante* y también descubrieron teoremas fundamentales de la trigonometría, tanto para triángulos planos como esféricos

Pero no es sino hasta el siglo XV que se realiza el primer trabajo importante sobre la trigonometría por el matemático alemán Johann Muller, con su obra titulada *"De triangulis Omnimodis"* compuesta por cinco libros que se centran en conceptos y aplicaciones propias de la trigonometría. Por último, en el siglo XVIII, Leonhard Euler un matemático suizo, fundó la trigonometría moderna. En esta introdujo la notación actual de las funciones trigonométricas.

Estas situaciones permitieron el surgimiento de la trigonometría, que inicialmente no fue llamada como tal, sino que eran sus estudios y procedimientos que involucraban mediciones con triángulos y ángulos para facilitar las soluciones a diferentes situaciones problemas que se presentaban en aquella época, los que permitían relacionarse con ella. A continuación se desarrollará con más detalles los aspectos más importantes en la historia de la trigonometría.

Reloj de Sol o Gnomon

Una forma de encontrar alturas, profundidades, distancias y posiciones era haciendo uso de los relojes de sol o gnomon. Este método consistía en un bastón incrustado perpendicularmente al suelo y en la tierra que señalaban surcos que indicaban los distintos momentos del día, la sombra generaba diferentes horarios.

Los relojes de sol se basaban en la variación angular de la sombra del "Gnomon". Este gnomon es el instrumento más elemental que se haya podido usar en la historia de la observación astronómica, era un palo vertical del reloj de sol que sabiamente utilizado, servía para medir la altura de las estrellas como para el paso de las horas o incluso de las estaciones. Se dice que este fue un método que se recibió de los Babilonios.

El gnomon es en esencia un dispositivo análogo al cálculo de las funciones trigonométricas entre las alturas de los objetos y sus sombras reflejadas por la acción de la luz del sol.

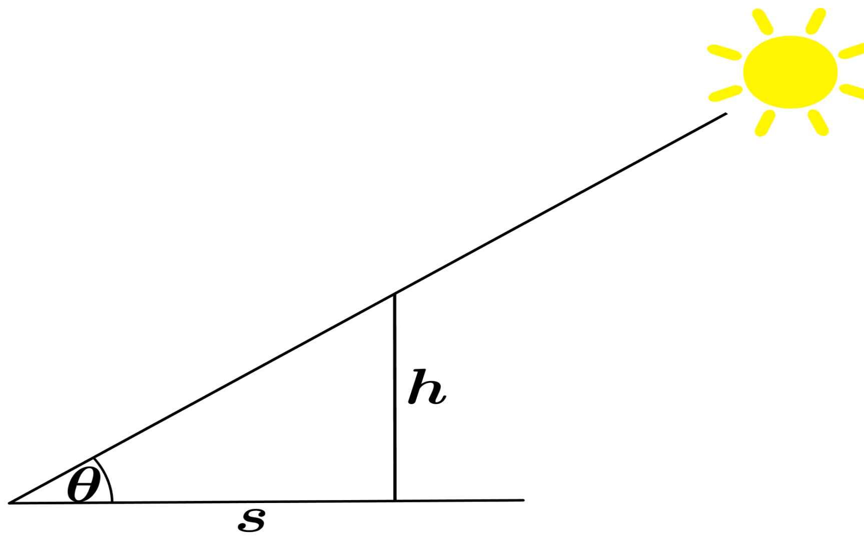


Figura 2: Gnomon

En términos modernos, si $\boldsymbol{h}$ es la altura conocida del gnomon y $\boldsymbol{s}$ la longitud de su sombra cuando el sol está a una altitud θ grados por encima de la horizontal, entonces $s = h \cot \theta$ y $h = s \tan \theta$, por lo que s es proporcional a la cotangente de θ y h también lo es a la tangente de θ. (Mateus, 2013)

Un ejemplo en el que se puede hacer uso de los relojes de sol y el gnomon, consiste en averiguar la altura de un árbol. Para ello, se conoce la distancia del árbol al gnomon, la longitud de la vara y la sombra que esta proyecta. Los datos arrojados, junto por la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras, conocido en esa época como el teorema de Gougou; permitían encontrar dicha medida. (Runza, 2013)

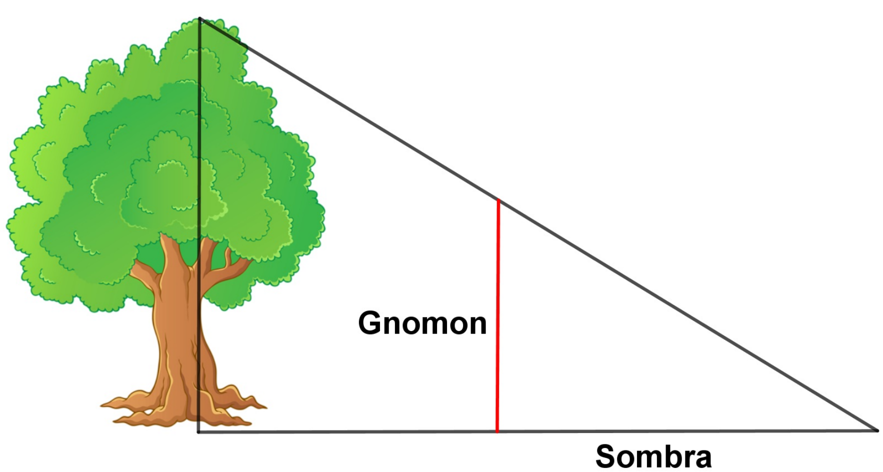


Figura 3: Reloj de Sol o Gnomom

Tablilla Plimpton

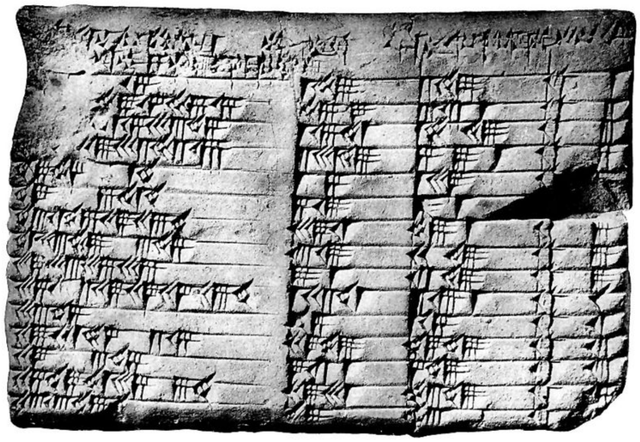


Figura 4: Tablilla Plimpton

Un legado importante de los Babilónicos es la llamada tablilla Plimpton, una tablilla de barro, que se destaca por contener un ejemplo de las matemáticas babilónicas. Esta tabla se cree que fue escrita cerca de 1.800 a.C.

El nombre de la tablilla proviene del editor neyorkino George Arthur Plimpton, quien compró la tablilla y la donó a la Universidad de Columbia. Esta tabla muestra lo que ahora se llaman ternas pitagóricas (tríos de números que representan longitudes de triángulos rectángulos) y el teorema de Pitágoras.

La tabla de Plimpton es una tabla de números que está dividida en cuatro columnas y quince filas, escritas en notación sexagesimal babilónica. (Castañeda, 2011)

C 1	**C2**	**C3**	**C4**
1 59 0 15	1 59	2 49	1
1 56 56 58 14 50 6 15	56 7	1 20 25	2
1 55 7 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
1 53 10 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
1 48 54 1 40	1 5	1 37	5
1 47 6 41 40	5 19	8 1	6
1 43 11 56 28 26 40	38 11	59 1	7
1 41 33 59 3 45	13 19	20 49	8
1 38 33 36 36	8 1	12 49	9
1 35 10 2 28 27 24 26	1 22 41	2 16 1	10
1 33 45	45	1 15	11
1 29 21 54 2 15	27 59	48 49	12
1 27 0 3 45	2 41	4 49	13
1 25 48 51 35 6 40	29 31	53 49	14
1 23 13 46 40	56	1 46	15

Tabla 3: Tablilla Plimpton en notación sexagesimal babilónica

A la tablilla Plimpton se le ha dado la siguiente interpretación: la última columna indica con un número de orden del 1 al 15 cada fila. En la columna 2 (C2) aparece uno de los catetos a, en la columna 3 (C3) aparece la hipotenusa c y en la columna 1 (C1) aparece la expresión $\left(\frac{c}{b}\right)^2$ donde b representa el otro cateto. Para calcular b hay que hacer una operación entre C1 y C3. Se puede notar que la razón $\dfrac{c}{b}$ es la actual *cosecante*, por lo tanto, esta tablilla se puede considerar como una forma temprana e incipiente de trigonometría.

A continuación se puede observar la tablilla de Pilmpton interpretada en el sistema decimal actual.(Runza, 2013)

$(\frac{c}{b})^2$ C1	a C2	c C3	$b = \frac{c}{\sqrt{C1}}$ C4
1,98340278	119	169	120
1,94915855	3367	4825	3456
1,91880213	4601	6649	4800
1,88624791	12709	18541	13500
1,81500772	65	97	72
1,7851929	319	481	360
1,71998368	2291	3541	2700
1,69277344	799	1249	960
1,64266944	481	769	600
1,58612257	4961	8161	6480
1,5625	45	75	60
1,48941684	1679	2929	2400
1,45001736	161	289	240
1,43023882	1771	3229	2700
1,38716049	56	106	90

Tabla 4: Tablilla Plimpton en el sistema decimal actual

Distancia Sol-Luna-Tierra

En el siglo III a.C. Aristarco de Samos logró realizar un cálculo sobre las distancias entre el sol, la luna y la tierra. Aristarco en su obra titulada "Sobre los tamaños y las distancias del sol y la luna", hace la observación que cuando la luna está exactamente medio llena, el ángulo entre la visual dirigida hacia el centro del sol y la visual dirigida hacia el centro de la luna, es menor que un ángulo recto en un treintavo de cuadrante, es decir, $\beta = 90 - \alpha$ donde α equivale a 3 grados sexagesimales. Entonces, el sistema Tierra, Sol, Luna, se podría representar bajo el modelo de un triángulo rectángulo, con la Luna como vértices formando el ángulo recto (Figura 5).

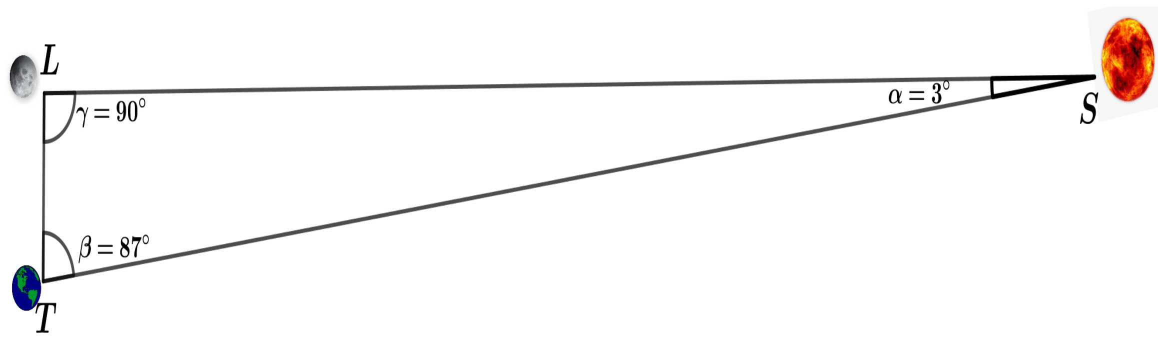


Figura 5: Distancia Tierra-Luna-Sol

En el lenguaje trigonométrico actual se podría encontrar:

$$sen\ 3° = \frac{d(tierra - luna)}{d(tierra - sol)}$$

Para obtener este resultado, Aristarco utilizó un teorema famoso en esa época y que se expresa utilizando desigualdades:

$$\frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tan\ \alpha}{tan\ \beta}$$
$$\text{para}$$
$$0° < \beta < \alpha < 90°$$

La conclusión a la que llegó fue que $\frac{1}{20} < sen\ 3° < \frac{1}{18}$ por lo que determinó que la distancia entre la tierra y el sol debería ser mayor de 18 veces la distancia entre la tierra y la luna, pero menor de 20 veces. Sin embargo, el resultado no fue correcto, pero no por el método sino por la estimación del ángulo, ya que no es 87° si no $89°50''$. (Sánchez, 2014)

En su trabajo, Aristarco argumentaba que el Sol, la Luna y la Tierra forman un ángulo recto en el momento del cuarto creciente o menguante de la luna. Estimó que el ángulo opuesto al cateto mayor era de 87°. Aunque el método que utilizó fue correcto, los datos de la observación fueron inexactos, por lo que concluyó erróneamente que el sol estaba unas 20 veces mas lejos que la luna, cuando en realidad está 400 veces más lejos. El problema resuelto por Aristarco consistió en calcular los catetos de un triángulo del que se conocen solo los ángulos, conocido actualmente como tangente trigonométrica de un ángulo. Por consiguiente, el trabajo de Aristarco puede ser considerado como uno de los primeros trabajos de la trigonometría.

8.2. Antecedentes y experiencias

Es necesario precisar que el estudio de las razones trigonométricas según los DBA, se debe implementar en el grado noveno de la Educación Básica Secundaria, pero que en los Estándares

Básicos de Competencias en Matemáticas planteados por el MEN no se encuentra claridad sobre como enseñar las razones trigonométricas en dicho nivel, es por esto el deseo de diseñar una unidad didáctica sobre la enseñanza de dicho tema.

Las razones trigonométricas ha sido utilizada a lo largo de la historia para dar solución a distintos tipos de problemas cotidianos. Es por esto, que resulta de gran interés su enseñanza y la implementación en la programación escolar. Mucho se ha cuestionado sobre la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase, sobre la pedagogía, estrategias y herramientas empleadas por el docente para que esta sea una clase motivadora y se genere un aprendizaje significativo y debido a esto, ha habido un gran interés por diseñar propuestas y unidades didácticas, evidenciados en trabajos de grado e investigaciones realizadas; sobre la enseñanza de las razones trigonométricas o trigonometría en el aula de clase.

El "Diseño de una propuesta de aula para enseñar razones trigonométricas en el grado décimo de la I. E. Presbítero Bernardo Montoya Giraldo del municipio de Copacabana Antioquia", de la Universidad Nacional de Colombia es uno de ellos, que se fundamenta en aprovechar las herramientas tecnológicas y software matemáticos que existen hoy en día y con las cuales los jóvenes están tan familiarizados, para enseñar las razones trigonométricas. (Andrade, 2015)

Por otro lado, Martha Isabel Escobar, en su trabajo de grado, hace una propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry, esta propuesta también está encaminada a trabajar de la mano con la tecnología, sin duda una herramienta que incentiva a los estudiantes y que facilita su proceso de enseñanza-aprendizaje. (Escobar, 2012)

De la Universidad de Los Andes, Thania Márquez y Ericson Gutiérrez hacen una propuesta de orientación didáctica dirigida a estudiantes de 4° año de Educación Media General para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas enfocada en el modelo Van Hiele, que consta de cinco fases las cuales buscan promover la participación, creatividad, imaginación e ingenio por parte del estudiante y con ello lograr que él acceda a algún nivel de razonamiento superior al cual presenta actualmente. (Marquez y Gutierrez, 2013)

Otra propuesta, es el diseño de una unidad didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en la educación media utilizando también el Modelo Van Hiele, una propuesta también interesante que consta de varias actividades que constituyen una unidad didáctica enfocada en dicho modelo. (Peña y Vargas, 2015)

En las propuestas anteriores se evidencia los diferentes enfoques o modelos que se han llevado a cabo para el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre razones trigonométricas. Dichas propuestas son de gran importancia porque ofrecen variedad de elementos que se pueden implementar tanto en el desarrollo personal de los docentes como el de los estudiantes, además de cooperar en el proceso educativo de los alumnos.

Con lo anterior, se ratifica también la importancia de las diversas estrategias, metodologías y herramientas que se pueden utilizar en el aula de clase para la enseñanza, en este caso de las razones trigonométricas, pero que así como se aplican en las matemáticas se pueden emplear en las diversas áreas académicas, con el objetivo de generar en los estudiantes un ambiente de motivación y un aprendizaje significativo.

8.3. Análisis disciplinar

Razón

Dados dos números a y b, $b \neq 0$, la razón entre ellos es el cociente $\frac{a}{b}$, que se expresa como fracción simplificada.

Proporción

Una proporción es una igualdad entre dos razones. Las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Semejanza

Dos polígonos son semejantes si existe una correspondencia entre los vértices de tal manera que:
i. Los ángulos correspondientes son congruentes.
ii. Los lados correspondientes con proporcionales.

Razón trigonométrica

Es el cociente entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.

Elementos de un triángulo rectángulo

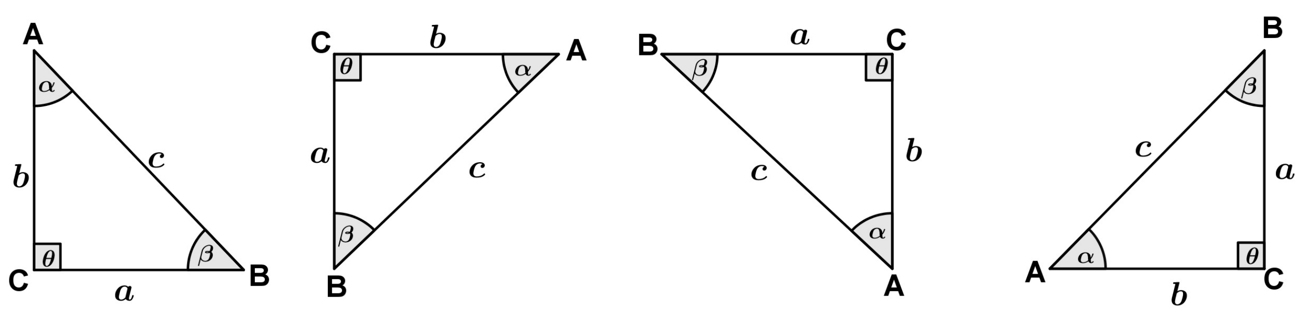
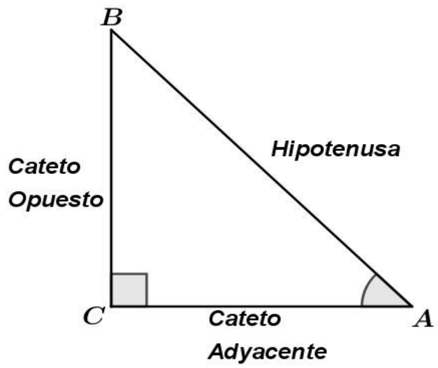


Figura 6: Identificación de los elementos de un triángulo rectángulo

Definición de las Razones Trigonométricas

Las razones de los lados de un triángulo rectángulo se llaman razones trigonométricas. Estas se definen para el ángulo agudo A como se muestra a continuación:



$$Sen\ A = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} \qquad Csc\ A = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto}$$

$$Cos\ A = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} \qquad Sec\ A = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente}$$

$$Tan\ A = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} \qquad Cot\ A = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto}$$

8.4. Enfoque Aprendizaje Activo

Se entiende por estrategia de aprendizaje activo aquella que propicia una actitud activa del estudiante en clase, en contraposición con lo que ocurre en el método expositivo clásico, que el alumno se limita a tomar notas de lo que ve en la pizarra. Es un proceso de aprendizaje participativo que involucra a un pequeño grupo que trabaja en problemas reales, propone acciones y estrategias y donde tanto los miembros individuales como el grupo en su conjunto, aprenden a poner en práctica las soluciones acordadas. (Sierra, 2012-2013).

El aprendizaje activo hace parte de las metodologías activas, que se enfatizan en generar un aprendizaje significativo en el estudiante. Para ello, estas metodologías se centran en el estudiante, pues es él quien debe ser el protagonista de su propio aprendizaje y el profesor hace del rol de guía y orientador para lograr dicho proceso.

Pero fue a finales del siglo XIX y principios del siglo XX cuando se produjo un importante cambio en la educación y pedagogía, que se empezó a introducir nuevos estilos de aprendizaje como critica a la educación tradicional y memorística que se llevaba a cabo hasta ese momento. Las nuevas metodologías buscaban generar en los alumnos un aprendizaje activo, donde este se conectara mas con el mundo real y fuera responsable se su propio aprendizaje. Pues Según Piaget, las principales metas de la educación deben ser crear hombres capaces de innovar cosas nuevas, hombres creadores e inventores; que estén en condiciones de poder criticar, verificar y no aceptar todo lo que se le expone y es por ello la necesidad de formar alumnos activos, creadores de su propio aprendizaje. (Albornoz, s. f.)

Por otro lado, Ausubel en su teoría del aprendizaje significativo, aborda todos los elementos, factores y condiciones que garantizan la adquisición de nuevos conocimientos. Explica que para aprender significativamente, las personas deben relacionar los nuevos conocimientos con los conceptos relevantes que ya conocen, pues el nuevo conocimiento debe interactuar con la estructura del conocimiento del alumno. Esto quiere decir, que en el proceso educativo es importante considerar lo que el individuo ya sabe, de tal manera que establezca una relación con aquello que deba aprender. (Guerri, s. f.)

Estos dos autores representativos del aprendizaje cognitivo, describen los procesos, las condiciones y los factores que influyen para que haya un buen aprendizaje. El aprendizaje activo pretende aumentar la capacidad de reflexión en el estudiante donde este pueda proponer y construir y así generar hombres críticos, como bien lo dice Piaget, ya que con el aprendizaje activo los estudiantes dejan de ser espectadores simplemente, para ser participes de la construcción de nuevos conocimientos, adquieren un mayor compromiso con las actividades y están preparados para transferir lo que han aprendido a problemas y escenarios nuevos.

De esta manera, el aprendizaje activo debe ser una metodología empleada por el docente en las aulas de clase con el fin de producir cambios benéficos en la educación, pues se trata de una nueva propuesta para enseñar y aprender, distinta a la tradicional, donde el único interés se centre en el estudiante, pues es este quien debe ser el protagonista en el proceso de aprendizaje y no el profesor como se acostumbra a ver.

9. Análisis Cognitivo

9.1. Obstáculos Didácticos

Los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza y por lo tanto se le atribuyen al docente, pues a la hora de enseñar, el profesor debe buscar diversas estrategias y recursos que le permitan al estudiante asimilar la información de la manera mas sencilla. Hoy en día hay muchas herramientas que pueden facilitar la enseñanza de conceptos matemáticos, además de haber nuevas formas para enseñar y las cuales genera en el estudiante un aprendizaje significativo.

Para las razones trigonométricas se puede hacer uso de diferentes recursos para mostrar las características de un triángulo rectángulo y no quedarse sólo con la explicación del tablero, la tecnología es uno de los recursos que resulta mas atractivo para los estudiantes y el cuál les genera más motivación a la hora de aprender. El uso de aplicaciones o software matemáticos son una gran herramienta tecnológica que ayudan en el proceso de enseñanza- aprendizaje del estudiante.

9.2. Obstáculos Epistemológicos

La noción de obstáculo epistemológico fue acuñada por el filósofo francés Gastón Bachelard para identificar y poner de manifiesto elementos psicológicos que impiden o dificultan el aprendizaje de conceptos de las diferentes ciencias.

Los obstáculos epistemológicos son parte del proceso de aprendizaje y no sólo se deben evitar, sino que se deben enfrentar porque juegan un papel muy importante en la adquisición del nuevo conocimiento. Se refieren a las dificultades propias de los conceptos, en este caso, la dificultad de identificar las características y los elementos de un triángulo rectángulo y las propiedades para que dos triángulos sean semejantes, ya que esta dificultad hace que sea muy complicado el hecho de entender como se forman las razones trigonométricas.

Resulta difícil establecer la diferencia entre el cateto opuesto y adyacente, lo que causa en el estudiante una confusión al momento de formar la razón tangente y cotangente. También, el hecho de cambiar del lenguaje coloquial a lenguaje matemático resulta un obstáculo en su proceso de aprendizaje, como por ejemplo, pasar de decir el lado largo del triángulo a reconocerlo como hipotenusa.

9.3. Obstáculos Ontogenéticos

Los obstáculos ontogenéticos provienen de condiciones genéticas específicas de los estudiantes. Los conocimientos previos insuficientes es una de ellas, llegan con muchos vacíos, los cuales necesitan ser ocupados de saberes necesarios para la adquisición de nuevos conocimientos.

Por ejemplo para iniciar con el tema de razón trigonométrica se debe saber las características de un triángulo rectángulo, cosa que muchos estudiantes aun no saben y lo que dificulta aprender lo que es una razón trigonométrica. Otra, es la motivación, pues es un factor importante que influye a la hora de aprender, es por esto la necesidad del docente de emplear una forma diferente de enseñar y recursos, herramientas y estrategias que llamen la atención del estudiante frente a dichos saberes matemáticos, pero no sólo el docente es un agente que influye en la motivación que el estudiante deba tener para un buen desarrollo en su proceso de aprendizaje, pues también los padres influyen en dicho proceso, ya que como bien lo dice (Illinois, 2017) "Cuanto más involucrados se encuentren los padres en la educación de sus hijos, mucho más seguro será que los niños tengan éxito en la escuela y en su vida".

9.4. Obstáculos Tecnológicos

La tecnología siempre va a ser un recurso indispensable e innovador en el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que hoy en día el uso de las TIC's son de gran atractivo para los estudiantes, ya que generan motivación y despierta el interés por parte de él y es una herramienta que permite acceder a gran cantidad ilimitada de información. Sin embargo, para algunos docentes resulta complicado el hecho de aprender a utilizar programas matemáticos que facilitan la adquisición de nuevos conocimientos, como por ejemplo, la aplicación de Geogebra, por medio del cual se pueden construir diferentes polígonos, entre esos los triángulos y estudiar sus características, pero así como el Geogebra también se encuentra el Cabri, un programa geométrico que también resulta muy útil para la enseñanza de dicho concepto. Sin embargo, se debe reconocer que todo software tiene sus ventajas y limitaciones y sino se tiene en cuenta estos aspectos del software hay una gran probabilidad de que el aprendizaje no alcance los resultados obtenidos.

9.5. Análisis Metodológico

En la Tabla 5 a continuación, se relaciona los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional para los grados octavo-noveno que hacen referencia a los conocimientos sobre razones trigonométricas y la Tabla 6 ilustra la Matriz de Referencia de Matemáticas, según los componentes y competencias que evalúa el ICFES en el grado noveno relacionados con las razones trigonométricas y que se tuvo en cuenta para la elaboración de las preguntas de la prueba diagnóstica.

NUMÉRICO	ESPACIAL	VARIACIONAL
•Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	•Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	•Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
	•Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).	•Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
	•Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.	•Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
	•Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	

Tabla 5: Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del grado noveno

COMPONENTE Y COMPETENCIA	COMUNICACIÓN	RAZONAMIENTO	RESOLUCIÓN
ESPACIAL MÉTRICO	•Identificar relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia.	•Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanzas entre figuras bidimensionales	•Resolver y formular problemas usando modelos geométricos.
	•Diferenciar magnitudes de un objeto y relacionar las dimensiones de este con la dimensión de las magnitudes	•Analizar la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	
NUMÉRICO VARIACIONAL	•Identificar expresiones numéricas y algebraicas equivalentes	•Interpretar y usar expresiones algebraicas equivalentes.	•Resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.
	•Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación	•Usar representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	•Resolver problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.
		•Utilizar propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas.	
		•Verificar conjeturas acerca de los números reales usando procesos inductivos y deductivos desde le lenguaje algebraico.	

Tabla 6: Matriz de Referencia de Matemáticas

10. Diagnóstico

Para determinar los conocimientos previos de los estudiantes de los grados 904 y 905, se aplicó una prueba diagnóstica en forma escrita, basada en los componentes y competencias que se estudian en las razones trigonométricas.

Dicha prueba consta de 26 preguntas (ver la prueba diagnóstica en el Anexo A), que fueron seleccionadas de las Pruebas Saber 9° de matemáticas realizadas en los años 2015 y 2016. Cada pregunta evaluaba el nivel de desempeño en el que se encontraba el estudiante (mínimo, satisfactorio, avanzado). Cabe aclarar, que el estudiante que no respondiera correctamente las preguntas de nivel de desempeño mínimo, automáticamente se encontraba en el nivel insuficiente.

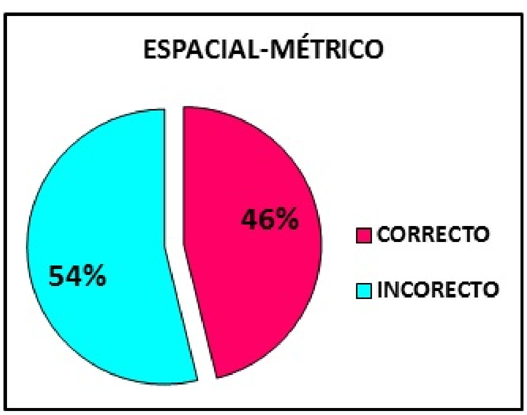
Luego de aplicada la prueba en los dos grupos (904° y 905°), se procedió a realizar una base de datos con los resultados de las pruebas y de ahí un análisis estadístico por factores para observar el desempeño que tuvieron los dos grados.

A continuación se presentan los resultados de la prueba diagnóstica de los dos grados (ver base de datos con los resultados de la prueba diagnóstica en el Anexo B).

RESULTADOS SEGÚN LOS COMPONENTES EVALUADOS EN LOS GRADOS 904 Y 905

COMPONENTE	CORRECTO (%)	INCORRECTO (%)
ESPACIAL-MÉTRICO	46	54
NUMÉRICO-VARIACIONAL	44	56

Tabla 7: Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica del grado 904 según los componentes



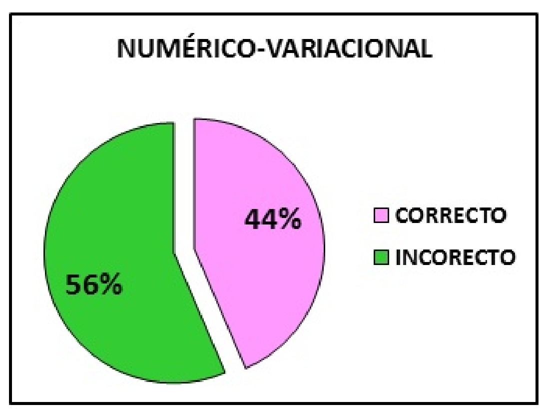


Figura 7: Gráfica de los resultados de la prueba diagnóstica del grado 904 según los componentes

El 46 % de los estudiantes del grado 904 respondió correctamente las preguntas del componente espacial-métrico y el 54 % respondió incorrectamente.

El 44 % de los estudiantes del grado 904 respondió correctamente las preguntas del componente numérico-variacional y el 56 % respondió incorrectamente.

COMPONENTE	CORRECTO (%)	INCORRECTO (%)
ESPACIAL-MÉTRICO	68	32
NUMÉRICO-VARIACIONAL	58	40

Tabla 8: Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica del grado 905 según los componentes

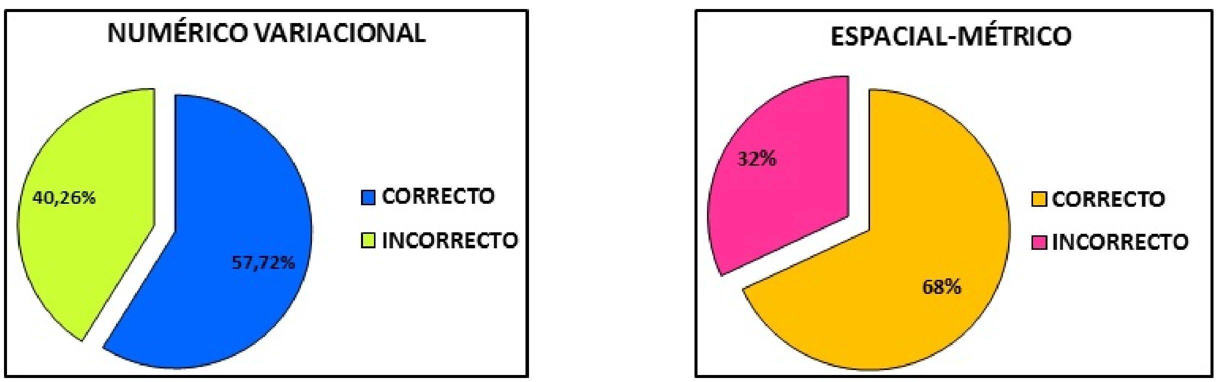


Figura 8: Gráfica de los resultados de la prueba diagnóstica del grado 905 según los componentes

En el componente Espacial-Métrico, el 68 % de los estudiantes de 905 respondió correctamente y el 32 % incorrectamente.

En el componente Numérico-Variacional, el 58 % de los estudiantes de 905 respondió correctamente y el 40 % incorrectamente.

RESULTADOS SEGÚN LOS NIVELES DE DESEMPEÑO DE LOS GRADOS 904 Y 905

NIVEL DE DESEMPEÑO	GRADO 904 (%)	GRADO 905 (%)
INSUFICIENTE	4	3
MÍNIMO	21	16
SATISFACTORIO	54	57
AVANZADO	21	25

Tabla 9: Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica según el nivel de desempeño en los grados 904 y 905

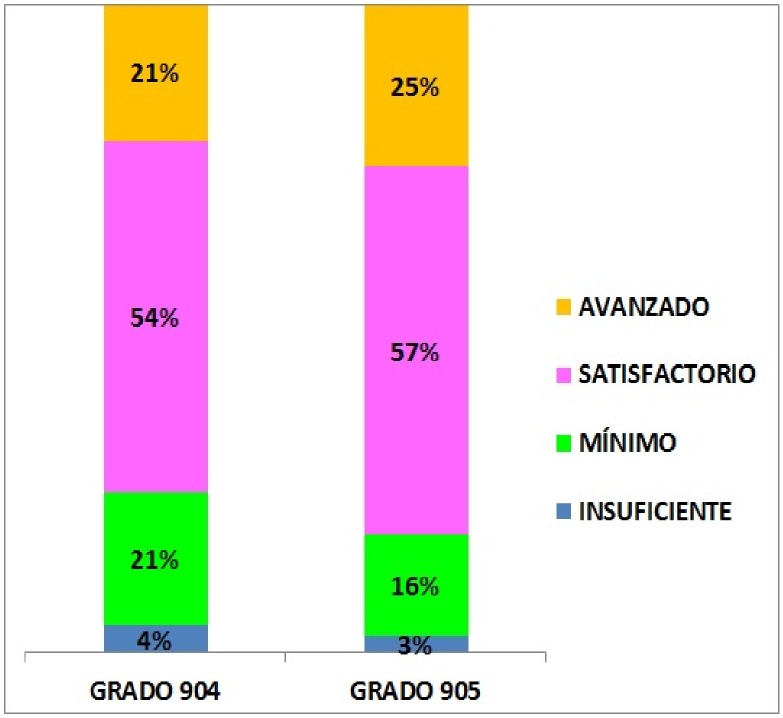


Figura 9: Comparación de los niveles de desempeño entre los grados 904 y 905

En el curso 904, el 4 % de los estudiantes se ubica en el nivel insuficiente, lo cual quiere decir que no superan las preguntas de menor complejidad de la prueba. A su vez, el 21 % de los estudiantes del curso 904 se encuentra en el nivel mínimo de desempeño, el 54 % en el nivel satisfactorio y el 21 % se encuentra en el nivel avanzado de desempeño.

En el curso 905, el 3 % de los estudiantes del grado 905 se ubicó en el nivel insuficiente, lo cual quiere decir que no superan las preguntas de menor complejidad de la prueba. A su vez, el 16 % de los estudiantes del curso 905 se encuentra en el nivel mínimo de desempeño, el 57 % en el nivel satisfactorio y el 25 % se encuentra en el nivel avanzado.

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS COMPONENTES Y NIVELES DE DESEMPEÑO EVALUADOS EN LOS GRADOS 904 y 905

GRADO	CORRECTO (%)	INCORRECTO (%)
904	45	55
905	62	37

Tabla 10: Análisis comparativo de los resultados de la prueba diagnóstica entre el grado 904 y 905

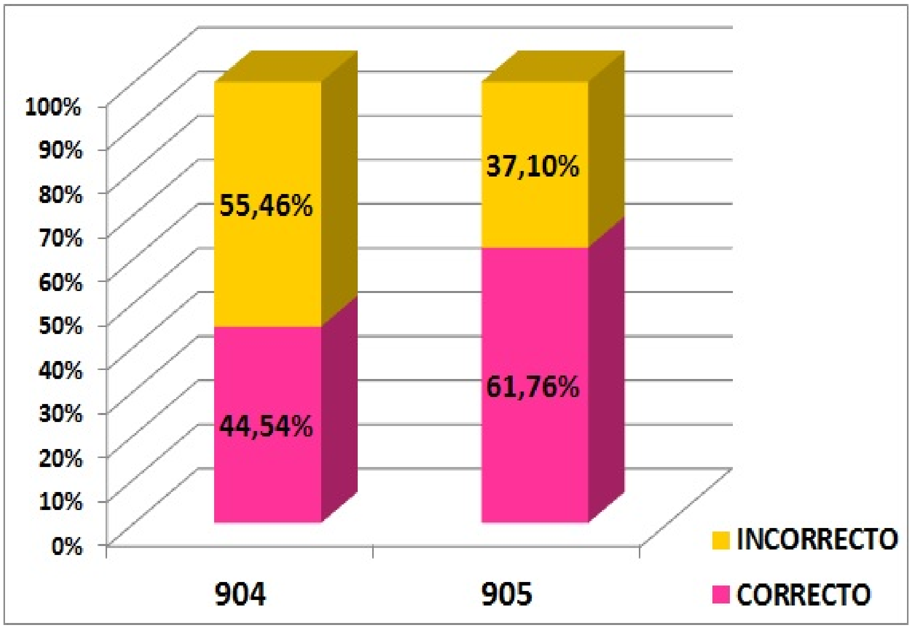


Figura 10: Gráfica comparativa de los resultados de la prueba diagnóstica entre los Grados 904 y 905

Según el análisis estadístico que se realiza, para los componentes y los niveles de desempeño evaluados en la prueba diagnóstica, hubo un mejor desempeño por parte de los estudiantes del grado 905.

11. Actividades

11.1. Actividad 1

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

NOMBRE: ______________________________ GRADO: ____________

***OBJETIVO*:** Comprender la razón y la proporción a través de la semejanza de figuras y desde el punto de vista práctico

Entre los edificios más altos de la ciudad de Neiva se encuentran el edificio del Banco Agrario, ubicado en el centro de la ciudad y la Catedral de la Inmaculada Concepción que también se encuentra situada en el centro.

(a) Catedral

(b) Banco Agrario

1. PREDICCIONES INDIVIDUALES

Pero para saber cuál es el edificio más alto entre ellos, se debe determinar su altura.

¿Cómo crees que determinarías la altura de estos edificios?

____

____

____

¿Utilizarías alguna estrategia o algún método matemático para determinar la altura de los edificios? Descríbela

¿Se te ocurre aplicar algún teorema para determinar su altura?

Socializa lo anterior con dos compañeros del salón, llegando a consensos y compartiendo la información en el salón cuando el docente lo indique.

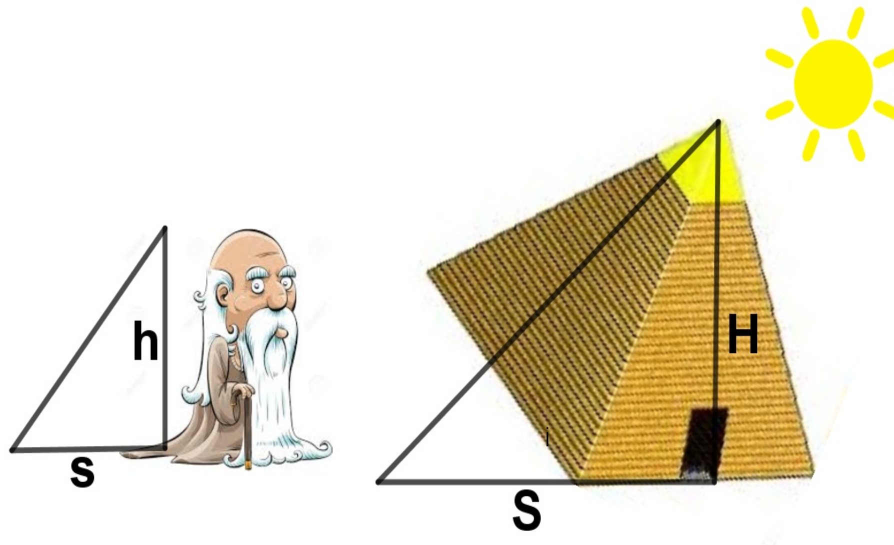
¡Echando un vistazo a la historia de Tales!

Se cuenta que el matemático Tales de Mileto (siglo VI a.C.), utilizando la semejanza de triángulos y su ingenio resolvió dos problemas nada sencillos en su época.

El primero de ellos:

Tales calculó la altura de la gran pirámide de Keops, situada en Giza, la más antigua de las siete maravillas del mundo. El gran sabio pensó que en el momento que su sombra midiese lo mismo que él, los rayos del Sol formarían un grado de 45 grados con la cima de la pirámide y con su cabeza. Y por tanto, en ese preciso instante la altura de la pirámide sería igual a la sombra de la misma.

Sea s la longitud de la sombra, h la altura de Tales, S la longitud de la sombra de la pirámide y H la altura de la pirámide, en el momento que $s = h$, los rayos del Sol formarán un ángulo de *45 grados* en la cabeza de Tales y con la cima de la pirámide (al ser los rayos del Sol paralelos entre sí). Por tanto, en ese mismo momento $H = S$.



Como estamos mirando triángulos semejantes, midiendo la sombra de la pirámide (S), conoceremos su altura (H), que será la misma.

$$\boxed{\frac{s}{h} = \frac{S}{H}}$$

De esa manera, Tales pudo conocer la altura de la pirámide (H), pues el resto de datos ya los conocía.

2. EXPERIMENTANDO:

Así como Tales pudo hallar la altura de esa Gran pirámide de Giza, junto a un compañero podrás elegir una edificación para hallarle su altura. Para ello, con la ayuda de un metro deberás medir la sombra de la edificación (S), altura del compañero (h) y sombra del compañero (s) y con esos datos, aplicando el Teorema de Tales calcularás la altura de la edificación (H). Luego, comprueba con el metro midiendo la altura real de la edificación que escogiste. ¿Qué concluyes?¿Fueron correctas tus predicciones?

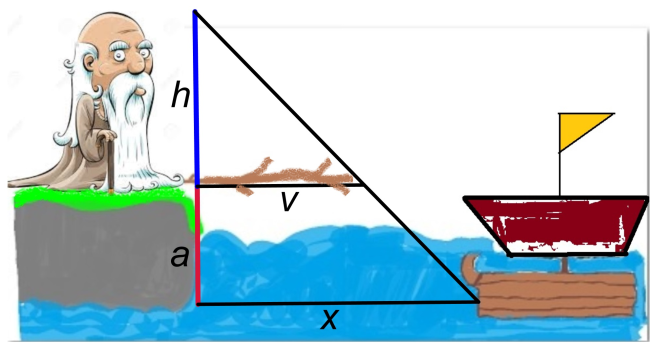
Puedes darte cuenta que el problema anterior se pudo resolver por medio de la semejanza de triángulos. De ahí surge el primer teorema de Tales que dice lo siguiente: ***"Si en un triangulo se traza una linea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triangulo que es semejante al triángulo dado"***

Este Teorema resulta muy útil a la hora de resolver problemas semejantes a los anteriores.

Ejemplo:

¿Cómo haría usted para calcular la distancia? ¿Se le ocurre alguna idea?

Cuando la ciudad de Mileto, situada en la costa griega, iba a ser atacada por los barcos enemigos, los soldados recurrieron a Tales. Necesitaban saber a que distancia se encontraba una nave para ajustar el tiro de sus catapultas. El genio matemático resolvió el problema sacando una vara por la cornisa del acantilado, de tal forma que su extremo coincidiera con la visual del barco. Conociendo su altura (h), la del acantilado (a) y la longitud de la vara (v), calculó sin dificultad la distancia deseada (x).



Observa que se forman dos triángulos semejantes de tal forma que al ser sus lados proporcionales, podemos establecer la siguiente igualdad.

$$\frac{h}{v} = \frac{(a+h)}{x}$$

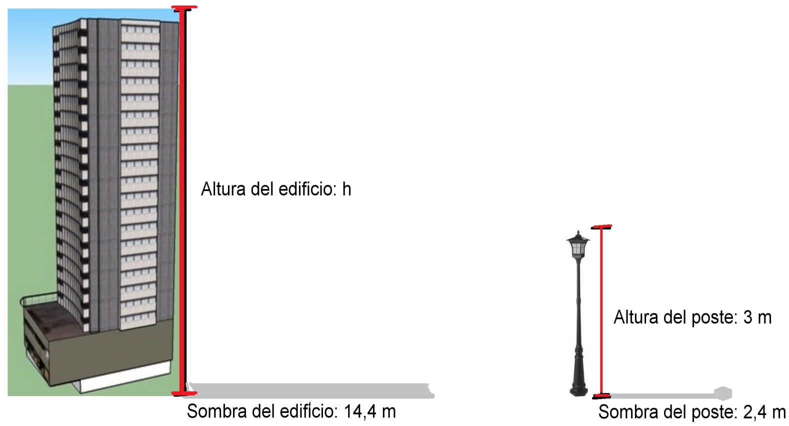
De esta forma, Tales consiguió calcular el valor de la distancia x. El resto de datos ya los conocía.

3. AFIANZAMIENTO

¡SOLUCIONANDO PROBLEMAS A PARTIR DEL TEOREMA DE TALES!

Conocido el Teorema de Tales, resuelve los siguientes problemas que se presentan a diario en la vida cotidiana.

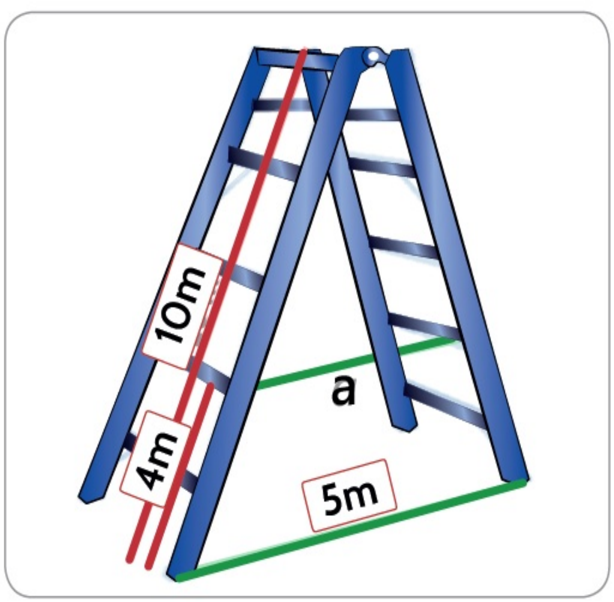
a) Calcular la altura de un edificio, sabiendo que su sombra mide $14,4m$ y que, en ese mismo instante, un poste vertical de $3m$, proyecta una sombra de $2,4m$.



Realiza el dibujo de los triángulos que forman el edificio y el poste con sus respectivas sombras y soluciona el problema, teniendo en cuenta que:

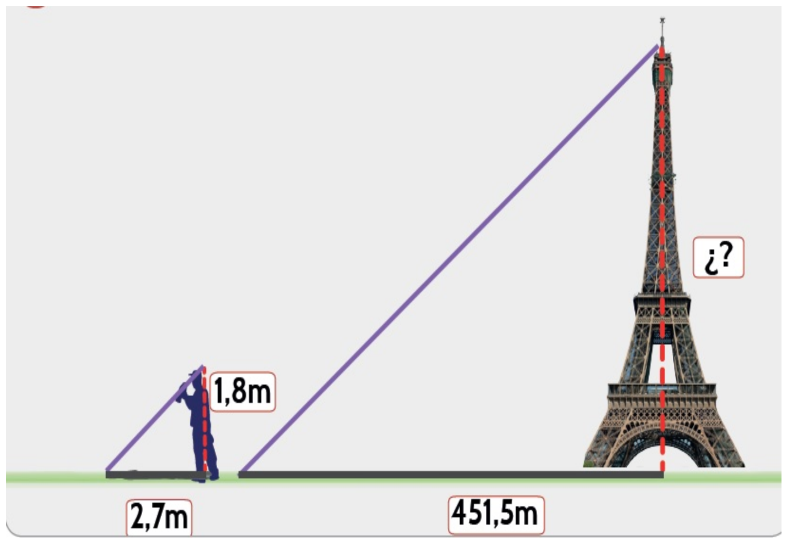
$$\frac{\textit{Altura del poste}}{\textit{Altura del edificio}} = \frac{\textit{Sombra del poste}}{\textit{Sombra del edificio}}$$

b) Francisco quiere pintar las paredes de su casa y para ello utiliza la escalera que se muestra al lado derecho. Calcula la distancia de apertura en el segundo escalón, teniendo en cuenta los datos que se muestran en la imagen.



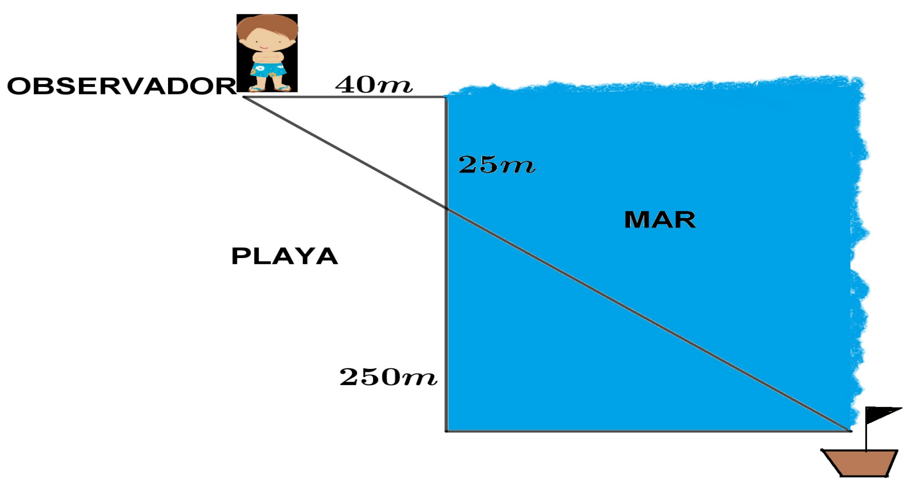
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G$_8$/$M/SM/SM_{MG}08_U04_L01.pdf$

c) Utiliza la siguiente imagen y los datos propuestos para escribir un problema que se solucione aplicando el teorema de Tales. Luego socialízalo y soluciónalo con tus compañeros.



http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/ContenidosAprender/G$_8$/$M/SM/SM_{MG}08_U04_L01.pdf$

d) Un observador acostado sobre la playa, ve un barco anclado fuera de la costa. De acuerdo con los datos que se muestran en la figura ¿A qué distancia está el barco de la costa?¿Y el observador de la costa?



11.2. Actividad 2

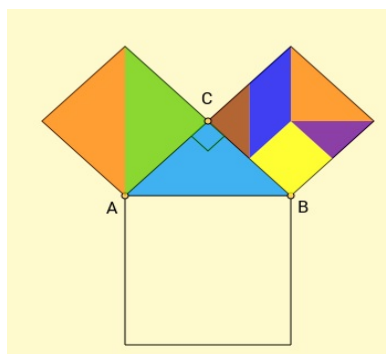
UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

NOMBRE: ______________________________ GRADO: __________

***OBJETIVO*:** Estudiar las características de los triángulos rectángulos por medio de actividades.

El tangram Chino es un juego tradicional chino muy antiguo que consiste de siete piezas (un paralelogramo, un cuadrado y cinco triángulos) que hay que ordenar para lograr diseños específicos.

Observa la siguiente figura.



1. PREDICCIONES INDIVIDUALES Y GRUPALES

En la figura anterior, ¿es posible ubicar todas las piezas del tangram chino en el cuadrado grande? Si crees que es posible, hazlo.

____

¿Crees que existe alguna relación entre los cuadrados pequeños y el cuadrado grande?

____

____

Si tu respuesta es afirmativa ¿cuál es tu conjetura?

____

____

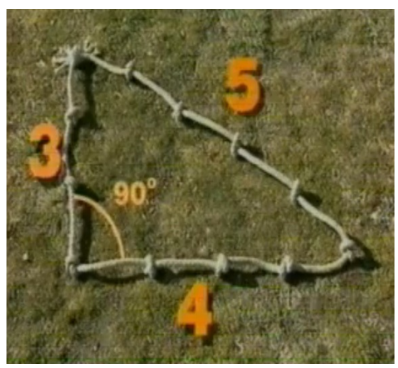
____

2. EXPERIMENTANDO

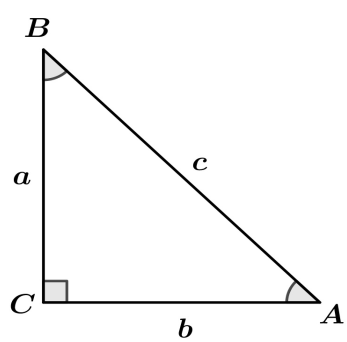
Por medio del software matemático GeoGebra, verificamos si las piezas que conforman el tangram chino que están ubicadas en los cuadrados pequeños, pueden situarse en el cuadrado grande. ¿Qué puedes observar con respecto a los cuadrados pequeños y el cuadrado grande, por medio de las figuras del tangram chino? ¿Cómo es el área del cuadrado grande con respecto a los cuadrados pequeños? ¿Que puedes concluir acerca de esta experimentación?¿Fueron ciertas tus predicciones?

Triángulo Sagrado Egipcio y el Teorema de Pitágoras

El triángulo sagrado egipcio es un triángulo rectángulo cuyos lados tienen las longitudes 3, 4 y 5, lo que lo hace el triángulo más fácil de construir. Dicho triangulo servía como base para la construcción de grandes pirámides egipcias, guardando proporcionalidad entre ellos y posiblemente, se utilizó para obtener ángulos rectos en las construcciones arquitectónicas desde la más remota antigüedad. En aquella época ese triángulo se formaba tomando una cuerda y haciéndole una serie de nudos de tal modo que quedaran determinada en ella 12 partes iguales, con la cuerda se formaba el triangulo cuyos lados fuesen 3, 4 y 5.



Si nombramos al triángulo sagrado egipcio, algunos elementos como estos:



De esta manera, a es el *cateto opuesto*, b el *cateto adyacente* y c que es el lado opuesto al ángulo recto, es la *hipotenusa*.

La mayoría de las pirámides de Egipto incorporan de alguna manera este triángulo rectángulo en su construcción, verificando el famoso *Teorema de Pitágoras*

El triángulo Sagrado Egipcio como es rectángulo, cumple con dicho teorema y lo hace especial porque es el único triángulo en el que sus medidas son tres números enteros consecutivos. Siendo a y b los catetos y c la hipotenusa, lo que nos dice el teorema de Pitágoras es que:

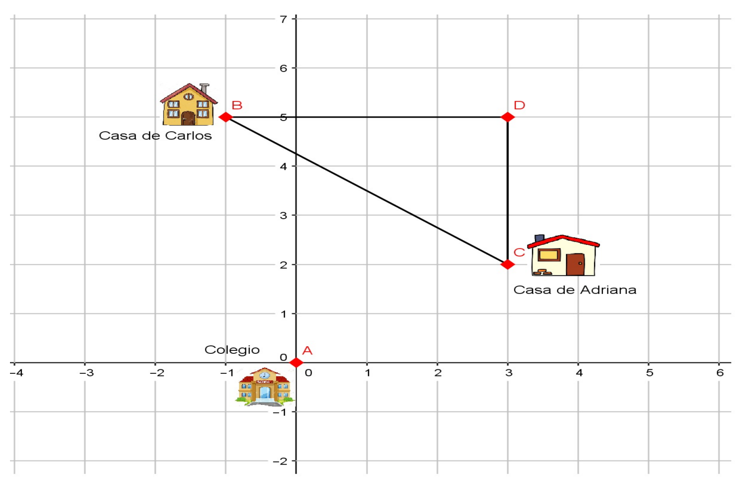
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Relacionando la experimentación y el relato histórico, completa:

El Teorema de ____________: “En todo triángulo ____________, el cuadrado de la longitud de la ____________ es igual a la ______ de los cuadrados de las respectivas longitudes de los ____________ ”

EJEMPLO:

Hallar la distancia que hay entre la casa de Adriana y la de Carlos, sabiendo que cuando ambos salen del colegio para sus casas, Adriana tiene que caminar $3km$ hacia el Este y $2km$ hacia al Norte y Carlos debe caminar $1km$ hacia al Oeste y $5km$ al Norte.



Solución:

Para la solución de este problema, se puede proponer una representación gráfica en un plano coordenado, en donde el colegio sea el punto de origen $(0,0)$, la casa de Carlos sea el punto $(-1,5)$ y la casa de Adriana sea $(3,2)$.

Luego utilizamos el Teorema de Pitágoras, pues en el triángulo que se forma podemos establecer las siguientes relaciones:

1. La distancia de $BD = 4$
2. La distancia de $CD = 3$

La distancia por averiguar resulta ser en el triángulo rectángulo la hipotenusa, entonces para hallar su medida aplicamos el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
(BC)^2 &= (BD)^2 + (CD)^2 \\
(BC)^2 &= 4^2 + 3^2 \\
(BC)^2 &= 16 + 9 \\
BC &= \sqrt{25} \\
BC &= 5
\end{aligned}
$$

Respuesta: La distancia que existe entre la casa de Adriana y la de Carlos es de $5km$

3. AFIANZAMIENTO

3.1. Lee los siguientes enunciados y determina cuáles de ellos representan características de los triángulos rectángulos. Para ello marca con V si el enunciado es verdadero y F si el enunciado es falso.

a. Las medidas de sus lados son iguales ( )

b. La suma de la medida de dos de sus ángulos es 90° ( )

c. Sus tres ángulos tienen igual medida. ( )

d. Tienen un ángulo recto. ( )

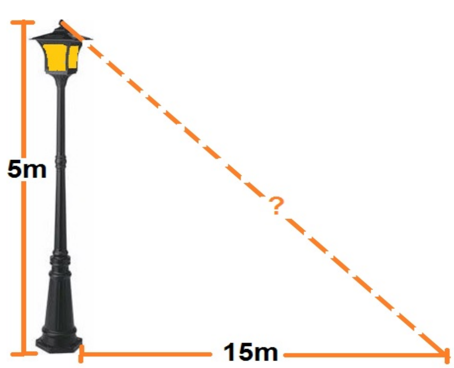
e. Uno de sus lados mide igual a la suma de los otros dos lados.( )

f. El ángulo de 90° es formado por los dos lados de menor longitud llamados catetos. ( )

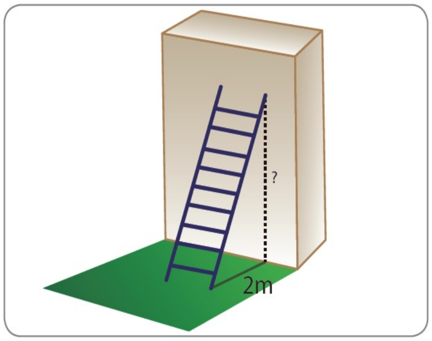
g. El lado de mayor longitud llamado hipotenusa es siempre el lado opuesto al ángulo recto. ( )

3.2. Soluciona los siguientes problemas a partir del Teorema de Pitágoras.

a) Un poste tiene una altura de 5m. ¿Cuánto medirá un cable de tensión que va de la punta más alta del poste anclado al piso y separado 15m de la base del poste?

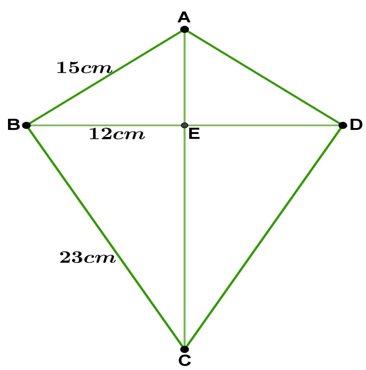


b) Se tiene una escalera de 6m recostada a una pared y separada de ella 2m. ¿Cuánto es la altura de la pared que cubre la escalera?



http://aprende.colombiaaprende.edu.co/

c) Observa la figura con atención.¿Cuánto mide la diagonal mayor de la figura, es decir el segmento AC?



e) Realiza el bosquejo de la siguiente situación y calcula el resultado de solicitado. Un faro de 25 m de alto, proyecta una luz que cae sobre el mar a unos 200 m de la base de este. ¿Cuál es el largo del rayo de luz proyectado por el faro?

11.3. Actividad 3

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

NOMBRE: __________________________________ GRADO:____________

***OBJETIVO*:** Estudiar las razones trigonométricas por medio de la práctica.

Observa las siguientes escuadras que utilizas en el salón de clase.

(i) PAREJA 1 (60°)

(j) PAREJA 2 (45°)

1. PREDICCIONES INDIVIDUALES Y GRUPALES

En cada pareja, el lado metrizado de la escuadra grande alcanza 20cm y la pequeña 10cm. Aplicando los conceptos ya trabajados en la actividad 1, sobre razón y proporción; si se miden para el ángulo de 90° la razón entre la hipotenusa y uno de sus catetos en cada una de las parejas de escuadras:

¿Cómo crees que son las razones? Iguales o diferentes. Justifica tu respuesta.

____

____

Socializa lo anterior con los compañeros del salón y el docente, cuando este lo indique.

2. EXPERIMENTANDO

Para la pareja 1 : Las escuadras son de 60°, una en la que el lado metrizado alcance 20cm y la otra 10cm. Si se mide con una regla, la longitud de la hipotenusa y uno de sus catetos de cada una de las escuadras, se tiene que la razón entre estas dos es:

$$Escuadra\ de\ 20cm = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \_\_\_\_\_ \qquad Escuadra\ de\ 10cm = \frac{CatetoOpuesto}{Hipotenusa} = \_\_\_\_\_$$

Para la pareja 2: Las escuadras son de 45°, una en la que el lado metrizado alcance 20cm y la otra 10cm. Si se mide con una regla la longitud de la hipotenusa y uno de sus catetos de cada una de las escuadras, se tiene que la razón entre estas dos es:

$$Escuadra\ de\ 20cm = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \_\_\_\_\_ \qquad Escuadra\ de\ 10cm = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \_\_\_\_\_$$

De acuerdo a los resultados hallados, ¿Qué puedes concluir acerca de ello? ¿Cómo son las razones obtenidas?

EL ORIGEN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En Babilonia y Egipto

El origen de la trigonometría data de hace mas de 2.000 años, cuando los griegos necesitaron métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. Hace mas de 3.000 años los babilonios y los egipcios fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triangulo y *las razones trigonométricas* para efectuar medidas en la construcción de las pirámides. Además de ser utilizada para el avance de la astronomía en el cálculo del tiempo y realización de diferentes tipos de calendarios. Los egipcios fueron los que establecieron el sistema sexagesimal, midiendo los ángulos en grados, minutos y segundos.

Grecia

La historia de la trigonometría en Grecia, se inicia con Hiparco de Nicea, quien fue el padre de la trigonometría. Hiparco construyó una tabla de cuerdas, que equivale a la moderna tabla de senos y con la ayuda de dicha tabla, pudo fácilmente relacionar los lados y los ángulos de todo triángulo plano.

India

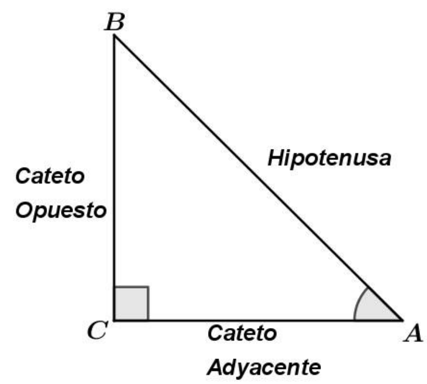
En India se desarrolló un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de en cuerdas, la función seno no era concebida como una proporción tal y como la definimos ahora, sino como la longitud del cateto opuesto a un ángulo de un triángulo rectángulo. Así construyeron diversas tablas para la función seno.

Civilización Árabe

Por otro lado, los matemáticos árabes continuaron el trabajo de la civilización Griega e India, completando la función seno y las otra cinco razones trigonométricas: *Coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante*

DESCUBRIENDO LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Del triángulo rectángulo que representan las escuadras, podemos deducir las razones trigonométricas de la siguiente manera:



$$sen(A) = \frac{CatetoOpuesto}{Hipotenusa} \qquad csc(A) = \frac{Hipotenusa}{CatetoOpuesto}$$

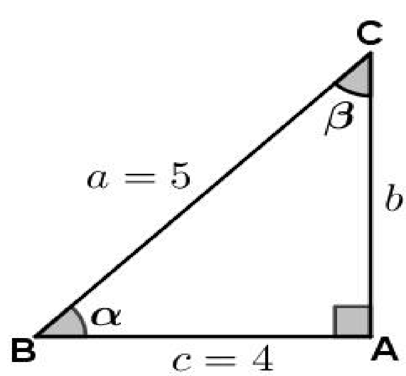
$$cos(A) = \frac{CatetoAdyacente}{Hipotenusa} \qquad sec(A) = \frac{Hipotenusa}{CatetoAdyacente}$$

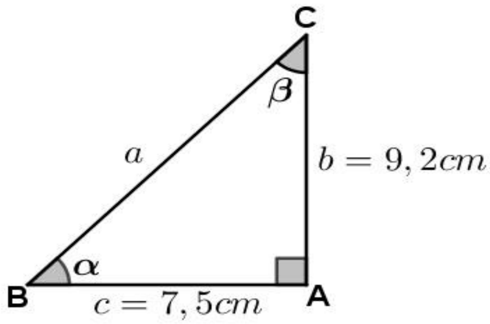
$$tan(A) = \frac{CatetoOpuesto}{CatetoAdyacente} \qquad Cot(A) = \frac{CatetoAdyacente}{CatetoOpuesto}$$

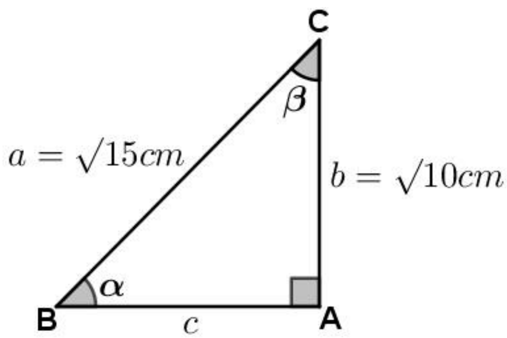
Las razones trigonométricas de un ángulo, son las razones obtenidas entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Es decir, la comparación por su cociente (razón) de sus tres lados a, b y c.

3. AFIANZAMIENTO

a. Hallo las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos rectángulos.







b. De un triángulo rectángulo se sabe que uno de sus ángulo agudos es 40º y que el cateto opuesto a éste mide 10m. Calcula el ángulo y los lados que faltan.

c. En un Triángulo Rectángulo un cateto mide 12 cm y el ángulo agudo, opuesto a dicho cateto mide 30°. ¿Cual es la longitud de su Hipotenusa?

d. Un poste de 6 m de altura es alcanzado por un rayo partiéndolo a una altura "h" del suelo. La parte superior se desploma quedando unida a la parte inferior formando un ángulo de 60º con ella ¿Cuánto mide la parte rota más larga del poste?

e. Calcula la altura de la torre si nuestro personaje está a 7 m de la base de la torre, el ángulo con el que está observando la cúspide es de 60º y sostiene el artilugio a una altura de 1,5 m.

11.4. Actividad 4

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

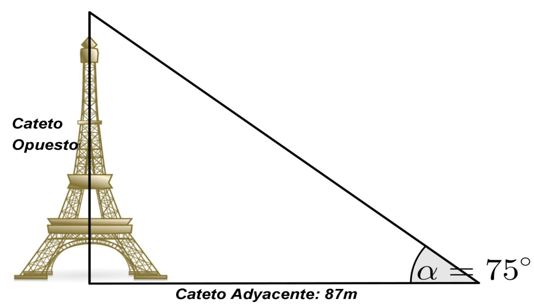
NOMBRE: ______________________________ GRADO: ____________

***OBJETIVO*:** Aplicar las razones trigonométricas en la resolución de problemas.

Utiliza los conceptos aprendidos en las actividades anteriores para la resolución de los siguientes problemas.

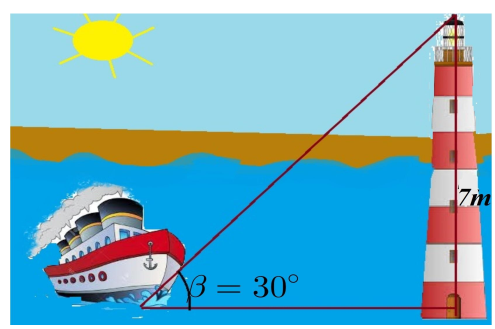
1. ¿Cuál es la altura de la torre?

A) 22.51m
B) 84..3m
C) 23.31m
D) 324.69m



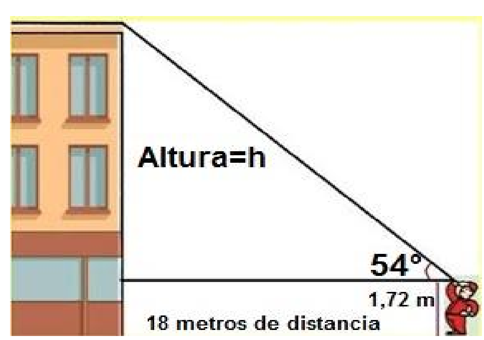
2. ¿Cuál es la distancia del barco a la base del faro?

A) 6.06m
B) 14m
C) 8.08m
D) 12.12m

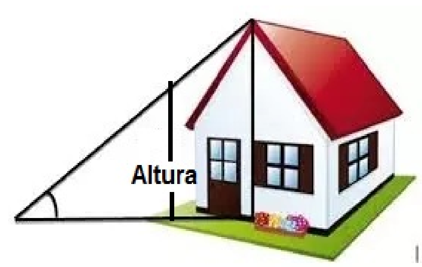


3. Una persona observa en un ángulo de 54° lo alto que es un edificio; si la persona mide $1{,}72m$ y está ubicada a $18m$ de la base del edificio. ¿cuál es la altura del edificio?

A. 24.77m
B. 26.49m
C. 30.22m
D. 46.70m



4. Determina la altura de la casa, si se sabe que el ángulo de elevación mide 42° y la distancia horizontal a la base de la casa es de 5m



A) 4.5m
B) 3.71m
C) 3.34m
D) 5.55m

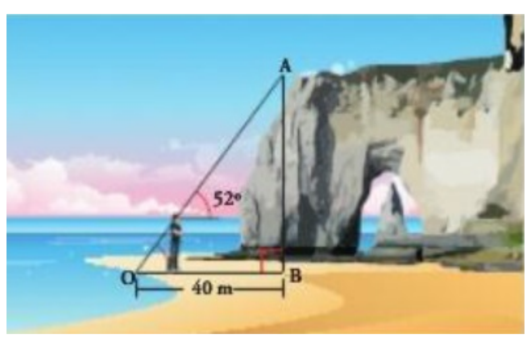
5. Suponiendo que el árbol de la figura mide 10m, y que el hombre está a una distancia de 4m del árbol, encuentra el ángulo de elevación que se forma.

A) 60°
B) 21°
C) 43°
D) 68°

6. Un observador tiene un nivel visual de 1.70 m de altura, y se encuentra a 30 m de una antena (distancia horizontal). Al ver la punta de la antena, su vista forma un ángulo de elevación de 33° ¿Cuál es la altura de la antena?

A) 18m
B) 21.18m
C) 19.48m
D) 26.9m

7. Para medir la altura de un precipicio AB, cuya base se encuentra en un terreno llano y horizontal, un topógrafo fija el punto O, como se muestra en la figura y mide el ángulo AOB y la distancia OB, consiguiendo 52° y 40m, respectivamente. Halla la altura del precipicio.



8. Un arquitecto desea construir la maqueta del conjunto arquitectónico llamado La puerta del sol, ubicado en Madrid. Los dos edificios, de 115 metros de altura, están inclinados 14,3 grados, de forma simétrica con respeto al eje de la Castellana. ¿cuál es la medida de la base de los edificios para realizar el diseño?

12. Resultados de la Evaluación

Por medio de la actividad 4 (ver Anexos) que se aplicó a los dos grados (904° y 905°), se establecieron algunas conclusiones y se evaluó los resultados obtenidos de la unidad didáctica, a través de una comparación de los resultados del curso al cual se aplicó las actividades y del que no.

La Actividad 4 consta de ocho preguntas que ponen en desarrollo las competencias trabajadas en las actividades anteriores para dar solución a problemas sobre razones trigonométricas que era la competencia a desarrollar.

A continuación se presenta el análisis de los resultados. (ver base de datos con los resultados de la evaluación en el Anexo C)

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS RESULTADOS

GRADO	CORRECTO (%)	INCORRECTO (%)
904	71	29
905	20	80

Tabla 11: Análisis de los resultados de la evaluación

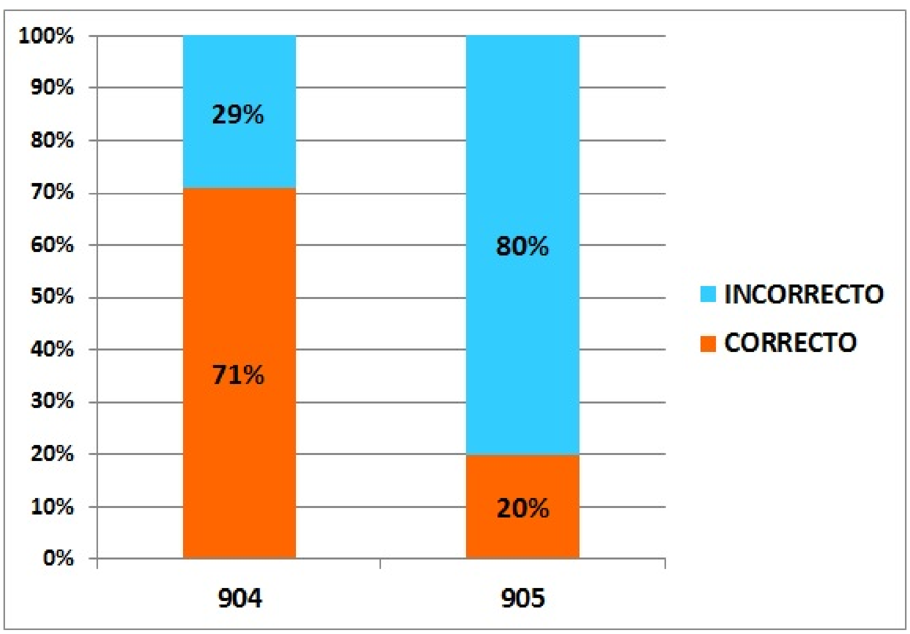


Figura 11: Gráfica de la evaluación de los resultados

Análisis de los resultados de la evaluación:

Según la gráfica, se puede observar que el grado 904 al que se le aplicó las actividades de la unidad didáctica, obtuvo un mejor desempeño que el grado 905 en la actividad que evaluaba lo aprendido sobre razones trigonométricas. Pues en el grado 904, el 71 % de los estudiantes respondió correctamente la actividad y el 29 % incorrectamente, mientras que en el grado 905, el 20 % de los estudiantes acertó en la actividad y el 80 % no acertó.

De esta manera, el grado 904 por medio de la actividad 4 evidenció lo aprendido en las actividades anteriores en relación con dicha competencia, obteniendo un buen desempeño en la actividad que evaluaba los conocimientos a aprender en la unidad didáctica.

Por otro lado, por medio de los resultados de la evaluación de la unidad didáctica, se evidenció que al grado 905 al cual no se aplicó ninguna de las actividades que conforman la unidad, tuvo un desempeño inferior al grado 904, con lo que se puede concluir que la propuesta de enseñanza empleada en la unidad didáctica obtuvo buenos resultados.

Metodología empleada en la Unidad Didáctica

Para la aplicación de la unidad didáctica sobre la enseñanza de las razones trigonométricas al grado 9° a partir del aprendizaje activo, llevada a cabo en la Institución Educativa INEM "Julián Motta Salas", se escogieron los cursos 904 y 905 para llevar a cabo la unidad didáctica. El curso 904 como obtuvo un menor desempeño en la prueba diagnóstica, entonces se llevaron a cabo las actividades que conforman la unidad didáctica, desarrollando de esta manera el concepto de razón trigonométrica a partir de una propuesta de enseñanza diferente: el aprendizaje activo.

Por otro lado, para el curso 905 que obtuvo un mejor desempeño en la prueba diagnóstica, no se aplicaron ninguna de las actividades que hace parte de la unidad didáctica, desarrollando la temática sobre razones trigonométricas a partir de una enseñanza tradicional.

13. Conclusiones

Como docentes es necesario emplear diversas estrategias y metodologías en el aula de clase con el fin de satisfacer las necesidades educativas que presentan los estudiantes y generar en ellos un aprendizaje significativo. El docente debe ser un profesional dispuesto a innovar, a crear y experimentar, con el objetivo de implementar nuevas propuestas o formas para enseñar y sobre todo para incentivar al alumno a adquirir las diferentes competencias, en nuestro caso, que le servirán para la vida.

Es por esto, que este trabajo de grado, para el diseño, aplicación y evaluación de la unidad didáctica que lo conforma sobre la enseñanza de razones trigonométricas en estudiantes de grado noveno, se fundamentó en una propuesta de enseñanza distinta a la tradicional, el aprendizaje activo. Para la elaboración y aplicación de las actividades de la unidad didáctica, se tuvo en cuenta el desarrollo de un aprendizaje activo.

Dicha propuesta fue de gran acogida y logró generar un aprendizaje significativo en los estudiantes a los cuales fueron aplicadas las diferentes actividades de la unidad didáctica, incentivándolos a la construcción de nuevos conocimientos y aprendizajes, tal como el de las razones trigonométricas, donde se combinó la teoría con la práctica, creando un ambiente de motivación e interés por parte de los alumnos, ya que se realizaron actividades diferentes para el desarrollo de dicho concepto matemático, se emplearon distintas estrategias y metodologías basadas en un aprendizaje activo y se evaluaron los resultados obtenidos con las actividades propuestas en dicha unidad didáctica.

Con los resultados de la Actividad 4 que evaluaba la Unidad Didáctica sobre la enseñanza de las razones trigonométricas en el grado 9° a partir del aprendizaje activo, se puede concluir que dicha unidad tuvo buenos resultados y que la propuesta de enseñanza a partir del aprendizaje activo empleada para el desarrollo de las actividades, fue de gran acogida y motivación por parte de los estudiantes, ya que el grado 904 en el que se aplicaron las actividades de la unidad a partir de dicha propuesta de enseñanza, tuvo un mejor desempeño en la evaluación, mientras que el grado 905 en el cual no se llevaron a cabo las actividades que conforman la unidad didáctica ni se empleó la propuesta de enseñanza del aprendizaje activo, tuvo un desempeño inferior.

14. Recomendaciones

Basada en la experiencia que obtuve con el presente trabajo de grado, considero oportuno que los docentes en el proceso de enseñanza tengamos en cuenta los siguientes aspectos con el fin de generar en los estudiantes un aprendizaje significativo:

- Experimentar nuevas propuestas de enseñanza donde el objetivo sea el de generar en los estudiantes un aprendizaje significativo, tal como lo propone el aprendizaje activo.

- Implementar metodologías en las cuales el alumno sea el protagonista de su propio aprendizaje, que sea el estudiante quien construya los nuevos conocimientos a partir de los conceptos previos que posea.

- Para la enseñanza de nuevas competencias en el proceso de aprendizaje, es importante proponer actividades contextualizadas con la realidad y que no se quede solo en teoría, sino que también se complemente con la práctica, pues eso resulta más significativo para los estudiantes.

- Los docentes se deben interesar por diseñar y emplear diversas estrategias y metodologías con el fin de crear un ambiente motivacional y desarrollar en los estudiantes hábitos, compromiso e interés por la adquisición de nuevos conocimientos.

- Aclarar que el presente Trabajo de Grado es más objetivo, ya que la finalidad es hacer un análisis comparativo con todos los cursos del grado noveno y de esta manera evaluar los resultados que genere la Unidad Didáctica para que sean más coherentes, pero en este caso solo se pudo tomar a un curso como referencia para hacer el análisis comparativo y la evaluación correspondiente.

15. Bibliografía

Samper de Caicedo, C. (2008). *Geometría.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Clemens, S. T.; O'Daffer P. G. y Cooney, T. J. (1984). *Geometría con aplicaciones y solución de Problemas.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. E.U.A.

Mateus Vargas, K. A. (2013) *Una propuesta para la enseñanza de la trigonometría y la astronomía, desde los conceptos de razón, ángulo y cuerda, basada en la construcción de las tablas de cuerdas del Almagesto de Ptolomeo.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Sánchez Vázquez, H. J. (2014) *Las funciones trigonométricas seno y coseno a partir de sus aplicaciones.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Castañeda Castro, A. (2011) *Aplicación de estrategias que conduzcan a la comprensión y apropiación de metodologías para la resolución de triángulos de cualquier tipo, en estudiantes de grado décimo.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Caldas.

Andrade Mendoza, O. E. (2015) *Diseño de una propuesta de aula para enseñar razones trigonométricas en el grado décimo de la Institución Educativa Presbítero Bernardo Montoya Giraldo del municipio de Copacabana de Antioquia.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellin, Antioquia.

Escobar Rodríguez, M. I. (2012) *Propuesta didáctica para la enseñanza de la resolución de triángulos con el apoyo del programa Cabri Geometry.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Runza Montaña, G. M. (2013). *Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Márquez, T. y Gutiérrez, E. (2013). *Propuesta de orientación didáctica dirigida a estudiantes de 4TO. año de educación media general para la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas.* Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Peña Medina, C. J. y Vargas Gonzalez, J. C. (2015). *Unidada didáctica para la enseñanza de las funciones trigonométricas en la educaión media utilizando el modelo de Van Hiele.* (Trabajo de pregrado). Universidad de los Llanos, Villavicencio, Colombia.

Andrade Escobar, C. (s. f.) *Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes.* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado en noviembre de 2017 de: http://funes.uniandes.edu.co/5056/1/EscobarObst

Sierra Gómez, H. (2012-2013). *El aprendizaje activo como mejora de las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje.* Universidad Pública de Navarra. Recuperado en noviembre de 2017 de: https://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/9834/TFM

Guerri, M. (s. f.). *La teoría del aprendizaje de Ausubel y el aprendizaje significativo.* [Entrada de blog]. Recuperado en noviembre de 2017 de: https://www.psicoactiva.com/blog/la-teoria-del-aprendizaje-ausubel-aprendizaje-significativo/

Albornoz, M. E. (s. f.) *El aprendizaje según Piaget*. Recuperado en noviembre de 2017 de: https://mayeuticaeducativa.idoneos.com

ThatQuiz. (2017). *Problemas de aplicación de las funciones trigonométricas.* Recuperado en septiembre de 2017 de: https://www.thatquiz.org

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. (2014) *Pruebas Saber Matemáticas* 9°

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. (2015) *Pruebas Saber Matemáticas* 9°

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES. (2016) *Pruebas Saber Matemáticas* 9°

Ministerio de Educación Nacional. (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.*. Recuperado en julio de 2017 de: https://www.mineducacion.gov.co

Ministerio de Educación Nacional. (2016) *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas del Grado* 9°. Recuperado en julio de 2017 de: http://www.colombiaaprende.edu.co

Ministerio de Educación Nacional (s.f.). *Matriz de referencia de Matemáticas.* Recuperado en julio de 2017 de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co

16. Anexos

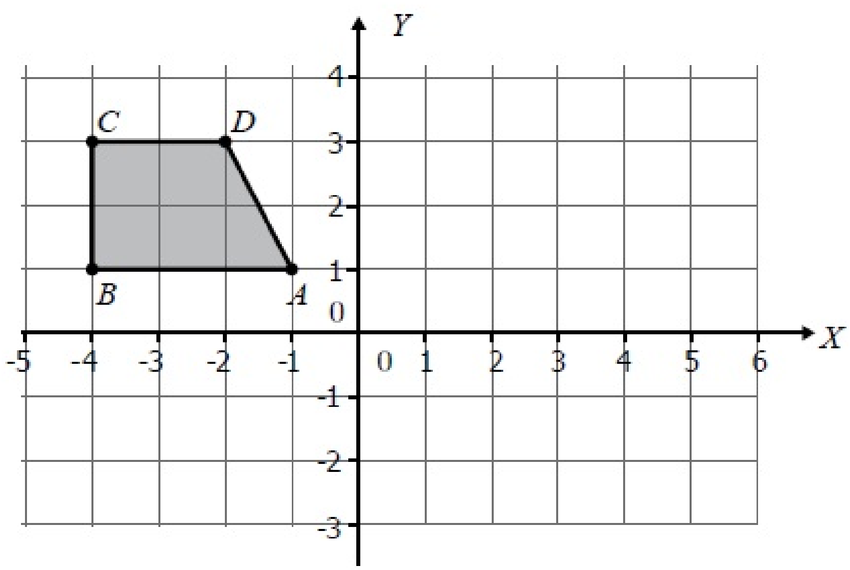
16.1. Anexo A: Prueba Diagnóstica

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE CONCEPTOS PREVIOS
A LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVO: Esta prueba tiene como finalidad evaluar los conceptos previos de los estudiantes del grado noveno en las diferentes competencias matemáticas.

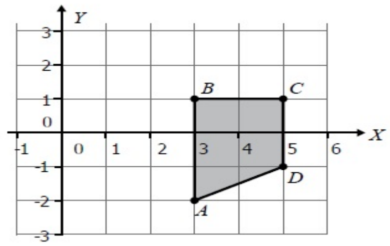
Estudiantes, a continuación encontrarán una serie de preguntas relacionadas con temas vistos anteriormente, las cuales deberán responder con la mayor seriedad posible.

1. Se tiene un cuadrilátero en el siguiente plano cartesiano.

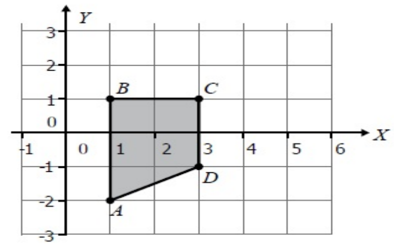


Al trasladar el cuadrilátero 5 unidades hacia la derecha y rotarlo 90 alrededor del punto B en el sentido que giran las manecillas del reloj, la nueva ubicación de la figura es

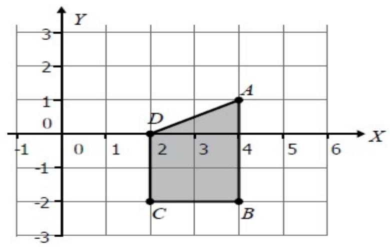
A.



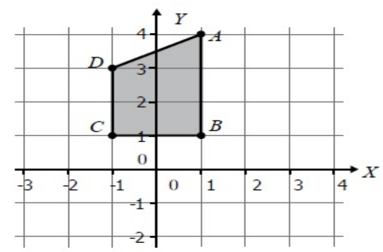
B.



C.

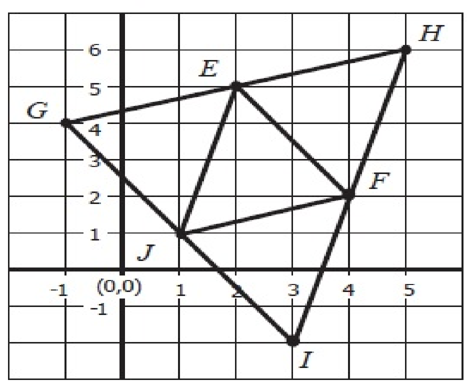


D.



Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Comunicación	Espacial - Métrico	Avanzado

2. En el plano cartesiano que se presenta a continuación se construyó una figura.



¿Cuál de los triángulos que aparecen en la figura tiene vértices en los puntos (1,1), (4,2) y (3,-2)?

A. Triángulo JGE.
B. Triángulo JGH.
C. Triángulo JFE.
D. Triángulo JFI.

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Comunicación	Espacial - Métrico	Satisfactorio

3. En la figura 1 se muestra la propuesta de un diseñador para la cubierta de una revista; en la figura 2 se representan, en un sistema de coordenadas cartesianas, los polígonos que conforman el diseño.


Figura 1

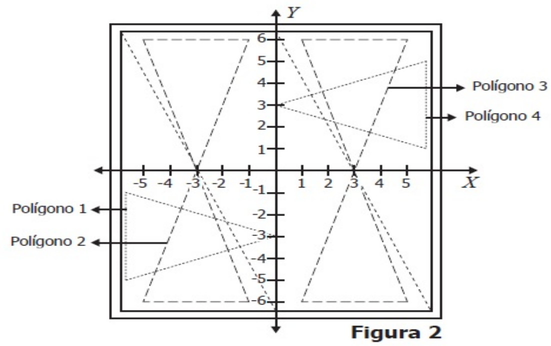


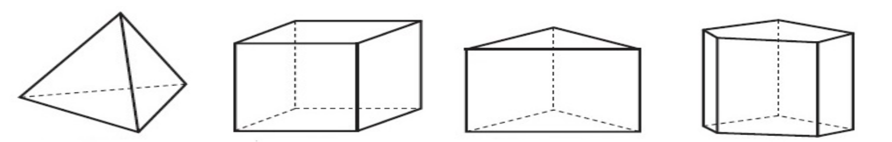
Figura 2

En la figura 2, los puntos (-3, 0), (-5, -6) y (-1,-6) determinan

A. El polígono 1.
B. El polígono 2
C. El polígono 3
D. El polígono 4

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Comunicación	Espacial - Métrico	Satisfactorio

4. ¿Cuál de los siguientes sólidos tiene igual número de vértices que de caras?



A. Tetraedro.
B. Hexaedro.
C. Prisma triangular.
D. Heptaedro.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Comunicación	Espacial - Métrico	Avanzado

5. En un concesionario de autos se utiliza la expresión algebraica $V = P - 1{,}400{,}000x$ para determinar, con base en el valor inicial P de un carro, su valor después de x años en el mercado. ¿Cuál de las siguientes tablas muestra el valor de un carro con valor inicial $P = 20{,}300{,}000$ durante los primeros 3 años en el mercado?

A.

Año	Valor (V)
1	18.900.000
2	18.500.000
3	18.100.000

B.

Año	Valor (V)
1	19.300.000
2	18.300.000
3	17.300.000

C.

Año	Valor (V)
1	20.160.000
2	20.020.000
3	19.880.000

D.

Año	Valor (V)
1	18.900.000
2	17.500.000
3	16.100.000

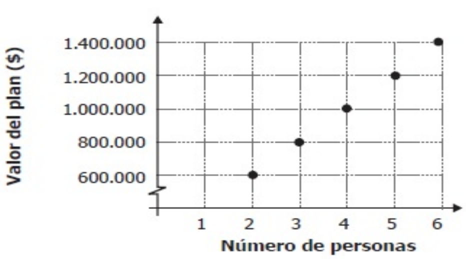
Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Comunicación	Numérico - variacional	Avanzado

6. Una agencia de turismo ofrece los siguientes precios para viajes a un determinado destino, de acuerdo con el número de personas que tomen conjuntamente el plan.

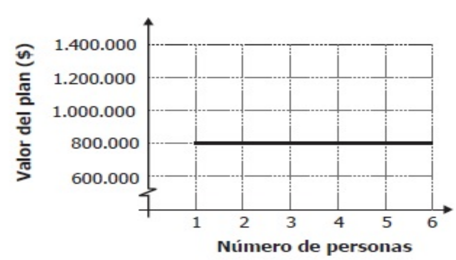
Número de personas	Valor del plan
2	600.000
3	800.000
4	1.000.000
5	1.200.000
6	1.400.000

¿Cuál de las siguientes gráficas representa de manera correcta la relación entre el número de personas y el valor del plan?

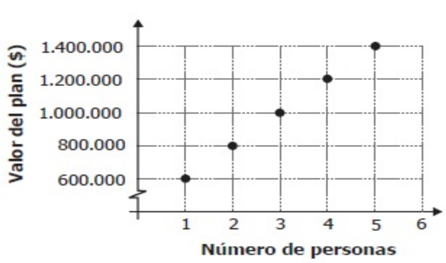
A.



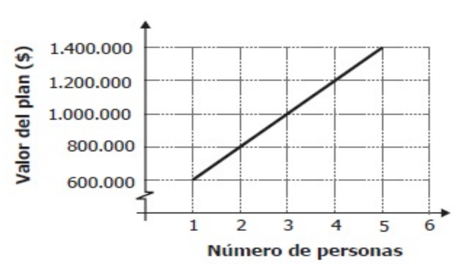
B.



C.

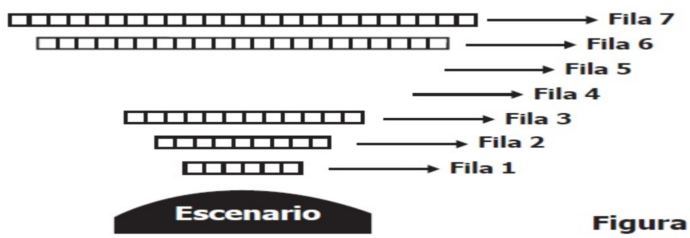


D.



Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Comunicación	Numérico - variacional	Mínimo

7. La figura representa la disposición de las sillas de algunas de las 7 primeras filas de un auditorio. En la figura falta la información de las filas 4 y 5.



La disposición de las sillas determina una secuencia. ¿Cuántas sillas en total hay en las filas 4 y 5?

A. 9
B. 26
C. 33
D. 72

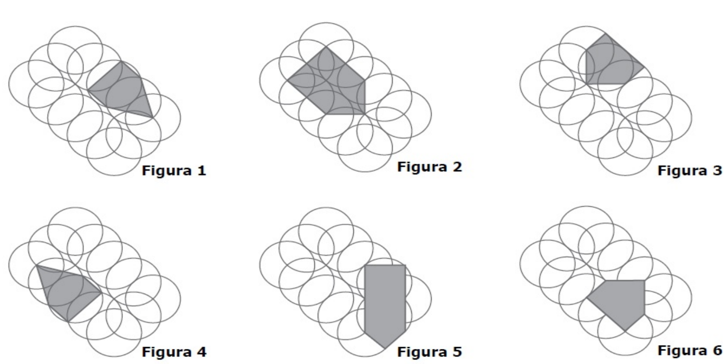
Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Comunicación	Numérico - variacional	Mínimo

8. Cuando en un grupo cada persona abraza a otra del grupo una sola vez, el número total de abrazos, a, se calcula mediante la expresión, $a = \dfrac{n(n-1)}{2}$, donde n es el número de personas en el grupo. ¿Cuál es el valor de a para un grupo de 5 personas?

A. 3
B. 5
C. 10
D. 15

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Comunicación	Numérico - variacional	Satisfactorio

9. En clase de artes, un estudiante de noveno dibujó flechas como se muestra en las figuras 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Todas las circunferencias tienen igual radio.



¿Cuáles flechas son congruentes entre sí?

A. Todas, pues tienen la misma forma y cinco lados rectos.
B. Las flechas 1 y 4, y las flechas 3 y 6, pues entre ellas tienen la misma forma e igual longitud entre sus lados correspondientes.
C. Las flechas 1 y 6, y las flechas 3 y 4, pues entre ellas tienen la misma forma e igual longitud entre sus lados correspondientes.
D. Ninguna flecha es congruente con otra, ya que todas tienen diferente dirección.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Razonamiento	Espacial - Métrico	Satisfactorio

10. Un polígono es convexo si contiene todos los posibles segmentos de recta que se puedan unir entre un par de puntos pertenecientes a su superficie, sin que los segmentos corten un lado o salgan de la figura (ver figura).

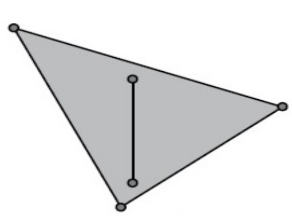


Figura 1. Polígono convexo

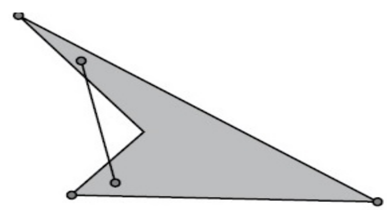
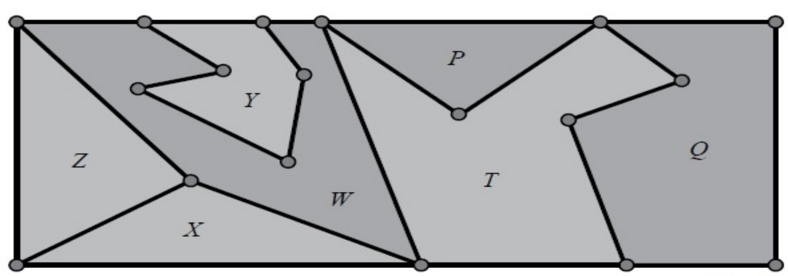


Figura 2. Polígono no convexo

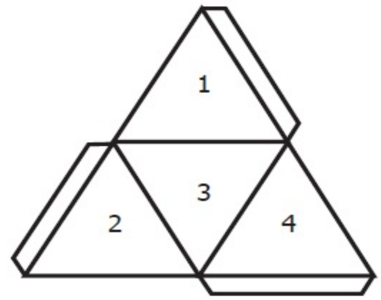


En el anterior cuadro compuesto por los polígonos Q, P, Y, T, W, X y Z, ¿cuáles polígonos son NO convexos?

A. W, X, Y, Z.
B. Q, T, W, Y.
C. P, T, Y, Z.
D. P, T, W, X.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Razonamiento	Espacial - Métrico	Satisfactorio

11. A continuación se presenta el desarrollo plano de un sólido.

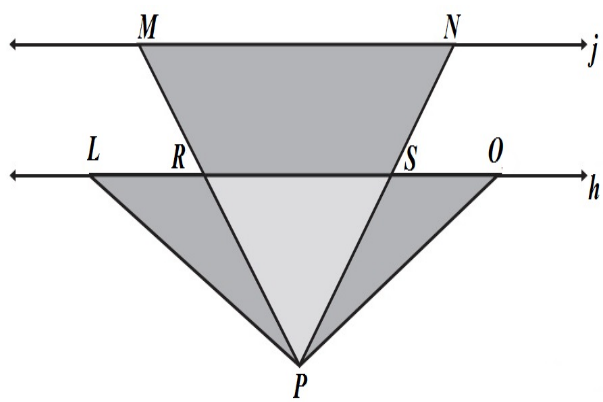


Del sólido que se puede construir con este desarrollo plano, es correcto afirmar que tiene en total

A. 1 vértice.
B. 2 bases.
C. 3 aristas.
D. 4 caras.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Razonamiento	Espacial - Métrico	Mínimo

12. En la figura, las rectas h y j son paralelas, y los triángulos LPR y OPS son congruentes.



Con la información anterior NO es correcto afirmar que

A. $\dfrac{PR}{PM} = \dfrac{PS}{PN}$

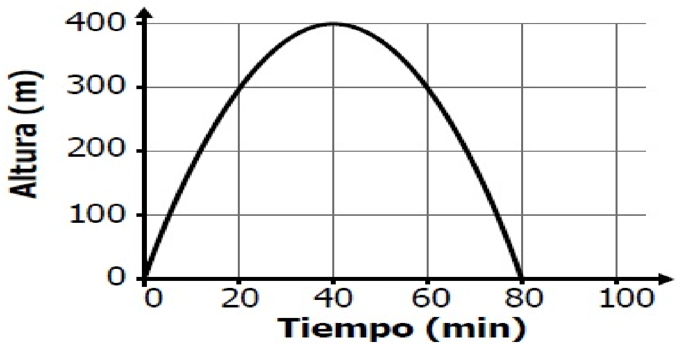
B. $RP = SO$

C. $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{PR}{PS}$

D. $MR = NS$

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Espacial - Métrico	Satisfactorio

13. La gráfica muestra la altura de un globo respecto al tiempo de elevación.



En relación con el globo, es correcto afirmar que

A. alcanza la altura máxima en 400 min.
B. el tiempo que el globo dura volando es 40 min.
C. la altura máxima que alcanza es 40 m.
D. gasta 80 min en hacer todo su recorrido.

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Numérico - Variacional	Satisfactorio

14. Algunos valores de las variables relacionadas x e y se muestran en la tabla.

Variable x	Variable y
4	3
2	6
1.5	8
1.2	10

A partir de los datos de la tabla, es correcto afirmar que

A. las variables x e y son inversamente proporcionales porque los productos obtenidos al multiplicar cada par de valores de x e y son iguales.
B. las variables x e y son inversamente proporcionales porque los valores de y son siempre menores a los de la variable x.
C. las variables x e y son directamente proporcionales porque al aumentar x aumenta y.
D. las variables x e y son directamente proporcionales porque los cociente obtenidos al dividir cada par de valores de x e y son iguales.

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Numérico - Variacional	Avanzado

15. La tabla muestra el costo de impresión por cada hoja en una papelería.

Precio en pesos de cada hoja impresa		
Cantidad	**Blanco y negro**	**Color**
Menos de 80 hojas	\$60	\$120
Entre 80 y 200 hojas	\$50	\$60
Más de 200 hojas	\$30	\$50

Un cliente imprimió x hojas en blanco y negro (B/N) y z hojas en color. Si el precio que pagó se calculó usando la expresión $60x + 50z$, es correcto afirmar, sobre el número de hojas que imprimió que estas son

A. Menos de 80 en B/N y entre 80 y 200 en color.
B. Menos de 80 en B/N y más de 200 en color.
C. Entre 80 y 200 en B/N y más de 200 en color.
D. Entre 80 y 200 en B/N y entre 80 y 200 en color.

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Numérico - Variacional	Avanzado

16. El profesor de matemáticas escribe en el tablero la siguiente serie de números:

Término	1	2	3	4	5	...
Número	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	...

El profesor les pide a sus alumnos que describan la manera como varían los números fraccionarios término a término. Una correcta descripción que podrá realizar un estudiante será:

A. Se duplica el numerador y se triplica el denominador, término a término.
B. Se duplican numerador y denominador, término a término.
C. Se triplican numerador y denominador, término a término.
D. Se suma uno al numerador y seis al denominador, termino a término.

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Numérico - Variacional	Satisfactorio

17. Los siguientes son criterios para determinar si un número es divisible o no por 2 y por 3:

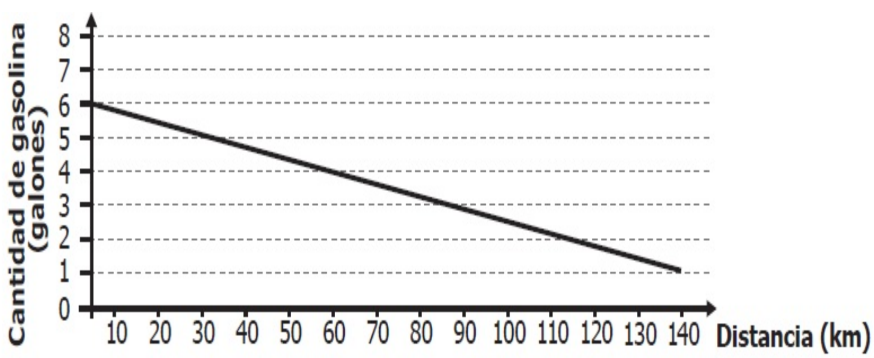
• Un número es divisible por 2 si termina en un número par.
• Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Por ejemplo, 621 es divisible por 3 porque al sumar sus cifras $(6 + 2 + 1)$, el resultado es 9, que es múltiplo de 3.

Ahora, un número es divisible por 6 si cumple las condiciones para que sea divisible por 2 y por 3. Según la información anterior, una razón correcta para determinar si 1.036 será divisible o no por 6 es:

A. No es divisible por 6, ya que tiene dos cifras que no son pares, 1 y 3.
B. Sí es divisible por 6, pues su última cifra es 6 y, por ende, múltiplo de 6.
C. No es divisible por 6, porque la suma de sus cifras es 10, que no es múltiplo de 3.
D. Sí es divisible por 6, porque el último dígito es par y también es múltiplo de 3.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Razonamiento	Numérico - Variacional	Avanzado

18. La gráfica representa la cantidad de galones de gasolina que tiene el tanque de un automóvil, cuando se desplaza entre dos ciudades.



El conductor afirma que el automóvil consumió en total 4 galones de gasolina en este desplazamiento. Esta afirmación es

A. falsa, porque consumió 5 galones en total.
B. falsa, porque consumió 1 galón en total.
C. verdadera, porque inició su recorrido con 4 galones y terminó sin gasolina.
D. verdadera, porque inició su recorrido con 5 galones y terminó con 1 galón.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Razonamiento	Numérico - Variacional	Satisfactorio

19. Un turista pagó un total de 180 dólares en un hotel. La cuenta incluye el costo de tres noches de hospedaje y 75 dólares de alimentación. El siguiente procedimiento permite determinar cuántos dólares pagó el turista, por cada noche de hospedaje.

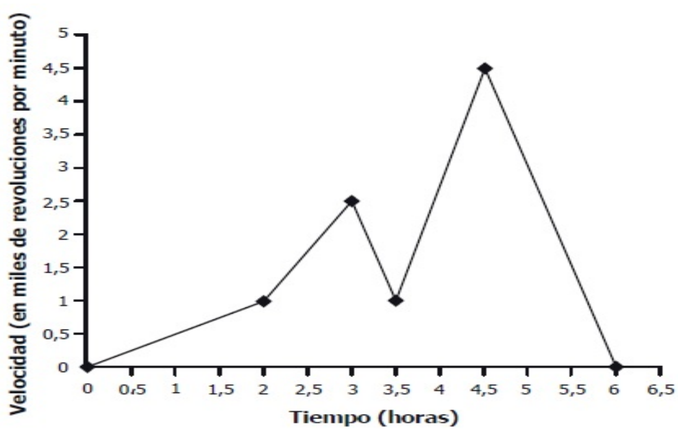
$$3x + 75 = 180$$
$$3x + 75 - 75 = 180 - 75$$
$$3x = 105$$
$$\underline{\qquad\quad}$$
$$x = 35$$

¿Cuál de los siguientes pasos completa correctamente el procedimiento?

A. $3x - 3 = 105 - 3$
B. $3x + 3 = 105 + 3$
C. $3.(3x) = (3),105$
D. $\frac{3x}{3} = \frac{105}{3}$

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Numérico - Variacional	Satisfactorio

20. La siguiente gráfica muestra la relación entre la velocidad de un molino y el tiempo de funcionamiento en un día.

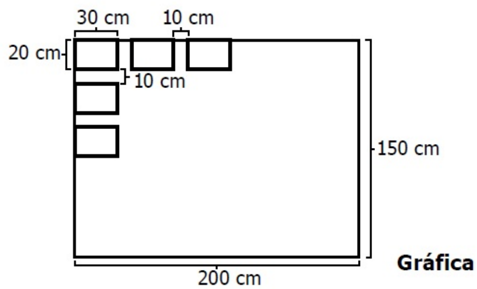


El molino aumentó más rápidamente su velocidad entre

A. la hora 2 y la hora 3
B. la hora 3 y la hora 3,5
C. la hora 3,5 y la hora 4,5
D. la hora 4,5 y la hora 6

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Razonamiento	Numérico - Variacional	Satisfactorio

21. Se requiere cubrir una ventana de 150 cm de ancho por 200 cm de largo con vidrios de 20 cm de ancho por 30 cm de largo. Es necesario dejar separaciones de 10 cm entre vidrio y vidrio, como se observa en la gráfica.



La máxima cantidad de vidrios que se pueden ubicar en la ventana es:

A. 50 vidrios.
B. 35 vidrios.
C. 25 vidrios.
D. 7 vidrios.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Resolución	Espacial - Métrico	Satisfactorio

22. Un hombre tiene plantado en su jardín un árbol de 15 metros de altura que justo a las 4 de la tarde proyecta una sombra de 24 metros de longitud. Debido a que esta sombra no alcanza a cubrir todo el jardín, decide plantar junto a él otro árbol de 10 metros de altura; al otro día, a las 4 de la tarde hace la medición de la sombra del nuevo árbol. El valor obtenido en la medición debe ser

A. 16 metros.
B. 24 metros.
C. 26 metros.
D. 36 metros.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Resolución	Espacial - Métrico	Satisfactorio

23. Un ingeniero tiene a cargo la construcción de 8,5 km de carretera, de la cual ha construido dos tramos de 1,6 km y 5 km, respectivamente. Para determinar la cantidad de kilómetros que faltan por construir, se proponen las siguientes estrategias:

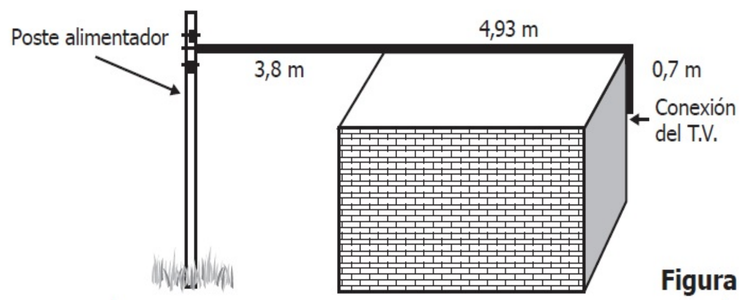
I. Calcular la diferencia entre los dos tramos construidos y restarla de 8,5 km.
II. Sumar las tres cantidades suministradas.
III. Sumar los dos tramos construidos y restar de 8,5 km el resultado.

La opción que contiene la estrategia o estrategias que permiten determinar la cantidad que falta construir es

A. I y III únicamente.
B. II únicamente.
C. I y II únicamente.
D. III únicamente.

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Resolución	Numérico - Variacional	Avanzado

24. Para instalar la televisión por cable en una casa se requiere tender un cable, tensionándolo, desde el poste alimentador hasta la conexión del televisor, como se muestra en la figura.



Aproximadamente ¿cuántos metros de cable se requieren para realizar la conexión?

A. 6 m
B. 7 m
C. 8 m
D. 10 m

Competencia	**Componente**	**Nivel de desempeño**
Resolución	Numérico - Variacional	Avanzado

25. El cajero de un banco tiene al iniciar la jornada \$88.000 en monedas de \$100, \$200 y \$500; se sabe que tiene 110 monedas de \$500.

Si había en total 320 monedas.¿Cuántas monedas de \$100 y \$200, respectivamente, podría tener el cajero?

A. 110 y 150
B. 100 y 200
C. 90 y 120
D. 50 y 50

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Resolución	Numérico - Variacional	Satisfactorio

26. La montaña submarina más alta del mundo está ubicada cerca de Nueva Zelanda. La montaña tiene una altura de 8.690 metros y sobresale 300 metros fuera del agua. Para encontrar la altura sumergida (h) de la montaña, cuatro estudiantes plantearon las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} Laura &: h - 8{,}690 = 300 \\ Alejandro &: 8{,}690 - h = 300 \\ Vanesa &: h + 300 = 8{,}690 \\ Camilo &: h + 8{,}690 = 300 \end{aligned}$$

¿Cuáles estudiantes formularon correctamente las ecuaciones para hallar el valor de h?

A. Alejandro y Vanesa
B. Laura y Vanesa
C. Alejandro y Camilo
D. Laura y Camilo

Competencia	Componente	Nivel de desempeño
Resolución	Numérico - Variacional	Avanzado

16.2. Anexo B: Base de datos con los resultados de la prueba diagnóstica

16.2.1. Resultados de la prueba diagnóstica del grado 904 y 905

GRADO 904																												
PREGUNTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	PUNTAJE	DESEMPEÑO
CLAVE / ESTUDIANTE	B	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	A	B	A	C	A	D	C	C	A	D	D	C	A	100	AVANZADO
1	D	D	C	B	C	A	C	B	B	B	C	A	A	A	A	A	D	C	D	B	C	A	B	C	D	A	42	MÍNIMO
2	A	C	B	A	C	A	C	A	A	D	A	C	B	C	B	A	D	A	B	C	C	B	A	B	C	A	42	MÍNIMO
3	D	D	B	C	C	A	C	B	B	B	D	C	A	A	A	C	D	A	D	B	C	C	D	B	A	B	46	MÍNIMO
4	C	C	B	B	A	A	A	C	B	B	D	B	D	A	A	C	B	D	B	C	C	B	B	A	C	C	46	MÍNIMO
5	A	D	B	C	C	A	B	A	A	D	D	C	D	C	B	B	A	A	C	C	B	D	C	B	C	A	38	INSUFICIENTE
6	A	D	B	C	B	A	C	C	B	B	D	B	D	D	C	B	D	A	D	C	C	B	C	B	D	C	42	MÍNIMO
7	B	D	B	C	B	A	C	C	B	A	C	B	D	D	B	A	A	C	A	D	C	A	C	B	C	A	54	MÍNIMO
8	C	D	B	A	B	C	C	B	B	B	D	A	D	A	B	A	C	A	A	D	A	C	A	D	A	C	50	MÍNIMO
9	A	D	C	C	D	A	C	C	D	B	D	A	B	B	C	A	B	C	A	A	B	D	A	A	B	B	27	INSUFICIENTE
10	B	D	C	C	D	A	C	C	B	D	C	A	D	B	C	A	B	D	C	A	B	A	D	B	C	A	46	MÍNIMO
11	A	B	A	D	A	A	C	C	B	B	D	B	D	C	B	C	A	D	B	B	C	D	C	D	B	B	42	MÍNIMO
12	A	B	B	A	A	A	C	C	B	A	D	D	D	C	B	A	A	C	A	D	C	A	D	A	C	A	54	MÍNIMO
13	A	B	A	D	D	A	C	D	B	C	C	B	A	B	C	B	A	D	B	C	B	C	D	A	C	B	27	INSUFICIENTE
14	A	B	D	B	C	A	C	C	A	D	D	B	D	B	A	C	B	D	B	C	C	B	D	B	A	C	31	INSUFICIENTE
15	A	C	C	A	C	A	C	B	A	B	D	A	D	B	B	A	C	B	D	A	C	A	D	B	C	A	54	MÍNIMO
16	A	D	B	D	C	A	C	A	A	B	D	C	D	C	B	C	D	A	B	C	C	B	A	B	C	A	42	MÍNIMO
17	A	C	B	B	B	A	C	D	B	B	D	A	B	D	B	C	C	A	A	C	C	A	A	A	B	B	42	MÍNIMO
18	A	D	B	A	D	A	C	B	B	B	D	B	D	D	B	A	A	A	B	A	A	D	D	D	A	C	58	MÍNIMO
19	A	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	B	C	B	A	A	C	D	D	D	C	B	A	D	C	D	58	MÍNIMO
20	C	A	A	C	C	A	C	A	B	B	C	D	D	B	D	B	D	C	B	D	A	D	A	A	B	B	15	INSUFICIENTE
21	A	C	B	A	C	A	C	A	A	D	D	C	C	D	D	A	D	A	B	C	B	C	A	D	C	A	38	INSUFICIENTE
22	B	A	B	C	A	D	B	A	B	C	A	B	D	A	B	A	D	C	A	B	D	C	C	B	D	A	35	INSUFICIENTE
23	C	B	B	D	A	A	C	B	A	B	D	B	C	A	A	A	D	D	C	C	B	D	A	C	D	C	35	INSUFICIENTE
24	B	D	C	D	B	A	C	B	B	C	A	D	A	A	D	D	B	A	C	C	A	D	B	C	D	C	31	INSUFICIENTE
25	A	D	B	A	C	A	C	C	D	B	D	C	D	D	B	A	A	A	D	B	A	C	C	B	B	A	54	MÍNIMO
26	B	C	A	C	C	A	C	B	B	B	C	A	D	C	A	B	D	C	B	C	C	D	A	A	B	B	31	INSUFICIENTE
27	C	D	B	A	C	A	C	C	B	B	D	A	D	B	A	A	D	A	C	D	C	B	A	C	B	D	50	MÍNIMO
28	A	B	B	A	C	A	C	D	B	C	A	C	A	C	D	D	B	A	C	C	D	C	C	C	D	C	27	INSUFICIENTE
29	A	D	A	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	C	B	A	C	A	D	A	C	D	D	D	C	D	77	SATISFACTORIO
30	B	C	C	C	D	A	C	C	D	B	D	C	D	C	A	A	A	A	D	A	B	C	D	B	A	C	46	MÍNIMO
31	A	B	B	A	A	A	C	B	A	C	D	B	A	C	C	D	B	C	B	A	D	A	A	C	D	C	27	INSUFICIENTE

Tabla 12: Resultados de la prueba diagnóstica del grado 904

GRADO 905																												
PREGUNTAS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**PUNTAJE**	**DESEMPEÑO**
CLAVE / ESTUDIANTE	**B**	**D**	**B**	**A**	**D**	**A**	**C**	**C**	**B**	**B**	**D**	**B**	**D**	**A**	**B**	**A**	**C**	**A**	**D**	**C**	**C**	**A**	**D**	**D**	**C**	**A**	**100**	**AVANZADO**
1	A	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	D	A	A	A	A	C	C	C	A	A	C	C	A	73	SATISFACTORIO
2	D	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	D	D	A	C	A	D	C	C	A	B	A	C	B	85	AVANZADO
3	D	D	C	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	A	B	A	C	A	D	D	C	A	D	D	C	A	88	AVANZADO
4	B	D	B	A	D	A	C	B	B	B	D	B	D	B	C	A	C	D	A	C	B	A	D	D	C	D	73	SATISFACTORIO
5	D	D	C	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	A	B	A	D	A	D	C	C	A	D	D	C	A	88	AVANZADO
6	A	D	B	A	D	A	C	D	B	B	D	C	D	C	B	A	B	D	A	D	C	B	A	C	A	C	50	MÍNIMO
7	B	C	B	A	D	A	C	C	B	B	C	B	D	D	B	A	C	A	A	D	C	A	B	B	C	B	69	SATISFACTORIO
8	A	A	B	C	D	A	C	D	B	B	D	C	D	C	A	A	C	D	C	D	B	A	B	C	C	D	46	MÍNIMO
9	A	D	B	A	B	C	C	D	D	C	C	D	D	D	D	B	C	A	C	C	C	D	A	C	C	A	42	MÍNIMO
10	B	C	A	D	A	C	C	C	A	B	D	B	D	C	B	C	C	B	C	C	C	B	B	C	A	D	54	MÍNIMO
11	A	C	B	A	C	D	C	C	D	B	C	B	C	A	D	C	A	C	D	A	C	A	B	D	A	A	46	MÍNIMO
12	B	D	B	A	B	A	C	C	B	B	D	B	D	D	B	A	C	D	D	C	B	A	B	A	C	D	73	SATISFACTORIO
13	B	D	D	D	C	A	C	B	B	B	C	B	C	A	C	D	C	C	D	C	C	D	C	C	C	B	50	MÍNIMO
14	A	D	B	A	D	D	C	C	C	A	D	B	B	B	D	A	C	A	D	C	B	D	D	D	A	B	58	MÍNIMO
15	B	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	D	A	B	C	A	D	C	B	A	D	C	C	A	81	AVANZADO
16	A	D	B	A	D	A	C	C	B	B	C	B	D	C	C	A	C	D	B	C	C	A	D	C	B	B	65	MÍNIMO
17	B	D	B	A	C	A	C	B	B	B	B	B	D	B	C	A	C	A	C	C	B	A	D	D	C	A	73	SATISFACTORIO
18	A	D	B	A	C	A	C	C	D	B	D	D	D	A	B	B	C	B	A	C	B	C	B	D	D	D	54	MÍNIMO
19	D	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	A	D	A	B	A	C	A	D	C	C	A	D	D	C	A	92	AVANZADO
20	A	D	B	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	A	B	B	D	A	D	D	C	A	D	D	C	B	81	AVANZADO
21	B	D	A	C	D	A	C	C	B	B	D	B	D	B	B	A	C	A	A	C	B	D	D	A	D	D	65	MÍNIMO
22	A	A	B	A	B	A	B	B	C	B	D	B	D	B	D	C	A	D	C	C	C	C	A	B	C	A	42	MÍNIMO
23	C	C	B	B	D	A	C	A	B	B	D	D	D	A	C	A	B	C	D	C	C	B	D	B	A	A	58	MÍNIMO
24	A	D	C	A	D	A	D	C	D	B	D	C	B	B	C	C	D	A	D	C	B	A	C	B	A	B	42	MÍNIMO
25	A	C	B	A	D	A	C	A	B	B	D	B	D	A	B	C	C	A	C	C	C	A	B	B	C	D	69	SATISFACTORIO
26	A	D	B	A	D	A	C	C	B	B	C	B	D	C	B	A	C	D	B	C	D	A	B	D	C	B	69	SATISFACTORIO
27	A	D	B	A	C	A	B	C	A	B	D	A	D	B	A	A	D	D	C	C	A	B	A	D	C	B	50	MÍNIMO
28	A	D	B	A	C	A	C	C	D	B	D	C	A	C	B	B	A	A	D	D	C	A	A	D	B	C	54	MÍNIMO
29	B	C	A	A	D	A	C	C	B	B	D	B	D	A	B	C	C	B	C	D	A	C	B	A	D	C	54	MÍNIMO
30	A	C	B	A	C	A	C	C	D	B	B	B	D	A	B	C	C	A	D	C	B	A	C	D	C	D	65	MÍNIMO
31	A	C	A	A	C	D	C	C	B	B	C	B	D	A	D	C	C	A	D	C	C	A	D	C	D	B	58	MÍNIMO
32	B	D	B	A	A	A	C	C	B	B	D	B	D	D	B	A	C	A	D	C	C	A	B	A	B	A	81	AVANZADO
33	A	D	A	A	C	A	C	C	B	B	D	A	D	A	C	A	C	B	B	C	B	D	C	A	B	D	50	MÍNIMO

Tabla 13: Resultados de la prueba diagnóstica del grado 905

16.2.2. Base de datos con el análisis de los componentes y niveles de desempeños de la prueba diagnóstica

COMPONENTE: *ESPACIAL - MÉTRICO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
1	18	6	5	2	31	6	25
2	2	7	7	15	31	15	16
3	5	19	6	1	31	19	12
4	11	4	10	6	31	11	20
9	8	20	1	2	31	20	11
10	2	19	5	5	31	19	12
11	4	1	6	20	31	20	11
12	8	11	9	3	31	11	20
21	5	7	16	3	31	16	15
22	6	9	7	9	31	6	25
					SUBTOTAL	143	167

Tabla 14: Base de datos del componente Espacial - Métrico del grado 904

COMPONENTE: *NUMÉRICO - VARIACIONAL*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
5	6	5	7	13	31	13	18
6	29	0	1	1	31	29	2
7	1	2	28	0	31	28	3
8	6	9	13	3	31	13	18
13	6	3	3	19	31	19	12
14	7	8	10	6	31	7	24
15	9	13	5	4	31	13	18
16	17	5	6	3	31	17	14
17	8	7	4	12	31	4	27
18	15	1	8	7	31	15	16
19	6	11	6	8	31	8	23
20	7	5	13	6	31	13	18
23	11	4	8	8	31	8	23
24	7	12	6	6	31	6	25
25	4	8	12	7	31	12	19
26	11	7	10	3	31	11	20
					SUBTOTAL	216	280

Tabla 15: Base de datos del componente Numérico - Variacional del grado 904

NIVEL DE DESEMPEÑO: *MÍNIMO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	CORRECTO	INCORRECTO	TOTAL
6	29	0	1	1	29	2	31
7	1	2	28	0	28	3	31
11	4	1	6	20	20	11	31
				SUBTOTAL	77	16	93

Tabla 16: Base de datos del nivel de desempeño mínimo del grado 904

NIVEL DE DESEMPEÑO: *SATISFACTORIO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	CORRECTO	INCORRECTO	TOTAL
2	2	7	7	15	15	16	31
3	5	19	6	1	19	12	31
8	6	9	13	3	13	18	31
9	8	20	1	2	20	11	31
10	2	19	5	5	19	12	31
12	8	11	9	3	11	20	31
13	6	3	3	19	19	12	31
16	17	5	6	3	17	14	31
18	15	1	8	7	15	16	31
19	6	11	6	8	8	23	31
20	7	5	13	6	13	18	31
21	5	7	16	3	16	15	31
22	6	9	7	9	6	25	31
25	4	8	12	7	12	19	31
				SUBTOTAL	203	231	434

Tabla 17: Base de datos del nivel de desempeño satisfactorio del grado 904

NIVEL DE DESEMPEÑO: *AVANZADO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	CORRECTO	INCORRECTO	TOTAL
1	18	6	5	2	6	25	31
4	11	4	10	6	11	20	31
5	6	5	7	13	13	18	31
14	7	8	10	6	7	24	31
15	9	13	5	4	13	18	31
17	8	7	4	12	4	27	31
23	11	4	8	8	8	23	31
24	7	12	6	6	6	25	31
26	11	7	10	3	11	20	31
				SUBTOTAL	79	200	279

Tabla 18: Base de datos del nivel de desempeño avanzado del grado 904

COMPONENTE: *ESPACIAL -MÉTRICO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
1	19	11	1	4	34	11	23
2	3	0	8	23	34	23	11
3	5	24	4	1	34	24	10
4	29	1	2	2	34	29	5
9	1	24	3	6	34	24	10
10	1	32	1	0	34	32	2
11	1	2	7	24	34	24	10
12	3	24	4	3	34	24	10
21	2	12	19	1	34	19	15
22	22	3	4	5	34	22	12
					SUBTOTAL	232	108

Tabla 19: Base de datos del componente Espacial - Métrico del grado 905

COMPONENTE: *NUMÉRICO - VARIACIONAL*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
5	2	3	9	20	34	20	14
6	30	0	1	3	34	30	4
7	0	1	33	0	34	33	1
8	2	5	24	3	34	24	10
13	1	2	3	28	34	28	6
14	13	7	7	7	34	13	21
15	4	7	7	5	23	7	16
16	19	5	9	1	34	19	15
17	4	2	23	5	34	23	11
18	18	4	3	9	34	18	16
19	6	3	9	16	34	16	18
20	2	0	27	5	34	27	7
23	6	11	5	12	34	12	22
24	7	6	8	13	34	13	21
25	7	4	19	4	34	19	15
26	12	10	4	8	34	12	22
					SUBTOTAL	314	219

Tabla 20: Base de datos del componente Numérico - Variacional del grado 905

NIVEL DE DESEMPEÑO: *MÍNIMO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
6	30	0	1	3	34	30	4
7	0	1	33	0	34	33	1
11	1	2	7	24	34	24	10
					SUBTOTAL	87	15

Tabla 21: Base de datos del nivel de desempeño mínimo del grado 905

NIVEL DE DESEMPEÑO: *SATISFACTORIO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
2	3	0	8	23	34	23	11
3	5	24	4	1	34	24	10
8	2	5	24	3	34	24	10
9	1	24	3	6	34	24	10
10	1	32	1	0	34	32	2
12	3	24	4	3	34	24	10
13	1	2	3	28	34	28	6
16	19	5	9	1	34	19	15
18	18	4	3	9	34	18	16
19	6	3	9	16	34	16	18
20	2	0	27	5	34	27	7
21	2	12	19	1	34	19	15
22	22	3	4	5	34	22	12
25	7	4	19	4	34	19	15
					SUBTOTAL	319	157

Tabla 22: Base de datos del nivel de desempeño satisfactorio del grado 905

NIVEL DE DESEMPEÑO: *AVANZADO*							
PREGUNTA	A	B	C	D	TOTAL	CORRECTO	INCORRECTO
1	19	11	1	4	35	11	24
4	29	1	2	2	34	29	5
5	2	3	9	20	34	20	14
14	13	7	7	7	34	13	21
15	4	7	7	5	23	7	16
17	4	2	23	5	34	23	11
23	6	11	5	12	34	12	22
24	7	6	8	13	34	13	21
26	12	10	4	8	34	12	22
					SUBTOTAL	**140**	**156**

Tabla 23: Base de datos del nivel de desempeño avanzado del grado 905

16.3. Anexo C: Base de datos con los resultados de la evaluación

GRADO 904								
PREGUNTA	1	2	3	4	5	6	7	8
CLAVE ESTUDIATE	D	D	A	A	D	B	51,19 m	451,16 m
1	D	D	A	A	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
2	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
3	D	D	A	A	D	A	CORRECTO	CORRECTO
4	D	D	B	A	D	C	INCORRECTO	INCORRECTO
5	D	D	A	D	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
6	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
7	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
8	D	D	A	D	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
9	D	D	A	A	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
10	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
11	D	D	A	A	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
12	D	D	A	A	D	C	INCORRECTO	INCORRECTO
13	D	D	A	A	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
14	D	D	A	A	D	B	INCORRECTO	INCORRECTO
15	D	D	A	A	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
16	D	D	A	D	D	B	INCORRECTO	INCORRECTO
17	D	D	A	D	D	C	INCORRECTO	INCORRECTO
18	D	D	A	D	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
19	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	CORRECTO
20	D	D	A	A	D	B	CORRECTO	INCORRECTO
21	D	D	A	C	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
22	D	D	A	D	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
23	D	D	A	D	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
24	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	CORRECTO
25	D	D	A	D	D	B	CORRECTO	INCORRECTO
26	D	D	A	A	D	C	INCORRECTO	INCORRECTO
27	D	D	A	D	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
28	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	INCORRECTO
29	D	D	A	D	D	D	CORRECTO	INCORRECTO
30	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	CORRECTO
31	D	D	A	A	D	C	CORRECTO	CORRECTO
32	D	D	A	D	D	A	CORRECTO	INCORRECTO
33	D	D	A	A	D	A	INCORRECTO	INCORRECTO

Tabla 24: Resultados evaluación del grado 904

GRADO 905								
PREGUNTAS	1	2	3	4	5	6	7	8
CLAVE ESTUDIANTE	D	D	A	A	D	B	51,19 m	451,16 m
1	B	B	A	A	D	D	INCORRECTO	INCORRECTO
2	C	D	C	B	A	B	INCORRECTO	INCORRECTO
3	B	B	A	A	D	D	INCORRECTO	INCORRECTO
4	C	D	D	B	B	C	INCORRECTO	INCORRECTO
5	C	C	A	A	A	D	INCORRECTO	INCORRECTO
6	D	B	A	B	A	B	INCORRECTO	INCORRECTO
7	B	A	C	A	C	B	INCORRECTO	INCORRECTO
8	B	D	C	A	C	D	INCORRECTO	INCORRECTO
9	C	A	C	C	C	D	INCORRECTO	INCORRECTO
10	C	D	A	B	A	C	INCORRECTO	INCORRECTO
11	C	A	A	B	A	C	INCORRECTO	INCORRECTO
12	C	C	D	D	D	D	INCORRECTO	INCORRECTO
13	D	C	C	C	D	C	INCORRECTO	INCORRECTO
14	C	B	B	A	B	A	INCORRECTO	INCORRECTO
15	C	D	C	B	D	B	INCORRECTO	INCORRECTO
16	C	C	C	B	A	D	INCORRECTO	INCORRECTO
17	D	B	C	D	D	B	INCORRECTO	INCORRECTO
18	C	D	C	A	A	A	INCORRECTO	INCORRECTO
19	C	B	C	A	C	D	INCORRECTO	INCORRECTO
20	D	B	B	A	C	C	INCORRECTO	INCORRECTO
21	B	A	C	B	C	D	INCORRECTO	INCORRECTO
22	C	D	C	B	A	B	INCORRECTO	INCORRECTO
23	C	D	D	B	B	C	INCORRECTO	INCORRECTO
24	C	D	C	B	A	B	INCORRECTO	INCORRECTO
25	D	B	D	C	A	C	INCORRECTO	INCORRECTO
26	B	B	A	A	A	D	INCORRECTO	INCORRECTO
27	D	D	D	A	B	A	INCORRECTO	INCORRECTO
28	C	B	C	D	C	D	INCORRECTO	INCORRECTO
29	D	B	D	B	A	C	INCORRECTO	INCORRECTO
30	A	B	C	C	C	A	INCORRECTO	INCORRECTO

Tabla 25: Resultados evaluación del grado 905